Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory

§6. Příklady topologických prostorů

In: Eduard Čech (author); Josef Novák (author); Miroslav Katětov (author): Topologické prostory. S dodatky: J. Novák, Konstrukce některých význačných topologických prostorů; M. Katětov, Plně normální prostory. (Czech). Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959. pp. 113--141.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402597

§ 6. PŘÍKLADY TOPOLOGICKÝCH PROSTORŮ

6.1. Uspořádané prostory

Budiž R uspořádaná množina. Leží-li $a \in R$ před $b \in R$, označíme $J(a, b)$, někdy také $J(b, a)$, množinu těch $x \in R$, které leží mezi a a b. Každému $a \in R$ přiřadíme soustavu $\mathsf{L}(a)$ částí R takto. Jestliže předně a je první v R, pak $\mathsf{L}(a)$ se skládá z jediné množiny (a). Jestliže však existují $x \in R$ ležící před a, pak $\mathsf{L}(a)$ se skládá ze všech množin tvaru $J(x, a) \cup (a)$, kde $x \in R$ probíhá prvky ležící před a. Podobně definujeme druhou soustavu $\mathsf{P}(a)$ takto. Je-li a poslední v R, skládá se $\mathsf{P}(a)$ z jediné množiny (a); jinak se $\mathsf{P}(a)$ skládá ze všech množin tvaru $J(a, x) \cup (a)$, kde $x \in R$ probíhá prvky ležící za a.

Definice **6.1.1.** Množiny $X \in \mathsf{L}(a)$ se jmenují *okolí zleva* a množiny $X \in \mathsf{P}(a)$ *okolí zprava* prvku $a \in R$. Je-li obava z nedorozumění, píšeme podrobněji $\mathsf{L}(a, R)$, $\mathsf{P}(a, R)$.

6.1.1. Je-li a první prvek uspořádané množiny R nebo existuje-li $b \in R$, který leží přímo před a, jest $(a) \in \mathsf{L}(a)$; jinak je každá $X \in \mathsf{L}(a)$ nekonečná. Je-li a poslední prvek R nebo existuje-li $b \in R$, který leží přímo za a, jest $(a) \in \mathsf{P}(a)$; jinak je každá $X \in \mathsf{P}(a)$ nekonečná.

Pro každý prvek a uspořádané množiny R nechť soustava $\mathfrak{U}(a)$ se skládá ze všech množin tvaru $X \cup Y$, kde $X \in \mathsf{L}(a)$, $Y \in \mathsf{P}(a)$. Snadno nahlédneme, že $\mathfrak{U}(a)$ splňuje axiomy (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) vyslovené ve **4.3.1.** Ze **4.3.3** tedy plyne, že můžeme definovat topologii v R pomocí definujících soustav okolí $\mathfrak{U}(a)$ $(a \in R)$.

Definice **6.1.2.** *Uspořádaný prostor* R je uspořádaná množina R v právě popsané topologii.

Je užitečné tuto definici trochu zobecnit. Zvolme čtyři disjunktní podmnožiny R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ tak, aby jejich sjednocením byla celá R;

jinak jsou R_i zcela libovolné. Pro $a \in R_1$ nechť $\mathfrak{U}(a)$ se skládá z jediné množiny (a); pro $a \in R_2$ budiž $\mathfrak{U}(a) = \mathsf{L}(a)$; pro $a \in R_3$ budiž $\mathfrak{U}(a) = \mathsf{P}(a)$; pro $a \in R_4$ budiž $\mathfrak{U}(a)$ soustava všech $X \cup Y$, kde $X \in \mathsf{L}(a)$, $Y \in \mathsf{P}(a)$. Axiomy (I$\mathfrak{U}$) až (IV$\mathfrak{U}$) jsou opět splněny, takže můžeme zavést topologii do R pomocí definujících soustav okolí $\mathfrak{U}(a)$ $(a \in R)$.

Definice **6.1.3.** *Zobecněný uspořádaný prostor* R (v tomto paragrafu stručně z. u. p.) je uspořádaná množina R v jedné z právě popsaných topologií.

