Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory

2. Konstrukce topologického prostoru, jehož uzávěry mají předepsané vlastnosti

In: Eduard Čech (author); Josef Novák (author); Miroslav Katětov (author): Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959. pp. 394--400.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402605

2. KONSTRUKCE TOPOLOGICKÉHO PROSTORU, JEHOŽ UZÁVĚRY MAJÍ PŘEDEPSANÉ VLASTNOSTI

Definice **2.1.** Nechť (P, u) je topologický prostor. Nechť ξ je pořadové číslo. Definujme *ξ-tý uzávěr množiny* $X \subset P$ takto:

$$u^0X = X\,; \quad u^1X = uX\,; \quad u^\xi X = u(u^{\xi-1}X),$$

je-li ξ isolované pořadové číslo; $u^\xi X = \bigcup_{0 \leqq \eta < \xi} u^\eta X$, je-li ξ limitní pořadové číslo.

2.1. Nechť ξ je pořadové číslo. Pak (P, u^ξ) je topologický prostor.

Důkaz provedeme transfinitní indukcí. Předpokládejme, že u^η jsou topologie prostoru P pro všecka pořadová čísla $\eta < \alpha$, kde $\alpha \leqq \xi$. Obsahuje-li množina $X \subset P$ nejvýš jeden bod, pak zřejmě nejvýš jeden bod obsahuje rovněž množina $u(u^{\alpha-1}X)$, je-li α isolované, nebo $\bigcup_{\eta<\alpha} u^\eta X$, je-li α limitní pořadové číslo. Jsou-li dále X_1 a X_2 dvě podmnožiny dané množiny P, pak je

$$u^\alpha(X_1 \cup X_2) = u(u^{\alpha-1}X_1 \cup u^{\alpha-1}X_2) = u^\alpha X_1 \cup u^\alpha X_2\,,$$

je-li α isolované, nebo

$$u^\alpha(X_1 \cup X_2) = \bigcup_{\eta<\alpha} u^\eta(X_1 \cup X_2) = \bigcup_{\eta<\alpha} u^\eta X_1 \cup \bigcup_{\eta<\alpha} u^\eta X_2 = u^\alpha X_1 \cup u^\alpha X_2\,,$$

je-li α limitní pořadové číslo.

Podle **T 4.1** je tudíž u^α topologie prostoru P.

Z vlastností topologie u vyplývá, že

$$X \subset uX \subset u^2X \subset \ldots \subset u^\eta X \subset \ldots \tag{1}$$

Definice **2.2.** Nechť je dán topologický prostor (P, u). Každé podmnožině $X \subset P$ přiřaďme nejmenší pořadové číslo $\varphi(X)$ takové, že množina $u^{\varphi(X)}X$ je uzavřená. Nechť $\Phi(P, u)$ je množina všech pořadových čísel $\varphi(X)$, kde X probíhá všecky podmnožiny prostoru P. Zabývejme se otázkou, jaké vlastnosti musí mít množina pořadových čísel H, aby v dané množině P existovala topologie u s vlastností $H = \Phi(P, u)$.

2.2. Topologický prostor (R, v), který není isolovaný, obsahuje neuzavřenou množinu A, jejíž uzávěr vA jest uzavřený. Vskutku, jelikož (R, v) není isolovaný prostor, existuje podle **T 4.7.5** množina $X \subset R$ taková, že $vX \neq X$; zvolme bod $x \in vX - X$ a položme $A = R - (x)$. Zřejmě $A \neq vA = R$.

2.3. Nechť P je nekonečná spočetná množina a nechť H je množina pořadových čísel. Pak existuje v P topologie u taková, že prostor (P, u) není isolovaný a že $H = \Phi(P, u)$, když a jen když jsou splněny tyto tři vlastnosti:

[1] $H \subset S$, kde S značí množinu všech spočetných pořadových čísel.

[2] Pořadová čísla 0 a 1 náležejí do množiny H.

