(Pro $n = 0$ tomu tak je podle II.) Ukážeme, že takové množiny $G(t)$ existují též pro $t \in H_{n+1}$. Je-li $t \in H_{n+1}$, pak může být $t \in H_n$; v tomto případě je množina $G(t)$ už definována. Je-li však $t \in H_{n+1} - H_n$, $t_1 = t - 2^{-n-1}$, $t_2 = t + 2^{-n-1}$, pak je $t_1 \in H_n$, $t_2 \in H_n$, $t_1 < t_2$, a tudíž $\overline{G(t_1)} \subset G(t_2)$. Množina $\overline{G(t_1)}$ je uzavřená a podle **4.4.13** je $G(t_2)$ jejím okolím, takže existuje taková otevřená množina $G(t)$, že $\overline{G(t_1)} \subset G(t) \subset \subset \overline{G(t)} \subset \overline{G(t_2)}$. Snadno se zjistí, že množiny $G(t)$ ($t \in H_{n+1}$) mají žádanou vlastnost.

IV. Můžeme tudíž každému $t \in H$ takovým způsobem přiřadit otevřenou množinu $G(t)$, že $G(0) \supset A$, $G(1) = P - B$ a že

$$t_1 \in H\,, \quad t_2 \in H\,, \quad t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{G(t_1)} \subset G(t_2)\,.$$

V. Pro každé $n = 1, 2, 3, \dots$ definujeme takto funkci f_n v oboru P. Pro $x \in B$ budiž $f_n(x) = 1$. Je-li $x \in P - B$, pak jistě některé $t \in H_n$ má tu vlastnost, že $x \in G(t)$ (neboť vždy $t = 1$ má tuto vlastnost); budiž $f_n(x)$ nejmenší takové t. Pak je $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f_n(x) \leqq 1$, $x \in A \Rightarrow f_n(x) = 0$, $x \in B \Rightarrow f_n(x) = 1$. Snadno se dokáže, že každý bod prostoru P má takové okolí U, že buďto $U = P - \overline{G(1 - 2^{-n})}$ nebo $U = G(2^{-n})$ nebo posléze $U = G(t_2) - \overline{G(t_1)}$, kde $t_1 \in H_n$, $t_2 \in H_n$, $0 \leqq t_2 - t_1 \leqq \leqq 2^{-n+1}$. Z definice funkce f_n je patrné, že v každém případě

$$x \in U\,, \quad y \in U \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqq 2^{-n}\,.$$

Z toho plyne, že v každém bodě je oscilace funkce f_n nejvýš rovna 2^{-n}.

VI. Zřejmě pro každé n: $x \in P \Rightarrow |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqq 2^{-n-1}$. Protože $\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n-1} = 2^{-k-1}$, jest pro každé k

$$x \in P\,, \quad m > k\,, \quad n > k \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leqq 2^{-k-1}\,.$$

Z toho plyne podle **7.3.7** existence stejnoměrné limity f posloupnosti $\{f_n\}$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** je f spojitá funkce, která zřejmě má vlastnost (1).

7.3.11. Budiž P $\mathcal{F}$-prostor. Nechť ke každé uzavřené bodové množině F a ke každé omezené spojité funkci φ v oboru F existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že zúžení $f \mid F$ splyne s φ. Pak P je normální prostor.

Důkaz. Jsou-li A, B disjunktní uzavřené množiny, pak $F = A \cup B$ podle **4.4.6** je uzavřená. Definujme funkci φ v oboru F takto:

$$x \in A \Rightarrow \varphi(x) = 0\,, \quad x \in B \Rightarrow \varphi(x) = 1\,.$$

Ze **4.6.6** a **7.1.19** plyne, že funkce φ je spojitá. Tudíž existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $f \mid F = \varphi$. Podle **7.3.9** je P normální.

7.3.12. Budiž P normální prostor. Budiž F uzavřená bodová množina; budiž φ spojitá funkce v oboru F. Existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že zúžení $f \mid F$ splyne s φ. Je-li φ omezená, můžeme požadovat, aby také f byla omezená.

Důkaz. I. Za předpokladu, že: $x \in F \Rightarrow |\varphi(x)| \leqq 1$, budeme definovat takovou spojitou funkci g v oboru P, že

$$x \in F \Rightarrow |\varphi(x) - g(x)| \leqq \tfrac{2}{3}\,, \quad x \in P \Rightarrow |g(x)| \leqq \tfrac{1}{3}\,. \tag{2}$$

Za tím účelem položme

$$A = \mathscr{E}_x\,[x \in F, -1 \leqq \varphi(x) \leqq -\tfrac{1}{3}]\,, \quad B = \mathscr{E}_x\,[x \in F, \tfrac{1}{3} \leqq \varphi(x) \leqq 1]\,.$$

Množiny A, B jsou disjunktní a podle **4.6.6** a **7.1.18** jsou uzavřené. Podle **7.3.10** existuje taková spojitá funkce h v oboru P, že $x \in P \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \leqq h(x) \leqq 1$, $x \in A \Rightarrow h(x) = 0$, $x \in B \Rightarrow h(x) = 1$. Budiž: $x \in P \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}\,[2h(x) - 1]$. Pak je g spojitá funkce v oboru P, která splňuje (1).

II. Podržme předpoklad $x \in F \Rightarrow |\varphi(x)| \leqq 1$ a definujme rekurentně posloupnost $\{\varphi_n\}_1^\infty$ spojitých funkcí v oboru F a současně posloupnost $\{g_n\}_1^\infty$ spojitých funkcí v oboru P tak, aby bylo

$$x \in F \Rightarrow |\varphi_n(x) - g_n(x)| \leqq \tfrac{2}{3}\,, \tag{3}$$

$$x \in P \Rightarrow |g_n(x)| \leqq \tfrac{1}{3}\,. \tag{4}$$

Pro $n = 1$ stačí položit

$$x \in F \Rightarrow \varphi_1(x) = \varphi(x) \tag{5}$$

a definovat g_1 pomocí I. Jestliže při určitém n funkce φ_n a g_n jsou už definovány, definujeme φ_{n+1} takto:

$$x \in F \Rightarrow \varphi_{n+1}(x) = \tfrac{3}{2}[\varphi_n(x) - g_n(x)]\,. \tag{6}$$

Podle **7.1.8** a **7.1.32** je φ_{n+1} spojitá funkce v oboru F; podle (3) je $x \in F \Rightarrow |\varphi_{n+1}(x)| \leqq 1$, takže g_{n+1} opět můžeme definovat pomocí I.

III. Nyní položme pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(7) \qquad x \in P \Rightarrow f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{2}{3})^{i-1} g_i(x) .$$

Podle **7.1.32** je f_n spojitá funkce v oboru P. Z (5), (6) a (7) následuje

$$(8) \qquad x \in F \Rightarrow f_n(x) = \varphi(x) - (\tfrac{2}{3})^n \varphi_{n+1}(x) .$$

Ze (4) a (7) plyne podle **7.3.7** existence stejnoměrné limity f posloupnosti $\{f_n\}$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** je funkce f spojitá. Ze (3), (4) a (8) plyne, že zúžení $f \mid F$ je totožné s φ. Posléze plyne ze (4) a (7), že

$$x \in P \Rightarrow |f(x)| \leqq 1 .$$

IV. Tím je dokázáno, že ke každé spojité funkci φ v oboru F s vlastností $x \in F \Rightarrow |\varphi(x)| \leqq 1$ existuje spojitá funkce f v oboru P s vlastností $x \in P \Rightarrow |f(x)| \leqq 1$, jejíž zúžení $f \mid F$ je totožné s φ. Jestliže funkce φ místo vztahu $|\varphi(x)| \leqq 1$ splňuje obecnější vztah $|\varphi(x)| \leqq c$, kde $c > 0$, položíme $\varphi_0(x) = c^{-1} . \varphi(x)$, takže $|\varphi_0(x)| \leqq 1$ pro všecka $x \in F$, určíme spojité rozšíření f_0 funkce φ_0 na obor P tak, aby bylo $|f_0(x)| \leqq 1$ pro všecka $x \in P$ a položíme $f(x) = c\, f_0(x)$.

V. Posléze budiž dána neomezená spojitá funkce φ v oboru F. Pro $x \in F$ položme

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{1 + |\varphi(x)|} .$$

Podle **7.1.32** je ψ spojitá funkce v oboru F; zřejmě $x \in F \Rightarrow |\psi(x)| < 1$. Existuje taková spojitá funkce g v oboru P, že $x \in P \Rightarrow |g(x)| \leqq 1$, $x \in F \Rightarrow g(x) = \psi(x)$. Bodová množina $M = \mathscr{E}_x\, [|g(x)| = 1]$ je uzavřená podle **7.1.18** a zřejmě $F \cap M = \emptyset$. Tudíž ze **7.3.10** plyne, že existuje taková spojitá funkce h v oboru P, že

$$x \in P \Rightarrow 0 \leqq h(x) \Rightarrow 1 , \quad x \in F \Rightarrow h(x) = 1 , \quad x \in M \Rightarrow h(x) = 0 .$$

Definujme funkci k v oboru P takto:

$$x \in P \Rightarrow k(x) = g(x) . h(x) .$$

Podle **7.1.32** funkce k je spojitá; zřejmě $x \in P \Rightarrow |k(x)| < 1$, $x \in F \Rightarrow$ $\Rightarrow k(x) = \psi(x)$. Posléze nechť

$$x \in P \Rightarrow f(x) = \frac{k(x)}{1 - |k(x)|} .$$

Pak f je spojitá (viz **7.1.32**) funkce v oboru P a zřejmě $x \in F \Rightarrow f(x) =$ $= \varphi(x)$.

7.3.13. Buďiž P prostor. Buďiž f spojitá funkce v oboru P. Bodová množina $M = \mathscr{E}_x\,[f(x) = 0]$ je uzavřená a současně je to G_δ-množina. M je uzavřená podle **7.1.18.** Jest $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde $G_n = \mathscr{E}_x\,[|f(x)| < n^{-1}]$ je otevřená podle **7.1.14.**

7.3.14. Buďiž P normální prostor. Nechť uzavřená množina M je G_δ-množinou. Pak existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in M \Leftrightarrow f(x) = 0$. Existují takové otevřené množiny G_n, že $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Pro každé n podle **7.3.10** existuje taková spojitá funkce g_n v oboru P, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq g_n(x) \leqq 1$, $x \in M \Rightarrow g_n(x) = 0$, $x \in P - G_n \Rightarrow g_n(x) = 1$. Vztah

$$x \in P \Rightarrow f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i(x)$$

definuje spojitou (viz **7.1.32**) funkci v oboru P. Jest

$$x \in P\,, \quad m > k\,, \quad n > k \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k}\,,$$

takže podle **7.3.7** existuje stejnoměrná limita f posloupnosti $\{f_n\}$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** je f spojitá funkce v oboru P. Pro $x \in P$ jest $0 \leqq$ $\leqq f_n(x) \leqq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < 1$, tedy $0 \leqq \lim f_n(x) = f(x) \leqq 1$. Pro $x \in M$ je zřejmě $f(x) = 0$. Je-li $x \in P - M$, pak existuje takový index i, že $x \in P - G_i$, takže $g_i(x) = 1$. Pro $n \geqq i$ je potom $f_n(x) \geqq 2^{-i}$, takže $f(x) = \lim f_n(x) \geqq 2^{-i} > 0$.

7.3.15. Buďiž P F-prostor. Nechť ke každé uzavřené množině F a ke každé funkci φ v oboru F existuje taková funkce f v oboru P, že zúžení $f \mid F$ splyne s φ a že každý bod množiny

$P - F$, jakož i každý bod spojitosti funkce φ, je bodem spojitosti funkce f. Pak prostor P je dědičně normální. Nechť A, B jsou oddělené bodové množiny. Máme dokázat, že A, B jsou H-oddělené. Protože P je F-prostor, je množina $F = \overline{A} \cup \overline{B}$ uzavřená podle **4.4.6.** Definujme funkci φ v oboru F takto:

$$x \in \overline{A} \Rightarrow \varphi(x) = 0\,, \quad x \in F - \overline{A} \Rightarrow \varphi(x) = 1\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že každý bod $x \in F - (\overline{A} \cap \overline{B})$ je bodem spojitosti funkce φ. Tudíž existuje taková funkce f v oboru P, že $f \mid F = \varphi$ a že každý bod $x \in P - (\overline{A} \cap \overline{B})$ je bodem spojitosti funkce f. Zúžení $f \mid P - (\overline{A} \cap \overline{B})$ je spojitá funkce podle **7.1.8**, takže ze **7.1.14** plyne, že množiny

$$U = \mathscr{E}_x \quad [x \in P - (\overline{A} \cap \overline{B}),\ f(x) < \tfrac{1}{2}]\,,$$
$$V = \mathscr{E}_x \quad [x \in P - (\overline{A} \cap \overline{B}),\ f(x) > \tfrac{1}{2}]$$

jsou relativně otevřené v $P - (\overline{A} \cap \overline{B})$. Protože P je F-prostor, je $\overline{A} \cap \overline{B}$ uzavřená podle **4.4.5** a tedy $P - (\overline{A} \cap \overline{B})$ je otevřená, takže podle **4.6.7** také množiny U, V jsou otevřené v P. Z **5.1.2** plyne snadno, že $A \subset U$, $B \subset V$. Zřejmě $U \cap V = \emptyset$. Tudíž A, B jsou H-oddělené podle **5.1.15** a prostor P je dědičně normální podle **5.4.9.**

7.3.16. Budiž P dědičně normální prostor. Ke každé uzavřené množině F a ke každé funkci φ v oboru F existuje taková funkce f v oboru P, že zúžení $f \mid F$ splyne s φ a že každý bod množiny $P - F$, jakož i každý bod spojitosti funkce φ, je bodem spojitosti funkce f.

Důkaz. I. Budiž C množina všech bodů spojitosti funkce φ a budiž $D = F - C$. Prostor $P - D$ vnořený do P je normální a množina $C = F \cap (P - D)$ je relativně uzavřená v $P - D$ podle **4.6.4.** Zúžení $\varphi \mid C$ je spojitá funkce podle **7.1.8.** Tudíž ze **7.3.12** plyne, že existuje taková spojitá funkce g v oboru $P - D$, že: $x \in C \Rightarrow g(x) = \varphi(x)$. Definujme funkci f v oboru P takto:

$$x \in D \Rightarrow f(x) = \varphi(x)\,, \quad x \in P - D \Rightarrow f(x) = g(x)\,.$$

Zřejmě $f \mid F = \varphi$.

II. Budiž $a \in P - F$. Pak je $a \in P - D$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak podle **7.1.3** existuje takové relativní okolí V bodu a v prostoru $P - D$, že

$$x \in V \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

Podle **4.6.2** existuje takové okolí W bodu a v prostoru P, že $W \cap$ $\cap (P - D) = V$. Také $P - F$ je okolí bodu a v prostoru P (viz **4.4.13**), takže podle **4.2.5** též $U = W \cap (P - F)$ je okolí bodu a v prostoru P. Protože $D \subset F$, je $U \subset V$, takže $x \in U \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Tudíž a je bod spojitosti funkce f podle **7.1.3.**

III. Budiž $a \in C$. Pak je a bodem spojitosti jak pro $\varphi = f \mid F$, tak i pro $g = f \mid P - D$. Je-li tedy $\varepsilon > 0$; pak podle **7.1.3** existuje takové relativní okolí V bodu a v prostoru F a takové relativní okolí W bodu a v prostoru $P - D$, že $x \in V \cup W \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Jest $F \cup$ $\cup (P - D) = P$, $a \in F \cap (P - D)$, takže podle **4.6.18** je $V \cup W$ okolí bodu a v prostoru P. Tudíž a je bod spojitosti funkce f podle **7.1.3.**

7.4. Drobné poznámky

7.4.1. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž $M_1 \subset P_1$, $M = f^{-1}(M_1)$. Pak je $\psi(M) \leqq \psi(M_1)$. Podle definice **4.12.2** existuje taková soustava $\mathfrak{V}$ okolí množiny $M_1 \subset P_1$, že moh $\mathfrak{V} =$ $= \psi(M_1)$ a že $M_1 = \bigcap V$ $(V \in \mathfrak{V})$. Jest $M = f^{-1}(M_1) = \bigcap f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{V})$. Množiny $f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{V})$ jsou okolí množiny $M \subset P$ podle **7.1.12** a tvoří soustavu, jejíž mohutnost je $\leqq \psi(M_1)$. Tudíž $\psi(M) \leqq \psi(M_1)$.

7.4.2. Budiž P prostor; budiž $a \in P$. Budiž f spojitá funkce v oboru P. Je-li $\omega(a) = 1$ nebo $\omega(a) > \aleph_0$, pak existuje takové okolí U bodu a, že: $x \in U \Rightarrow f(x) = f(a)$. Je-li $f(a) = c$, pak pseudocharakter bodu $c \in \mathbf{E}_1$ je zřejmě roven $\aleph_0$, takže $\psi[f^{-1}(c)] \leqq \aleph_0$ podle **7.4.1.** Tudíž $f^{-1}(c) = \mathscr{E}_x\,[f(x) = f(a)]$ je okolí bodu a podle **4.12.25.**

7.4.3. Budiž P normální prostor; budiž $a \in P$. Nechť ke každé spojité funkci f v oboru P existuje takové okolí U bodu a, že $x \in U \Rightarrow f(x) = f(a)$. Pak je buďto $\omega(a) = 1$ nebo $\omega(a) >$ $> \aleph_0$. Budiž $\{U_n\}$ posloupnost okolí bodu a. Ze **4.12.1** a **4.12.2** plyne snadno, že stačí ukázat, že také $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ je okolí bodu a. Pro každé n podle **4.4.13** a **4.5.6** existuje taková otevřená množina G_n, že $a \in G_n \subset$ $\subset U_n$. Podle **7.3.10** existuje taková spojitá funkce g_n v oboru P, že

$x \in P \Rightarrow 0 \leqq g_n(x) \leqq 1$; $g_n(a) = 0$, $x \in P - G_n \Rightarrow g_n(x) = 1$. Definujme funkci f_n v oboru P takto:

$$x \in P \Rightarrow f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i(x) .$$

Funkce f_n je spojitá (viz **7.1.32**) a jest

$$x \in P, \quad m > k, \quad n > k \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k} .$$

Z toho plyne podle **7.3.7**, že existuje stejnoměrná limita f posloupnosti $\{f_n\}$. Podle **7.3.3** a **7.3.8** je f spojitá funkce v oboru P. Snadno se přesvědčíme, že $f(a) = 0$ a že

$$x \in P , \quad f(x) = 0 \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n .$$

Podle předpokladu existuje takové okolí U bodu a, že $x \in U \Rightarrow f(x) = f(a)$. Tudíž $U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, takže $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ je okolí bodu a podle **4.2.4.**

7.4.4. Budiž f inversně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $M_1 \subset P_1$, $M = f^{-1}(M_1)$. Pak je $\psi(M) \geqq \psi(M_1)$. Existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí množiny $M \subset P$, že moh $\mathfrak{U} = \psi(M)$ a že $M = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$. Pro každé $U \in \mathfrak{U}$ budiž $\varphi(U) = \mathscr{E}_y\, [y \in P_1, f^{-1}(y) \subset U]$. Jest $M_1 = \bigcap \varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$. Množiny $\varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ jsou okolí množiny $M_1 \subset P_1$ podle **4.2.8** a **7.2.1** a tvoří soustavu, jejíž mohutnost je $\leqq \psi(M)$. Tudíž $\psi(M_1) \leqq \psi(M)$.

7.4.5. Budiž f oboustranně spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $M_1 \subset P_1$, $M = f^{-1}(M_1)$. Pak je

$$\chi(M) = \chi(M_1) , \quad \psi(M) = \psi(M_1) , \quad \omega(M) = \omega(M_1) .$$

Důkaz. I. Pro $X \subset P$ budiž $\varphi(X) = \mathscr{E}_y\, [y \in P_1, f^{-1}(y) \subset X]$. Je-li U okolí množiny $M \subset P$, je $\varphi(U)$ okolí množiny $M_1 \subset P_1$ podle **4.2.8** a **7.2.1.**

II. Je-li V okolí $M_1 \subset P_1$, je $f^{-1}(V)$ okolí $M \subset P$ podle **7.1.12.**

III. Existuje taková úplná soustava $\mathfrak{V}$ okolí M_1 v prostoru P_1, že moh $\mathfrak{V} = \chi(M_1)$. Množiny $f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{V})$ tvoří soustavu okolí M v prostoru P, jejíž mohutnost je $\chi(M_1)$. Je-li U libovolné okolí množiny M

v prostoru P, pak $\varphi(U)$ je okolí M_1 v P_1; protože soustava $\mathfrak{V}$ je úplná, existuje takové $V \in \mathfrak{V}$, že $V \subset \varphi(U)$; zřejmě $f^{-1}(V) \subset U$. Tudíž množiny $f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{V})$ tvoří úplný systém okolí M v P, takže $\chi(M) \leqq \chi(M_1)$.

IV. Existuje taková úplná soustava $\mathfrak{U}$ okolí množiny $M \subset P$, že moh $\mathfrak{U} = \chi(M)$. Množiny $\varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ tvoří soustavu okolí množiny $M_1 \subset P_1$ a mohutnost této soustavy je $\leqq \chi(M)$. Je-li V libovolné okolí množiny $M_1 \subset P_1$, jest $f^{-1}(V)$ okolí množiny $M \subset P$ a protože soustava $\mathfrak{U}$ je úplná, existuje taková $U \in \mathfrak{U}$, že $U \subset f^{-1}(V)$; zřejmě $\varphi(U) \subset V$. Tudíž množiny $\varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ tvoří úplnou soustavu okolí množiny $M_1 \subset P_1$, takže $\chi(M_1) \leqq \chi(M)$ a tedy podle III $\chi(M_1) = \chi(M)$.

