Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory

1. Regulární F-prostor, na němž je každá spojitá funkce konstantní

In: Eduard Čech (author); Josef Novák (author); Miroslav Katětov (author): Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959. pp. 383--393.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402604

DODATEK I

Konstrukce některých význačných topologických prostorů

JOSEF NOVÁK

1. REGULÁRNÍ $\mathscr{F}$-PROSTOR, NA NĚMŽ JE KAŽDÁ SPOJITÁ FUNKCE KONSTANTNÍ

Definice **1.1.** Nechť (P, v) je topologický prostor. Nechť $x \in P$ a nechť $V(x)$ je libovolné v-okolí bodu x. Označme $V(x) = V^1(x)$. Jsou-li už definovány množiny

$$V^1(x) \subset V^2(x) \subset \ldots \subset V^n(x)\,,$$

z nichž každá následující je okolím předcházející množiny, nechť $V^{n+1}(x)$ jest libovolné v-okolí množiny $V^n(x)$. Množinu

$$U(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n(x)$$

nazveme *modifikovaným okolím* bodu x.

1.1. Modifikovaná okolí bodu $x \in (P, v)$ tvoří definující soustavu okolí bodu x. Topologie u zavedená do P definujícími soustavami modifikovaných okolí je $\mathscr{F}$-modifikací topologie v.

Důkaz. Jsou splněny axiomy (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) (viz **T 4.3.1**).*) Vskutku, pro volbu $V^n(x) = V^{n+1}(x) = P$, $n = 2, 3, \ldots$, vychází $U(x) = P$,

*) Písmenem **T** označen odkaz na vlastní Topologické prostory.

takže soustava není prázdná. Dále je $x \in V^1(x) \subset U(x)$. Je-li bod a různý od x, volme okolí $V^n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, neobsahující bod a. Pak ani modifikované okolí $U(x)$ neobsahuje bod a. Jsou-li konečně $U_i(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_i^n(x)$, $i = 1, 2$, dvě modifikovaná okolí bodu x, pak množina

$$U_3(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_1^n(x) \cap V_2^n(x) \subset U_1(x) \cap U_2(x)$$

jest modifikovaným okolím bodu x, neboť pro každé n platí

$$V_1^n(x) \cap V_2^n(x) \subset V_1^{n+1}(x) \cap V_2^{n+1}(x)\,,$$

při čemž podle **T 4.2.5** množina na pravé straně je v-okolím množiny na levé straně.

Topologii zavedenou do P definujícími soustavami modifikovaných okolí označme u a dokažme, že každé modifikované okolí je u-otevřené. Nechť $y \in U(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n(x)$. Pak existuje index p takový, že $V^{p+1}(x)$ jest v-okolím bodu y. Množina $U(y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} O^n(y)$, kde $O^n(y) = V^{p+n}(x)$, je zřejmě modifikovaným, tedy u-okolím bodu y a platí $U(y) \subset U(x)$. Podle definice **T 4.5.2** a věty **T 4.5.6** je (P, u) topologickým F-prostorem.

Jelikož $V(x) = V^1(x) \subset U(x)$, jest podle **T 4.2.4** a **T 4.2.12** topologie u hrubší než topologie v. Je-li $V(x)$ v-otevřené okolí bodu x, volme $V^n(x) = V(x)$, $n = 1, 2, \ldots$; pak podle **T 4.4.12** jest $V(x) = U(x)$ modifikované okolí, jež jest u-otevřené. Odtud vyplývá, že každá v-uzavřená množina je u-uzavřená. Jelikož topologie u je hrubší než v, z **T 4.5.13** vychází, že platí také opak. Z definice **T 4.5.4** pak vychází, že topologie u je F-modifikací topologie v.

Definice **1.2.** Nechť A a B jsou dvě bodové množiny o nespočetných mohutnostech $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a nechť jsou dány dva pevné body $a \in A$, $b \in B$. Definujme soustavu $\Lambda(A)$ posloupností $\{x_n\}$ a těmto posloupnostem přiřaďme jednoznačně prvky $\lambda x_n \in A$ podle tohoto předpisu:

$\{x_n\} \in \Lambda(A)$, jestliže $x_n = x$ pro všecka n, a potom položme $\lambda x_n = x$, nebo jestliže $x_n \neq x_m$ pro $n \neq m$; v tomto druhém případě definujme $\lambda x_n = a$. Podobně definujeme soustavu $\Lambda(B)$ posloupností bodů $x_n \in B$; je-li taková posloupnost prostá, pak $\lambda x_n = b$.