[3] Jsou-li α a β pořadová čísla, jejichž součet $\alpha + \beta$ náleží do H, pak rovněž $\beta \in H$.

Důkaz. Podmínka je nutná. Nechť $\eta \in H$ a nechť $M \subset P$ je podmnožina, pro niž $\varphi(M) = \eta$. Jelikož M je nejvýš spočetná a vzhledem k (1) musí být také pořadové číslo η spočetné. Je tudíž splněna vlastnost [1].

Jelikož celý prostor $P = u^0P$ je uzavřená množina, je $O \in H$. Množina A, jejíž existence byla dokázána v **2.2**, splňuje vztah $u^0A \neq uA = u^2A$, takže $\varphi(A) = 1 \in H$. Proto je splněna vlastnost [2].

Je-li $\xi + \beta \in H$, existuje množina $M \subset P$ s vlastností $u^{\xi+\beta}M = u^{\xi+\beta+1}M$, což lze psát $u^{\beta}(u^{\xi}M) = u^{\beta+1}(u^{\xi}M)$, takže $\varphi(u^{\xi}M) = \beta \in H$. Je tudíž splněna i vlastnost [3].

Podmínka je postačující. Nechť H je množina pořadových čísel splňující podmínky [1], [2], [3]. Uspořádejme prvky množiny H podle velikosti takto: $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\lambda < \ldots$, kde α_λ a λ jsou spočetná pořadová čísla (ne nutně všechna) a $\lambda < \gamma$, při čemž moh $\gamma \leqq \aleph_1$.

Jelikož je splněna podmínka [2], platí $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$. Z toho vyplývá, že $\gamma \geqq 2$.

Sestrojme nyní podmnožiny P_λ, $\lambda < \gamma$ s těmito vlastnostmi:

(2) P_λ je nekonečná podmnožina (spočetné) množiny P.

(3) Pro $\lambda \neq \mu$, $\lambda < \gamma$, $\mu < \gamma$, je průnik $P_\lambda \cap P_\mu$ konečnou množinou.

Takové množiny P_λ existují, i když moh $\gamma = \aleph_1$, jak ukazuje příklad množiny všech racionálních čísel, v níž P_λ značí množiny racionálních čísel, jež tvoří vzrůstající posloupnosti konvergující k reálným číslům, z nichž však žádné dvě nekonvergují k témuž číslu.

Nechť dále pro každé $\xi \leqq \alpha_\lambda$ značí $P_{\lambda\xi}$ podmnožinu množiny P_λ takovou, že

(4) $P_{\lambda 0} \subset P_{\lambda 1} \subset \ldots \subset P_{\lambda\xi} \subset \ldots \subset P_{\lambda\alpha_\lambda}$,

(5) množiny $P_{\lambda\xi}$ a $P_{\lambda,\xi+1} - P_{\lambda\xi}$ jsou nekonečné,

(6) $P_{\lambda\alpha_\lambda} = P_\lambda$ a $P_{\lambda\xi} = \bigcup\limits_{0 \leqq \eta < \xi} P_{\lambda\eta}$ pro limitní ξ.

Položme $P_{\lambda,-1} = \emptyset$ a pro stručnost předpokládejme, že -1 je menší než kterékoliv pořadové číslo.

Pro každou podmnožinu $M \subset P$ a každé pořadové číslo $\lambda < \gamma$ definujme symbol λM jako takové nejmenší pořadové číslo $\xi \leqq \alpha_\lambda$, pro něž množina $M \cap (P_\lambda - P_{\lambda\xi})$ je konečná množina. Jelikož pro $\xi = \alpha_\lambda$ je tento průnik prázdnou, tedy konečnou množinou, pořadové číslo λM existuje a platí vztah

$$-1 \leqq \lambda M \leqq \alpha_\lambda ,$$

při čemž $\lambda M = -1$, když a jen když $M \cap P_\lambda$ je konečná množina. Dokážeme nyní, že