V. Podle **7.4.1** a **7.4.4** je $\psi(M) = \psi(M_1)$.

VI. Podle **4.4.12** a **4.12.1** je právě tehdy $\omega(M) = 1$, je-li M okolím M v prostoru P, a je právě tehdy $\omega(M_1) = 1$, je-li M_1 okolím M_1 v prostoru P_1. Je-li M okolím M v prostoru P, je $\varphi(M) = M_1$ okolím M_1 v prostoru P_1; je-li M_1 okolím M_1 v prostoru P_1, je $f^{-1}(M_1) = M$ okolím M v prostoru P. Tudíž $\omega(M) = 1 \Leftrightarrow \omega(M_1) = 1$.

VII. Je-li $\omega(M_1) > 1$, pak existuje taková soustava $\mathfrak{V}$ okolí množiny $M_1 \subset P_1$, že moh $\mathfrak{V} = \omega(M_1)$ a že $\bigcap V$ $(V \in \mathfrak{V})$ není okolím množiny $M_1 \subset P_1$. Soustava množin $f^{-1}(V)$ $(V \in \mathfrak{V})$ má mohutnost $\omega(M_1)$ a skládá se z okolí množiny $M \subset P$; protože $\bigcap f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcap V)$, množina $\varphi[\bigcap f^{-1}(V)] = \bigcap V$ není okolím $M_1 \subset P_1$, takže $\bigcap f^{-1}(V)$ nemůže být okolím $M \subset P$. Tudíž $\omega(M) \leqq \omega(M_1)$.

VIII. Je-li $\omega(M) > 1$, pak existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí množiny $M \subset P$, že moh $\mathfrak{U} = \omega(M)$ a že $\bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$ není okolím $M \subset P$. Soustava množin $\varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ má mohutnost nejvýš $\omega(M)$ a skládá se z okolí $M_1 \subset P_1$; protože $\bigcap \varphi(U) = \varphi(\bigcap U)$, jest $f^{-1}[\bigcap \varphi(U)] \subset \bigcap U$, takže $f^{-1}[\bigcap \varphi(U)]$ podle **4.2.4** není okolím $M \subset P$ a tedy $\bigcap \varphi(U)$ nemůže být okolím $M_1 \subset P_1$. Tudíž $\omega(M_1) \leqq \omega(M)$ a tedy podle VII $\omega(M_1) = \omega(M)$.

7.4.6. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž f_z zobrazení prostoru R do prostoru $P(z)$. Budiž $S = \mathfrak{P}\, P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Budiž f zobrazení R do S definované tak, že pro každý $x \in R$ a pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $f_z(x)$ z-souřadnice bodu $f(x) \in S$. Aby bod $a \in R$ byl bodem spojitosti zobrazení f, k tomu je nutné a stačí, aby pro každé $z \in \mathbf{C}$ byl a bodem spojitosti zobrazení f_z. Aby zobrazení f bylo spojité, k tomu je nutné a stačí, aby všecka zobrazení f_z ($z \in \mathbf{C}$) byla spojitá.

Důkaz. I. Budiž $z_0 \in \mathbf{C}$. Existuje takové zobrazení φ prostoru S na prostor $P(z_0)$, že pro každý $b \in S$ je $\varphi(b)$ z_0-souřadnice bodu b. Ze **7.1.1** plyne, že zobrazení φ je spojité. Zřejmě je f_{z_0} zobrazení složené ze zobrazení f a φ. Jestliže tedy $a \in R$ je bod spojitosti pro f, pak podle **7.1.9** je a bod spojitosti též pro f_{z_0}.

II. Nechť bod $a \in R$ je pro každé $z \in \mathbf{C}$ bodem spojitosti zobrazení f_z. Budiž V okolí bodu $f(a) = b$ v prostoru S. Podle definice **6.2.1** existuje taková konečná množina $K \subset \mathbf{C}$, že $\mathfrak{P}_z W(z) \subset V$, kde $W(z)$ je pro $z \in K$ vhodně volené okolí bodu $b(z)$ v prostoru $P(z)$ a pro $z \in \mathbf{C} - K$ je $W(z) = P(z)$. Protože a je bod spojitosti zobrazení f_z, plyne ze **7.1.1**, že pro každé $z \in \mathbf{C}$ je množina $U(z) = f_z^{-1}[W(z)]$ okolím bodu a v prostoru R. Zřejmě $f^{-1}(V) \supset \bigcap U(z)$ $(z \in K)$, takže podle **4.2.4** je $f^{-1}(V)$ okolím bodu a v prostoru R. Tudíž je a bod spojitosti pro f podle **7.1.1.**

7.5. Cvičení k § 7

7.5.1. Budiž f spojité zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Je-li A F_σ-množina prostoru P_1, je $f^{-1}(A)$ F_σ-množina prostoru P. Je-li B G_δ-množina prostoru P_1, je $f^{-1}(B)$ G_δ-množina prostoru P.

7.5.2. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž $Q_1 \cup Q_2 = P$, $a \in Q_1 \cap Q_2$. Je-li a bod spojitosti obou zúžení $f \mid Q_1$, $f \mid Q_2$, je a také bod spojitosti zobrazení f.

7.5.3. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Budiž $P = Q_1 \cup Q_2$; množiny $Q_1 - Q_2$, $Q_2 - Q_1$ buďtež oddělené v prostoru P. Jestliže obě zúžení $f \mid Q_1$, $f \mid Q_2$ jsou spojitá, pak také zobrazení f je spojité.

7.5.4. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Buďtež Q_1, Q_2 dvě uzavřené (dvě otevřené) množiny prostoru P; budiž $Q_1 \cup Q_2 = P$. Jestliže obě zúžení $f \mid Q_1$, $f \mid Q_2$ jsou spojitá, pak také zobrazení f je spojité.

7.5.5. Množina bodů spojitosti charakteristické funkce bodové množiny $M \subset P$ jest $P - \operatorname{Fr} M$.

7.5.6. Budiž f zobrazení prostoru P do prostoru P_1. Aby f bylo *spojité*, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $\overline{f^{-1}(M)} \subset f^{-1}(\overline{M})$ pro každou bodovou množinu $M \subset P_1$.

7.5.7. Budiž f spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pak jest

$$\mathscr{E}_{(x,y)} [x \in P,\ y \in P_1,\ y = f(x)]$$

uzavřená množina prostoru $P \times P_1$.

7.5.8. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Budiž $T_1 \cup T_2 = P_1$, $b \in T_1 \cap T_2$, $S_1 = f^{-1}(T_1)$, $S_2 = f^{-1}(T_2)$. Je-li b bod inversní spojitosti obou zúžení $f \mid S_1$, $f \mid S_2$, je b také bod inversní spojitosti zobrazení f.

7.5.9. Budiž f zobrazení prostoru P na prostor P_1. Buďtež T_1, T_2 uzavřené množiny prostoru P_1; budiž $T_1 \cup T_2 = P_1$, $S_1 = f^{-1}(T_1)$, $S_2 = f^{-1}(T_2)$. Jestliže obě zúžení $f \mid S_1$, $f \mid S_2$ jsou inversně spojitá, pak také zobrazení f je inversně spojité.

7.5.10. Jsou-li P, Q topologické prostory a je-li $f(x, y) = x$ pro $(x, y) \in P \times Q$, pak zobrazení f prostoru $P \times Q$ na prostor P je přesně spojité, ale nemusí být uzavřené (a tudíž nemusí být inversně spojité; viz **7.2.9**).

§ 8. POKRÝVÁNÍ PROSTORU NEBO BODOVÉ MNOŽINY SOUSTAVOU BODOVÝCH MNOŽIN

8.1. Pokrývání spočetnou soustavou množin. Body zhuštění

Definice **8.1.1.** Soustava $\mathfrak{S}$ bodových množin prostoru P *zakrývá* bodovou množinu Q, jestliže ke každému $x \in Q$ existuje taková $X \in \mathfrak{S}$, že $x \in X$; $\mathfrak{S}$ *pokrývá* Q, jestliže ke každému $x \in Q$ existuje okolí $X \in \mathfrak{S}$. *Zakrytí* (*pokrytí*) *prostoru* P je taková soustava bodových množin, která zakrývá (pokrývá) celý prostor P.

8.1.1. Jestliže soustava $\mathfrak{S}$ bodových množin pokrývá bodovou množinu Q, pak $\mathfrak{S}$ zakrývá Q. Viz **4.2.3.**

8.1.2. Jestliže soustava $\mathfrak{G}$ otevřených bodových množin zakrývá bodovou množinu Q, pak $\mathfrak{G}$ pokrývá Q. Viz **4.4.13.**

8.1.3. Nechť soustava $\mathfrak{S}$ bodových množin $\mathcal{F}$-prostoru P pokrývá bodovou množinu Q. Pak existuje taková soustava $\mathfrak{G}$ otevřených množin, že $\mathfrak{G}$ pokrývá Q, že moh $\mathfrak{G} \leqq$ $\leqq$ moh $\mathfrak{S}$ a že ke každé $G \in \mathfrak{G}$ existuje $X \in \mathfrak{S}$, $X \supset G$. Takovou soustavu $\mathfrak{G}$ tvoří množiny X_ι ($X \in \mathfrak{S}$). Neboť moh $\mathfrak{G} \leqq$ moh $\mathfrak{S}$ je zřejmé, množiny X_ι jsou otevřené podle **4.5.4** a $\mathfrak{G}$ pokrývá Q podle **4.5.1** a **4.5.5.**

8.1.4. Budiž Q vnořen do P. Budiž $\mathfrak{A}$ pokrytí prostoru Q. Pak existuje taková soustava $\mathfrak{B}$ bodových množin prostoru P, že moh $\mathfrak{B}$ = moh $\mathfrak{A}$, že $\mathfrak{B}$ pokrývá množinu Q a že: $X \in \mathfrak{B} \Rightarrow$ $\Rightarrow Q \cap X \in \mathfrak{A}$. Pro každou $A \in \mathfrak{A}$ budiž A_ι relativní vnitřek množiny A neboli množina těch $x \in Q$, pro něž je A relativním okolím bodu x. Podle **4.2.8** a **4.6.2** můžeme ke každé $A \in \mathfrak{A}$ zvolit takovou $B \subset P$, že $Q \cap B = A_\iota$ a že B je okolím množiny A_ι; podle **4.2.8** je B okolím každého $x \in A_\iota$. Soustava $\mathfrak{B}$ všech množin B má žádanou vlastnost.

8.1.5. Nechť soustava $\mathfrak{S}$ bodových množin prostoru P pokrývá bodovou množinu Q. Pak průniky $Q \cap X$ $(X \in \mathfrak{S})$ tvoří pokrytí vnořeného prostoru Q. Viz **4.6.2.**

8.1.6. Budiž $A \subset P$, $B \subset P$. Pro každý $x \in A$ nechť množiny (x), B jsou H-oddělené; pro každý $y \in B$ nechť množiny (y), A jsou H-oddělené. V každé soustavě bodových množin, která pokrývá $A \cup B$, budiž obsažena nejvýš spočetná podsoustava, která rovněž pokrývá $A \cup B$. Pak množiny A, B jsou H-oddělené.

Důkaz. I. Budiž $A \neq \emptyset \neq B$, protože jinak tvrzení je triviální. Podle **5.1.10** existuje ke každému $x \in A$ takové okolí $H(x)$ bodu x, že $B \cap \overline{H(x)} = \emptyset$ a ke každému $y \in B$ takové okolí $K(y)$ bodu y, že $A \cap \overline{K(y)} = \emptyset$. Soustava složená ze všech $H(x)$ $(x \in A)$ i ze všech $K(y)$ $(y \in B)$ pokrývá bodovou množinu $A \cup B$. Proto existují takové dvě posloupnosti bodových množin $\{U_n\}_1^\infty$, $\{V_n\}_1^\infty$, že:

[1] $\overline{U}_n \cap B = \emptyset = \overline{V}_n \cap A$ pro všecka n.

[2] Ke každému $x \in A$ $(y \in B)$ existuje takové n, že U_n (V_n) je okolím bodu x (bodu y).

II. Budiž

$$U_n^* = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} V_i\,, \quad V_n^* = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} U_i\,.$$

Pak takové posloupnosti $\{U_n^*\}$, $\{V_n^*\}$ mají obě vlastnosti [1], [2]. To je zřejmé u vlastnosti [1]. Abychom se přesvědčili o platnosti [2], zvolme $x \in A$; existuje takové n, že U_n je okolím bodu x; jest

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} V_i} \cap A = \bigcup_{i=1}^{n} (\overline{V}_i \cap A) = \emptyset\,;$$

tudíž $P - \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ je okolí bodu x a tedy podle **4.2.5** také U_n^* je okolí bodu x. Podobně usuzujeme o bodě $y \in B$.

III. Pro všecka m, n je $U_m^* \cap V_n^* = \emptyset$; neboť je-li $m \leqq n$, pak $U_m^* \subset U_m$, $V_n^* \subset P - U_m$, a je-li $m > n$, pak $U_m^* \subset P - V_n$, $V_n^* \subset V_n$.

Položíme-li $W_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^*$, $W_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^*$, jest $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ a podle **4.2.4** a **4.2.8** je W_1 okolím A, W_2 okolím B. Tudíž A, B jsou H-oddělené.

8.1.7. Budiž P R-prostor. Buďtež A, B disjunktní uzavřené bodové množiny. V každé soustavě bodových množin, která pokrývá $A \cup B$, budiž obsažena nejvýš spočetná podsoustava, která rovněž pokrývá $A \cup B$. Pak množiny A, B jsou H-oddělené. Viz **5.3.5** a **8.1.6.**

8.1.8. Budiž P R-prostor. Buďtež A, B disjunktní nejvýš spočetné uzavřené množiny. Pak množiny A, B jsou H-oddělené.

8.1.9. Budiž P FR-prostor. Nechť každé pokrytí obsahuje nejvýš spočetné pokrytí. Pak P je normální. Buďtež A, B disjunktní uzavřené množiny. Jestliže soustava $\mathfrak{S}$ bodových množin pokrývá bodovou množinu $A \cup B$, plyne ze **4.4.13**, že soustava $\mathfrak{S}^*$, která vznikne ze soustavy $\mathfrak{S}$ připojením otevřené množiny P — — $(A \cup B)$, je pokrytí prostoru P. Protože v $\mathfrak{S}^*$ je obsaženo nejvýš spočetné pokrytí prostoru P, je v soustavě $\mathfrak{S}$ obsažena nejvýš spočetná podsoustava pokrývající $A \cup B$, takže A, B jsou H-oddělené podle **8.1.7.**

8.1.10. Budiž P F-prostor s druhým axiomem spočetnosti. Budiž $\mathfrak{S}$ soustava bodových množin, která pokrývá bodovou množinu Q. Pak je v $\mathfrak{S}$ obsažena nejvýš spočetná podsoustava, která rovněž pokrývá Q. Budiž $\mathfrak{B}$ nejvýš spočetná otevřená base prostoru P. Budiž $\mathfrak{B}_0$ soustava všech těch $X \in \mathfrak{B}$, ke kterým existuje $Y \in \mathfrak{S}$, $Y \supset X$. Podle **2.2.2** je $\mathfrak{B}_0$ nejvýš spočetná. Pro každou $X \in \mathfrak{B}_0$ zvolme určitou $\varphi(X) \in \mathfrak{S}$ takovou, že $\varphi(X) \supset X$. Je-li $x \in Q$, pak existuje okolí $S \in \mathfrak{S}$ bodu x. Podle **4.5.17** existuje takové okolí $X \in \mathfrak{B}$ bodu x, že $X \subset S$. Tudíž je $X \in \mathfrak{B}_0$ a množina $\varphi(X) \in \varphi^1(\mathfrak{B}_0)$ je okolím x podle **4.2.4.** Z toho plyne, že soustava $\varphi^1(\mathfrak{B}_0) \subset \mathfrak{S}$ pokrývá Q. Soustava $\varphi^1(\mathfrak{B}_0)$ je nejvýš spočetná podle **2.2.3.**

8.1.11. FR-prostor P s druhým axiomem spočetnosti je dědičně normální. Každý prostor $Q \subset P$ podle **4.6.10**, **4.12.18** a

5.3.2 je FR-prostor s druhým axiomem spočetnosti, takže Q je normální podle **8.1.7** a **8.1.10.**

Definice **8.1.2.** Pravíme, že bod $a \in P$ je *slabý bod zhuštění* bodové množiny M (v prostoru P), jestliže pro každé okolí U bodu a množina $M \cap U$ je nespočetná.

Definice **8.1.3.** Pravíme, že bod $a \in P$ je *silný bod zhuštění* bodové množiny M (v prostoru P), jestliže každé okolí U bodu a je okolím nespočetně mnoha bodů $x \in M$.

8.1.12. Silný bod zhuštění bodové množiny M je slabým bodem zhuštění množiny M. Viz **4.2.3.**

8.1.13. Slabý bod zhuštění bodové množiny M je hromadným bodem množiny M. Viz **4.2.10** nebo **4.2.11.**

8.1.14. Budiž a slabý F-bod prostoru P. Je-li a slabým bodem zhuštění bodové množiny M, je a silným bodem zhuštění množiny M. Budiž U okolí bodu a. Podle **4.5.1** je U_ι okolím bodu a, takže množina $M \cap U_\iota$ je nespočetná. Avšak $M \cap U_\iota$ je množina těch $x \in M$, pro které U je okolím bodu x.

Podle **4.5.5**, **8.1.12** a **8.1.14** není v F-prostoru rozdílu mezi slabým a silným bodem zhuštění bodové množiny. Proto v F-prostoru mluvíme krátce o *bodech zhuštění.*

Budiž (P, v) libovolný prostor. Označme $\mathfrak{B}$ soustavu všech bodových množin tvaru $P - vX$, kde X probíhá všecky bodové množiny vůbec. Volíme-li $X = \emptyset$, dostaneme $P \in \mathfrak{B}$; je-li $y \in P$, pak volba $X = (y)$ dá $P - (y) \in \mathfrak{B}$. Je-li tedy $x \in P$, pak existuje taková $B \in \mathfrak{B}$, že $x \in B$, např. $B = P$; je-li $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, pak existuje taková $B \in \mathfrak{B}$, že $x \in B$, $y \in P - B$, např. $B = P - (y)$. Jestliže konečně $B_1 = P - vX_1 \in \mathfrak{B}$, $B_2 = P - vX_2 \in \mathfrak{B}$, pak $B_1 \cap B_2 = P - v(X_1 \cup X_2) \in \mathfrak{B}$. Tudíž podle **4.5.16** existuje v P F-topologie u, pro kterou je $\mathfrak{B}$ otevřenou basí prostoru (P, u).

Definice **8.1.4.** Právě popsanou F-topologii u prostoru P nazveme *F-redukcí topologie v.*

8.1.15. Je-li v F-topologie v P, pak její F-redukce je s ní totožná. Neboť soustava $\mathfrak{B}$ je v našem případě soustava všech otevřených množin prostoru (P, v).

8.1.16. Budiž u F-redukce topologie v prostoru P. Pak u je jemnější než v. Je-li $a \in P$, pak podle **4.5.17** ty bodové množiny $U = P - vX$, pro které $a \in U$, tvoří úplný systém u-okolí bodu a. Avšak pro každé X, pro něž $a \in P - vX$, je $V = P - X$ v-okolím bodu a a jest $U \subset V$. Tudíž u je jemnější než v podle **4.3.4.**

8.1.17. Budiž u F-redukce topologie v prostoru P. Budiž $M \subset P$. Aby bod $a \in P$ byl silným bodem zhuštění množiny M při topologii v, k tomu je nutné a stačí, aby a byl bodem zhuštění množiny M při F-topologii u. Probíhá-li X všecky množiny $X \subset P$, pro které $a \in P - vX$, pak $P - X$ probíhá všecka v-okolí bodu a a $x \in P - vX$ znamená, že $P - X$ je v-okolím bodu x; na druhé straně probíhá $P - vX$ podle **4.5.17** úplnou soustavu u-okolí bodu a. Že a je silným bodem zhuštění množiny M při topologii v, znamená tudíž, že pro všecky naše X množina $M \cap (P - vX)$ je nespočetná, a to zase znamená, že a je (slabým) bodem zhuštění množiny M při topologii u.

Definice **8.1.5.** Pravíme, že prostor P má *slabou* (*silnou*) *Lindelöfovu vlastnost*, jestliže pro každou bodovou množinu Q je v každé soustavě bodových množin, která pokrývá Q, obsažena nejvýš spočetná soustava, která zakrývá (pokrývá) Q.

8.1.18. Má-li prostor P silnou Lindelöfovu vlastnost, má P též slabou Lindelöfovu vlastnost.

8.1.19. U F-prostoru není rozdílu mezi silnou a slabou Lindelöfovou vlastností. Proto u F-prostoru mluvíme stručně o *Lindelöfově vlastnosti*.

Důkaz. Budiž P F-prostor, který má slabou Lindelöfovu vlastnost. Máme dokázat, že P má silnou Lindelöfovu vlastnost. Nechť soustava $\mathfrak{A}$ bodových množin pokrývá množinu $Q \subset P$. Podle **8.1.3** existuje taková soustava $\mathfrak{G}$ otevřených množin, že $\mathfrak{G}$ pokrývá Q a že ke každé $G \in \mathfrak{G}$ existuje $f(G) \in \mathfrak{A}$, $f(G) \supset G$. Protože P má slabou Lindelöfovu vlastnost, existuje nejvýš spočetná soustava $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$, která zakrývá Q. Podle **8.1.2** soustava $\mathfrak{G}_0$ pokrývá Q, takže také soustava $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ složená ze všech $f(G)$ $(G \in \mathfrak{G}_0)$ pokrývá Q. Zřejmě $\mathfrak{A}_0$ je nejvýš spočetná.