Označme dále $Q = A \times B - (a, b)$ a definujme soustavu $\Lambda(Q)$ posloupností bodů $(x_n, y_n) \in Q$ takto:

$$\{(x_n, y_n)\} \in \Lambda(Q) \quad \text{a} \quad \lambda(x_n, y_n) = (x, y)\,,$$

jestliže buďto $\lambda x_n \in A$ a současně $y_n = y$ pro všecka n, nebo $\lambda y_n \in B$ a $x_n = x$ pro všecka n.

Z definice **1.2** je patrné, že jsou při tom splněny axiomy (IL) a (IIL) věty **T 6.3.12**, takže podle téže věty existují L-prostory (A, v), (B, v) a (Q, v), v nichž posloupnosti z odpovídajících soustav Λ jsou konvergentní. Je-li zejména posloupnost bodů $(x_n, y_n) \in Q$ prostá a současně $y_n = y \neq b$ pro všecka n, jest $\lim (x_n, y_n) = (a, y)$, kdežto pro $x_n = x \neq a$ pro všecka n jest $\lim (x_n, y_n) = (x, b)$. Připomeňme ještě, že podle **T 7.1.6** reálná funkce $f(z)$, $z \in Q$, je spojitá, když a jen když pro každý bod $z \in Q$ platí $\lim f(z_n) = f(z)$, kdykoliv $\lim z_n = z$.

1.2. Je-li $f(y)$, $y \in (B, v)$, spojitá funkce, pak $f(y) = f(b)$ pro všecky body $y \in B - S$, kde S je nejvýš spočetná podmnožina v B.

Dokažme nejprve, že množina hodnot $f^1(B)$ je nejvýš spočetná. Kdyby byla nespočetná, existovaly by v $f^1(B)$ dvě různé prosté posloupnosti čísel $f(t_n)$ a $f(u_n)$, $t_n \in B$, $u_n \in B$, konvergující ke dvěma různým číslům. Posloupnosti bodů $\{t_n\}$ a $\{u_n\}$ jsou rovněž prosté, takže $\lim t_n = \lim u_n = b$. Ze spojitosti funkce f v L-prostoru (B, v) pak vyplývá, že $\lim f(t_n) = \lim f(u_n)$, a to je spor.

Množina $f^1(B)$ je tedy nejvýš spočetná. Jelikož B je nespočetná množina a funkce $f(y)$ je spojitá, existuje právě jedno číslo $c \in f^1(B)$ takové, že $f(y) = c$ pro nekonečně mnoho bodů $y \in B$. Zřejmě $c = f(b)$. Stačí tudíž položit $S = f^{-1}(f^1(B) - f^1(b))$.

1.3. Nechť $f(z)$, $z \in (Q, v)$ je spojitá funkce v oboru $Q = A \times B - (a, b)$. Pak existují podmnožiny $A^* \subset A$, $B^* \subset B$ takové, že $a \in A^*$, $b \in B^*$, moh $(A - A^*) \leqq \aleph_0$, moh $(B - B^*) \leqq \mathfrak{a}$, a takové, že $f(z) = c$ pro každý bod $z \in Q^* = A^* \times B^* - (a, b)$.

Důkaz. Je-li $x_0 \in A$, $x_0 \neq a$, pak množina bodů (x_0, y), $y \in B$, je homeomorfní s prostorem (B, v). Podle **1.2** platí rovnost $f(x_0, y) = f(x_0, b)$ s výjimkou nejvýš spočetné podmnožiny množiny B. Množina $B - B^*$ souřadnic $y \in B$, k nimž existují souřadnice x s $f(x, y) \neq$

$\neq f(x, b)$, má tudíž podle **T 3.7.10** nejvýš mohutnost $\mathfrak{a}$. Proto $f(x, y) = f(x, b)$ pro všecky body (x, y), $x \neq a$, $y \in B^*$. Zřejmě $b \in B^*$.