Definice **6.4.2.** Budiž R z. u. p. Pravíme, že $a \in R$ je *zleva* (*zprava*) *isolovaný bod* prostoru R, existuje-li okolí U bodu a, jehož prvním (posledním) bodem je a. Množinu všech zleva (zprava) isolovaných bodů označíme $I^l(R)$ $[I^p(R)]$.

6.1.2. Budiž R z. u. p. Aby byl $a \in R$ isolovaný bod, k tomu je nutné a stačí $a \in I^l(R) \cap I^p(R)$. Viz **4.2.5.**

Různé rozklady $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ uspořádané množiny R mohou vytvořovat touž topologii v R. (Slova „rozklad" zde užíváme v poněkud jiném smyslu než v **1.3**, neboť nyní nepředpokládáme $R_i \neq \emptyset$.) Avšak mezi všemi rozklady vytvořujícími touž topologii je jeden význačný:

6.1.3. Budiž R z. u. p. Topologie prostoru R se dá vytvořit rozkladem $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$, kde

$$\begin{aligned} R_1 &= I^l(R) \cap I^p(R)\,, \\ R_2 &= I^p(R) - I^l(R)\,, \\ R_3 &= I^l(R) - I^p(R)\,, \\ R_4 &= R - [I^l(R) \cup I^p(R)]\,. \end{aligned}$$

6.1.4. Prostor S vnořený do z. u. p. R je zase z. u. p. Jakožto část uspořádané množiny R je také S uspořádaná množina. Budiž K_1 (K_2) množina těch $x \in S$, ke kterým existuje taková $X \in \mathsf{L}(a, R)$ $[X \in \mathsf{P}(a, R)]$, že $S \cap X = (a)$. Nechť daná topologie R je vytvořena rozkladem $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$. Snadno se přesvědčíme, že topologie vnořeného prostoru S se dá vytvořit rozkladem $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, kde

$$S_1 = (S \cap R_1) \cup (S \cap R_2 \cap K_1) \cup (S \cap R_3 \cap K_2) \cup (S \cap R_4 \cap K_1 \cap K_2),$$
$$S_2 = [(S \cap R_2) - K_1] \cup [(S \cap R_4 \cap K_2) - K_1],$$
$$S_3 = [(S \cap R_3) - K_2] \cup [(S \cap R_4 \cap K_1) - K_2],$$
$$S_4 = (S \cap R_4) - (K_1 \cup K_2).$$

6.1.5. Každý z. u. p. S se dá vnořit do uspořádaného prostoru R.

Důkaz. I. Nechť daná topologie v S se dá vytvořit rozkladem $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Označme Γ množinu všech celých čísel $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Pro $x \in S$ položme $(x, 0) = x$, takže S považujeme za podmnožinu kartézského součinu $S \times \Gamma$. Je-li $(x_1, t_1) \in S \times \Gamma$, $(x_2, t_2) \in \in S \times \Gamma$, nechť

$$(x_1, t_1) \text{ před } (x_2, t_2)$$

znamená, že buďto x_1 leží před x_2 v uspořádané množině S nebo je současně $x_1 = x_2$, $t_1 < t_2$. Tím vznikne uspořádání množiny $S \times \Gamma$, které je rozšířením daného uspořádání v S.

II. Definujeme množinu $R \subset S \times \Gamma$ takto:

$$\begin{aligned} &\text{pro } x \in S_1\colon && (x, t) \in R \Leftrightarrow t \in \Gamma; \\ &\text{pro } x \in S_2\colon && (x, t) \in R \Leftrightarrow t \geqq 0; \\ &\text{pro } x \in S_3\colon && (x, t) \in R \Leftrightarrow t \leqq 0; \\ &\text{pro } x \in S_4\colon && (x, t) \in R \Leftrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Jakožto část uspořádané množiny $S \times \Gamma$ je R uspořádána; můžeme pokládat R za uspořádaný prostor a S za prostor vnořený do R. Snadno se přesvědčíme, že touto cestou dospějeme k původně dané topologii v S.

6.1.6. Budiž R z. u. p. Nechť bod a leží před bodem b. Množina $J(a, b)$ je otevřená.

6.1.7. Každý z. u. p. R je dědičně normální.

Důkaz. I. Podle **6.1.4** stačí dokázat, že R je normální.