8.1.20. Aby prostor P měl slabou Lindelöfovu vlastnost, k tomu je nutné a stačí, aby pro každou nespočetnou bodovou množinu M existoval bod $a \in M$, který je slabým bodem zhuštění množiny M.

Důkaz. I. Nechť P má slabou Lindelöfovu vlastnost. Předpokládejme, že množina $M \subset P$ je taková, že žádný bod $x \in M$ není slabým bodem zhuštění množiny M. Pak ke každému $x \in M$ můžeme zvolit takové okolí $U(x)$ bodu x, že množina $M \cap U(x)$ je nejvýš spočetná. Soustava všech $U(x)$ $(x \in M)$ pokrývá M; tudíž existuje taková nejvýš spočetná $S \subset M$, že $M \subset \bigcup U(x)$ $(x \in S)$. Tedy M je nejvýš spočetná podle **2.2.2** a **2.2.6**.

II. Nechť soustava $\mathfrak{A}$ pokrývá bodovou množinu Q, avšak nechť žádná nejvýš spočetná podsoustava soustavy $\mathfrak{A}$ nezakrývá Q. Protože $\mathfrak{A}$ pokrývá Q, můžeme každému $x \in Q$ přiřadit okolí $U(x) \in \mathfrak{A}$. Je-li S nejvýš spočetná část Q, pak soustava všech $U(x)$ $(x \in S)$ je nejvýš spočetná část soustavy $\mathfrak{A}$, takže lze určit bod $\varphi(S) \in Q$ tak, že pro žádný $x \in S$ není $\varphi(S) \in U(x)$.

III. Podle **3.6.2** existuje normálně uspořádaná množina T mohutnosti $\aleph_1$. Množina T je nespočetná, ale pro každé $t \in T$ množina těch $\tau \in T$, které jsou před t, je nejvýš spočetná. Přiřadíme nyní každému $t \in T$ určitý bod $f(t) \in Q$. Podle **3.5.2** stačí definovat bod $t \in T$ za předpokladu, že všecky body $f(\tau)$ $(\tau \in T,$ τ před $t)$ jsou už definovány; potom však množina S všech těchto $f(\tau)$ je nejvýš spočetná část Q, takže můžeme položit $f(t) = \varphi(S)$. Z této definice je patrné, že jestliže $\tau \in T$ leží před $t \in T$, pak $f(t) \in Q - U[f(\tau)]$; naproti tomu je ovšem $f(t) \in U[f(t)]$, takže $f(t) \neq f(\tau)$, tj. f je prosté zobrazení množiny T do množiny Q. Množina M všech $f(t)$ $(t \in T)$ je tedy nespočetná část množiny Q.

IV. Zbývá ukázat, že při libovolném $\tau \in T$ bod $f(\tau)$ není bodem zhuštění množiny M, tj. že některé okolí bodu $f(\tau)$ obsahuje nejvýš spočetně mnoho bodů množiny M. Takovým okolím je však $U[f(\tau)]$, neboť bod $f(t) \in M$ náleží do $U[f(\tau)]$ nejvýš tehdy, jestliže je t před τ nebo $t = \tau$ a množina takových t je nejvýš spočetná.

8.1.21. Aby prostor P měl silnou Lindelöfovu vlastnost, k tomu je nutné a stačí, aby pro každou nespočetnou bodovou množinu M existoval bod $a \in M$, který je silným bodem zhuštění množiny M.

Důkaz. I. Označme v danou topologii prostoru P, u její F-redukci.

II. Nechť pro každou $Q \subset P$ v každé soustavě bodových množin, která při topologii v pokrývá Q, je obsažena nejvýš spočetná soustava pokrývající Q při topologii v. Předpokládejme, že soustava $\mathfrak{A}$ bodových množin pokrývá Q při topologii u. To znamená, že

$$Q \subset \bigcup [P - u(P - X)] \quad (X \in \mathfrak{A}) .$$

Protože u je F-topologie, jsou množiny $P - u(P - X)$ $(X \in \mathfrak{A})$ u-otevřené. Z toho plyne podle definic **4.5.5** a **8.1.4**, že pro $X \in \mathfrak{A}$ je buďto $P - u(P - X) = \emptyset$ nebo je $P - u(P - X) = \bigcup (P - vY)$, kde Y probíhá vhodně volenou soustavu bodových množin. Z toho soudíme, že existuje taková soustava $\mathfrak{M}$ bodových množin, že ke každé $Y \in \mathfrak{M}$ existuje taková $X \in \mathfrak{A}$, že

$$P - vY \subset P - u(P - X) \subset X , \quad Q \subset \bigcup (P - vY) \quad (Y \in \mathfrak{M}) .$$

Poslední inkluse však znamená, že $\mathfrak{M}$ pokrývá Q při topologii v. Tudíž existuje nejvýš spočetná $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, která pokrývá Q při topologii v, a to znamená, že $Q \subset \bigcup (P - vY)$ $(Y \in \mathfrak{M}_0)$. Protože ke každé $Y \in \mathfrak{M}$ existuje taková $X \in \mathfrak{A}$, že $P - vY \subset X$, existuje tedy taková nejvýš spočetná $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, že $Q \subset \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{A}_0)$. Tudíž v každé soustavě $\mathfrak{A}$ bodových množin, která pokrývá Q při topologii u, je obsažena nejvýš spočetná podsoustava, která zakrývá Q. Jestliže M je nespočetná bodová množina, soudíme nyní z **8.1.20**, že existuje bod $a \in M$, který při F-topologii u je bodem zhuštění množiny M, takže podle **8.1.17** bod $a \in M$ je při topologii v silným bodem zhuštění množiny M.

III. Nechť pro každou nespočetnou $M \subset P$ existuje bod $a \in M$, který je při topologii v silným bodem zhuštění množiny M; podle **8.1.17** je a bodem zhuštění množiny M při topologii u. Je-li $Q \subset P$ a jestliže soustava $\mathfrak{A}$ bodových množin pokrývá Q při topologii v, jest $Q \subset \subset \bigcup [P - v(P - X)]$ $(X \in \mathfrak{A})$. Podle definic **4.5.5** a **8.1.4** jsou množiny $P - v(P - X)$ $(X \in \mathfrak{A})$ u-otevřené, takže (viz **8.1.2**) soustava těchto množin pokrývá Q při topologii u. Z **8.1.20** tudíž plyne, že existuje taková nejvýš spočetná $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, že $Q \subset \bigcup [P - v(P - X)]$ $(X \in \mathfrak{A}_0)$ neboli že $\mathfrak{A}_0$ pokrývá $\mathfrak{A}$ při topologii v.

Poznámka. Z vět **8.1.12**, **8.1.14**, **8.1.20** a **8.1.21** plyne znovu věta **8.1.19**.

8.1.22. Budiž u F-redukce topologie v prostoru P. Pak prostor (P, v) má silnou Lindelöfovu vlastnost právě tehdy, jestliže F-prostor (P, u) má Lindelöfovu vlastnost. Viz **8.1.17** a **8.1.21**.

8.1.23. Budiž P F-prostor s druhým axiomem spočetnosti. Ke každé nespočetné $M \subset P$ existuje bod $a \in M$, který je bodem zhuštění množiny M. Viz **8.1.10** a **8.1.21**.

8.1.24. Aby prostor P měl slabou Lindelöfovu vlastnost, k tomu je nutné a stačí, aby každá řídce rozložená bodová množina byla nejvýš spočetná.

Důkaz. I. Nechť P má slabou Lindelöfovu vlastnost. Nechť $M \subset P$ je nespočetná. Budiž H množina těch $x \in M$, které jsou slabými body zhuštění množiny M. Podle **8.1.20** je $H \neq \emptyset$. Jestliže M je řídce rozložená, pak existuje isolovaný bod a množiny $H \subset M$. Podle **4.7.1** existuje takové okolí U bodu a, že $U \cap H = (a)$. Protože $a \in H$, je $U \cap M$ a tudíž též $U \cap M - (a)$ nespočetná. Podle **8.1.20** existuje slabý bod zhuštění b množiny $U \cap M - (a)$ obsažený v této množině, takže $b \neq a$. Protože $U \cap M - (a) \subset M$, je zřejmě b také slabým bodem zhuštění množiny M; protože $b \in M$, je $b \in H$. To je spor, neboť $U \cap H = (a) \neq (b)$.

II. Nechť soustava $\mathfrak{A}$ pokrývá bodovou množinu Q, avšak nechť žádná její nejvýš spočetná podsoustava nezakrývá Q. Máme udat nespočetnou řídce rozloženou bodovou množinu Q. Takovou je však nespočetná množina M sestrojená v části III důkazu věty **8.1.20**. Je-li totiž A libovolná neprázdná část M, pak v dobře uspořádané množině T existuje první takové τ, že $f(\tau) \in A$. Každý jiný bod množiny A je pak tvaru $f(t)$, kde $t \in T$ leží za τ, takže podle citovaného důkazu je $f(t) \in Q - U[f(\tau)]$. Tudíž okolí $U[f(\tau)]$ bodu $f(\tau)$ obsahuje z množiny A pouze jediný bod $f(\tau)$, takže $f(\tau)$ je isolovaný bod množiny A podle **4.7.1**.

8.1.25. Budiž P F-prostor s druhým axiomem spočetnosti.

Pak každá řídce rozložená bodová množina je nejvýš spočetná. Viz **8.1.1**, **8.1.10** a **8.1.24**.

8.1.26. Aby prostor P měl slabou Lindelöfovu vlastnost, k tomu je nutné a stačí, aby každá dobře uspořádaná soustava $\mathfrak{M}$ bodových množin, pro kterou platí

$$(1) \quad X_1 \in \mathfrak{M}, \quad X_2 \in \mathfrak{M}, \quad X_1 \text{ před } X_2 \Rightarrow X_1 \supset X_2, \quad X_1 - \overline{X}_2 \neq \emptyset,$$

byla nejvýš spočetná.

Důkaz. I. Nechť P má slabou Lindelöfovu vlastnost. Předpokládejme, že existuje nespočetná dobře uspořádaná soustava $\mathfrak{M}$ bodových množin, pro kterou platí (1); můžeme předpokládat, že $\emptyset$ nenáleží do $\mathfrak{M}$. Je-li $X \in \mathfrak{M}$ a není-li X poslední v $\mathfrak{M}$, pak ze všech prvků $\mathfrak{M}$, které leží za X, je jeden první; označme jej X^*. V každé $X \in \mathfrak{M}$ zvolme bod $\varphi(X) \in X$; není-li X poslední v $\mathfrak{M}$, pak podle (1) můžeme předpokládat, že $\varphi(X) \in X - \overline{X}^*$. Jestliže $X_1 \in \mathfrak{M}$ leží před $X_2 \in \mathfrak{M}$, jest $\varphi(X_1) \in P - \overline{X}_1^*$, $\varphi(X_2) \in X_2$ a podle (1) jest $X_2 \subset X_1^*$, takže $\varphi(X_1) \neq \varphi(X_2)$. Tudíž mohutnost množiny M všech bodů $\varphi(X)$ $(X \in \mathfrak{M})$ je rovna moh $\mathfrak{M}$, takže M je nespočetná. Budiž $\emptyset \neq M_0 \subset M$. V soustavě těch $\varphi(X)$ $(X \in \mathfrak{M})$, pro které $\varphi(X) \in M_0$, existuje první prvek X_0. Jestliže X_0 je poslední v $\mathfrak{M}$, skládá se M_0 z jediného bodu $\varphi(X_0)$, takže $\varphi(X_0)$ je v tomto případě isolovaný bod množiny M_0. Jestliže X_0 není poslední v $\mathfrak{M}$ a jestliže $\varphi(X) \in M_0$, $X \neq X_0$, plyne z (1), že $X \subset X_0^*$, takže: $\varphi(X) \in X \Rightarrow \varphi(X) \subset X_0^*$. Avšak $\varphi(X_0) \in P - \overline{X}_0^*$, takže $U = P - \overline{X}_0^*$ je okolí bodu $\varphi(X_0)$, které má tu vlastnost, že $M_0 \cap U$ obsahuje jediný bod $\varphi(X_0)$. Tudíž $\varphi(X_0)$ je isolovaný bod množiny M_0. Avšak M_0 byla libovolná neprázdná část množiny M, takže M je řídce rozložená. Podle **8.1.24** je M nejvýš spočetná a to je spor.

II. Nechť soustava $\mathfrak{A}$ pokrývá bodovou množinu Q, avšak nechť žádná její nejvýš spočetná podsoustava nezakrývá Q. Máme udat nespočetnou dobře uspořádanou soustavu $\mathfrak{M}$ bodových množin s vlastností (1). Uvažujme zobrazení f nespočetné dobře uspořádané množiny T do množiny Q, které jsme zavedli v části III důkazu věty **8.1.20**. Každému $\tau \in T$ přiřaďme množinu $M(\tau)$ všech těch $f(t) \in Q$, pro něž $t \in T$ buďto je rovné τ nebo leží za τ. Je-li

$$\tau \text{ před } t \Leftrightarrow M(\tau) \text{ před } M(t),$$

pak soustava $\mathfrak{M}$ všech $M(\tau)$ $(\tau \in T)$ je nespočetná soustava bodových množin, která má vlastnost (1), neboť jestliže $\tau \in T$ leží před $t \in T$, pak předně je zřejmé, že $M(\tau) \supset M(t)$ a za druhé podle citovaného důkazu okolí $U[f(\tau)]$ bodu $f(\tau)$ neobsahuje žádný bod množiny $M(t)$, takže $f(\tau) \in M(\tau) - \overline{M(t)}$ (viz **4.2.9**).

8.1.27. Aby F-prostor P měl Lindelöfovu vlastnost, k tomu je nutné a stačí, aby každá sestupně dobře uspořádaná soustava uzavřených bodových množin byla nejvýš spočetná. Sestupně dobře uspořádaná soustava $\mathfrak{M}$ uzavřených bodových množin má zřejmě vlastnost (1). Jestliže dobře uspořádaná soustava $\mathfrak{M}$ jakýchkoli bodových množin má vlastnost (1), pak moh $\mathfrak{M}$ = moh $\mathfrak{M}^*$, jestliže $\mathfrak{M}^*$ je soustava všech $\overline{X}$ $(X \in \mathfrak{M})$; mimo to je pak $\mathfrak{M}^*$ sestupně dobře uspořádaná soustava uzavřených bodových množin. Proto naše věta plyne z **8.1.26**.

8.1.28. Budiž P F-prostor, jehož každé pokrytí obsahuje nejvýš spočetné pokrytí. Nechť každá otevřená množina je F_σ-množina. Pak P má Lindelöfovu vlastnost. Nechť $Q \subset P$ a nechť soustava $\mathfrak{A}$ bodových množin pokrývá Q. Podle **8.1.3** existuje taková soustava $\mathfrak{G}$ otevřených množin, že $\mathfrak{G}$ pokrývá Q a že ke každé $G \in \mathfrak{G}$ existuje $\varphi(G) \in \mathfrak{A}$, $\varphi(G) \supset G$. Budiž $M = \bigcup G$ $(G \in \mathfrak{G})$, takže $M \supset Q$: M je otevřená množina, takže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ s uzavřenými F_n. Pro každé n je $P = (P - F_n) \cup \bigcup G$ $(G \in \mathfrak{A})$ a množina $P - F_n$ je otevřená. Podle **8.1.2** vznikne tudíž z $\mathfrak{G}$ připojením množiny $P - F_n$ pokrytí prostoru P, ve kterém musí být obsaženo nejvýš spočetné pokrytí. Z toho plyne snadno, že existuje nejvýš spočetná $\mathfrak{H}_n \subset \mathfrak{G}$, která pokrývá množinu F_n. Je-li $\mathfrak{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}_n$, je $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, soustava $\mathfrak{H}$ je nejvýš spočetná a pokrývá množinu M a tedy též množinu $Q \subset M$. Soustava všech $\varphi(G)$ $(G \in \mathfrak{H})$ je obsažena v soustavě $\mathfrak{A}$, je nejvýš spočetná a pokrývá Q.

8.1.29. Nechť FR-prostor P má Lindelöfovu vlastnost. Pak každá otevřená množina je F_σ-množina. Budiž G otevřená množina. Pro každý $x \in G$ je G okolím bodu x podle **4.4.13.** Protože P je

R-prostor, existuje takové okolí $U(x)$ bodu x, že $\overline{U(x)} \subset G$. Soustava všech množin $U(x)$ $(x \in G)$ pokrývá G, takže existuje taková nejvýš spočetná $S \subset G$, že soustava všech množin $U(x)$ $(x \in S)$ pokrývá G. Podle **8.1.1** je $G = \bigcup U(x)$ $(x \in S)$. Zřejmě je též $G = \bigcup \overline{U(x)}$ $(x \in S)$. Protože S je nejvýš spočetná, je G F_σ-množina.

8.1.30. Aby v každé bodové množině Q prostoru P byla obsažena nejvýš spočetná množina hustá v Q, k tomu je nutné a stačí, aby každá dobře uspořádaná soustava $\mathfrak{M}$ bodových množin s vlastností

(2) $X_1 \in \mathfrak{M}, \quad X_2 \in \mathfrak{M}, \quad X_1$ před $X_2 \Rightarrow X_1 \subset X_2, \quad X_2 - \overline{X}_1 \neq \emptyset$

byla nejvýš spočetná.

Důkaz. I. Nechť v každé bodové množině Q je obsažena nejvýš spočetná množina hustá v Q. Předpokládejme, že existuje dobře uspořádaná nespočetná soustava $\mathfrak{M}$ bodových množin s vlastností (2). Podle **3.6.2** existuje normálně uspořádaná množina T mohutnosti $\aleph_1$. Všecky úseky dobře uspořádané množiny T jsou spočetné, takže žádný z nich není podobný $\mathfrak{M}$. Tudíž ze **3.4.6** plyne, že T je podobná soustavě $\mathfrak{M}_0$, kde buďto $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ nebo $\mathfrak{M}_0$ je úsek dobře uspořádané soustavy $\mathfrak{M}$. Zřejmě moh $\mathfrak{M}_0 = \aleph_1$, $\mathfrak{M}_0$ je normálně uspořádána a vlastnost (2) platí též pro $\mathfrak{M}_0$ (místo $\mathfrak{M}$). Podle **3.7.7** není v $\mathfrak{M}_0$ posledního prvku; protože $\mathfrak{M}_0$ je dobře uspořádána, existuje ke každé $X \in \mathfrak{M}_0$ takový prvek soustavy $\mathfrak{M}_0$, který v $\mathfrak{M}_0$ leží přímo za X a který označíme X^*. Protože $\mathfrak{M}_0$ má vlastnost (2), můžeme pro každou $X \in \mathfrak{M}_0$ zvolit bod $\varphi(X) \in X^* - \overline{X}$. Označme Q množinu všech bodů $\varphi(X)$ $(X \in \mathfrak{M}_0)$. Existuje nejvýš spočetná $S \subset Q$ hustá v Q. Mohutnost $\aleph_1$ je podle **3.7.6** a **3.8.7** regulární, takže podle **3.8.5** je $\mathfrak{M}_0$ regulárně uspořádána. Existuje taková nejvýš spočetná $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}_0$, že S je množina všech bodů $\varphi(X)$ $(X \in \mathfrak{S})$. Protože $\mathfrak{M}_0$ je nespočetná a regulárně uspořádaná, není $\mathfrak{S}$ konfinální s $\mathfrak{M}_0$; tudíž existuje taková $X_0 \in \mathfrak{M}_0$, která leží za všemi $X \in \mathfrak{S}$. Z vlastnosti (2) soustavy $\mathfrak{M}_0$ pak plyne: $X \in \mathfrak{S} \Rightarrow X^* \subset X_0$; protože $\varphi(X) \in X^*$, je tedy $S \subset X_0$ a tudíž $\overline{S} \subset \overline{X}_0$; naproti tomu je $\varphi(X_0) \in P - \overline{X}_0$. Tudíž je $Q \cap \overline{S} \neq Q$, tj. S není hustá v Q a to je spor.

II. Nechť každá soustava $\mathfrak{M}$ bodových množin, pro kterou platí (2), je nejvýš spočetná. Předpokládejme, že žádná nejvýš spočetná množina není hustá v množině $Q \subset P$. Pak můžeme každé nejvýš spočetné množině $S \subset Q$ přiřadit bod $\varphi(S) \in Q - \bar{S}$. Podle **3.6.2** existuje normálně uspořádaná množina T mohutnosti $\aleph_1$. Pro každé $t \in T$ je úsek $A(t)$ množiny T podle **3.7.6** nejvýš spočetný. Proto ze **3.5.2** plyne, že lze každému $t \in T$ přiřadit bod $\psi(t) \in Q$ tak, že pro každé $t \in T$ je $\psi(t) = \varphi[S(t)]$, kde $S(t)$ znamená množinu všech bodů $\psi(\tau)$ $[\tau \in A(t)]$. Jestliže $t \in T$ leží za $\tau \in T$, jest $\psi(\tau) \in S(t)$, $\psi(\tau) \in Q - \overline{S(\tau)}$, takže $S(t) \neq S(\tau)$. Z toho plyne, že soustava $\mathfrak{M}$ bodových množin $S(t)$ $(t \in T)$ je nespočetná. Předpis

$$S(\tau) \text{ před } S(t) \Leftrightarrow \tau \text{ před } t$$

definuje dobré uspořádání soustavy $\mathfrak{M}$, o kterém se snadno zjistí, že má vlastnost (2). To je spor, neboť $\mathfrak{M}$ je nespočetná.