Zvolme nyní $y_0 \in B^* - b$. Podle **1.2** existuje podmnožina $A^* \subset A$ taková, že moh $(A - A^*) \leqq \aleph_0$, $a \in A^*$, a že $f(x, y_0) = f(a, y_0)$ pro všecka $x \in A^*$. Zvolme dále pevný bod $x_0 \in A^* - a$. Pak je $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ pro každý bod $(x, y) \in Q^*$. Vskutku, je-li $(x_1, y_1) \in Q^*$, pak platí $f(x_0, y_0) = f(x, y_0) = f(x, y_1)$ pro všecka $x \in A^* - a$. Proto $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, je-li $x_1 \neq a$. Z věty **1.2** pak vyplývá, že tato rovnost platí i pro $x_1 = a$.

Nechť A a B jsou dvě bodové množiny o nespočetných mohutnostech $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. Prvky množiny A budeme značit symbolem α a prvky množiny B symbolem β nebo γ. Zvolíme dva význačné prvky $\alpha^* \in A$ a $\beta^* \in B$. Nechť $A \times B \times N \times B$ je kartézský součin, jehož prvky jsou čtveřice $z = (\alpha, \beta, n, \gamma)$, kde $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $n \in N$ a $\gamma \in B$, při čemž N značí množinu všech přirozených čísel.

Množinu všech bodů $(\alpha, \beta, n, \gamma_0)$ při pevném $\gamma_0 \in B$ označíme $\mathscr{E}(\alpha, \beta, n, \gamma_0)$ a nazveme ji svazkem (γ_0). Podobně množinu $\mathscr{E}(\alpha, \beta, n_0, \gamma_0)$ nazveme listem (n_0) ve svazku (γ_0); množinu $\mathscr{E}(\alpha, \beta_0, n_0, \gamma_0)$ nazveme řádkem (β_0) a $\mathscr{E}(\alpha_0, \beta, n_0, \gamma_0)$ nazveme sloupcem (α_0) listu (n_0) ve svazku (γ_0). Množinu $\mathscr{E}(\alpha, \beta^*, n_0, \gamma_0)$ čili řádek (β^*) nazveme význačným řádkem a podobně sloupec (α^*) nazveme význačným sloupcem.

V kartézském součinu $A \times B \times N \times B$ provedeme nyní trojí identifikaci prvků.

Identifikace I (Tichonovova):[1])

$$(\alpha, \beta^*, n, \gamma) \equiv (\alpha, \beta^*, n + 1, \gamma) \text{ pro lichá } n\,.$$

Identifikace II (Tichonovova):[1])

$$(\alpha^*, \beta, n, \gamma) \equiv (\alpha^*, \beta, n + 1, \gamma) \text{ pro sudá } n\,.$$

Identifikace III

$$(\alpha^*, \beta, 1, \gamma) \equiv (\alpha^*, \beta, 1, \gamma') \text{ pro všecka } \gamma \in B,\ \gamma' \in B\,.$$

Odstraníme-li po těchto identifikacích z kartézského součinu $A \times B \times N \times B$ všechny body tvaru $(\alpha^*, \beta^*, n, \gamma)$, $n \in N$, $\gamma \in B$, dostaneme množinu P. Označení řádek, sloupec, list a svazek v množi-

---

[1]) Viz Tichonov [2]; viz v této knize cvičení **T 8.5.14**.

ně P ponecháme. Do množiny P zavedeme L-topologii v pomocí soustavy $\Lambda(P)$ posloupností bodů $z_n \in P$. Nejdříve však zavedeme L-topologii do význačného řádku $\mathscr{E}(\alpha, \beta^*, n_0, \gamma_0)$, jehož mohutnost je $\mathfrak{a}$, a do význačného sloupce $\mathscr{E}(\alpha^*, \beta, n_0, \gamma_0)$ listu (n_0) ve svazku (γ_0) kartézského součinu $A \times B \times N \times B$ tak, jak jsme to učinili dříve v množinách A a B (viz definici **1.2**). Podle toho je jediným hromadným bodem význačného řádku (β^*) bod $(\alpha^*, \beta^*, n_0, \gamma_0)$, který je rovněž jediným hromadným bodem význačného sloupce (α^*). Jelikož

$$\mathscr{E}(\alpha, \beta, n_0, \gamma_0) = \mathscr{E}(\alpha, \beta^*, n_0, \gamma_0) \times \mathscr{E}(\alpha^*, \beta, n_0, \gamma_0),$$

můžeme do množiny $\mathscr{E}(\alpha, \beta, n_0, \gamma_0) - (\alpha^*, \beta^*, n_0, \gamma_0) \subset P$ zavést L-topologii tak, jak jsme to dříve učinili v množině $Q = A \times B - (a, b)$ (viz definici **1.2.**) Učiňme tak v každém listu (n_0) každého svazku (γ_0) množiny P. Tím dostaneme topologický L-prostor (P, v').