II. Ze **4.2.4**, **4.4.13** a **6.1.6** plyne, že definující okolí U bodu $a \in R$ je nejen okolím bodu a samého, nýbrž je také okolím každého jiného $x \in U$, takže množina U je otevřená (viz **4.2.8** a **4.4.12**). Tudíž R je F-prostor podle **4.5.6**.

III. Nechť $F_1 \subset R$, $F_2 \subset R$ jsou dvě disjunktní uzavřené množiny. Máme udat okolí W_1 množiny F_1 a okolí W_2 množiny F_2 tak, aby bylo $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Položíme $G = R - (F_1 \cup F_2)$ a pro $(x, y) \in G \times G$

$$(x, y) \in \mathfrak{E} \Leftrightarrow \text{buďto } x = y \text{ nebo } J(x, y) \subset G\,.$$

Snadno zjistíme, že $\mathfrak{E}$ je vztah ekvivalence v G; budiž $\mathfrak{R}$ příslušný rozklad G ve smyslu článku **1.3.** V každém pásu S rozkladu $\mathfrak{R}$ zvolme $\varphi(S) \in S$.

IV. Přiřadíme každému $x \in F_1$ okolí $U(x)$ bodu x. Toto $U(x)$ bude sjednocením $U_1 \cup U_2$ a nejprve popíšeme U_1. Při tom budeme rozlišovat tři případy.

Případ první: $x \in I^l(R)$. Položíme $U_1 = (x)$.

Případ druhý: každé okolí bodu x obsahuje aspoň jeden takový $y \in F_1$, který v R leží před x. Protože $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, jest $R - F_2$ okolím x (viz **4.4.13**). Z toho se snadno odvodí, že existuje bod $y \in F_1$, který leží v R před x a pro který platí $F_2 \cap J(x, y) = \emptyset$. Zvolíme takový bod y a položíme $U_1 = (x) \cup J(y, x)$.

Případ třetí: jest $x \in R - I^l(R)$ a existuje takové okolí H bodu x, že x je prvním bodem množiny $F_1 \cap H$. Protože také $R - F_2$ je okolí x, je také $K = H - F_2$ okolím x (viz **4.2.5**). Tudíž K je takové okolí bodu x, že žádný bod množiny $K - G$ neleží před x. Protože $x \in R - I^l(R)$, existuje tedy bod $y \in K \cap G$ před x. Nechť S je pás obsahující bod y (viz III); položme $\varphi(S) = z$. Protože $(y, z) \in \mathfrak{E}$ a protože y leží před $x \in R - G$, nahlédneme snadno, že také z leží před x. Položíme $U_1 = (x) \cup J(z, x)$.

V. Tím je (při daném $x \in F_1$) definována množina U_1. Množinu U_2 definujeme úplně stejně až na to, že místo

$$I^l(R),\ \text{před } x\,,\ \text{první bod},\ U_1$$

přijde nyní

$$I^p(R),\ \text{za } x,\ \text{poslední bod},\ U_2\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že $U(x) = U_1 \cup U_2$ je okolím bodu x.

VI. Každému $x \in F_2$ přiřadíme okolí $V(x) = V_1 \cup V_2$. Definice $V(x)$ $(x \in F_2)$ se liší od definice $U(x)$ $(x \in F_1)$ pouhou výměnou množin F_1, F_2.

VII. Položíme $W_1 = \bigcup U(x)$ $(x \in F_1)$, $W_2 = \bigcup V(x)$ $(x \in F_2)$, takže podle **4.2.4** a **4.2.8** W_1 je okolím F_1, W_2 je okolím F_2.