8.1.31. Aby v každé bodové množině Q F-prostoru P byla obsažena nejvýš spočetná množina hustá v Q, k tomu je nutné a stačí, aby každá vzestupně dobře uspořádaná soustava uzavřených množin byla nejvýš spočetná. Vzestupně dobře uspořádaná soustava $\mathfrak{M}$ uzavřených bodových množin má zřejmě vlastnost (2). Jestliže dobře uspořádaná soustava $\mathfrak{M}$ jakýchkoli bodových množin má vlastnost (2), pak moh $\mathfrak{M}^* =$ moh $\mathfrak{M}$, jestliže $\mathfrak{M}^*$ je soustava všech $\bar{X}$ $(X \in \mathfrak{M})$; mimo to je pak $\mathfrak{M}^*$ vzestupně dobře uspořádaná soustava uzavřených bodových množin. Proto naše věta plyne z **8.1.30.**

8.1.32. Budiž P F-prostor s druhým axiomem spočetnosti. Každá sestupně nebo vzestupně dobře uspořádaná soustava uzavřených množin je nejvýš spočetná. Viz **8.1.1, 8.1.10, 8.1.27** a **4.6.10, 4.12.18, 4.12.21** a **8.1.31.**

8.2. Spočetně kompaktní prostory

Definice **8.2.1.** Pravíme, že prostor P je *spočetně kompaktní* nebo stručněji *S-kompaktní*, jestliže každé spočetné pokrytí obsahuje konečné zakrytí; konečné prostory (také $\emptyset$) počítáme mezi S-kompaktní prostory. Pravíme, že bodová množina $Q \subset P$ je S-kompaktní, jestliže Q jakožto vnořený prostor je S-kompaktní.

8.2.1. Budiž Q uzavřená množina v S-kompaktním prostoru P. Pak Q je S-kompaktní. Je-li $\mathfrak{S}$ spočetné pokrytí vnořeného prostoru Q, pak podle **8.1.4** existuje v prostoru P nejvýš spočetná soustava $\mathfrak{M}$ bodových množin, která pokrývá množinu Q a pro kterou platí: $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow Q \cap X \in \mathfrak{S}$. Připojením otevřené množiny $P - Q$ vznikne z $\mathfrak{M}$ podle **4.4.13** nejvýš spočetné pokrytí prostoru P. Protože P je S-kompaktní, existuje konečně mnoho takových množin $M_i \in \mathfrak{M}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, že $(P - Q) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} M_i) = P$. Jest $\bigcup_{i=1}^{n} (Q \cap M_i) = Q$, $Q \cap$ $\cap M_i \in \mathfrak{S}$.

8.2.2. Jsou-li Q_i $(1 \leqq i \leqq n)$ S-kompaktní bodové množiny v konečném počtu, je také $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ S-kompaktní. Můžeme předpokládat, že $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i = P$. Je-li $\mathfrak{S}$ spočetné pokrytí prostoru P, pak průniky $Q_i \cap X$ $(X \in \mathfrak{S})$ podle **8.1.5** tvoří nejvýš spočetné pokrytí množiny Q_i. Protože Q_i je S-kompaktní, existuje konečná soustava $\mathfrak{K}_i \subset \mathfrak{S}$, pro kterou je $Q_i = \bigcup (Q_i \cap X)$ $(X \in \mathfrak{K}_i)$. Je-li $\mathfrak{K} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{K}_i$, pak $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$ je konečná soustava a jest $P = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{K})$.

8.2.3. Aby prostor P byl S-kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \neq \emptyset$ pro každou posloupnost $\{M_n\}$ bodových množin, pro kterou je $\emptyset \neq M_n \supset M_{n+1}$ pro všecka n.

Důkaz. I. Budiž $\emptyset \neq M_n \supset M_{n+1}$ pro všecka n, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \emptyset$. Budiž $\mathfrak{S}$ soustava množin $P - M_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Je-li $x \in P$, pak z předpokladu $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \emptyset$ plyne, že existuje index n, pro který $x \in P - \overline{M}_n$ neboli pro který je $P - M_n$ okolím bodu x. Tudíž $\mathfrak{S}$ je nejvýš spočetné pokrytí prostoru P. Je-li soustava $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$ konečná, existuje takový index k, že $P - M_n \in \mathfrak{K} \Rightarrow n \leqq k$. Avšak $n \leqq k \Rightarrow M_n \supset M_k$, takže pro $X \in \mathfrak{K}$ máme $\bigcup X \subset P - M_k \neq P$. Tudíž P není S-kompaktní.

II. Jestliže P není S-kompaktní, pak existuje takové spočetné pokrytí $\mathfrak{S}$ prostoru P, že $P \neq \bigcup X$ ($X \in \mathfrak{K}$) pro každou konečnou $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$. Soustava $\mathfrak{S}$ se skládá z množin S_n ($n \in \mathbf{N}$). Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $M_n = P - \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Pak je $\emptyset \neq M_n \supset M_{n+1}$ pro všecka n; máme dokázat, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \emptyset$. Nechť naopak $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n$. Existuje takové n, že S_n je okolí bodu a. Pak je $a \in P - \overline{P - S_n}$, $P - S_n \supset M_n$ a tedy $a \in P - \overline{M}_n$ a to je spor.

8.2.4. Každé spočetné pokrytí S-kompaktního F-prostoru obsahuje konečné pokrytí. Viz **8.1.2**, **8.1.3** a definici **8.2.1**.

8.2.5. Aby F-prostor P byl S-kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ pro každou posloupnost $\{F_n\}$ uzavřených množin, pro kterou je $\emptyset \neq F_n \supset F_{n+1}$ pro všecka n.

Důkaz. I. Nechť P je S-kompaktní. Je-li $\{F_n\}$ taková posloupnost uzavřených množin, že $\emptyset \neq F_n \supset F_{n+1}$, jest $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ podle **8.2.3.** (Zde ještě nepotřebujeme předpoklad, že P je F-prostor.)

II. Nechť P není S-kompaktní. Podle **8.2.3** existuje taková posloupnost $\{M_n\}$ bodových množin, že $\emptyset \neq M_n \supset M_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \emptyset$. Množiny $F_n = \overline{M}_n$ jsou uzavřené a jest $\emptyset \neq F_n \supset F_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

8.2.6. Aby prostor P byl S-kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $M' \neq \emptyset$ pro každou nekonečnou $M \subset P$.

Důkaz. I. Nechť P není S-kompaktní. Podle **8.2.3** existuje taková posloupnost $\{M_n\}$ bodových množin, že $\emptyset \neq M_n \supset M_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \emptyset$. Pro každé n zvolíme $a_n \in M_n$ a označíme M množinu všech a_n ($n \in \mathbf{N}$). Kdyby pro nějaký bod b bylo $b = a_n$ pro nekonečně mnoho n, pak by ke každému n existovalo takové $k > n$, že $a_k = b$ a bylo by $b \in M_k \subset M_n$, tedy $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ a to je spor. Tudíž množina M je nekonečná

Předpokládejme, že $c \in M'$. Je-li U libovolné okolí bodu c, pak podle **4.2.11** existuje nekonečně mnoho takových n, že $a_n \in U$. Potom však pro každé $n \in \mathbf{N}$ existuje takové k, že $k > n$, $a_k \in U$; jest $a_k \in U \cap M_k$, $M_k \subset M_n$. Tudíž $U \cap M_n \neq \emptyset$ pro každé okolí U bodu c a tedy (viz **4.2.9**) $c \in \overline{M}_n$ pro všecka n, tj. $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n$ a to je spor. Tudíž $M' = \emptyset$.

II. Nechť množina $M \subset P$ je nekonečná a nechť $M' = \emptyset$. Existuje taková prostá bodová posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in M$ pro všecka n. Pro každé n budiž M_n množina všech a_i, kde $i > n$. Pak je $\emptyset \neq M_n \supset \supset M_{n+1}$ a podle **8.2.3** stačí dokázat, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = \emptyset$. Nechť naopak $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n$. Je-li U okolí bodu c, pak podle **4.2.9** je $U \cap M_n \neq \emptyset$ pro všecka n a to znamená, že $a_n \in U$ pro nekonečně mnoho n. Protože $a_n \in M$ a protože posloupnost $\{a_n\}$ je prostá, je $U \cap M$ nekonečná množina pro každé okolí U bodu c, takže $c \in M'$ podle **4.2.11** a to je spor.

8.2.7. Nechť z každé bodové posloupnosti prostoru P lze vybrat konvergentní posloupnost. Pak P je S-kompaktní. Budiž $M \subset P$ nekonečná množina. Existuje taková prostá posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in M$ pro všecka n. Z $\{a_n\}$ lze vybrat konvergentní $\{a_{i_n}\}$; budiž $c = \lim_{n \to \infty} a_{i_n}$; můžeme předpokládat, že $c \neq a_{i_n}$ pro všecka n. Je-li H množina všech a_{i_n}, je $c \in \overline{H}$ podle **6.3.7**; avšak $H \subset M - (c)$, tedy $c \in \overline{M - (c)}$ podle **4.1.1**, tj. $c \in M'$. Tím je dokázáno, že $M' \neq \emptyset$ pro každou nekonečnou $M \subset P$, takže P je S-kompaktní podle **8.2.6.**

8.2.8. Budiž P S-kompaktní L-prostor. Z každé bodové posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost. Budiž $\{a_n\}$ libovolná bodová posloupnost a budiž H množina všech a_n. Je-li H konečná, lze z $\{a_n\}$ vybrat konvergentní posloupnost podle **6.3.2.** Je-li H nekonečná, pak podle **8.2.6** existuje bod $c \in \overline{H - (c)}$ a podle **6.3.8** existuje taková posloupnost $\{b_n\}$, že $b_n \in H - (c)$ pro všecka n, $\lim b_n = c$. Ze **6.3.2** a **6.3.3** snadno plyne, že z $\{b_n\}$ lze vybrat prostou posloupnost, a z toho plyne, že existuje posloupnost $\{a_{i_n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$ i z $\{b_n\}$. Podle **6.3.3** je $\lim_{n \to \infty} a_{i_n} = c$.

8.2.9. Budiž P L-prostor; $Q \subset P$ budiž S-kompaktní. Pak Q je uzavřená množina. Budiž $c \in \overline{Q}$; máme dokázat, že je $c \in Q$. Podle **6.3.8** existuje taková posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in Q$ pro všecka n a že $\lim a_n = c$ v prostoru P. Podle **8.2.8** existuje taková posloupnost $\{a_{i_n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$ a takový bod $b \in Q$, že je $\lim a_{i_n} = b$ v prostoru Q. Podle **6.3.6** je $\lim a_{i_n} = b$ také v prostoru P. Tudíž je $b = c$ podle **6.3.1** a **6.3.3**, tj. $c \in Q$.

8.2.10. Budiž P L-prostor. Budiž $\mathsf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathsf{C}$ budiž $Q(z) \subset P$ S-kompaktní množina. Budiž $R = \bigcap Q(z)$ $(z \in \mathsf{C})$. Pak také R je S-kompaktní. Zvolme $z_0 \in \mathsf{C}$. Množina $Q(z)$ je podle **8.2.9** uzavřená pro každé $z \in \mathsf{C}$ a tedy též R je uzavřená podle **4.4.5.** Zřejmě $R = Q(z_0) \cap R$, takže R je relativně uzavřená ve vnořeném prostoru $Q(z_0)$ podle **4.6.4.** Tudíž R je S-kompaktní podle **8.2.1.**

8.2.11. Budiž P S-kompaktní prostor. Budiž f spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pak také P_1 je S-kompaktní. Budiž $\mathfrak{S}$ spočetné pokrytí prostoru P_1. Ze **7.1.1** snadno plyne, že množiny $f^{-1}(X)$ $(X \in \mathfrak{S})$ tvoří spočetné pokrytí prostoru P. Tudíž existuje taková konečná soustava $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$, že $P = \bigcup f^{-1}(X)$ $(X \in \mathfrak{K})$. Zřejmě $P_1 = \bigcup X$ $(X \in \mathfrak{K})$.

8.2.12. Budiž $\mathsf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathsf{C}$ budiž $P(z)$ neprázdný prostor. Budiž $R = \mathfrak{P}P(z)$ $(z \in \mathsf{C})$. Je-li R S-kompaktní, pak každý $P(z)$ $(z \in \mathsf{C})$ je S-kompaktní. Zvolme $z_0 \in \mathsf{C}$ a položme $f(x) = x(z_0)$ pro každý bod $x \in R$. Ze **7.1.1** plyne snadno, že f je spojité zobrazení prostoru R na $P(z_0)$, takže $P(z_0)$ je S-kompaktní podle **8.2.11.**

8.2.13. Budiž $z_0 \in \mathsf{C}$; množina C budiž nejvýš spočetná. Pro každé $z \in \mathsf{C}$ budiž $P(z)$ S-kompaktní prostor. Budiž $R = \mathfrak{P}P(z)$ $(z \in \mathsf{C})$. Pro každé $z \in \mathsf{C} - (z_0)$ budiž $P(z)$ L-prostor. Pak P je S-kompaktní.

Poznámka. Kartézský součin dvou S-kompaktních prostorů nemusí být S-kompaktní (viz Dodatek I, § 3).

Důkaz. Triviální případ $\mathsf{C} = (z_0)$ můžeme vyloučit; tudíž existuje taková posloupnost $\{z_k\}_1^\infty$, že $\mathsf{C} - (z_0)$ je množina všech jejích členů. Budiž $M \subset R$ nekonečná množina; podle **8.2.6** máme dokázat, že

$M' \neq \emptyset$. Existuje taková prostá posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in M$ pro všecka n. Protože $\{a_n(z_1)\}$ je bodová posloupnost v S-kompaktním L-prostoru $P(z_1)$, existuje podle **8.2.8** taková rostoucí posloupnost $\{\varphi_1(n)\}_1^\infty$ celých kladných čísel, že posloupnost $\{a_{\varphi_1(n)}(z_1)\}_1^\infty$ má limitu $b_1 \in P(z_1)$. Jestliže při určitém $k \in \mathbf{N}$ je už dána rostoucí posloupnost $\{\varphi_k(n)\}_{n=1}^\infty$ celých kladných čísel, pak podle **8.2.8** lze z ní vybrat takovou posloupnost $\{\varphi_{k+1}(n)\}_{n=1}^\infty$, že posloupnost $\{a_{\varphi_{k+1}(n)}(z_{k+1})\}_{n=1}^\infty$ má limitu $b_{k+1} \in P(z_{k+1})$. Pro každé $k \in \mathbf{N}$ položme $i_k = \varphi_k(k)$, takže pro každé $k \in \mathbf{N}$ je $\{i_n\}_{n=k}^\infty$ posloupnost vybraná z $\{\varphi_k(n)\}_{n=1}^\infty$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n}(z_k) = b_k$ pro každé $k \in \mathbf{N}$ podle **6.3.3** a **6.3.11**. Jestliže v posloupnosti $\{a_{i_n}(z_0)\}_{n=1}^\infty$ počet navzájem různých členů je konečný, pak existuje takový bod $b(z_0) \in P(z_0)$, že $a_{i_n}(z_0) = b(z_0)$ pro nekonečně mnoho n; jestliže však množina H všech členů posloupnosti $\{a_{i_n}(z_0)\}_{n=1}^\infty$ je nekonečná, budiž $b(z_0) \in P(z_0)$ nějaký hromadný bod množiny H; takový bod existuje podle **8.2.6**, protože $P(z_0)$ je S-kompaktní. Pro $z \in \mathbf{C} - z_0$ můžeme určit $k \in \mathbf{N}$ tak, že $z = z_k$, a položit $b(z) = b_k$. Nyní máme pro každé $z \in \mathbf{C}$ definován bod $b(z) \in P(z)$ a můžeme uvažovat bod $b \in R$, jehož souřadnicemi jsou body $b(z)$. Budiž U okolí bodu $b \in R$. Podle definice **6.2.1** existuje taková konečná množina $K \subset \mathbf{C}$, že $U \supset \mathfrak{P}_z V(z)$, kde $V(z)$ pro $z \in K$ je vhodně volené okolí bodu $b(z) \in P(z)$, a pro $z \in \mathbf{C} - K$ je $V(z) = P(z)$. Podle definice bodu $b(z_0)$ plyne ze **4.2.3** a **4.2.11**, že existuje taková nekonečná množina $S \subset \mathbf{N}$, že $n \in S \Rightarrow a_{i_n}(z_0) \in V(z_0)$. Pro $z \in K - (z_0)$ existuje podle definice **6.3.1** takový index $k(z)$, že $n > k(z) \Rightarrow a_{i_n}(z) \in V(z)$. Protože $K \subset \mathbf{C}$ je konečná a $S \subset \mathbf{N}$ je nekonečná, existuje taková nekonečná množina $S_0 \subset S$, že: $z \in K - (z_0)$, $n \in S_0 \Rightarrow n > k(z)$. Pak platí: $n \in S_0$, $z \in K \Rightarrow a_{i_n}(z) \in V(z)$, a tedy: $n \in S_0 \Rightarrow a_{i_n} \in U$. Protože $\{a_n\}$ je prostá, S_0 je nekonečná a protože $a_n \in M$ pro všecka n, je množina $U \cap M$ nekonečná pro každé okolí U bodu b, a tudíž $b \in M'$ podle **4.2.11**.

8.2.14. Bodová množina $Q \subset \mathbf{E}_n$ je S-kompaktní právě tehdy, jestliže je omezená a uzavřená.

Důkaz. I. Je-li $Q \subset \mathbf{E}_n$ neomezená, pak pro každé $k \in \mathbf{N}$ existuje bod $a_k \in Q$, který má aspoň jednu souřadnici absolutně větší než k. Množina $M \subset Q$ všech a_k je nekonečná a ze **4.2.11** plyne snadno, že

$M' = \emptyset$, takže podle **8.2.6** Q není S-kompaktní. Jestliže $Q \subset \mathbf{E}_n$ není uzavřená, pak Q není S-kompaktní podle **6.3.21** a **8.2.9.**

II. Je-li $Q \subset \mathbf{E}_1$ omezená a je-li $\{a_k\}$ posloupnost obsažená v Q, je známo z elementů matematické analysy, že z $\{a_k\}$ lze vybrat konvergentní posloupnost $\{a_{i_k}\}$. Je-li Q uzavřená, pak limita b posloupnosti $\{a_{i_k}\}$ náleží do Q podle **6.3.7**, takže podle **6.3.4** a **8.2.7** Q je S-kompaktní. Zejména je interval $J_1(c) = \mathscr{E}_t\,[-c \leqq t \leqq c]$ S-kompaktní pro každé $c \in \mathbf{E}_1$, $c > 0$. Protože $\mathbf{E}_1$ je L-prostor (viz **6.3.21**), plyne z **8.2.13**, že kartézský součin $J_n(c)$ n takových intervalů je S-kompaktní. Jestliže nyní $Q \subset \mathbf{E}_n$ je omezená, lze zvolit c tak, že $Q \subset J_n(c)$; je-li Q uzavřená, je Q relativně uzavřená v $J_n(c)$ podle **4.6.4**, a tudíž S-kompaktní podle **8.2.1.**

8.2.15. Budiž $P \neq \emptyset$ S-kompaktní prostor. Budiž f spojitá funkce v oboru P. Pak existují takové body $a \in P$, $b \in P$, že

$$x \in P \Rightarrow f(a) \leqq f(x) \leqq f(b)\,.$$

Číselná množina $f^1(P) \neq \emptyset$ je podle **8.2.11** a **8.2.14** omezená a uzavřená, takže, jak známo, existuje v množině $f^1(P)$ nejmenší i největší číslo.

8.2.16. Budiž P S-kompaktní F-prostor; budiž a H-bod; budiž $\chi(a) \leqq \aleph_0$. Pak a je R-bod. Podle **4.5.6** a **4.12.16** existuje taková posloupnost $\{U_n\}$ otevřených množin, že $U_n \supset U_{n+1}$ a že její členy tvoří úplnou soustavu okolí bodu a. Podle definice **5.2.2** je $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = (a)$. Budiž G otevřené okolí bodu a. Stačí dokázat, že $\overline{U}_n \subset G$ pro vhodné n. Není-li tomu tak, jest $\overline{U}_n - G \neq \emptyset$ pro všecka n; avšak $\overline{U}_n - G \supset \supset \overline{U}_{n+1} - G$ a množiny $\overline{U}_n - G = \overline{U}_n \cap (P - G)$ jsou uzavřené, takže $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{U}_n - G) \neq \emptyset$ podle **8.2.5.** To je spor, neboť $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = (a)$, $a \in G$.

8.2.17. Budiž P S-kompaktní prostor; budiž a R-bod; budiž $\psi(a) \leqq \aleph_0$. Pak je $\chi(a) \leqq \aleph_0$. Podle definic **4.12.2** a **5.3.1** existuje taková posloupnost $\{U_n\}$ okolí bodu a, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = (a)$. Budiž $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, takže V_n jsou okolí bodu a podle **4.2.5.** Budiž W okolí bodu a; stačí dokázat, že $W \supset V_n$ pro vhodné n. Není-li tomu tak, je $\emptyset \neq V_n - W \supset \supset V_{n+1} - W$ pro všecka n. Podle **8.2.3** existuje bod $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n - W}$. Jest

$c \in \overline{P - W}$, avšak $a \in P - \overline{P - W}$, jelikož W je okolí bodu a. Tedy $c \neq a$ a to je spor, neboť $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{V}_n - W} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n = (a)$.

8.2.18. Buďtež u, v dvě topologie v množině P; budiž u jemnější než v. Je-li (P, u) S-kompaktní a je-li (P, v) L-prostor, jest $u = v$. Je-li $u \neq v$, pak existuje množina $M \subset P$ a bod $a \in vM - uM$. Protože $a \in vM$, existuje podle **6.3.8** taková posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in M$ pro všecka n a že $\lim a_n = a$ ve smyslu topologie v. Je-li M_0 množina všech a_n, je $M_0 \subset M$ a ze **6.3.2**, **6.3.3** a **6.3.8** plyne snadno, že a je jediný v-hromadný bod množiny M_0. Podle **4.1.5** je M_0 nekonečná; u-hromadný bod množiny M_0 by zřejmě byl jejím v-hromadným bodem a tedy by byl roven a. Avšak $M_0 \subset M$, $a \in P - uM$, takže a není u-hromadným bodem množiny M_0. Tedy nekonečná množina M_0 nemá u-hromadný bod. Protože (P, u) je S-kompaktní, je to spor proti **8.2.6.**

8.2.19. Budiž P S-kompaktní FR-prostor. Budiž $Q \subset P$ hustě rozložená G_δ-množina. Pak je moh $Q \geqq \exp \aleph_0$.