Východiskem naší konstrukce však bude jiný prostor; ten povstane změnou topologie v' prostoru (P, v'). Za tím účelem poznamenejme, že každý bod $z = (\alpha, \beta, n, \gamma) \in P$, kde $\alpha \neq \alpha^*$ a současně $\beta \neq \beta^*$ je isolovaný v prostoru (P, v'). Množinu všech těchto isolovaných bodů označíme

$$I = \mathscr{E}[(\alpha, \beta, n, \gamma) \in P,\ \alpha \neq \alpha^*,\ \beta \neq \beta^*].$$

Zřejmě $v'I = P$. Jelikož moh $N <$ moh $A <$ moh $B = \mathfrak{b}$, platí podle **T 3.7.9**: moh $I =$ moh $B = \mathfrak{b}$; existuje tedy podle **T 2.3** prosté zobrazení $\varphi(z)$, $z \in I$, množiny I na množinu B. Posloupnost bodů $z_n \in P$ zařadíme do soustavy Λ, jestliže buďto je konvergentní v prostoru (P, v') s limitním bodem $z \in P$ — v tomto případě položíme $\lambda z_n = z$ — nebo jestliže $z_n = (\alpha_n, \beta_n, k_n, \varphi(z))$, kde $\alpha_n \in A$, $\beta_n \in B$, $(\alpha_n, \beta_n) \neq (\alpha^*, \beta^*)$ a $k_n \neq k_m$ pro $n \neq m$. V tomto případě bude $\lambda(\alpha_n, \beta_n, k_n, \varphi(z)) = z$. Snadno se přesvědčíme, že axiomy (IL) a (IIL) z **T 6.3.12** jsou splněny, takže podle téže věty existuje L-prostor (P, v), v němž jsou všechny posloupnosti ze soustavy Λ konvergentní. Jelikož každá v'-konvergentní posloupnost je v-konvergentní s týmž limitním bodem, je podle **T 6.3.19** L-topologie v' jemnější než L-topologie v.

1.4. Nechť funkce $f(z)$, $z \in P$, je spojitá v oboru (P, v). Pak se dá každému svazku (γ_0) přiřadit reálné číslo $k(\gamma_0)$ takové, že

$f(z) = k(\gamma_0)$ pro všecky body $z \in \mathscr{E}_{\beta,n}(\alpha^*, \beta, n, \gamma_0)$ s výjimkou množiny bodů mohutnosti $\leqq \mathfrak{a}$.

Vskutku pro $n = 1$ vyplývá tvrzení z **1.3**, neboť každý list (n) je homeomorfní s prostorem (Q, v). Předpokládejme, že tvrzení v **1.4** je správné pro n. Je-li n sudé, pak z Tichonovovy identifikace II vyplývá, že oba význačné slouce (α^*) v listech (n) a $(n + 1)$ jsou identické, takže **1.4** zůstává správné i pro $n + 1$. Je-li n liché, uvažme, že z **1.3** vyplývá existence konstanty c takové, že $f(z) = c$ pro všecky body význačného sloupce $\mathscr{E}(\alpha^*, \beta, n + 1, \gamma_0) \subset P$ s výjimkou množiny bodů mohutnosti $\leqq \mathfrak{a}$ a také pro všecky body význačného řádku $\mathscr{E}(\alpha, \beta^*, n + 1, \gamma_0) \subset \subset P$ s výjimkou množiny bodů mohutnosti nejvýš spočetné.