$$\lambda(M \cup N) = \max\{\lambda M, \lambda N\} . \tag{7}$$

Vskutku, z definice pořadového čísla λM a z vlastnosti (4) vyplývá, že $\lambda A \leqq \lambda B$, kdykoli $A \subset B$. Proto $\max\{\lambda M, \lambda N\} \leqq \lambda(M \cup N)$. Na druhé straně, je-li např. $\lambda M \leqq \lambda N$, pak podle (4) je $P_\lambda - P_{\lambda,\lambda M} \supset P_\lambda - P_{\lambda,\lambda N}$, takže množina $(M \cup N) \cap (P_\lambda - P_{\lambda,\lambda N})$ je konečná. Proto také $\lambda(M \cup N) \leqq \max\{\lambda M, \lambda N\}$.

Pro každé pořadové číslo $\lambda < \gamma$ definujme zobrazení $f_\lambda(\xi)$, $-1 \leqq \xi \leqq \alpha_\lambda$ takto:

$$f_\lambda(\xi) = \xi + 1 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq \xi < \alpha_\lambda\,,$$
$$f_\lambda(-1) = -1\,,$$
$$f_\lambda(\alpha_\lambda) = \alpha_\lambda\,.$$

Všechny podmnožiny dané množiny P rozdělíme do dvou navzájem disjunktních tříd. Řekneme, že množina $M \subset P$ patří do prvé třídy, existuje-li konečná posloupnost pořadových čísel $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ taková, že množina $M - \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}$ je konečná. Množina M náleží do druhé třídy, nepatří-li do třídy prvé. Každá konečná množina, zejména prázdná množina a každá množina $P_{\lambda\xi}$ jsou množiny prvé třídy. Naproti tomu je-li moh $\gamma \geqq \aleph_0$, vychází z (2) a (3), že množina P je množinou druhé třídy. Náleží-li množina M do prvé třídy, položme

$$F(M) = \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)}.$$

Dokažme, že množina $F(M)$ je v tomto případě jednoznačně určena. Vskutku, je-li $\bigcup_{j=1}^{m} P_{\mu_j f_{\mu_j}(\mu_j M)}$ druhé vyjádření množiny $F(M)$, pak množina $(M \cap P_{\lambda_i}) - \bigcup_{j=1}^{m} P_{\mu_j}$ je konečná pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Jsou dva možné případy: Buďto je množina $M \cap P_{\lambda_i}$ konečná — a pak je $\lambda_i M = -1$, takže $P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)} = \emptyset$. Nebo $M \cap P_{\lambda_i}$ je nekonečná, takže rovněž $(M \cap P_{\lambda_i}) \cap \bigcup_{j=1}^{m} P_{\mu_j}$ je nekonečnou množinou. Vzhledem k (3) existuje jediný index j, pro nějž průnik $M \cap P_{\lambda_i} \cap P_{\mu_j}$ je nekonečný, takže podle téhož vztahu (3) je $\lambda_i = \mu_j$. Tím je dokázáno, že $\bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)} \subset \subset \bigcup_{j=1}^{m} P_{\mu_j f_{\mu_j}(\mu_j M)}$. Provedeme-li tuto úvahu, zaměnivše indexy λ_i za indexy μ_j a naopak, dostaneme opačnou inklusi. Odtud vyplývá rovnost množin $\bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)} = \bigcup_{j=1}^{m} P_{\mu_j f_{\mu_j}(\mu_j M)}$.

Nyní dokážeme, že pro množiny M a N z prvé třídy platí vztah

$$F(M \cup N) = F(M) \cup F(N)\,. \tag{8}$$

Především je zřejmé, že sjednocení $M \cup N$ náleží do prvé třídy, když a jen když M i N jsou množinami prvé třídy. Jelikož tedy $M \cup N$

náleží do prvé třídy, existují indexy $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ takové, že množina $(M \cup N) - \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}$ je konečná. Proto jsou také její podmnožiny $M - \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}$ a $N - \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}$ konečné, takže $F(M \cup N) = \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i(M \cup N))}$, $F(M) = \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)}$ a $F(N) = \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i N)}$. Odtud vyplývá vztah (8), neboť podle (7) pro každé i platí rovnost $P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i(M \cup N))} = P_{\lambda_i f_{\lambda_i} \max\{\lambda_i M, \lambda_i N\})}$ a podle (4) se snadno zjistí, že $P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\max\{\lambda_i M, \lambda_i N\})} = P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)} \cup P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i N)}$.