VIII. Zbývá dokázat, že $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. To plyne snadno z následujících faktů, o jejichž správnosti je lehké se přesvědčit. Jest $W_1 \subset F_1 \cup \cup G$, $W_2 \subset F_2 \cup G$. Je-li $y \in W_1 \cap G$ a je-li S ten pás množiny G, ve kterém leží y, nastane jeden z těchto tří případů: [1] existují takové dva body $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_1$, že $S \subset J(x_1, x_2) \subset R - F_2$; [2] y leží za bodem $\varphi(S)$ a existuje $x \in F_1$, který je prvním za $\varphi(S)$ ležícím bodem množiny $F_1 \cup F_2$; [3] y leží před bodem $\varphi(S)$ a existuje $x \in F_1$, který je posledním před $\varphi(S)$ ležícím bodem množiny $F_1 \cup F_2$. Je-li $y \in W_2 \cap G$ a je-li S ten pás množiny G, ve kterém leží y, nastane jeden z těchto tří případů: [1] existují takové dva body $x_1 \in F_2$, $x_2 \in F_2$, že $S \subset J(x_1, x_2) \subset R - F_1$; [2] y leží za bodem $\varphi(S)$ a existuje $x \in F_2$, který je prvním za $\varphi(S)$ ležícím bodem množiny $F_1 \cup F_2$; [3] y leží před bodem $\varphi(S)$ a existuje $x \in F_2$, který je posledním před $\varphi(S)$ ležícím bodem množiny $F_1 \cup F_2$.

Definice **6.1.5.** Podmnožinu D uspořádané množiny R nazveme *uspořádáním hustou* v R, jestliže D je v uspořádaném prostoru R (viz definici **6.1.2**) hustá (viz definici **4.9.1**).

6.1.8. Budiž R uspořádaná množina. Budiž $D \subset R$ uspořádáním hustá v R. Je-li $a \in R$, $b \in R$ a je-li $J(a, b) \neq \emptyset$, jest $D \cap \cap J(a, b) \neq \emptyset$. Jestliže k bodu $a \in R$ existuje takový $b \in R$, který leží v R přímo před a, a také takový $c \in R$, který leží v R přímo za a, pak jest $a \in D$. Je-li a první v R a existuje-li takový $b \in R$, který leží v R přímo za a, pak jest $a \in D$. Je-li a poslední v R a existuje-li takový $b \in R$, který leží v R přímo před a, pak jest $a \in D$. Tvrzení o $J(a, b)$ plyne ze **4.9.5** a **6.1.6**; ostatní tvrzení se snadno odvodí ze **4.9.13.**

6.1.9. Budiž R uspořádaná množina s aspoň dvěma prvky. Nechť $D \subset R$ má tuto vlastnost:

$$(1) \quad a \in R\,, \quad b \in R\,, \quad a \neq b\,, \quad J(a, b) \neq \emptyset \Rightarrow D \cap J(a, b) \neq \emptyset\,.$$

Je-li v R první prvek a a existuje-li $b \in R$, který leží přímo za a, pak nechť $a \in D$. Je-li v R poslední prvek a a existuje-li $b \in R$, který leží přímo před a, pak nechť $a \in D$. Pak je D uspořádáním hustá v R. Uvažujeme R v topologii z definice **6.1.2.** Podle

4.9.4 máme dokázat, že každé definující okolí každého bodu $x \in R$ obsahuje aspoň jeden bod množiny D. To však plyne z (1), jestliže není (x) definujícím okolím bodu x neboli jestliže x není isolovaným bodem prostoru R. Zbývá dokázat, že pro každý isolovaný bod x je $x \in D$. To plyne přímo ze **6.1.1** pro takový isolovaný bod x, který je prvním nebo posledním v R. Pro jiný isolovaný bod x soudíme ze **6.1.1**, že existují takové prvky $a \in R$, $b \in R$, že a leží přímo před x; b přímo za x. Potom je však $J(a, b) = (x)$, tedy $x \in D$.

6.1.10. Budiž R z. u. p. Množina $D \subset R$ je právě tehdy hustá v R, jestliže předně D je uspořádáním hustá a za druhé D obsahuje každý isolovaný bod prostoru R.

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Podle **4.2.3** a **4.9.4** máme ukázat, že každé definující okolí U každého neisolovaného $x \in R$ obsahuje aspoň jeden bod množiny D. Z definice **6.1.3** však následuje, že existují takové $a \in R$, $b \in R$, že $a \neq b$, $\emptyset \neq J(a, b) \subset U$. Podle **6.1.8** je $D \cap J(a, b) \neq \emptyset$, tedy $D \cap U \neq \emptyset$.