Z téhož důvodu a podle indukčního předpokladu jest $f(z) = k(\gamma_0)$ pro všecky body $z \in \mathscr{E}_{\beta}(\alpha^*, \beta, n, \gamma_0) \subset P$ s výjimkou množiny bodů mohutnosti $\leqq \mathfrak{a}$ a také pro všecky body $z \in \mathscr{E}_{\alpha}(\alpha, \beta^*, n, \gamma_0)$ s výjimkou množiny bodů mohutnosti $\leqq \aleph_0$.

Z Tichonovovy identifikace I pak vyplývá, že $\mathscr{E}(\alpha, \beta^*, n + 1, \gamma_0) \equiv \equiv \mathscr{E}(\alpha, \beta^*, n, \gamma_0)$, takže $c = k(\gamma_0)$.

1.5. Nechť funkce $f(z)$, $z \in P$, je spojitá v prostoru (P, v). Pak existuje reálné číslo k takové, že $f(z) = k$ pro všecka $z \in P$.

Důkaz. Je-li $\gamma_1 \in B$, $\gamma_2 \in B$, pak z **1.4** vyplývá, že $f(z) = k(\gamma_1)$ pro $z \in \mathscr{E}_{\beta}(\alpha^*, \beta, n, \gamma_1)$ a $f(z) = k(\gamma_2)$ pro $z \in \mathscr{E}_{\beta}(\alpha^*, \beta, n, \gamma_2)$ s výjimkou množin bodů mohutnosti $\leqq \mathfrak{a}$, a to pro každé $n = 1, 2, \ldots$ Z identifikace III však vyplývá, že $k(\gamma_1) = k(\gamma_2)$. Označme toto společné číslo písmenem k.

Nechť nejprve $z \in I \subset P$. Podle toho, co jsme právě dokázali, existují prvky $\beta_n \in B - \beta^*$ takové, že $f(\alpha^*, \beta_n, n, \varphi(z)) = k$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Protože $f(z)$ je spojitá funkce a jelikož $\lim_n (\alpha^*, \beta_n, n, \varphi(z)) = z$, platí $\lim_n f(\alpha^*, \beta_n, n, \varphi(z)) = f(z)$; proto $f(z) = k$. Jelikož topologie v' je jemnější než v a platí $v'I = P$, je podle **T 4.1** $vI = P$. Odtud vyplývá, že také $f(z) = k$ pro $z \in P - I$.

Definice **1.3.** Je-li za prvé $z_0 \in I \subset P$ budeme rozumět *p-tým* ($p \geqq 1$) *okolím* bodu z_0 v prostoru (P, v) množinu

$$D(z_0, p) = z_0 \cup \bigcup_{n \geqq 2p} [\mathscr{E}(\alpha, \beta, n, \varphi(z_0)) -$$
$$- \mathscr{E}(\alpha, \beta^*, 2p, \varphi(z_0))] , \quad (\alpha, \beta) \neq (\alpha^*, \beta^*) ,$$

kterou budeme také mnohdy značit $D(z_0)$.

Je-li za druhé $z_0 \in P - I$, $z_0 \neq (\alpha^*, \beta_0, 1, \gamma_0)$, pak je buďto $z_0 = (\alpha^*, \beta_0, n_0, \gamma_0)$, $\beta_0 \neq \beta^*$, $n_0 \neq 1$, nebo $z_0 = (\alpha_0, \beta^*, n, \gamma_0)$, $\alpha_0 \neq \alpha^*$. V tomto případě z Tichonovových identifikací II a I vyplývá, že sjednocení dvou řádků (β_0) ve dvou sousedních listech nebo sjednocení dvou sloupců (α_0) ve dvou sousedních listech je v-okolím bodu z_0. Písmenem $D(z_0)$ označíme pak každé v-okolí bodu z_0, jež je částí prvého nebo druhého sjednocení.

Je-li za třetí $z_0 = (\alpha^*, \beta_0, 1, \gamma_0)$, $\beta_0 \neq \beta^*$, pak vyplývá z identifikace III, že sjednocení řádků (β_0) v prvém listu (1) každého svazku (γ) je v-okolím bodu z_0. V tomto případě budeme symbolem $D(z_0)$ rozumět každé v-okolí bodu z_0, jež je částí tohoto sjednocení.

1.6. Množiny $D(z_0)$ tvoří úplnou soustavu okolí bodu z_0 v prostoru (P, v). Pro $z_0 \in I$ platí $v(vD(z_0)) = vD(z_0)$ a pro $z_0 \in P - I$ je $vD(z_0) = D(z_0)$.