Důkaz. I. Existují takové otevřené $G_n \subset P$, že $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

II. Nechť indexy $i_1, i_2, i_3, \ldots$ nezávisle jeden na druhém nabývají hodnot 0, 1. Určíme rekurentně body $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in Q$ a otevřené množiny $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ tak, aby bylo

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in V_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \quad \overline{V}_{i_1 i_2 \ldots i_n 0} \cap \overline{V}_{i_1 i_2 \ldots i_n 1} = \emptyset,$$
$$\overline{V}_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} \subset V_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \quad V_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset G_n.$$

Protože Q je hustě rozložená, je Q nekonečná. Tudíž v množině Q existují dva různé body a_0, a_1. Podle **5.1.15** a **5.3.4** existují takové dvě otevřené množiny U_0, U_1, že $a_0 \in U_0$, $a_1 \in U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Pak je $U_0 \cap G_1$ okolí bodu a_0 podle **4.4.11** a **4.4.13**; protože P je FR-prostor, existuje taková otevřená V_0, že $a_0 \in V_0$, $\overline{V}_0 \subset U_0 \cap G_1$. Podobně existuje taková otevřená V_1, že $a_1 \in V_1$, $\overline{V}_1 \subset U_1 \cap G_1$. Jest $a_{i_1} \in V_{i_1}$, $\overline{V}_0 \cap \overline{V}_1 = \emptyset$, $V_{i_1} \subset G_1$. Nechť nyní pro určité n jsou už dány body $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in Q$ a otevřené množiny $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ tak, že $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. Pak podle **4.4.13** je $V_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ okolí bodu $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in Q$ a protože Q je hustě rozložená, existují podle **4.2.11** a **4.7.6** v množině $Q \cap V_{i_1 i_2 \dots i_n}$ dva navzájem různé body $a_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$, $a_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$. Podle **5.1.15** a **5.3.4** existují takové dvě otevřené množiny $U_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$, $U_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$, že $a_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \in U_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}$, $U_{i_1 i_2 \dots i_n 0} \cap U_{i_1 i_2 \dots i_n 1} = \emptyset$. Množina $V_{i_1 i_2 \dots i_n} \cap U_{i_1 i_2 \dots i_n 0} \cap G_{n+1}$ je okolí bodu $a_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$ podle **4.4.11** a **4.4.13**; protože P je FR-prostor, existuje taková otevřená $V_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$, že $a_{i_1 i_2 \dots i_n 0} \in V_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$, $\overline{V}_{i_1 i_2 \dots i_n 0} \subset V_{i_1 i_2 \dots i_n} \cap \cap U_{i_1 i_2 \dots i_n 0} \cap G_{n+1}$. Podobně existuje taková otevřená $V_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$, že $a_{i_1 i_2 \dots i_n 1} \in V_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$, $\overline{V}_{i_1 i_2 \dots i_n 1} \subset V_{i_1 i_2 \dots i_n} \cap U_{i_1 i_2 \dots i_n 1} \cap G_{n+1}$. Nyní můžeme stejně pokračovat dál (berouce $n + 1$ místo n).

III. Položme $F_{i_1 i_2 i_3 \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Podle **8.2.5** existuje bod $b_{i_1 i_2 i_3 \dots} \in \in F_{i_1 i_2 i_3 \dots}$. Protože $\overline{V}_{i_1 i_2 \dots i_n 0} \cap \overline{V}_{i_1 i_2 \dots i_n 1} = \emptyset$, jsou body $b_{i_1 i_2 i_3 \dots}$ všecky navzájem různé. Protože $\overline{V}_{i_1 i_2 \dots i_n} \subset G_n$, je $b_{i_1 i_2 i_3 \dots} \in Q$. Jestliže nyní každé množině $T \subset \mathbf{N}$ přiřadíme ten bod $b_{i_1 i_2 i_3 \dots}$, pro který

$$n \in T \Rightarrow i_n = 1\,, \quad n \in \mathbf{N} - T \Rightarrow i_n = 0\,,$$

dostaneme prosté zobrazení soustavy $\mathfrak{N}$ všech částí množiny $\mathbf{N}$ do množiny Q. Tudíž moh $Q \geqq$ moh $\mathfrak{N} = \exp \aleph_0$.

8.2.20. Budiž P S-kompaktní FR-prostor. Budiž $Q \subset P$ G_δ-množina. Budiž $\{G_n\}$ posloupnost v Q hustých a relativně otevřených množin. Budiž $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Pak množina H je v Q hustá. Uzávěr množiny Q v prostoru P je FR-prostor podle **4.6.10** a **5.3.2** a je S-kompaktní podle **8.2.1**. Podle **4.6.9** je Q relativní G_δ-množinou ve vnořeném prostoru $\overline{Q}$. Proto můžeme předpokládat, že $\overline{Q} = P$. Podle **4.6.13** existují takové otevřené Γ_n, že $G_n = Q \cap \Gamma_n$; mimo to existují takové otevřené Δ_n, že $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Množiny G_n jsou husté podle **4.9.8.** Budiž $U_0 \neq \emptyset$ otevřená množina; podle **4.9.1** a **4.9.5** stačí dokázat, že $H \cap U_0 \neq \emptyset$. Protože G_1 je hustá, existuje bod $a_1 \in G_1 \cap U_0 = = Q \cap (\Gamma_1 \cap U_0) \subset \Delta_1 \cap \Gamma_1 \cap U_0$. Množina $\Delta_1 \cap \Gamma_1 \cap U_0$ je okolí bodu a_1 podle **4.4.11** a **4.4.13.** Protože P je FR-prostor, existuje takové otevřené okolí U_1 bodu a_1, že $\overline{U}_1 \subset \Delta_1 \cap \Gamma_1 \cap U_0$. Obecněji předpokládejme, že při určitém $n \in \mathbf{N}$ je dán bod $a_n \in G_n$ a takové otevřené okolí U_n bodu a_n, že $\overline{U}_n \subset \Delta_n \cap \Gamma_n \cap U_{n-1}$. Protože G_{n+1} je hustá, existuje bod $a_{n+1} \in G_{n+1} \cap U_n = Q \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n \subset \Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$. Pak je $\Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$ okolí bodu a_{n+1}; protože P je FR-prostor, existuje takové otevřené okolí U_{n+1} bodu a_{n+1}, že $\overline{U}_{n+1} \subset \Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$. Takto pokračujíce dostaneme takovou posloupnost $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ neprázdných otevřených množin, že $\overline{U}_{n+1} \subset \Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$ pro všecka $n \geqq 0$. Protože P je S-kompaktní, existuje podle **8.2.3** bod $b \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U}_n$. Jest $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (Q \cap \Gamma_n) = H, b \in U_0$; tudíž $H \cap U_0 \neq \emptyset$.

8.2.21. Budiž P S-kompaktní FR-prostor. Budiž $Q \subset P$ G_δ-množina. Budiž M množina první kategorie v Q. Pak $Q - M$ je hustá v Q. Jest $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou řídké v Q. Tudíž relativně otevřené $G_n = Q - (Q \cap \overline{A}_n)$ jsou v Q husté, takže podle **8.2.20** množina $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je v Q hustá. Zřejmě $Q - M \supset H$, takže $Q - M$ je v Q hustá podle **4.9.1**.

8.3. Kompaktní prostory

Definice **8.3.1.** Pravíme, že prostor P je *kompaktní,* jestliže každé pokrytí obsahuje konečné zakrytí. Pravíme, že bodová množina $Q \subset P$ je kompaktní, jestliže Q jakožto vnořený prostor je kompaktní. Mezi kompaktní prostory počítáme též $\emptyset$.

8.3.1. Budiž Q uzavřená množina v kompaktním prostoru P. Pak Q je kompaktní. Dokáže se jako **8.2.1**, jen se vynechá slovo spočetné a místo S-kompaktní se dá kompaktní.

8.3.2. Jsou-li Q_i $(1 \leqq i \leqq n)$ kompaktní bodové množiny v konečném počtu, je také $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ kompaktní. Dokáže se jako **8.2.2** (s vynecháním slova spočetné).

8.3.3. Každý kompaktní prostor je S-kompaktní.

8.3.4. Budiž P S-kompaktní prostor. Jestliže v každém pokrytí je obsaženo spočetné pokrytí, pak P je kompaktní.

8.3.5. S-kompaktní F-prostor s druhým axiomem spočetnosti je kompaktní. Viz **8.1.10** a **8.3.4.**

Definice **8.3.2.** O soustavě $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ bodových množin pravíme, že je *centrovaná,* jestliže $\emptyset \neq \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro každou konečnou a neprázdnou $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{M}$. Volíme-li $\mathfrak{K}$ tak, aby obsahovala jediný prvek, vidíme, že je-li $\mathfrak{M}$ centrovaná, pak všechny množiny $X \in \mathfrak{M}$ jsou $\neq \emptyset$.

8.3.6. Aby prostor P byl kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby pro každou centrovanou soustavu $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ bodových množin bylo $\emptyset \neq \bigcap \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{M})$.

Důkaz. Jsou-li $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$ dvě navzájem doplňkové soustavy bodových množin (tj. $X \in \mathfrak{M}^* \Leftrightarrow P - X \in \mathfrak{M}$), pak je $\emptyset = \bigcap \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{M})$ právě tehdy, jestliže $\mathfrak{M}^*$ je pokrytí. Mimoto je $\emptyset = \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro konečnou $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{M}$ právě tehdy, jestliže příslušná konečná část $\mathfrak{M}^*$ je zakrytí.

Definice **8.3.3.** Pravíme, že bod a je *koncentračním bodem* bodové množiny M (v prostoru P), jestliže pro každé okolí U bodu a je moh $(U \cap M) =$ moh M.

8.3.7. Budiž P kompaktní prostor. Budiž $M \subset P$ nekonečná množina. Pak existuje aspoň jeden $a \in P$, který je koncentračním bodem množiny M. Není-li tomu tak, pak každému $x \in P$ můžeme přiřadit okolí $U(x)$ tak, že moh $[M \cap U(x)] < \mathrm{m}$, kde $\mathrm{m} =$ $=$ moh M. Protože P je kompaktní, můžeme určit konečný počet bodů x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ tak, aby bylo $\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) = P$, a tedy $\bigcup_{i=1}^{n} [M \cap$ $\cap\, U(x_i)] = M$. To je spor, neboť podle **3.7.10** je moh $\bigcup_{i=1}^{n} [M \cap U(x_i)] <$ $< \mathrm{m}$.

8.3.8. Nechť v prostoru P existuje ke každé nekonečné bodové množině aspoň jeden koncentrační bod. Je-li $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ monotónní soustava bodových množin, pak je buďto $\emptyset \in \mathfrak{M}$ nebo $\emptyset \neq \bigcap \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{M})$. Nechť $\emptyset$ není prvkem monotónní soustavy $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ bodových množin. Uvažujme $\mathfrak{M}$ v sestupném uspořádání. Existuje-li poslední prvek $X_0 \in \mathfrak{M}$, pak $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow X \supset X_0$, tedy $\emptyset \neq$

$\neq X_0 \subset \overline{X}_0 \subset \bigcap \overline{X}$ ($X \in \mathfrak{M}$). Nechť tedy $\mathfrak{M}$ nemá poslední prvek. Podle **3.8.3** existuje s $\mathfrak{M}$ konfinální $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{M}$, která je regulárně uspořádána. Zřejmě $\mathfrak{W}$ nemá poslední prvek, takže $\mathfrak{W}$ je nekonečná. Ze **4.1.1** snadno plyne, že $\bigcap \overline{X} = \bigcap \overline{W}$ ($X \in \mathfrak{M}$, $W \in \mathfrak{W}$), takže máme dokázat, že $\emptyset \neq \neq \bigcap \overline{W}$ ($W \in \mathfrak{W}$). Pro každou $W \in \mathfrak{W}$ existuje taková $W^* \in \mathfrak{W}$, která je ve $\mathfrak{W}$ prvním prvkem ležícím za prvkem W. Jest $W \supset W^* \neq W$, a tudíž můžeme každé množině $W \in \mathfrak{W}$ přiřadit bod $\varphi(W) \in W - W^*$. Je-li $W_1 \in \mathfrak{W}$, $W_2 \in \mathfrak{W}$, W_1 před W_2, pak je $\varphi(W_1) \in P - W_1^*$, $\varphi(W_2) \in \in W_2 \subset W_1^*$, takže $\varphi(W_1) \neq \varphi(W_2)$. Mohutnost $\mathfrak{m}$ množiny M všech bodů $\varphi(W)$ ($W \in \mathfrak{W}$) je tedy rovna moh $\mathfrak{W}$ a tudíž je nekonečná, takže existuje $a \in P$, který je koncentračním bodem množiny M. Stačí dokázat, že $X \in \mathfrak{W} \Rightarrow a \in \overline{X}$. Nechť naopak $W_0 \in \mathfrak{W}$, $a \in P - \overline{W}_0$. Pak je $P - \overline{W}_0$ okolím bodu a. Je-li $W \in \mathfrak{W}$, $\varphi(W) \in P - \overline{W}_0$, pak není $W \subset W_0$, takže W náleží do úseku $\mathbf{A}(W_0)$ soustavy $\mathfrak{W}$ určeného prvkem W_0; tudíž moh $[M \cap (P - \overline{W}_0)] \leqq$ moh $\mathbf{A}(W_0)$. Avšak soustava $\mathfrak{W}$ je regulárně uspořádána, takže moh $\mathbf{A}(W_0) <$ moh $\mathfrak{W} = \mathfrak{m}$, tedy moh $[M \cap (P - \overline{W}_0)] < \mathfrak{m}$. To je spor, neboť moh $M = \mathfrak{m}$, a je koncentrační bod množiny M a $P - \overline{W}_0$ je okolí bodu a.

8.3.9. Každé pokrytí kompaktního F-prostoru obsahuje konečné pokrytí. Viz **8.1.2**, **8.1.3** a definici **8.3.1.**

8.3.10. Aby F-prostor P byl kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby každá monotónní soustava $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ neprázdných uzavřených množin měla neprázdný průnik.

Důkaz. I. Je-li P kompaktní, je podmínka splněna podle **8.3.7** a **8.3.8.** (Zde ještě není třeba předpokladu, že P je F-prostor.)

II. Jestliže F-prostor P není kompaktní, pak podle **8.1.1** existuje takové pokrytí $\mathfrak{A}$, že žádná konečná soustava $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ není pokrytím. Podle **8.1.3** můžeme předpokládat, že $\mathfrak{A}$ se skládá z otevřených množin. Podle **3.7.3** existuje takové pokrytí $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, že je-li moh $\mathfrak{B} = \mathfrak{m}$, pak žádná v $\mathfrak{B}$ obsažená soustava mohutnosti menší než $\mathfrak{m}$ není pokrytím. Mohutnost $\mathfrak{m}$ je zřejmě nekonečná. Podle **3.6.2** můžeme předpokládat, že soustava $\mathfrak{B}$ je normálně uspořádána. Podle **3.7.7** neexistuje v $\mathfrak{B}$ poslední prvek; proto je $P = \bigcup B = \bigcup \varphi(B)$ ($B \in \mathfrak{B}$), jestliže $\varphi(B) = = \bigcup X$ [$X \in \mathbf{A}(B)$], kde $\mathbf{A}(B)$ znamená prvkem $B \in \mathfrak{B}$ určený úsek dobře uspořádané množiny $\mathfrak{B}$. Protože $\mathfrak{B}$ je normálně **uspořádána, je pro** každou $B \in \mathfrak{B}$: moh $A(B) < \mathfrak{m}$, takže podle definice soustavy $\mathfrak{B}$ je $\varphi(B) \neq P$, tj. množiny $P - \varphi(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$ jsou neprázdné. **Avšak** množiny $P - \varphi(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$ jsou uzavřené a tvoří monotónní soustavu, jejíž průnik je prázdný.

8.3.11. Aby F-prostor P byl kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby pro každou nekonečnou $M \subset P$ existoval v prostoru P aspoň jeden koncentrační bod množiny M.

Důkaz. I. Podmínka je nutná podle **8.3.7** (i tehdy, jestliže P není F-prostor).

II. Je-li podmínka splněna, je P kompaktní podle **8.3.8** a **8.3.10.**

Příklad **8.3.1.** Ze **3.7.3** a **3.7.4** plyne snadno, že existuje taková posloupnost množin $\{M_n\}_1^\infty$, že moh $M_1 = \aleph_1$ a že pro každé $n > 1$ je moh M_{n+1} nejmenší mohutnost větší než moh M_n. Položme moh $M_n = \aleph_n$ pro všecka n. Můžeme předpokládat, že množiny M_n jsou disjunktní. Položme $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, moh $M = \aleph_\omega$. Snadno se zjistí, že $\aleph_\omega$ je nejmenší mohutnost větší než všecky $\aleph_n$. Ze **3.8.7** plyne, že všecky mohutnosti $\aleph_n$ jsou regulární; naproti tomu plyne ze **3.8.6**, že mohutnost $\aleph_\omega$ je iregulární. (Snadno se dokáže, že $\aleph_\omega$ je nejmenší iregulární nekonečná mohutnost.) Podle **3.6.2** můžeme předpokládat, že každá M_n je normálně uspořádána. Jestliže předpokládáme dále, že pro $m < n$ leží každý prvek množiny M_m před každým prvkem množiny M_n, bude také M normálně uspořádána. Označme Φ soustavu všech takových posloupností $\{x_n\}_1^\infty$, že $x_n \in M_n$ pro všecka n; je-li také $\{y_n\} \in \Phi$, pak $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ nazveme *ekvivalentní*, existuje-li takový index k, že $n > k \Rightarrow x_n = y_n$. Tento vztah ekvivalence vede podle článku **1.3** na rozklad $\mathfrak{R}$ soustavy Φ. Uvažujme nejprve M jako uspořádaný prostor ve smyslu definice **6.1.2** a označme v tuto topologii v M. Prostor, který máme na mysli, jest $P = M \cup \mathfrak{R} \cup (\tau)$, kde τ je další prvek. Topologii u prostoru P definujeme takto. Je-li $X \subset P$, pak především $\tau \in uX$, jestliže buďto $\tau \in X$ nebo množina $X \cap \mathfrak{R}$ je nekonečná. Dále pro $\alpha \in \mathfrak{R}$, $\{x_n\} \in \alpha$ právě tehdy $\alpha \in uX$, jestliže buďto $\alpha \in X$ nebo pro nekonečně mnoho n je $x_n \in X$. Posléze $M \cap uX = v(M \cap X)$. Dá se dokázat, že P má tyto vlastnosti:

[1] Pro každou monotónní soustavu $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ neprázdných bodových množin je $\emptyset \neq \bigcap uX$ $(X \in \mathfrak{M})$.

[2] Žádný $\xi \in P$ není koncentračním bodem množiny M.

Příklad **8.3.2.** Nechť P je normálně uspořádaná množina mohutnosti $\aleph_1$. Je-li $a \in P$ a neleží-li žádný $x \in P$ přímo před a, pak řekneme, že a je *druhu* 0. Jestliže přímo před daným $a \in P$ leží nějaký $b \in P$, pak existuje před a zcela určitý takový $c \in P$, že mezi c a a leží konečně mnoho, a to co nejvíce prvků množiny P; je-li n počet takových prvků, pak řekneme, že a je *druhu* $n + 1$. Označme v topologii v P, určenou daným uspořádáním podle definice **6.1.2.** Uvažujme však jinou topologii v P, kterou označíme u. Definující u-okolí bodu $a \in P$ je vytvořeno každou dvojicí tvaru (b, V), kde $b \in P$ a V je v-okolí bodu a; u-okolí bodu a vytvořené takovou dvojicí (b, V) se skládá ze všech $x \in V$ a mimo to ještě ze všech těch $y \in P$, které leží za prvkem b a jejichž druh je roven druhu prvku a. Dá se dokázati toto:

[1] Prostor (P, u) není kompaktní.

[2] Pro každou nekonečnou $M \subset P$ existuje v prostoru (P, u) aspoň jeden koncentrační bod množiny M.

Příklad **8.3.3.** Prostor P se skládá z množiny $\mathbf{N}$ všech celých kladných čísel, z množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a ze dvou dalších prvků a, b. Uzávěr $\overline{X}$ množiny $X \subset P$ definujme takto. Bod $x \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ patří právě tehdy do $\overline{X}$, jestliže $x \in X$. Bod $x \in \mathbf{N}$ patří právě tehdy do $\overline{X}$, jestliže buďto $x \in X$ nebo ke každému $k \in \mathbf{N}$ existuje takové $n \in \mathbf{N}$, že $n > k$, $(x, n) \in X$. Dále je $a \in \overline{X}$ právě tehdy, jestliže buďto $a \in X$ nebo ke každému $k \in \mathbf{N}$ existují taková $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, že $m > k$, $(m, n) \in X$. Konečně je $b \in \overline{X}$ právě tehdy, jestliže buďto $b \in X$ nebo ke každému $k \in \mathbf{N}$ existuje takové $n \in \mathbf{N}$, že $n > k$, $n \in X$. Pak platí toto:

[1] P je spočetný kompaktní HL-prostor.

[2] Nechť soustava $\mathfrak{A}$ bodových množin se skládá z množin A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ a ze dvou dalších množin U, V. Při tom je $U = (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cup (a)$, $V = \mathbf{N} \cup (b)$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$ se A_n skládá z bodu n a ze všech bodů tvaru (n, x), kde $x \in \mathbf{N}$. Pak je $\mathfrak{A}$ spočetné pokrytí prostoru P, ve kterém není obsaženo žádné konečné pokrytí.