Definujme nyní topologii u v množině P takto:
$uM = M \cup F(M)$, patří-li množina M do prvé třídy,
$uM = P$, patří-li množina M do druhé třídy.

Je-li K konečná množina, náleží do prvé třídy a zřejmě je $F(K) = \emptyset$. Proto $u(K) = K$ a zejména $u(\emptyset) = \emptyset$. Z definice dále vychází, že $uP = P$. Zbývá dokázat vztah $u(M \cup N) = uM \cup uN$.

Náleží-li aspoň jedna z množin M, N do druhé třídy, pak náleží rovněž sjednocení $M \cup N$ do druhé třídy a věc je zřejmá. Nechť tedy M a N náleží do prvé třídy. Z (8) vyplývá, že

$$u(M \cup N) = M \cup N \cup F(M \cup N) = M \cup F(M) \cup N \cup F(N) = \\ = uM \cup uN\,.$$

Podle **T 4.1** je tudíž (P, u) topologický prostor.

Poznali jsme, že každá množina $P_{\lambda\xi}$ náleží do prvé třídy. Z (4) a (5) vyplývá, že $\lambda P_{\lambda\xi} = \xi$, takže podle (5) a (6) je

$$uP_{\lambda\xi} = P_{\lambda,\xi+1} \text{ pro } 0 \leqq \xi < \alpha_\lambda \quad \text{a} \quad uP_{\lambda\xi} = P_\lambda \text{ pro } \xi = \alpha_\lambda\,.$$

Nyní dokážeme transfinitní indukcí vztah (9) platný pro $\xi \leqq \alpha_\lambda$:

(9) $\quad u^\eta P_{\lambda\xi} = P_{\lambda,\xi+\eta}$ pro $\xi + \eta \leqq \alpha_\lambda$; $\quad u^\eta P_{\lambda\xi} = P_\lambda$ pro $\xi + \eta \geqq \alpha_\lambda$.

Nechť $\xi \leqq \alpha_\lambda$ je pevné pořadové číslo. Pro $\eta = 0$ je zřejmě vztah (9) splněn. Předpokládejme, že je správný pro všecka pořadová čísla $\zeta < \eta$, při čemž $\xi + \eta \leqq \alpha_\lambda$. Je-li η isolované číslo, je $u^\eta P_{\lambda\xi} = u(u^{\eta-1}P_{\lambda\xi}) = uP_{\lambda,\xi+\eta-1} = P_{\lambda,\xi+\eta}$ pro $\xi + \eta \leqq \alpha_\lambda$, zejména tedy $u^\eta P_{\lambda\xi} = P_{\lambda\alpha_\lambda} = P_\lambda$ pro $\xi + \eta = \alpha_\lambda$, tudíž $u^\eta P_{\lambda\xi} = P_\lambda$ pro $\xi + \eta \geqq \alpha_\lambda$. Je-li η limitní číslo, pak podle (6) je

$$u^\eta P_{\lambda\xi} = \bigcup_{\zeta<\eta} u^\zeta P_{\lambda\xi} = \bigcup_{\zeta<\eta} P_{\lambda,\xi+\zeta} = P_{\lambda,\xi+\eta} \quad \text{pro} \quad \xi + \eta \leqq \alpha_\lambda\,,$$

zejména

$$u^\eta P_{\lambda\xi} = P_\lambda \quad \text{pro} \quad \xi + \eta = \alpha_\lambda\,,$$

takže

$$u^\eta P_{\lambda\xi} = P_\lambda \quad \text{pro} \quad \xi + \eta \geqq \alpha_\lambda\,.$$