Předpokládejme nejdříve, že $z_0 \in I$. Pak $D(z_0; p)$ je vskutku v-okolím bodu z_0, neboť kdyby $z_0 \in v(P - D(z_0, p))$, existovala by posloupnost bodů $z_k \in P - D(z_0, p)$, $\{z_k\} \in \Lambda$ s vlastností $\lambda(z_k) = z_0$ (viz definici uzávěru uM v důkazu věty **T 6.3.12**), což je nemožné, neboť $\{z_k\} \in \Lambda$, takže $z_k \in D(z_0, p)$ pro skoro všecka k.

Kdyby okolí $D(z_0, p)$, $p = 1, 2, \ldots$ netvořila úplnou soustavu okolí bodu $z_0 \in I$, existovalo by podle definice **T 4.3.1** v-okolí $U(z_0)$ bodu z_0 a posloupnost bodů $z_k \in \mathscr{E}_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta, n_k, \varphi(z_0)) - U(z_0)$, kde $n_1 < n_2 < \ldots$ Podle definice je pak $\lim_k z_k = z_0$, takže $z_k \in U(z_0)$ pro skoro všecka k, což je spor.

Zřejmě pro $z_0 \in I$ platí

$$vD(z_0, p) = z_0 \cup \bigcup_{\substack{n \geqq 2p \\ (\alpha,\beta) \neq (\alpha^*,\beta^*)}} \mathscr{E}(\alpha, \beta, n, \varphi(z_0)) , \tag{1}$$

neboť každý bod z, který náleží do množiny $vD(z_0, p) - D(z_0, p)$, je tvaru $(\alpha, \beta^*, 2p, \varphi(z_0))$, $\alpha \neq \alpha^*$. Odtud také vyplývá, že $v\,(vD(z_0, p)) = vD(z_0, p)$.

Nechť nyní $z_0 \in P - I$. Pak všechna $D(z_0)$ tvoří úplnou soustavu okolí bodu z_0 podle **T 4.3.6** (kde je třeba za $\mathfrak{U}$ položit soustavu všech u-okolí bodu $z_0 \in P$). V tomto případě je jediným hromadným bodem okolí $D(z_0)$ bod z_0 sám; proto $vD(z_0) = D(z_0)$.

1.7. Okolí $D(z_0)$ jest okolím každého svého hromadného bodu.

Důkaz. Označme tento hromadný bod $z' \in D(z_0)$. Je-li $z_0 = z'$, je věc zřejmá. Tento případ nastane zejména, je-li $z_0 \in P - I$, neboť v tomto případě existuje v $D(z_0)$ jediný hromadný bod, totiž bod z_0. Pro $z_0 \in I$ obsahuje okolí $D(z_0, p)$ hromadné body dvojího druhu, jež jsou $\neq z_0$. Buďto pro vhodné $\beta \neq \beta^*$ a vhodné $n_0 \geqq 2p$ je $z' = (\alpha^*, \beta, n_0, \varphi(z_0))$ nebo pro vhodné $\alpha \neq \alpha^*$ a $n_0 > 2p$ je $z' = (\alpha, \beta^*, n_0, \varphi(z_0))$. V prvém případě je vzhledem k identifikaci II

$$U(z') = \mathop{\mathscr{E}}_{\beta \neq \beta^*} (\alpha^*, \beta, n_0, \varphi(z_0)) \cup \mathop{\mathscr{E}}_{\beta \neq \beta^*} (\alpha^*, \beta, n_0 \pm 1, \varphi(z_0)) \subset D(z_0)\,,$$

kde znamení $+$ platí pro sudé $n_0 \geqq 2p$ a znamení $-$ platí pro liché $n_0 \geqq 2p$ a ve druhém případě je vzhledem k identifikaci I

$$U(z') = \mathop{\mathscr{E}}_{\alpha \neq \alpha^*} (\alpha, \beta^*, n_0, \varphi(z_0)) \cup \mathop{\mathscr{E}}_{\alpha \neq \alpha^*} (\alpha, \beta^*, n_0 \pm 1, \varphi(z_0)) \subset D(z_0)\,,$$

kde znamení $+$ platí pro liché $n_0 > 2p$ a znamení $-$ pro sudé $n_0 > 2p$. Vzhledem k **T 4.2.4** je tím důkaz věty proveden.