8.3.12. Budiž $Q \subset P$ kompaktní bodová množina. Nechť každý $x \in P - Q$ je H-bod prostoru P. Pak množina Q je uzavřená. Budiž $a \in P - Q$. Máme dokázat, že $a \in P - \overline{Q}$. Označme $\mathfrak{U}$ soustavu všech okolí bodu a; označme $\mathfrak{M}$ soustavu všech průniků $Q \cap U$ $(U \in \mathfrak{U})$. Protože a je H-bod, musí být $(a) = \bigcap \overline{U}$ $(U \in \mathfrak{U})$. Z toho plyne snadno, že ve vnořeném prostoru Q průnik relativních uzávěrů všech množin $X \in \mathfrak{M}$ je prázdný. Podle **8.3.6** tudíž existují takové množiny $X_i \in \mathfrak{M}$ v konečném počtu $(1 \leqq i \leqq n)$, že $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i = \emptyset$. Existují takové $U_i \in \mathfrak{U}$, že $Q \cap U_i = X_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Je-li $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$, pak podle **4.2.5** je U okolí bodu a a jest $Q \cap U = \emptyset$, takže $a \in P - \overline{Q}$ podle **4.2.9.**

8.3.13. Budiž P H-prostor. Pak každá kompaktní bodová množina je uzavřená. Viz **5.2.3** a **8.3.12.**

8.3.14. Budiž P H-prostor. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $Q(z) \subset P$ kompaktní množina. Budiž $R = \bigcap Q(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Pak také R je kompaktní.

Důkaz jako u **8.2.10**, jenom místo **8.2.1**, **8.2.9** a slova S-kompaktní dáme **8.3.1**, **8.3.13** a slovo kompaktní.

8.3.15. Budiž P kompaktní prostor. Budiž f spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pak také P_1 je kompaktní. Důkaz jako u **8.2.11** (s vynecháním slova spočetné).

8.3.16. Nechť prostor P obsahuje ke každé nekonečné množině $M \subset P$ koncentrační bod množiny M. Budiž f spojité zobrazení prostoru P na prostor P_1. Pak prostor P_1 obsahuje ke každé nekonečné množině $M_1 \subset P_1$ koncentrační bod množiny M_1. K dané nekonečné $M_1 \subset P_1$ existuje taková nekonečná $M \subset P$, že $f^1(M) = M_1$ a že zúžení $f \mid M$ je prosté zobrazení, takže moh $M =$ moh M_1. Existuje koncentrační bod $a \in M$ množiny M. Je-li $b = f(a)$, pak podle **7.1.1** je $b \in M_1$ koncentrační bod množiny M_1.

8.3.17. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ neprázdný prostor. Budiž $R = \mathfrak{P} P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Je-li R kompaktní, pak každý $P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ je kompaktní. Důkaz jako u **8.2.12**, jenom místo **8.2.11** vezmeme **8.3.15.**

8.3.18. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ kompaktní prostor. Budiž $R = \mathfrak{P}P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Pak R je kompaktní.

Důkaz. I. Budiž $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ centrovaná soustava podmnožin prostoru R. Podle **8.3.6** máme dokázat, že množina $\bigcap \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{M})$ není prázdná.

II. Budiž Φ množina všech těch centrovaných soustav podmnožin prostoru R, které obsahují $\mathfrak{M}$ jako podsoustavu. Jest $\Phi \neq \emptyset$, neboť $\mathfrak{M} \in \Phi$. Dokažme, že existuje soustava $\mathfrak{M}^*$, která je maximální ve Φ v tom smyslu, že předně $\mathfrak{M}^* \in \Phi$ a za druhé: $\mathfrak{S} \in \Phi$, $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{M}^* \Rightarrow \mathfrak{S} = \mathfrak{M}^*$. Předpokládáme-li opak, pak ke každé $\mathfrak{S} \in \Phi$ existuje taková $h(\mathfrak{S}) \in \Phi$, že $\mathfrak{S} \subset h(\mathfrak{S}) \neq \mathfrak{S}$. Potom podle **3.9.2** existuje taková $\Phi_0 \neq \emptyset$, $\Phi_0 \subset \Phi$, že Φ_0 je monotónní (tj. $\mathfrak{S}_1 \in \Phi_0$, $\mathfrak{S}_2 \in \Phi_0 \Rightarrow$ buďto $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$ nebo $\mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_1$) a že soustava $\mathfrak{T} = \bigcup \mathfrak{S}$ $(\mathfrak{S} \in \Phi_0)$ nenáleží do Φ. Protože $\mathfrak{S} \in \Phi_0 \Rightarrow \mathfrak{S} \supset \mathfrak{M}$, platí též $\mathfrak{T} \supset \mathfrak{M}$. Jelikož však neplatí $\mathfrak{T} \in \Phi$, nemůže soustava $\mathfrak{T}$ být centrovaná. To znamená, že existuje taková konečná posloupnost $\{S_i\}_{i=1}^n$, že $S_i \in \mathfrak{T}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ a že $\bigcap_{i=1}^{n} S_i = \emptyset$. Podle definice soustavy $\mathfrak{T}$ existují takové $\mathfrak{S}_i \in \Phi_0$, že $S_i \in \mathfrak{S}_i$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Protože soustava Φ_0 je monotónní, existuje takový index j $(1 \leqq j \leqq n)$, že $\mathfrak{S}_i \subset \mathfrak{S}_j$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Potom však všecky množiny S_i $(1 \leqq i \leqq n)$ náležejí do $\mathfrak{S}_j$ a jest $\bigcap_{i=1}^{n} S_i = \emptyset$. To je spor, neboť $\mathfrak{S}_j \in \Phi$, takže $\mathfrak{S}_j$ je centrovaná soustava.

III. Nechť tedy $\mathfrak{M}^*$ je maximální ve Φ; pak $\mathfrak{M}^* \supset \mathfrak{M}$, takže je třeba pouze ukázat, že množina $\bigcap \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{M}^*)$ není prázdná. Z definice soustavy $\mathfrak{M}^*$ je zřejmé, že každá centrovaná soustava množin $X \subset R$, obsahující $\mathfrak{M}^*$ jako podsoustavu, splyne s $\mathfrak{M}^*$. Takovou soustavu však tvoří zřejmě všecky průniky konečně mnoha množin soustavy $\mathfrak{M}^*$; proto tyto průniky musí náležet do $\mathfrak{M}^*$. Jestliže nyní $A \subset R$ a jestliže $A \cap X \neq \emptyset$ pro každou $X \in \mathfrak{M}^*$, pak také $A \in \mathfrak{M}^*$, neboť připojíme-li množinu A k soustavě $\mathfrak{M}^*$, dostaneme opět centrovanou soustavu.

IV. Je-li $z \in \mathbf{C}$, pak pro každou $X \subset R$ označme $\pi_z(X)$ množinu všech těch $x(z) \in P(z)$, které jsou z-souřadnicemi některého $x \in X$. Snadno se zjistí, že je-li $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ centrovaná soustava podmnožin prostoru R, pak $\pi_z^1(\mathfrak{S}) \neq \emptyset$ je centrovaná soustava podmnožin prostoru

$P(z)$. Zejména tedy pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $\pi_z^1(\mathfrak{M}^*)$ centrovaná soustava podmnožin kompaktního prostoru $P(z)$, takže podle **8.3.6** existuje bod $a(z) \in P(z)$, který náleží do uzávěru každé množiny soustavy $\pi_z^1(\mathfrak{M}^*)$. Budiž a ten bod prostoru R, který pro každé $z \in \mathbf{C}$ má z-souřadnici $a(z)$. Stačí dokázat, že $a \in \bigcap \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{M}^*)$. Podle **4.3.2** a podle definice **6.2.1** máme dokázat, že jestliže $K \subset \mathbf{C}$ je konečná množina $(K \neq \emptyset)$, jestliže pro každé $z \in K$ je $V(z)$ okolí bodu $a(z) \in P(z)$ a jestliže U znamená množinu všech těch $x \in R$, pro něž platí: $z \in K \Rightarrow x(z) \in V(z)$, pak pro každou $B \in \mathfrak{M}^*$ je $U \cap B \neq \emptyset$. Je-li $X \in \mathfrak{M}^*$, $z \in K$, pak $\pi_z(X) \in \in \pi_z^1(\mathfrak{M}^*)$, takže bod $a(z)$ podle své definice náleží do uzávěru $\pi_z(X) \subset \subset P(z)$, a tudíž podle **4.2.9** je $\pi_z(X) \cap V(z) \neq \emptyset$ neboli $X \cap \pi_z^{-1}[V(z)] \neq \neq \emptyset$ pro každou $X \in \mathfrak{M}^*$, takže podle III je $\pi_z^{-1}[V(z)] \in \mathfrak{M}^*$. Budiž nyní $B \in \mathfrak{M}^*$; probíhá-li z konečnou množinu $K \subset \mathbf{C}$, jsou $\pi_z^{-1}[V(z)]$ další množiny v konečném počtu, které stejně jako B náležejí do soustavy $\mathfrak{M}^*$. Protože $\mathfrak{M}^*$ je centrovaná, je

$$B \cap \bigcap_z \pi_z^{-1}[V(z)] \neq \emptyset$$

neboli

$$U \cap B \neq \emptyset\,.$$

8.3.19. Kompaktní *FH*-prostor P je normální.

Důkaz. I. Nechť $F \subset P$ je uzavřená a nechť $a \in P - F$; dokážeme, že množiny (a), F jsou H-oddělené. Triviální případ $F = \emptyset$ můžeme vyloučit. Je-li $x \in F$, pak body a, x jsou H-oddělené, neboť $a \neq x$ a P je H-prostor; podle **5.1.15** existují tedy takové dvě otevřené množiny $U(x)$, $V(x)$, že $a \in U(x)$, $x \in V(x)$, $U(x) \cap V(x) = \emptyset$. Podle **8.1.2** a **8.1.5** tvoří množiny $V(x) \cap F$ $(x \in F)$ pokrytí vnořeného prostoru F, který podle **8.3.1** je kompaktní. Tudíž v F je obsažena taková konečná posloupnost $\{x_i\}_1^n$, že $\bigcup_{i=1}^n F \cap V(x_i) = F$. Podle **4.4.11** množina $U = \bigcap_{i=1}^n U(x_i)$ je otevřená; podle **4.4.10** množina $V = \bigcup_{i=1}^n V(x_i)$ je otevřená. Jest $a \in U$, $F \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, takže (a), F jsou H-oddělené podle **5.1.15.**

II. F_1, F_2 buďtež dvě disjunktní uzavřené množiny; máme dokázat, že F_1, F_2 jsou H-oddělené. Triviální případ $F_2 = \emptyset$ můžeme vyloučit. Je-li $x \in F_2$, pak množiny F_1, (x) jsou H-oddělené podle I; tudíž podle **5.1.15** existují takové dvě otevřené množiny $U(x)$, $V(x)$, že $F_1 \subset U(x)$,

$x \in V(x)$, $U(x) \cap V(x) = \emptyset$. Jako v I soudíme opět, že F_2 obsahuje takovou konečnou posloupnost $\{x_i\}_1^n$, že $F_2 \subset V = \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i)$. Je-li ještě $U = \bigcap_{i=1}^{n} U(x_i)$, pak U, V jsou otevřené a jest $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, takže F_1, F_2 jsou H-oddělené podle **5.1.15.**

8.3.20. Budiž P kompaktní prostor. Budiž $\mathfrak{U} \neq \emptyset$ soustava okolí množiny $M \subset P$. Budiž $M = \bigcap \overline{U}$ $(U \in \mathfrak{U})$. Je-li $\mathfrak{V}$ soustava všech průniků konečně mnoha množin soustavy $\mathfrak{U}$, pak $\mathfrak{V}$ je úplná soustava okolí množiny M. Podle **4.2.5** je $\mathfrak{V}$ soustava okolí množiny M. Budiž H okolí množiny M. Máme ukázat, že $V \subset H$ pro vhodnou $V \in \mathfrak{V}$. Jestliže tomu tak není, jest $\emptyset \neq \bigcap (X - H)$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro každou konečnou soustavu $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{U}$. Podle **8.3.6** existuje bod $x \in \bigcap \overline{U - H}$ $(U \in \mathfrak{U})$. Podle **4.1.1** je $x \in \overline{P - H}$, avšak $M \subset P - \overline{P - H}$, neboť H je okolí množiny M. To je spor, neboť $x \in \bigcap \overline{U} = M$.

8.3.21. Budiž P kompaktní prostor; budiž $a \in P$ R-bod. Pak je $\psi(a) = \chi(a)$. Je-li naopak $\psi(a) \neq \chi(a)$, pak podle **4.12.1** je $\aleph_0 \leqq \psi(a) < \chi(a)$. Existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí bodu a, že moh $\mathfrak{U} = \psi(a)$, $(a) = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$. Protože a je R-bod, můžeme každé $U \in \mathfrak{U}$ přiřadit takové okolí U_1 bodu a, že $\overline{U}_1 \subset U$. Soustava $\mathfrak{U}_1$ množin U_1 má podle **4.2.3** vlastnost $(a) = \bigcap \overline{U}_1$ $(U_1 \in \mathfrak{U}_1)$; mimo to moh $\mathfrak{U}_1 \leqq$ moh $\mathfrak{U} = \psi(a)$. Protože $\psi(a) \geqq \aleph_0$, plyne ze **3.7.11**, že také moh $\mathfrak{V} \leqq \psi(a) < \chi(a)$, je-li $\mathfrak{V}$ soustava všech průniků konečně mnoha množin soustavy $\mathfrak{U}_1$. To je spor, neboť podle **8.3.20** je $\mathfrak{V}$ úplná soustava okolí bodu a.

8.3.22. Budiž P kompaktní FH-prostor; budiž $M \subset P$ uzavřená množina. Pak je $\psi(M) = \chi(M)$. Je-li $\psi(M) \neq \chi(M)$, pak podle **4.12.1** je $\aleph_0 \leqq \psi(M) < \chi(M)$. Existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí množiny M, že moh $\mathfrak{U} = \psi(M)$ a že $M = \bigcap U$ $(U \in \mathfrak{U})$. Podle **5.4.6** a **8.3.19** můžeme každé $U \in \mathfrak{U}$ přiřadit takové okolí U_1 množiny M, že $\overline{U}_1 \subset U$. Další průběh důkazu je stejný jako u **8.3.21.**

8.3.23. Budiž f spojité zobrazení kompaktního prostoru P na H-prostor P_1. Pak f je oboustranně spojité. Budiž $b \in P_1$.

Budiž U okolí množiny $f^{-1}(b) \subset P$; budiž V množina těch $y \in P_1$, pro něž $f^{-1}(y) \subset U$. Podle **7.2.1** máme dokázat, že V je okolí bodu $b \in P_1$. Případ $U = P$ je triviální a můžeme jej vyloučit. Pro každý bod $y \in P_1 - (b)$ lze určit okolí $V(y)$ bodu b a okolí $W(y)$ bodu y tak, že $V(y) \cap W(y) = \emptyset$. Ze **7.1.1** plyne, že jestliže k soustavě všech množin $f^{-1}[W(y)]$ $[y \in P_1 - (b)]$ připojíme množinu U, vznikne pokrytí prostoru P. Protože P je kompaktní, existují takové body y_i v konečném počtu $(1 \leqq i \leqq n)$, že $U \cup \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}[W(y_i)] = P$. Je-li $V_0 = \bigcap_{i=1}^{n} V(y_i)$, je V_0 okolí bodu b podle **4.2.5.** Jestliže $x \in f^{-1}(V_0)$, máme $1 \leqq i \leqq n \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \in P_1 - W(y_i) \Rightarrow x \in P - f^{-1}[W(y_i)]$. Tudíž $f^{-1}(V_0) \subset U$, takže $V_0 \subset V$ a V je okolí bodu b podle **4.2.4.**

8.3.24. Budiž f prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru P na H-prostor P_1. Pak f je homeomorfní. Viz **7.1.7**, **7.2.6** a **8.3.23.**

8.3.25. Budiž (P, u) kompaktní prostor. Budiž v H-topologie v množině P, která je hrubší než u. Pak je $u = v$. Viz **7.1.11** a **8.3.24.**

8.3.26. Budiž f oboustranně spojité zobrazení kompaktního FH-prostoru P na prostor P_1. Pak také P_1 je kompaktní FH-prostor. Podle **8.3.19** je P normální, takže podle **7.2.20** je také P_1 normální, takže P_1 je FH-prostor. P_1 je kompaktní podle **8.3.15.**

8.3.27. Budiž f oboustranně spojité zobrazení kompaktního F-prostoru P na prostor P_1. Pak jest $\chi^t(P_1) \leqq \chi^t(P)$. Případ konečného P je podle **4.12.17** triviální. Je-li P nekonečný, pak mohutnost $\chi^t(P)$ je nekonečná podle **4.12.17.** Podle **7.2.18** je P_1 F-prostor. Pro $M \subset P$ budiž $\varphi(M) = \mathscr{E}_y\,[y \in P_1, f^{-1}(y) \subset M]$. Prostor P má otevřenou basi $\mathfrak{B}$ mohutnosti $\chi^t(P)$. Budiž $\mathfrak{C}$ soustava všech množin tvaru $\bigcup X$ $(X \in \mathfrak{K})$, kde $\mathfrak{K}$ probíhá všecky konečné části soustavy $\mathfrak{B}$. Podle **3.7.11** je moh $\mathfrak{C} = \chi^t(P)$, takže moh $\varphi^1(\mathfrak{C}) \leqq \chi^t(P)$ a stačí dokázat, že $\varphi^1(\mathfrak{C})$ je otevřená base prostoru P_1. Je-li $C \in \mathfrak{C}$, pak $C \subset P$ je otevřená podle **4.4.10**, takže $f^1(P - C) \subset P_1$ je uzavřená podle **7.2.9**; zřejmě $\varphi(C) = P_1 - f^1(P - C)$, takže $\varphi(C) \subset P_1$ je otevřená. Budiž V okolí bodu $b \in P_1$; podle **4.5.17** zbývá pouze dokázat, že $b \in \varphi(C) \subset V$ při vhodné $C \in \mathfrak{C}$. Podle **7.1.1** je $f^{-1}(V)$ okolí každého bodu $x \in f^{-1}(b)$. Podle **4.5.17** můžeme každému $x \in f^{-1}(b)$ přiřadit $B(x) \in \mathfrak{B}$ tak, že $x \in B(x) \subset \subset f^{-1}(V)$. Podle **7.1.20** a **8.3.1** množina $f^{-1}(b)$ je kompaktní. Podle **8.1.2** a **8.1.5** tvoří soustava všech množin $f^{-1}(b) \cap B(x)$ $[x \in f^{-1}(b)]$ pokrytí kompaktního prostoru $f^{-1}(b)$ vnořeného do P. Tudíž existuje konečně mnoho takových bodů $x_i \in f^{-1}(b)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, že $f^{-1}(b) \subset C = = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i)$. Nyní je $C \in \mathfrak{C}$, $C \subset f^{-1}(V)$, takže $\varphi(C) \subset V$ a protože $f^{-1}(b) \subset \subset C$, je $b \in \varphi(C)$.

8.3.28. Budiž $P \neq \emptyset$ uspořádaný prostor. Aby P byl kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby předně v P existoval první i poslední bod a aby za druhé v P neexistovaly mezery.

Důkaz. I. P je F-prostor podle **6.1.7.**

II. Jestliže v P není poslední prvek, nahlédne se snadno, že soustava všech úseků $\boldsymbol{A}(x)$ $(x \in P)$ tvoří pokrytí prostoru P, které neobsahuje žádné konečné zakrytí, takže P není kompaktní. Podobně P není kompaktní ani tehdy, jestliže v P není první prvek.

III. Je-li (A, B) mezera v P, je jasné, že množina $A \neq \emptyset$ je uzavřená a že vnořený prostor A je uspořádaný prostor. Protože v A není poslední prvek, plyne ze II, že A není kompaktní, takže podle **8.3.1** ani P není kompaktní.

IV. Předpokládejme, že P má první prvek a i poslední prvek b a že v P nejsou mezery. Triviální případ $a = b$ můžeme vyloučit. Budiž M nekonečná část P a budiž moh $M = \mathfrak{m}$. Budiž B množina všech takových $x \in P$, že množina všech před x ležících bodů množiny M má mohutnost $\mathfrak{m}$; budiž $A = P - B$. Zřejmě $a \in A$, $b \in B$ a (A, B) je řez v množině P. Protože neexistují mezery, existuje buďto poslední prvek množiny A nebo první prvek množiny B. Je-li c poslední v A, nahlédneme snadno, že každé okolí zprava bodu c obsahuje $\mathfrak{m}$ bodů množiny M; je-li c první v B, pak každé okolí zleva bodu c obsahuje $\mathfrak{m}$ bodů množiny M. V obou případech je c koncentrační bod množiny M, takže P je kompaktní podle I a podle **8.3.11.**

8.3.29. Budiž P zobecněný uspořádaný prostor. Je-li P kompaktní, pak P je uspořádaný prostor. Označme u topologii danou v množině P a v topologii z definice **6.1.2.** Zřejmě je v hrubší než u a podle **6.1.7** je v H-topologie, takže $u = v$ podle **8.3.25.**

8.4. ÚPLNĚ REGULÁRNÍ PROSTORY

Definice **8.4.1.** Pravíme, že prostor P je *úplně regulární,* jestliže P je F-prostor a jestliže ke každé uzavřené množině $F \subset P$ a ke každému bodu $a \in P - F$ existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $x \in P \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1$, $f(a) = 0$, $x \in F \Rightarrow f(x) = 1$.