II. Nechť D je hustá v prostoru R. Podle **4.9.13** obsahuje D každý isolovaný bod prostoru R. Obsahuje-li R nejvýš jeden bod, pak D splyne s R a je tedy uspořádáním hustá. Je-li a první v R a leží-li nějaký $b \in R$ přímo za a, je bod a isolovaný, tedy $a \in D$. Podobně je $a \in D$, je-li a poslední v R a leží-li nějaký $b \in R$ přímo před a. Je-li $a \in R$, $b \in R$, $a \neq b$, je množina $J(a, b)$ otevřená podle **6.1.6** a je-li $J(a, b) \neq \emptyset$, je $D \cap J(a, b) \neq \emptyset$ podle **4.4.13** a **4.9.4.** Tudíž R je uspořádáním hustá podle **6.1.9.**

Budiž R uspořádaná množina. Existuje aspoň jedna uspořádáním hustá část R, totiž R sama. Podle **3.7.3** můžeme tedy vyslovit definici:

Definice **6.1.6.** *Charakter uspořádání* uspořádané množiny R je nejmenší možná mohutnost uspořádáním husté podmnožiny.

6.1.11. Budiž R uspořádaná množina. Je-li R konečná, pak její charakter uspořádání je roven počtu jejích prvků. Je-li R nekonečná, pak její charakter uspořádání je nekonečný.

Důkaz. I. Je-li R konečná, je R sama jedinou svou uspořádáním hustou podmnožinou.

II. Existuje-li konečná uspořádáním hustá $D \subset R$, je D hustá ve smyslu topologie definice **6.1.2** a podle **4.4.3** a **4.9.2** je $D = R$.

Definice **6.1.7.** *Charakter zleva (zprava)*, značka $\chi^l(a)$ $[\chi^p(a)]$, prvku a uspořádané množiny R definujeme takto. Pokládáme R za uspořádaný prostor podle definice **6.1.2** a označíme S (T) množinu složenou z bodu a a ze všech těch $x \in R$, které leží před a (za a). Pokládáme S (T) za prostor vnořený do R a definujeme $\chi^l(a)$ $[\chi^p(a)]$ jako charakter bodu a v prostoru S (T) ve smyslu definice **4.12.1.**

Jsou-li $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ dvě mohutnosti, položíme

$$\max(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}_1\,, \quad \min(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}_2\,, \quad \text{je-li} \quad \mathfrak{m}_1 \geqq \mathfrak{m}_2\,,$$
$$\max(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}_2\,, \quad \min(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}_1\,, \quad \text{je-li} \quad \mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2\,.$$

Podobně pro více než dvě mohutnosti.

6.1.12. Budiž R z. u. p. Je-li $a \in I^l(R) \cap I^p(R)$, jest $\chi(a) = \psi(a) = \omega(a) = 1$. Je-li $a \in I^p(R)$, je $\chi(a) = \psi(a) = \omega(a) = \chi^l(a)$. Je-li $a \in I^l(R)$, je $\chi(a) = \psi(a) = \omega(a) = \chi^p(a)$. Je-li $a \in R - [I^l(R) \cup I^p(R)]$, je $\chi(a) = \psi(a) = \max[\chi^l(a), \chi^p(a)]$, $\omega(a) = \min[\chi^l(a), \chi^p(a)]$. Pro $a \in I^l(R) \cup I^p(R)$ je $\chi(a)$ monotónní. Pro $a \in R - [I^l(R) \cup I^p(R)]$ je právě tehdy $\chi(a)$ monotónní, jestliže $\chi^l(a) = \chi^p(a)$.

Důkaz. I. Je-li $a \in I^l(R) \cap I^p(R)$, je $\chi(a) = \psi(a) = \omega(a) = 1$ podle **4.12.1** a **6.1.2.**

II. Je-li $a \in I^p(R)$, zjistí se snadno, že $\chi(a) = \chi^l(a)$ a že $\chi(a)$ je monotónní, takže podle **4.12.11** je $\psi(a) = \omega(a) = \chi^l(a)$. Podobně pro $a \in I^l(R)$.