1.8. Prostor (P, v) je regulární.

Nechť $V(z)$ je libovolné v-okolí bodu $z \in P$. Je-li $z \in P - I$, pak podle **1.6** existuje okolí $D(z) \subset V(z)$ s vlastností $vD(z) = D(z)$. Je-li $z \in I$, pak existuje přirozené číslo $p \geqq 1$ tak, že $D(z, p) \subset U(z)$. Zřejmě $vD(z, p + 1) \subset D(z, p)$, takže $vD(z, p + 1) \subset V(z)$.

Proveďme nyní F-modifikaci v topologickém prostoru (P, v) podle definice **1.1.** Tím dostaneme podle věty **1.1** F-prostor (P, u), jehož topologie u je hrubší než topologie v.

1.9. Prostor (P, u) je regulárním F-prostorem. Každá spojitá funkce $f(z)$, $z \in (P, u)$, je konstantní.

Důkaz. Je-li $f(z)$, $z \in P$, spojitá funkce v prostoru (P, u), je podle **T 7.1.16** také spojitou funkcí v prostoru (P, v) s jemnější topologií v, takže podle **1.5** je $f(z)$ konstantní.

Zbývá dokázat, že (P, u) je regulárním prostorem. Nechť tedy $a \in P$ a nechť $O(a)$ je libovolné u-okolí bodu a. Podle definice **1.1** a věty **1.1** existuje modifikované u-okolí $U(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n(a)$ bodu a takové, že $U(a) \subset \subset O(a)$, kde $V^n(a)$ mají stejný význam jako v definici **1.1**. S použitím metody úplné indukce, sestrojíme nyní u-okolí $W(a)$ bodu a takové, že $uW(a) \subset U(a)$. Podle **1.8** a **1.6** existuje v-okolí $D(a)$ bodu a takové, že $vD(a) \subset V^1(a)$. Položme $D(a) = H^1(a)$ a definujme úplnou indukcí množiny $H^n(a)$ takto: Máme-li už definovány množiny $H^1(a) \subset H^2(a) \subset \subset \ldots \subset H^n(a)$ s vlastností

$$H^i(a) = \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{y \in I_{j-1}} D(y) \subset \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{y \in I_{j-1}} vD(y) \subset V^i(a) \tag{2}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$, při čemž $I_0 = H^0(a) = a$, kdežto $I_j = I \cap \cap (H^j(a) - H^{j-1}(a))$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, budeme definovat množinu $H^{n+1}(a)$ takto: Podle (2) platí pro $i = n$ vztah $H^n(a) \subset V^n(a)$. Okolí $V^{n+1}(a)$ množiny $V^n(a)$ je také okolím podmnožiny $H^n(a)$; podle **1.6** a **1.8** existuje pro každý bod $y \in I_n \subset H^n(a)$ v-okolí $D(y)$ s vlastností

$$D(y) \subset vD(y) \subset V^{n+1}(a),$$

tedy

$$\bigcup_{y \in I_n} vD(y) \subset V^{n+1}(a).$$

Položme

$$H^{n+1}(a) = H^n(a) \cup \bigcup_{y \in I_n} D(y),$$

takže $H^n(a) \subset H^{n+1}(a)$. Odtud a z (2) vyplývá, že

$$H^{n+1}(a) = \bigcup_{j=1}^{n+1} \bigcup_{y \in I_{j-1}} D(y) \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} \bigcup_{y \in I_{j-1}} vD(y) \subset V^n(a) \cup V^{n+1}(a) = V^{n+1}(a).$$

Platí tedy (2) také pro $i = n + 1$. Máme-li definovány množiny $H^n(a)$, položme

$$W(a) = \bigcup_{n=0}^{\infty} H^n(a) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{y \in I_{j-1}} D(y).$$

Množina $W(a)$ je v-otevřená v prostoru (P, v). Vskutku, nechť $z \in W(a)$, $z \neq a$. Pak existuje nejmenší index $p > 0$ tak, že $z \in (H^p(a) -$