Poznámka. O funkci f stačí předpokládat, že $f(a) = 0$, $x \in F \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \geqq 1$, neboť potom lze definovat funkci g v oboru P tak, že

$$f(x) < 0 \Rightarrow g(x) = 0\,, \quad f(x) > 1 \Rightarrow g(x) = 1\,,$$
$$0 \leqq f(x) \leqq 1 \Rightarrow g(x) = f(x)\,,$$

načež g je spojitá funkce v oboru P a jest $x \in P \Rightarrow 0 \leqq g(x) \leqq 1$, $g(a) =$ $= 0$, $x \in F \Rightarrow g(x) = 1$.

8.4.1. Je-li prostor Q vnořen do úplně regulárního P, je také Q úplně regulární. Podle **4.6.10** je Q F-prostor. Budiž $F_0 \subset Q$ relativně uzavřená a budiž $a \in Q - F_0$. Podle **4.6.13** existuje taková uzavřená $F \subset P$, že $F_0 = Q \cap F$. Podle definice **8.4.1** existuje taková spojitá funkce f v oboru P, že $f(a) = 0$, $x \in F \Rightarrow f(x) \geqq 1$. Je-li f_0 zúžení $f \mid Q$, je f_0 spojitá funkce v oboru Q a jest $f_0(a) = 0$, $x \in F_0 \Rightarrow f(x) \geqq 1$.

8.4.2. Úplně regulární prostor P je R-prostor. Budiž $F \subset P$ uzavřená a budiž $a \in P - F$. Budiž f taková spojitá funkce v oboru P, že $f(a) = 0$, $x \in F \Rightarrow f(x) \geqq 1$. Množiny

$$G = \mathscr{E}_x \; [f(x) < \tfrac{1}{2}]\,, \quad H = \mathscr{E}_x \; [f(x) > \tfrac{1}{2}]$$

jsou otevřené podle **7.1.14** a jest $a \in G$, $F \subset H$ takže (a), F jsou H-oddělené podle **5.1.15** a P je R-prostor podle **5.3.6.**

Poznámka. Existují FR-prostory, které nejsou úplně regulární (viz cvič. 8.5.14).

8.4.3. Normální prostor je úplně regulární. Viz **7.3.10.**

8.4.4. Budiž P jakýkoli prostor. Pak existuje úplně regulární prostor P_1 a spojité zobrazení ϱ prostoru P do P_1 s tou vlastností, že každá spojitá funkce v oboru P se dá složit ze zobrazení ϱ a ze spojité funkce v oboru P_1.

Důkaz. I. Definujme takto vztah ekvivalence $\mathfrak{E}$ v množině P. Je-li $x \in P$, $y \in P$, pak $(x, y) \in \mathfrak{E}$ znamená, že $f(x) = f(y)$ pro každou spojitou funkci f v oboru P. Axiomy (I$\mathfrak{E}$) až (III$\mathfrak{E}$) (viz článek **1.3**) jsou splněny. Existuje takové zobrazení ϱ množiny P na množinu $\varrho^1(P) = P_1$, že množiny $\varrho^{-1}(y)$ $(y \in P_1)$ jsou pásy rozkladu příslušného ke vztahu $\mathfrak{E}$.

II. Každé dvojici skládající se ze spojité funkce f v oboru P a z otevřeného omezeného intervalu J přiřaďme množinu $H(f, J)$ všech těch $y \in P_1$, pro které je $y = \varrho(x)$, $f(x) \in J$. Označme $\mathfrak{B}$ soustavu všech takových množin $H(f, J)$. Definujme F-topologii v množině P_1 požadavkem, aby $\mathfrak{B}$ byla otevřená base. Podle **4.5.16** musíme ukázat, že jsou splněny axiomy (I$\mathfrak{B}$), (II$\mathfrak{B}$). Pro axiom (I$\mathfrak{B}$) je to zřejmé. K důkazu (II$\mathfrak{B}$) budiž $H(f_1, J_1) \in \mathfrak{B}$, $H(f_2, J_2) \in \mathfrak{B}$, $a \in P$, $\varrho(a) \in H(f_1, J_1) \cap H(f_2, J_2)$. Máme udat takovou $H(f, J) \in \mathfrak{B}$, aby bylo $\varrho(a) \in H(f, J) \subset [H(f_1, J_1) \cap H(f_2, J_2)]$. Existuje takové číslo $\varepsilon > 0$, že pro $k = 1$ i pro $k = 2$ jest

$$\mathscr{E}_t \quad [f_k(a) - \varepsilon < t < f_k(a) + \varepsilon] \subset J_k \,.$$

Stačí položit $J = \mathscr{E}_t\,[-\varepsilon < t < \varepsilon]$, $x \in P \Rightarrow f(x) = |f_1(x) - f_1(a)| + |f_2(x) - f_2(a)|$. Funkce f je spojitá podle **7.1.32.**

III. Ukažme, že zobrazení ϱ je spojité. Budiž $a \in P$ a budiž V okolí bodu $\varrho(a) \in P_1$. Podle **7.1.1** máme dokázat, že $\varrho^{-1}(V)$ je okolí bodu a v prostoru P. Podle **4.5.17** existuje taková $H(f, J) \in \mathfrak{B}$, že $\varrho(a) \in H(f, J) \subset V$. Podle definice množiny $H(f, J)$ je f spojitá funkce v oboru P a jest $f(a) \in J$, takže podle **7.1.1** je $U = \mathscr{E}_x\,[f(x) \in J]$ okolím bodu $a \in P$. Avšak $f^1(U) = V$, takže $f^{-1}(V)$ je okolí bodu $a \in P$ podle **4.2.4.**

IV. Je-li f spojitá funkce v oboru P, plyne z definice P_1, že při vhodné funkci g v oboru P_1 je f složena z ϱ a z g. Máme dokázat, že g je spojitá, a to plyne ze **7.1.3.** Neboť je-li $\varepsilon > 0$, $b \in P_1$, jest

$$V = \mathscr{E}_y \quad [y \in P_1, |g(y) - g(b)| < \varepsilon] = H(f, J)\,,$$

kde $J = \mathscr{E}_t\,[g(b) - \varepsilon < t < g(b) + \varepsilon]$, takže V je okolí bodu b podle **4.4.13.**

V. Zbývá dokázat, že prostor P_1 je úplně regulární. Víme, že P_1 je F-prostor. Nechť $\Phi \subset P_1$ je uzavřená a nechť $a \in P$, $\varrho(a) \in P_1 - \Phi$. Pak existuje taková $H(f, J) \in \mathfrak{B}$, že $\varrho(a) \in H(f, J) \subset P_1 - \Phi$. Dále existuje takové $\varepsilon > 0$, že $J \supset \mathscr{E}_t\,[f(a) - \varepsilon < t < f(a) + \varepsilon]$. Je-li

$$|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon \Rightarrow \varphi(x) = 1\,,$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow \varphi(x) = \frac{|f(x) - f(a)|}{\varepsilon}\,,$$

jest φ spojitá funkce v oboru P (viz **7.1.32**), která podle IV je složena z ϱ a ze spojité funkce g v oboru P_1. Snadno se zjistí, že

$$g[\varrho(a)] = 0\,, \quad y \in P_1 \Rightarrow 0 \leqq g(y) \leqq 1\,, \quad y \in \Phi \Rightarrow g(y) = 1\,.$$

8.4.5. Kartézský součin $R = \mathfrak{P}P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ úplně regulárních prostorů $P(z)$ je úplně regulární. Zvolme bod $a \in R$ a uzavřenou množinu $F \subset R - (a)$. Otevřená množina $R - F$ je okolím bodu $a \in R$. Podle definice topologie kartézského součinu existuje neprázdná konečná $K \subset \mathbf{C}$ a pro každé $z \in K$ takové okolí $U(z)$ bodu $a(z) \in P(z)$, že množina V těch $x \in R$, pro něž $z \in K \Rightarrow x(z) \in U(z)$, je částí $R - F$. Protože $P(z)$ jsou F-prostory, můžeme předpokládat, že každá $U(z)$ je otevřená v $P(z)$. Protože $P(z)$ jsou úplně regulární, existuje pro každé $z \in K$ taková spojitá funkce f_z v oboru $P(z)$, že $f_z[a(z)] = 0$ a že $x(z) \in$ $\in P(z) - U(z) \Rightarrow f_z[x(z)] \geqq 1$. Pro $x \in R$ budiž $\varphi(x)$ rovné součinu čísel $f_z[x(z)]$ $(z \in K)$. Snadno se zjistí, že φ je spojitá funkce v oboru R, že $\varphi(a) = 0$ a že: $x \in F \Rightarrow \varphi(x) \geqq 1$.

Definice **8.4.2.** Budiž $\mathfrak{m} > 0$ libovolná mohutnost. *Základním kvádrem dimense* $\mathfrak{m}$ nazveme kartézský součin $\mathfrak{P}P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$, kde moh $\mathbf{C} = \mathfrak{m}$ a pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $P(z)$ interval $\mathscr{E}_t\,[0 \leqq t \leqq 1]$ ve své přirozené topologii.

8.4.6. Základní kvádr dimense $\mathfrak{m}$ je kompaktní FH-prostor, jehož totální charakter je roven $\aleph_0$ při konečném $\mathfrak{m}$ a je roven $\mathfrak{m}$ při nekonečném $\mathfrak{m}$. Podle **6.1.17** a **8.3.28** interval $\mathscr{E}_t\,[0 \leqq t \leqq 1]$ je kompaktní FH-prostor s prvním axiomem spočetnosti. Z toho plyne tvrzení podle **6.2.10**, **6.2.17**, **6.2.19** a **8.3.18**.

8.4.7. Úplně regulární prostor $P \neq \emptyset$ s totálním charakterem $\mathfrak{m}$ je homeomorfní s prostorem vnořeným do základního kvádru dimense $\mathfrak{m}$.

Důkaz. I. Při konečném $\mathfrak{m}$ je P podle **4.12.17** konečný a tvrzení je triviální. Nechť tedy $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Budiž $\mathfrak{B}$ otevřená base prostoru P, moh $\mathfrak{B} = \mathfrak{m}$. Budiž $\mathfrak{C}$ množina všech těch dvojic $(B_1, B_2) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, jimž lze přiřadit spojitou funkci $f = \Phi(B_1, B_2)$ v oboru P tak, aby bylo

$$x \in P \Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1 , \quad x \in B_1 \Rightarrow f(x) = 0 ,$$
$$x \in P - B_2 \Rightarrow f(x) = 1 .$$

II. Budiž $a \in P$ a budiž U okolí bodu a. Podle **4.5.17** existuje taková $B_2 \in \mathfrak{B}$, že $a \in B_2 \subset U$. Protože B_2 je otevřená a P je úplně regulární, existuje taková spojitá funkce g v oboru P, že $g(a) = 0$, $x \in P \Rightarrow 0 \leqq$ $\leqq g(x) \leqq 1$, $x \in P - B_2 \Rightarrow g(x) = 1$. Podle **7.1.1** je $\mathscr{E}_x\,[g(x) < \frac{1}{2}]$ okolí bodu a, takže podle **4.5.17** existuje taková $B_1 \in \mathfrak{B}$, že $a \in B_1 \subset$ $\subset \mathscr{E}_x\,[g(x) < \frac{1}{2}]$. Je-li

$$g(x) \leqq \tfrac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 0 , \quad g(x) > \tfrac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 2g(x) - 1 ,$$

je f spojitá funkce v oboru P a jest $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in B_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = 0$, $x \in P - B_2 \Rightarrow f(x) = 1$, takže $(B_1, B_2) \in \mathfrak{C}$, $a \in B_1 \subset B_2 \subset U$.

III. Z toho plyne nejprve podle **4.5.17**, že jestliže dvojice (B_1, B_2) probíhá soustavu $\mathfrak{C}$, pak množina B_1 probíhá otevřenou basi prostoru P. Protože $\mathfrak{m} = \chi^t(P)$, je moh $\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{m}$, takže moh $\mathfrak{C} = \mathfrak{m}$ podle **3.7.9.** Jestliže tedy $S(z) = \mathscr{E}_t\,[0 \leqq t \leqq 1]$ pro každé $z \in \mathfrak{C}$ a $Q = \mathfrak{P}S(z)$ $(z \in \mathfrak{C})$, je Q základní kvádr dimense $\mathfrak{m}$.

IV. Pro $x \in P$ budiž $\varphi(x)$ ten bod prostoru Q, jehož z-souřadnice pro každé $z = (B_1, B_2) \in \mathfrak{C}$ je rovna $f(x)$, kde $f = \Phi(B_1, B_2)$. Podle **7.4.6** je φ spojité zobrazení prostoru P na $\varphi^1(P) \subset Q$.

V. Je-li $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, pak podle **4.2.6** existuje takové okolí U bodu a, že $b \in P - U$. Podle II existuje taková dvojice $z_0 = (B_1, B_2) \in$ $\in \mathfrak{C}$, že $a \in B_1 \subset B_2 \subset U$. Bod $\varphi(x)$ má z_0-souřadnici pro $x = a$ rovnou 0, pro $x = b$ rovnou 1; tudíž $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Zobrazení φ je tedy prosté.

VI. Je-li U okolí bodu $a \in P$, existuje taková dvojice $z_0 = (B_1, B_2) \in$ $\in \mathfrak{C}$, že $a \in B_1 \subset B_2 \subset U$. Je-li $x \in P - U$, pak z_0-souřadnice bodu $\varphi(x)$ je rovna 1; naproti tomu je z_0-souřadnice bodu $\varphi(a)$ rovna 0. Je-li tedy V množina těch bodů prostoru Q, jejichž z_0-souřadnice je menší než 1, pak $y \in V \cap \varphi^1(P) \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \subset U$. Z definice **6.2.1** však plyne, že V je okolí bodu $\varphi(a)$ v prostoru Q, takže $V \cap \varphi^1(P)$ je podle **4.6.2** okolí $\varphi(a)$ v prostoru $\varphi^1(P) \subset Q$. Podle **4.2.4** a **7.2.1** je tudíž φ inversně spojité, takže φ je homeomorfní podle **7.1.7** a **7.2.6**.

8.4.8. Aby prostor P byl úplně regulární, k tomu je nutné a stačí, aby P byl homeomorfní s prostorem vnořeným do kompaktního FH-prostoru. Podmínka stačí podle **8.3.19**, **8.4.1** a **8.4.3** a je nutná podle **8.4.6** a **8.4.7**.

Definice **8.4.3.** Pravíme, že prostor P je *kompaktní β-obal prostoru Q*, jestliže P je kompaktní FH-prostor, Q je vnořen do P, Q je hustý v P a ke každé omezené spojité funkci f v oboru Q existuje spojité rozšíření g na obor P. Podle **8.4.8** má tato definice význam pouze pro úplně regulární Q. V tomto případě kompaktní β-obal podle **8.4.9** existuje a podle **8.4.11** je „v podstatě" jednoznačně určen; označíme jej $\beta(Q)$.

8.4.9. Ke každému úplně regulárnímu prostoru Q existuje kompaktní β-obal $\beta(Q)$.

Důkaz. I. Případ $Q = \emptyset$ je triviální; nechť tedy $Q \neq \emptyset$. Existuje taková množina $\mathbf{C} \neq \emptyset$, že každému $z \in \mathbf{C}$ lze přiřadit omezenou spojitou funkci f_z v oboru Q tak, že obráceně pro každou omezenou spojitou funkci f v oboru Q existuje aspoň jedno takové $z \in \mathbf{C}$, že f splyne s f_z. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ existují taková reálná čísla a_z, b_z $(a_z < b_z)$, že $f_z^1(Q) \subset J_z = \mathscr{E}_t\,[a_z \leqq t \leqq b_z]$. Budiž $R = \mathfrak{P} J_z$ $(z \in \mathbf{C})$. Prostor R je zřejmě homeomorfní se základním kvádrem dimense moh $\mathbf{C}$, takže podle **8.4.6** je R kompaktní FH-prostor.

II. Pro každé $x \in Q$ budiž $\varphi(x)$ ten bod prostoru R, jehož z-souřadnice pro každé $z \in \mathbf{C}$ je rovna $f_z(x)$. Podle **7.4.6** je φ spojité zobrazení prostoru Q na $\varphi^1(Q) \subset R$. Je-li $a \in Q$, $b \in Q$, $a \neq b$, pak z úplné regularity prostoru Q plyne existence takové omezené spojité funkce f v oboru Q, že $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Existuje takové $z_0 \in \mathbf{C}$, že $f = f_{z_0}$; z_0-souřadnice bodu $\varphi(x)$ je pro $x = a$ rovna 0, pro $x = b$ rovna 1. Zobrazení φ je tedy prosté. Je-li $a \in Q$ a je-li U okolí bodu a, plyne z úplné regularity prostoru Q, že existuje taková spojitá funkce f v oboru Q, že $f(a) = 0$ a že $x \in \overline{Q - U} \Rightarrow f(x) = 1$. Existuje takové $z_0 \in \mathbf{C}$, že $f = f_{z_0}$.

Budiž V množina těch $y \in R$, jejichž z_0-souřadnice je menší než 1. Pak je V okolí bodu $\varphi(a)$ v prostoru R, takže podle **4.6.2** množina $V \cap \cap \varphi^1(Q)$ je okolí bodu $\varphi(a)$ v prostoru $\varphi^1(Q)$. Zřejmě $y \in V \cap \varphi^1(Q) \Rightarrow \Rightarrow \varphi^{-1}(y) \subset U$, takže podle **4.2.4** a **7.2.1** zobrazení φ je inversně spojité. Je tedy podle **7.1.7** a **7.2.6** φ homeomorfní zobrazení prostoru Q na prostor $\varphi^1(Q)$ vnořený do R a tudíž stačí udat kompaktní β-obal prostoru $\varphi^1(Q)$.

III. Budiž $P = \overline{\varphi^1(Q)} \subset R$. Pak P je FH-prostor podle **4.6.10** a **5.2.1** a P je kompaktní podle **8.3.1.** Množina $\varphi^1(Q)$ je hustá v P. Je-li h omezená spojitá funkce v oboru $\varphi^1(Q)$, pak funkce f v oboru Q složená ze zobrazení φ a z funkce h je omezená spojitá funkce v oboru Q. Existuje tedy takové $z_0 \in \mathbf{C}$, že $f = f_{z_0}$. Budiž g ta funkce v oboru P, jejíž hodnota v každém $x \in P$ je rovna z_0-souřadnici bodu x. Zřejmě g je spojitá funkce v oboru P, jejíž zúžení $g \mid \varphi^1(Q)$ splyne s h. Tudíž P je kompaktní β-obal prostoru $\varphi^1(Q)$.

8.4.10. Nechť Q je vnořen do kompaktního FH-prostoru P. Nechť množina Q je hustá v P. Je-li $\beta(Q)$ kompaktní β-obal prostoru Q, pak existuje takové spojité zobrazení h prostoru $\beta(Q)$ na prostor P, že $x \in Q \Rightarrow h(x) = x$, $h^1[\beta(Q) - Q] = = P - Q$.

Důkaz. I. Triviální případ $P = \emptyset$ můžeme vyloučit. Podle **8.3.19** a **8.4.3** je P úplně regulární prostor. Podle **8.4.7** existuje množina $\mathbf{C} \neq \emptyset$ a homeomorfní zobrazení g prostoru P do $S = \mathfrak{P}T(z)$ $(z \in \mathbf{C})$, kde $T(z) \doteq \mathscr{E}_t[0 \leqq t \leqq 1]$ pro každé $z \in \mathbf{C}$. Podle **8.4.6** je S H-prostor. Pro jasnost označme u topologii prostoru $\beta(Q)$, v topologii prostoru S. Protože P je kompaktní, je také $g^1(P) \subset S$ kompaktní, takže množina $g^1(P)$ je uzavřená v S podle **8.3.13**, a tedy $v\, g^1(Q) \subset g^1(P)$ podle **4.4.7.** Na druhé straně množina Q je hustá v P, takže také $g^1(Q)$ je hustá v $g^1(P)$, tj. $v\, g^1(Q) \supset g^1(P)$. Tudíž $v\, g^1(Q) = g^1(P)$.

II. Pro $z \in \mathbf{C}$, $y \in S$ budiž $f_z(y)$ z-souřadnice bodu y. Pak pro každé $z \in \mathbf{C}$ je f_z omezená spojitá funkce v oboru S. Existuje omezená spojitá funkce v oboru Q složená z g a ze zúžení $f_z \mid g^1(Q)$; tudíž podle definice kompaktního β-obalu existuje taková spojitá funkce f_z^* v oboru $\beta(Q)$, že

$$x \in Q \Rightarrow f_z[g(x)] = f_z^*(x)\,.$$

III. Pro každý $x \in \beta(Q)$ budiž $\varphi(x)$ ten bod prostoru S, jehož z-souřadnice je rovna $f_z^*(x)$ pro každé $z \in \mathbf{C}$. Ze **7.4.6** plyne, že φ je spojité zobrazení prostoru $\beta(Q)$ do prostoru S. Zřejmě

(1) $$x \in Q \Rightarrow \varphi(x) = g(x)\,,$$

tudíž $g^1(Q) \subset \varphi^1[\beta(Q)]$. Podle **8.3.15** množina $\varphi^1[\beta(Q)]$ je kompaktní, takže $\varphi^1[\beta(Q)]$ je uzavřená v S podle **8.3.13** a tedy $v\, g^1(Q) \subset \varphi^1[\beta(Q)]$ podle **4.4.7**. Je-li V okolí bodu $y \in \varphi^1[\beta(Q)]$ v prostoru $\varphi^1[\beta(Q)]$, pak při vhodném $x \in \beta(Q)$ je $\varphi(x) = y$ a podle **7.1.1** je $\varphi^{-1}(V)$ okolí bodu x v prostoru $\beta(Q)$; protože Q je hustý v $\beta(Q)$, je $Q \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ podle **4.9.4** a tedy $V \cap \varphi^1(Q) \neq \emptyset$; ze **4.9.4** tudíž plyne, že množina $\varphi^1(Q) = g^1(Q)$ je hustá ve $\varphi^1[\beta(Q)]$, tj. $v\, g^1(Q) \supset \varphi^1[\beta(Q)]$. Z toho plyne $v\, g^1(Q) = \varphi^1[\beta(Q)]$, tedy $\varphi^1[\beta(Q)] = g^1(P)$ podle I, tj. φ je spojité zobrazení prostoru $\beta(Q)$ na prostor $g^1(P)$.