Výsledku (9) použijeme nyní k důkazu, že $H = \Phi(P, u)$. Ze vztahů (9) a (5) vyplývá pro $\xi = 0$, $\eta = \alpha_\lambda$, že $u^{\alpha_\lambda} P_{\lambda 0} = P_\lambda = u^{\alpha_\lambda + 1} P_{\lambda 0}$; proto $\varphi(P_{\lambda 0}) = \alpha_\lambda \in H$. Je tudíž $H \subset \Phi(P, u)$. K důkazu $H = \Phi(P, u)$ stačí ukázat, že $\varphi(M) \in H$ pro každou podmnožinu $M \subset P$. Nechť tedy nejprve $uM = u^2M$. Pak je $\varphi(M) = 0$ nebo $\varphi(M) = 1$, takže podle [2] je také $\varphi(M) \in H$. Nechť nyní $uM \neq u^2M$; pak M náleží do prvé třídy, neboť jinak by bylo $uM = P = u^2M$.

Poznamenejme, že z předpokladů $uM \neq u^2M$ a $uM = uL$ vyplývá, že $\varphi(M) = \varphi(L)$. Z těchto předpokladů především vyplývá, že $uL \neq u^2L$. Proto $\varphi(M) > 1$, $\varphi(L) > 1$. Jelikož pak $u^\eta M = u^\eta L$ pro každé $\eta \geqq 1$, platí zejména

$$u^{\varphi(M)} M = u^{\varphi(M)} L \quad \text{a} \quad u^{\varphi(L)} L = u^{\varphi(L)} M\,,$$

odkud vyplývá, že $\varphi(M) = \varphi(L)$.

Jelikož množina M náleží do prvé třídy, existují pořadová čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ taková, že $M - \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}$ je konečná množina. Jelikož $M \cap (P_\lambda - P_{\lambda, \lambda M})$ je konečná množina, vyplývá ze (4), že také množina $M - \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)} = K$ je konečná a platí rovnosti

$$uM = M \cup F(M) = M \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)} = \bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i f_{\lambda_i}(\lambda_i M)} \cup K =$$
$$= u(\bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i, \lambda_i M} \cup K)\,.$$

Označíme-li $\bigcup_{i=1}^{n} P_{\lambda_i, \lambda_i M} \cup K = L$, je podle předešlého odstavce a podle (7):

$$\varphi(M) = \varphi(L) = \max_{1 \leq i \leq n} \varphi(P_{\lambda_i, \lambda_i M})\,,$$

neboť $\varphi(L)$ je zřejmě nejmenší pořadové číslo s vlastností

$$u^{\varphi(L)} L = \bigcup_{i=1}^{n} u^{\varphi(L)} P_{\lambda_i, \lambda_i M} \cup K = \bigcup_{i=1}^{n} u^{\varphi(L)+1} P_{\lambda_i, \lambda_i M} \cup K = u^{\varphi(L)+1} L\,.$$

Abychom dokázali, že $\varphi(M) \in H$, stačí tudíž ukázat, že $\varphi(P_{\lambda_i, \lambda_i M}) \in H$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Dokážeme více, totiž $\varphi(P_{\lambda\xi}) \in H$ pro každé $\lambda < \gamma$ a $\xi \leqq \alpha_\lambda$. Označme $\eta = \varphi(P_{\lambda\xi})$; pak $u^\eta(P_{\lambda\xi})$ je nejmenší uzavřená množina obsahující podmnožinu $P_{\lambda\xi}$. Z definice topologie u vyplývá, že touto uzavřenou množinou je množina P_λ. Podle (9) je $u^\eta P_{\lambda\xi} = P_{\lambda, \xi+\eta} = P_\lambda = P_{\lambda\alpha_\lambda}$. Proto $\xi + \eta = \alpha_\lambda \in H$. Z vlastnosti [3] vyplývá pak, že také $\eta \in H$.

Tím je dokázáno, že $H = \Phi(P, u)$.[3])

[3]) Viz Novák [9].