$- H^{p-1}(a))$; existuje tudíž bod $y_0 \in I_{p-1}$ tak, že $z \in D(y_0) \subset H^p(a)$. Je-li z hromadným bodem množiny $D(y_0)$, pak podle **1.7** je $D(y_0)$ v-okolím bodu y_0 a podle **T 4.2.4** také množina $W(a)$ je v-okolím bodu y_0. Není-li z hromadným bodem okolí $D(y_0)$, jest $z \neq y_0$ a z definice **1.3** vyplývá, že $z \in J \cap (H^p(a) - H^{p-1}(a)) = I_p$. Proto existuje v-okolí $D(z) \subset H^{p+1}(a) \subset W(a)$, takže $W(a)$ jest opět v-okolím bodu z. Podle **T 4.4.12** $W(a)$ je v-otevřenou množinou. Podle definice F-modifikace u (viz definice **T 4.5.4**) je množina $W(a)$ také u-otevřená. $W(a)$ je tudíž u-okolím bodu a. Dokažme nyní, že platí vztah

$$vW^*(a) = W^*(a)\,, \quad \text{kde} \quad W^*(a) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{y \in I_{j-1}} vD(y)\,.$$

Vskutku, nechť $x = \lambda x_m$, kde $x_m \in W^*(a)$. Máme dokázat, že $x \in W^*(a)$. Rozeznávejme dva případy:

I. Existuje množina $vD(y)$ ve sjednocení $\bigcup_{y \in I_{j-1}} vD(y) \subset W^*(a)$, obsahující body x_{m_i} vybrané posloupnosti. Podle **1.6** je tato množina uzavřená, takže $\lambda x_{m_i} = \lambda x_m = x \in vD(y)$, tj. $x \in W^*(a)$.

II. Nenastane případ I. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $x_m \in v\,D(y_m)$, $y_m \neq a$, body y_m jsou navzájem různé a takové, že $y_m \in I_{j_m}$ s nejmenším možným indexem $j_m > 0$. Pak je $x_m \neq y_m$ pro každé $m = 1, 2, \ldots$ Kdyby $x_m = y_m$ pro určitý index m, pak by $x_m = y_m \in H^{j_m}(a)$, $j_m > 0$, takže podle (2) existuje index $j' < j_m$ a bod $y' \in I'_j$, tak, že $y_m \in D(y') \subset vD(y')$, což je ve sporu s předpokladem, že j_m je nejmenší index uvedené vlastnosti. Uvažme nyní, že $y_m \in I_{j_m} \subset I$, takže podle (2) platí pro vhodné přirozené číslo p:

$$x_m \in v\,D(y_m) = y_m \cup \bigcup_{\substack{n \geqq 2p \\ (\alpha,\beta) \neq (\alpha^*,\beta^*)}} \bigcup_{\alpha,\beta} \mathscr{E}\ (\alpha, \beta, n, \varphi(y_m))\,.$$

Jelikož $x_m \neq y_m$, jest $x_m = (\alpha_m, \beta_m, n_m, \varphi(y_m))$ pro vhodná $\alpha_m \in A$, $\beta_m \in B$, $(\alpha_m, \beta_m) \neq (\alpha^*, \beta^*)$ a $n_m > 1$. Poněvadž $y_m \neq y_n$ a jelikož φ je prosté zobrazení, je také $\varphi(y_m) \neq \varphi(y_n)$ pro $m \neq n$, takže posloupnost $\{x_m\}$ není prvkem soustavy Λ. To je však spor s předpokladem, že $x = \lambda x_m$. Proto případ II nemůže nastat.

Tím je dokázáno, že $vW^*(a) = W^*(a)$. Množina $W^*(a)$ je tudíž

v-uzavřená. Je také u-uzavřená v F-modifikaci u. Podle (2) je $W(a) \subset \subset W^*(a) \subset U(a)$, takže

$$W(a) \subset uW(a) \subset uW^*(a) = W^*(a) \subset U(a) \subset O(a)\,,$$

kde $W(a)$ je u-otevřené okolí bodu a.

Proto je (P, u) regulární F-prostor, na němž je každá spojitá funkce konstantní.[2])

[2]) E. Hewitt sestrojil podobný prostor, jehož mohutnost není spočetným součtem menších mohutností. Použil při tom jiné metody konstrukce, než je uvedena v této knize. Viz E. Hewitt [2] a J. Novák [7].