IV. Budiž $x_1 \in Q$, $x_2 \in \beta(Q)$, $x_1 \neq x_2$. Protože $\beta(Q)$ je H-prostor; existuje takové okolí U bodu x_2 v prostoru $\beta(Q)$, že $x_1 \in \beta(Q) - uU$, tím spíše je $x_1 \in Q - u(Q \cap U)$. Protože Q je hustá v $\beta(Q)$, plyne ze **4.2.13** (kde místo P, M, N dáme $\beta(Q)$, Q, (x_2)), že $x_2 \in u(Q \cap U)$. Protože φ je spojité zobrazení prostoru $\beta(Q)$ do S, jest $\varphi(x_2) \in v[\varphi^1(Q \cap U)]$, a tedy podle (1) $\varphi(x_2) \in v[g^1(Q \cap U)]$. Protože $g \mid Q$ je homeomorfní zobrazení prostoru Q na $g^1(Q) \subset S$ a protože $x_1 \in Q - u(Q \cap U)$, jest $g(x_1) \in g^1(Q) - v[g^1(Q \cap U)]$, tudíž $\varphi(x_2) \neq g(x_1) = \varphi(x_1)$. Je tedy: $x \in \beta(Q) - Q \Rightarrow \varphi(x) \in P - g^1(Q)$.

V. Dokázali jsme, že φ je spojité zobrazení prostoru $\beta(Q)$ na $g^1(P)$, že $x \in Q \Rightarrow \varphi(x) = g(x)$ a že $x \in \beta(Q) - Q \Rightarrow \varphi(x) \in P - g^1(Q)$. Protože g je homeomorfní zobrazení prostoru P na $g^1(P)$, existuje takové spojité zobrazení h prostoru $\beta(Q)$ na P, že φ je složeno ze zobrazení h a g. Zřejmě: $x \in Q \Rightarrow h(x) = x$, $x \in \beta(Q) - Q \Rightarrow h(x) \in P - Q$, a tedy $h^1[\beta(Q) - Q] = P - Q$.

8.4.11. Buďtež P_1, P_2 dva kompaktní β-obaly úplně regulárního prostoru Q. Pak existuje takové homeomorfní zobrazení h prostoru P_1 na prostor P_2, že: $x \in Q \Rightarrow h(x) = x$. Podle **8.4.10** existuje takové spojité zobrazení h prostoru P_1 na P_2, že $x \in Q \Rightarrow h(x) = x$. Podle **8.3.24** stačí dokázat, že h je prosté. Předpokládejme opak, takže existují $a \in P_1$, $b \in P_1$, $a \neq b$, $h(a) = h(b)$. Podle **7.3.10** a **8.3.19** existuje taková omezená spojitá funkce f_1 v oboru P_1, že $f_1(a) = 0$, $f_1(b) = 1$. Zúžení $f_1 \mid Q$ je omezená spojitá funkce v oboru Q. Existuje taková spojitá funkce f_2 v oboru P_2, že $x \in Q \Rightarrow f_2(x) = f_1(x)$. Ze zobrazení h a z funkce f_2 můžeme složit spojitou funkci f_0 v oboru P_1. Jest $f_0(a) = f_2[h(a)] = f_2[h(b)] = f_0(b)$, naproti tomu $f_1(a) \neq f_1(b)$. Je-li $x \in P_1 \Rightarrow g(x) = f_0(x) - f_1(x)$, je g podle **7.1.32** spojitá funkce v oboru P_1. Množina $M = \mathscr{E}_x\, [g(x) = 0]$ je v prostoru P_1 uzavřená podle **7.1.20.** Zřejmě $Q \subset M$, takže M je hustá podle **4.9.1** a ze **4.9.2** plyne $M = P_1$, tj. $x \in P_1 \Rightarrow f_0(x) = f_1(x)$ a to je spor, neboť $f_0(a) = f_0(b)$, $f_1(a) \neq f_1(b)$.

8.4.12. Nechť normální prostor Q je vnořen do kompaktního FH-prostoru P. Nechť množina Q je hustá v P. Aby prostor P byl kompaktním β-obalem prostoru Q, k tomu je nutné a stačí, aby uzávěry (v prostoru P) dvou disjunktních relativně uzavřených podmnožin prostoru Q byly disjunktní.

Důkaz. I. Budiž P kompaktní β-obal prostoru Q. Jsou-li F_1, F_2 dvě disjunktní relativně uzavřené podmnožiny Q, pak podle **7.3.10** existuje taková omezená spojitá funkce f v oboru Q, že $x \in F_1 \Rightarrow f(x) = 0$, $x \in F_2 \Rightarrow f(x) = 1$. Existuje taková spojitá funkce g v oboru P, že $x \in Q \Rightarrow g(x) = f(x)$. Množiny

$$\Phi_1 = \mathscr{E}_x\ [x \in P,\, g(x) = 0]\,, \quad \Phi_2 = \mathscr{E}_x\ [x \in P,\, g(x) = 1]$$

jsou uzavřené v P podle **7.1.20** a jest $F_1 \subset \Phi_1$, $F_2 \subset \Phi_2$, takže podle **4.4.7** je $\overline{F}_1 \subset \Phi_1$, $\overline{F}_2 \subset \Phi_2$, a tedy $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 = \emptyset$, neboť $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$.

II. Abychom ukázali, že naše podmínka stačí, předpokládejme, že je splněna. Podle **8.4.9** existuje kompaktní β-obal $\beta(Q)$. Podle **8.4.10** existuje takové spojité zobrazení h prostoru $\beta(Q)$ na P, že $x \in Q \Rightarrow h(x) = x$. Podle **8.3.24** stačí dokázat, že h je prosté. Budiž $a \in \beta(Q)$, $b \in \beta(Q)$, $a \neq b$; máme dokázat, že $h(a) \neq h(b)$. Označme u topologii prostoru P. Podle **7.3.10** a **8.3.19** existuje taková omezená spojitá funkce f v oboru $\beta(Q)$, že $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Budiž

$$F_1 = \mathscr{E}_x\, [x \in Q,\, f(x) \leqq \tfrac{1}{3}]\,, \quad F_2 = \mathscr{E}_x\, [x \in Q,\, f(x) \geqq \tfrac{2}{3}]\,.$$

Množiny F_1, F_2 jsou podle **7.1.8** a **7.1.18** relativně uzavřené v prostoru Q a jest $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, takže podle našeho předpokladu také $uF_1 \cap$

$\cap uF_2 = \emptyset$. Je-li U okolí bodu $h(a)$ v prostoru P, pak podle **7.1.1** je $h^{-1}(U)$ okolí bodu a v prostoru $\beta(Q)$. Také množina $\Phi_1 = \mathscr{E}_x [x \in \beta(Q), f(x) \leqq \frac{1}{3}]$ je podle **7.1.1** okolí bodu a v prostoru $\beta(Q)$, takže podle **4.2.5** též $\Phi_1 \cap h^{-1}(U)$ je okolí bodu $a \in \beta(Q)$. Protože množina Q je hustá v $\beta(Q)$, plyne ze **4.9.3**, že $Q \cap \Phi_1 \cap h^{-1}(U) \neq \emptyset$, tj. $F_1 \cap h^{-1}(U) \neq \emptyset$, tedy také $F_1 \cap U \neq \emptyset$, neboť $F_1 \subset Q \Rightarrow h^1(F_1) = F_1$. Tudíž $h(a) \in uF_1$ podle **4.2.9**. Podobně je též $h(b) \in uF_2$. Protože $uF_1 \cap uF_2 = \emptyset$, je $h(a) \neq h(b)$.

8.4.13. Budiž Q vnořen do kompaktního FH-prostoru P. Uzávěry (v prostoru P) dvou disjunktních relativně uzavřených podmnožin prostoru Q buďtež disjunktní. Pak Q je normální prostor. Podle **4.6.10** je Q F-prostor. Buďtež F_1, F_2 dvě disjunktní relativně uzavřené podmnožiny Q. Jejich uzávěry $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ jsou disjunktní uzavřené množiny v prostoru P, který podle **8.3.19** je normální, takže $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ jsou H-oddělené v P. Podle **5.1.13** jsou také F_1, F_2 H-oddělené v prostoru P a podle **5.1.11** též v prostoru Q.

8.4.14. Budiž P kompaktní β-obal úplně regulárního prostoru Q. Budiž T relativně uzavřená podmnožina Q, $\overline{T}$ její uzávěr v P. Aby $\overline{T}$ byl kompaktní β-obal prostoru T, k tomu je nutné a stačí, aby ke každé omezené spojité funkci f v oboru T existovala taková spojitá funkce g v oboru Q, že zúžení $g \mid T$ splyne s f.

Důkaz. I. Dokažme nejprve, že podmínka stačí. Máme dokázat, že $\overline{T} = \beta(T)$. Podle **4.6.10** a **5.2.1** je $\overline{T}$ FH-prostor; podle **8.3.1** je $\overline{T}$ kompaktní; zřejmě je T v $\overline{T}$ hustá. Běží tedy jen o důkaz faktu, že ke každé omezené spojité funkci f v oboru T existuje taková spojitá funkce φ v oboru $\overline{T}$, že $\varphi \mid T = f$. Je-li f dána, pak podle předpokladu existuje taková spojitá funkce g v oboru Q, že $g \mid T = f$. Existují taková reálná čísla a, b, že $x \in T \Rightarrow a \leqq f(x) \leqq b$. Je-li

$$g(x) < a \Rightarrow h(x) = a\,, \quad g(x) > b \Rightarrow h(x) = b\,,$$
$$a \leqq g(x) \leqq b \Rightarrow h(x) = g(x)\,,$$

pak podle **7.1.32** je h omezená spojitá funkce v oboru Q a jest $h \mid T = f$. Protože $P = \beta(Q)$, existuje taková spojitá funkce k v oboru P, že $k \mid Q = h$. Pak $\varphi = k \mid \overline{T}$ je spojitá funkce v oboru $\overline{T}$ a jest $\varphi \mid T = f$.

II. Budiž $T = \beta(T)$ a budiž f omezená spojitá funkce v oboru T. Existuje taková spojitá funkce h v oboru $\overline{T}$, že $h \mid T = f$. Podle **8.3.19** je P normální prostor. Ze **7.3.12** tudíž plyne, že existuje taková spojitá funkce k v oboru P, že $k \mid \overline{T} = h$. Pak je $g = k \mid Q$ spojitá funkce v oboru Q a jest $g \mid T = f$.

8.4.15. Budiž $\beta(Q)$ kompaktní β-obal úplně regulárního prostoru Q. Aby Q byl normální, k tomu je nutné a stačí, aby pro každou relativně uzavřenou $T \subset Q$ uzávěr množiny T v prostoru $\beta(Q)$ byl kompaktním β-obalem prostoru T. Viz **7.3.11**, **7.3.12** a **8.4.14**.

8.5. Cvičení k § 8

8.5.1. Budiž u F-redukce (viz definici **8.1.4**) topologie v prostoru P. Aby ke každé nekonečné množině $M \subset P$ existoval takový bod $a \in P$, že každé v-okolí bodu a je v-okolím nekonečně mnoha $x \in M$, k tomu je nutné a stačí, aby (P, u) byl S-kompaktní F-prostor. Aby ke každé nekonečné množině $M \subset P$ existoval takový bod $a \in P$, že pro každé v-okolí V bodu a jest moh $\varphi(V) =$ moh M, kde $\varphi(V)$ je množina těch $x \in M$, jejichž v-okolím jest V, k tomu je nutné a stačí, aby (P, u) byl kompaktní F-prostor.

Definice **8.5.1.** Bodovou množinu $Q \subset P$ nazveme *relativně S-kompaktní* (v prostoru P), jestliže každé spočetné pokrytí prostoru P obsahuje konečné zakrytí množiny Q.

8.5.2. Aby bodová množina $Q \subset P$ byla relativně S-kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} \neq \emptyset$ pro každou takovou posloupnost $\{M_n\}_1^\infty$, pro kterou platí $M_n \subset P$, $Q \cap M_n \neq \emptyset$, $M_n \supset M_{n+1}$ pro všecka n.

8.5.3. Aby bodová množina $Q \subset P$ byla relativně S-kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby bylo $M' \neq \emptyset$ pro každou nekonečnou $M \subset Q$.

8.5.4. Budiž P L-prostor. Aby bodová množina $Q \subset P$ byla relativně S-kompaktní, k tomu je nutné a stačí, aby z každé v Q obsažené bodové posloupnosti $\{a_n\}$ bylo lze vybrat posloupnost, která v prostoru P je konvergentní.

Definice **8.5.2.** Bodovou množinu $Q \subset P$ nazveme *relativně kompaktní* (v prostoru P), jestliže každé pokrytí prostoru P obsahuje konečné zakrytí množiny Q.

8.5.5. Aby bodová množina $Q \subset P$ byla relativně kompaktní, k tomu je nutná a stačí tato podmínka: Je-li $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ taková soustava částí množiny Q, že $\emptyset \neq \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{K})$ pro každou konečnou soustavu $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{M}$, pak $\emptyset \neq \bigcap \overline{X}$ $(X \in \mathfrak{M})$.

8.5.6. Nechť bodová množina $Q \subset P$ je relativně kompaktní a nechť množina $M \subset Q$ je nekonečná. Pak existuje bod $a \in P$, který je koncentračním bodem množiny M.

8.5.7. Jestliže normální prostor P není S-kompaktní, pak existuje neomezená spojitá funkce v oboru P.

8.5.8. Prostor P popsaný v příkladě **8.3.3** je S-kompaktní H-prostor s prvním axiomem spočetnosti, ale $a \in P$ není R-bod. Tudíž v **8.2.16** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

8.5.9. Budiž A normálně uspořádaná množina mohutnosti $\aleph_1$ (viz **3.6.2** a **3.7.6**). Budiž $\boldsymbol{N}$ množina všech celých kladných čísel ve svém přirozeném uspořádání. Zvolme věc τ, která není ani prvkem A ani prvkem $\boldsymbol{N}$ a rozšiřme daná uspořádání množin A, $\boldsymbol{N}$ v uspořádání množin $B = A \cup (\tau)$, $M = \boldsymbol{N} \cup (\tau)$ tak, aby τ byl poslední v B i v M. Pokládejme B, M za uspořádané prostory ve smyslu definice **6.1.2** a utvořme kartézský součin $P = B \times M$. Označme v topologii prostoru P z definice **6.2.1**. Uvažujme jinou topologii u v množině P. Budiž $Q = B \times (\tau) \subset P$. Je-li $a \in P$, $a \neq (\tau, \tau)$, $X \subset P$, budiž $a \in uX$ právě tehdy, jestliže $a \in vX$. Je-li $X \subset P$, budiž $(\tau, \tau) \in uX$ právě tehdy, jestliže buďto $(\tau, \tau) \in X$ nebo $(\tau, \tau) \in v(Q \cap X)$. Pak je (P, u) S-kompaktní FH-prostor, ale (τ, τ) není R-bod. Tudíž v **8.2.16** nelze vynechat předpoklad $\chi(a) \leqq \aleph_0$. Zároveň vidíme, že v **8.2.18** nelze vynechat předpoklad že (P, v) je L-prostor.

8.5.10. Prostor P nechť se skládá z množiny $\boldsymbol{N}$ všech celých kladných čísel a ze dvou dalších bodů a, b. Je-li množina $X \subset P$ konečná, budiž $\overline{X} = X$. Je-li $X \subset P$ nekonečná a je-li řada

$$\sum \frac{1}{n} \quad (n \in X) \tag{1}$$

konvergentní, budiž $\overline{X} = X \cup (b)$. Je-li $X \subset P$ nekonečná a je-li řada (1) divergentní, budiž $\overline{X} = X \cup (a) \cup (b)$. Pak je P S-kompaktní F-prostor a jest $\psi(a) = \aleph_0$, $\chi(a) > \aleph_0$. Tudíž v **8.2.17** nelze vynechat předpoklad, že a je H-bod. Položíme-li $Q = P - (a)$, vidíme, že v **8.3.12** nelze vynechat předpoklad, že každý $x \in P - Q$ je H-bod.

8.5.11. Budiž P F-prostor popsaný v příkladě **6.4.10**. Bodové množiny $Q_1 = P - (1)$, $Q_2 = P - (2)$ jsou kompaktní, ale $Q_1 \cap Q_2$ není ani S-kompaktní. Proto v **8.2.10** nelze vynechat předpoklad, že P je L-prostor; rovněž nelze v **8.3.14** vynechat předpoklad, že P je H-prostor.

8.5.12. Jako ve cvičení 8.5.9 budiž A normálně uspořádaná množina mohutnosti $\aleph_1$. Pokládáme A za uspořádaný prostor ve smyslu definice **6.1.2**, takže A

je dědičně normální prostor (viz **6.1.7**). Ke každé spojité funkci f v oboru A existuje takové $a \in A$, že

$$x \in A,\, a \quad \text{před} \quad x \Rightarrow f(x) = f(a)\,.$$

Z toho plyne, že uspořádaný prostor $B = A \cup (\tau)$, o kterém byla zmínka v **8.5.9**, je kompaktním β-obalem prostoru A.

8.5.13. Budiž $P = B \times M$ prostor popsaný ve cvičení **8.5.9** v topologii z definice **6.2.1**. Budiž $Q = P - (\tau, \tau)$ vnořen do P (τ má týž význam jako v **8.5.9**). Je-li f spojitá funkce v oboru Q, pak existuje takové okolí U bodu $(\tau, \tau) \in P$, že

$$x \in Q \cap U\,, \quad y \in Q \cap U \Rightarrow f(x) = f(y)\,.$$

Z toho plyne, že prostor P je kompaktním β-obalem prostoru Q.

8.5.14. Budiž Q prostor stejně označený v **8.5.13**; jeho topologii označme u; budiž

$$T_1 = A \times (\tau) \subset Q\,, \quad T_2 = (\tau) \times \mathbf{N} \subset Q\,,$$

kde A, $\mathbf{N}$, τ mají týž význam jako v **8.5.9**. Budiž $\{Q_n\}_1^\infty$ posloupnost takových množin, že pro všecka n je moh Q_n = moh Q, a zvolme pro každé $n \in \mathbf{N}$ prosté zobrazení φ_n množiny Q na množinu Q_n. Pro $i \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $k - i \geqq 2$ budiž $Q_i \cap Q_k = \emptyset$. Pro $n \in \mathbf{N}$ budiž

$$\begin{aligned} &Q_{2n-1} \cap Q_{2n} = \varphi^1_{2n-1}(T_1) = \varphi^1_{2n}(T_1)\,,\\ &x \in Q_{2n-1} \cap Q_{2n} \Rightarrow \varphi_{2n-1}(x) = \varphi_{2n}(x)\,; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &Q_{2n} \cap Q_{2n+1} = \varphi^1_{2n}(T_2) = \varphi^1_{2n+1}(T_2)\,,\\ &x \in Q_{2n} \cap Q_{2n+1} \Rightarrow \varphi_{2n}(x) = \varphi_{2n+1}(x)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Budiž $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n \cup (\omega)$, kde ω je nový symbol. Pro $X \subset P$ budiž

$$v(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^1_n[u(\varphi_n^{-1}(X \cap Q_n))]\,.$$

Do P zavedeme topologii takto. Je-li $X \subset P$, budiž $\overline{X} = v(X) \cup (\omega)$, jestliže buďto $\omega \in X$ nebo pro nekonečně mnoho $n \in \mathbf{N}$ jest $X \cap Q_n \neq \emptyset$; jestliže však $\omega \in P - X$ a jestliže pouze pro konečně mnoho $n \in \mathbf{N}$ jest $X \cap Q_n \neq \emptyset$, budiž $\overline{X} = v(X)$. Pak P je FR-prostor. Avšak P není úplně regulární; důkaz zde stručně naznačíme. Předpokládáme-li, že P je úplně regulární, pak existuje kompaktní FH-prostor R, do kterého P je vnořen. Topologii prostoru R označme w. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ jsou $w\, \varphi^1_n(T_1)$, $w\, \varphi^1_n(T_2)$, wQ_n kompaktní FH-prostory; množina $\varphi^1_n(T_1)$ je hustá ve $w\, \varphi^1_n(T_1)$, množina $\varphi^1_n(T_2)$ je hustá ve $w\, \varphi^1_n(T_2)$, množina Q_n je hustá ve wQ_n. Z **8.4.10** a **8.5.12** plyne, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ existuje takový bod $a_n \in R$, že

$$w\, \varphi^1_n(T_1) = \varphi^1_n(T_1) \cup (a_n)\,;$$

z **8.4.10** a 8.5.13 plyne, že pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ existuje takový bod $b_n \in R$, že $wQ_n = Q_n \cup (b_n)$. Protože

$$\varphi_n^1(T_2) \subset Q_n\,, \quad w\,\varphi_n^1(T_2) \neq \varphi_n^1(T_2)\,,$$

musí být

$$w\,\varphi_n^1(T_2) = \varphi_n^1(T_2) \cup (b_n)\,.$$

Nyní se snadno zjistí, že $a_n = b_n$, a potom se odvodí z (1) a (2), že všecky body a_n, b_n jsou rovny témuž jedinému $a \in R$. Je tedy $a \in wQ_n$ pro všecka n a je-li U libovolné okolí bodu a v prostoru R, je $U \cap Q_n \neq \emptyset$ pro všecka n, takže $\omega \in wU$. Protože $\omega \neq a$ a protože R je H-prostor, je to nemožné.