III. Budiž $a \in R - [I^l(R) \cup I^p(R)]$. Budiž S (T) množina skládající se z a a z těch $x \in R$, které leží před a (za a). Jest $S \cup T = R$, $a \in S \cap T$. Podle II jsou $\chi(a \mid S)$, $\chi(a \mid T)$ monotónní a jest $\chi(a \mid S) = \psi(a \mid S) = \omega(a \mid S) = \chi^l(a)$, $\chi(a \mid T) = \psi(a \mid T) = \omega(a \mid T) = \chi^p(a)$. Pro určitost nechť $\chi^l(a) \geqq \chi^p(a)$. Podle **4.12.7** je $\chi(a) = \psi(a) = \chi^l(a)$. Protože $a \in R - [I^l(R) \cup I^p(R)]$, je $\omega(a \mid S) \neq 1 \neq \omega(a \mid T)$ podle **4 12.1**, tedy $\omega(a) = \chi^p(a)$ podle **4.12.8.** Ze **4.12.15** plyne, že $\chi(a)$ je právě tehdy monotónní, jestliže $\chi^l(a) = \chi^p(a)$.

6.1.13. Budiž R z. u. prostor. Charakter každého $a \in R$ je nejvýš roven charakteru uspořádání prostoru R. Budiž $\mathfrak{d}$

tento charakter uspořádání a budiž $D \subset R$ uspořádáním hustá, moh $D = \mathfrak{d}$. Podle **6.1.12** postačí, odvodíme-li $\chi^l(a) \leqq \mathfrak{d}$. Je-li $a \in I^l(R)$, je $1 = \chi^l(a) \leqq \mathfrak{d}$; nechť tedy $a \in R - I^l(R)$. Definujme S tak jako v definici **6.1.7.** Pak soustava množin

$$U(x) = (a) \cup J(x, a) \quad [x \in S - (a)]$$

je definující soustava okolí bodu $a \in S$ v té topologii S, pomocí které byl definován $\chi^l(a)$. Stačí tedy dokázat, že $S - (a)$ má takovou podmnožinu M, že moh $M \leqq \mathfrak{d}$ a že ke každému $x \in S - (a)$ existuje takový $y \in M$, že $U(y) \subset U(x)$. Položme $M = S \cap D - (a)$, takže moh $M \leqq \mathfrak{d}$ podle **3.7.1.** Je-li $x \in S - (a)$, je $J(x, a) \neq \emptyset$, neboť jinak by bylo $a \in I^l(R)$. Podle **6.1.8** existuje $y \in D \cap J(x, a)$. Zřejmě $y \in M$, $U(y) \subset$ $\subset U(x)$.

6.1.14. Budiž R z. u. p. Budiž $\mathfrak{d}$ charakter uspořádání prostoru R, budiž moh $I^l(R) = \mathfrak{m}_1$, moh $I^p(R) = \mathfrak{m}_2$. Pak jest

$$\chi^t(R) = \max\,[\mathfrak{d}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]\,. \tag{2}$$

Důkaz. I. R je F-prostor podle **6.1.7**, takže $\chi^t(R)$ je definován. Je-li moh $R = n$ konečná, je $\chi^t(R) = n$ podle **4.12.17**, $\mathfrak{d} = n$ podle **6.1.11** a zřejmě také $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = n$. Nechť tedy R je nekonečný. Označme $\mathfrak{m}$ pravou stranu ve (2); podle **6.1.11** je $\mathfrak{d}$ a tudíž i $\mathfrak{m}$ nekonečná mohutnost. Podle **4.12.21** existuje hustá $D \subset R$ mohutnosti $\leqq \chi^t(R)$. Podle **6.1.10** je moh $D \geqq \mathfrak{d}$, takže $\mathfrak{d} \leqq \chi^t(R)$.

II. Budiž $\mathfrak{B}$ otevřená base prostoru R mohutnosti $\chi^t(R)$. Budiž $a \in I^l(R)$ a budiž U jeho definující okolí, takže a je první v U. Podle **4.5.17** existuje $B \in \mathfrak{B}$, $a \in B \subset U$; a je pak první v B. Tedy existuje takové zobrazení φ množiny $I^l(R)$ do $\mathfrak{B}$, že pro každý $a \in I^l(R)$ je a první ve $\varphi(a)$. Zřejmě φ je prosté, takže $\mathfrak{m}_1 \leqq \chi^t(R)$ podle **3.7.1.** Podobně vyjde $\mathfrak{m}_2 \leqq \chi^t(R)$ a protože $\mathfrak{d} \leqq \chi^t(R)$ je nám známo, je $\mathfrak{m} \leqq \chi^t(R)$.

III. Zbývá dokázat, že R má otevřenou basi mohutnosti $\leqq \mathfrak{m}$. Protože R je F-prostor, existuje podle **4.5.6**, **4.12.5** a **6.1.13** ke každému $x \in R$ úplná soustava $\mathfrak{V}(x)$ okolí bodu x složená z otevřených množin a taková, že moh $\mathfrak{V}(x) \leqq \mathfrak{d}$. Ze **3.7.10** soudíme nejprve, že moh $[I^l(R) \cup$ $\cup I^p(R)] \leqq \mathfrak{m}$ a potom, že také moh $\mathfrak{W} \leqq \mathfrak{m}$, kde $\mathfrak{W}$ je sjednocením všech soustav $\mathfrak{V}(x)$ pro $x \in [I^l(R) \cup I^p(R)]$. Budiž D uspořádáním hustá část R mohutnosti $\mathfrak{d}$. Podle **3.7.8** je moh $(D \times D) \leqq \mathfrak{m}$ a podle **3.7.1** také moh $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{m}$, je-li $\mathfrak{U}$ soustava všech množin $J(x, y)$, kde $x \in D$, $y \in D$, x před y. Podle **6.1.6** se $\mathfrak{U}$ skládá z otevřených množin a totéž platí o $\mathfrak{B} = \mathfrak{U} \cup \mathfrak{W}$. Podle **3.7.10** je moh $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{m}$ a zbývá ukázat, že $\mathfrak{B}$ je otevřená base prostoru R. Budiž $a \in R$; podle **4.5.17** máme dokázat, že ty množiny soustavy $\mathfrak{B}$, které obsahují bod a, tvoří úplnou soustavu okolí bodu a. To je zřejmé, je-li $a \in I^l(R) \cup I^p(R)$; nechť tedy $a \in R - [I^l(R) \cup I^p(R)]$. Každé definující okolí bodu a má tvar

$$U = (a) \cup J(b, a) \cup J(a, c)\,,$$

kde b leží před a, c leží za a, $J(b, a) \neq \emptyset \neq J(a, c)$. Podle **6.1.8** existují takové $x \in D$, $y \in D$, že $x \in J(b, a)$, $y \in J(a, c)$. Zřejmě $J(x, y) \in \mathfrak{B}$, $a \in J(x, y)$, $J(x, y) \subset U$.

6.1.15. Budiž R uspořádaný prostor. Charakter uspořádání prostoru R budiž $\mathfrak{d}$; budiž $\mathfrak{s}$ mohutnost množiny všech skoků v R (viz **3.3**). Pak jest $\chi^t(R) = \max(\mathfrak{d}, \mathfrak{s})$. Položme $\max(\mathfrak{d}, \mathfrak{s}) = \mathfrak{m}$. Případ konečného R je triviální a necháme jej stranou; podle **6.1.11** je pak mohutnost $\mathfrak{d}$, a tudíž i $\mathfrak{m}$ nekonečná. Je-li (R_1, R_2) skok v uspořádané množině R, pak existují takové $a \in R_1$, $b \in R_2$, že a je poslední v R_1, b první v R_2; zřejmě $a \in I^p(R)$. Z toho soudíme snadno, že $\mathfrak{s} \leqq$ $\leqq$ moh $I^p(R)$ a ovšem je také $\mathfrak{s} \leqq$ moh $I^l(R)$, takže $\chi^t(R) \geqq \mathfrak{m}$ podle **6.1.14.** Na druhé straně, jestliže $a \in I^p(R)$ a jestliže a není poslední v R, pak ze **6.1.1** soudíme snadno, že (R_1, R_2) je skok v množině R, kde

$$R_2 = \mathscr{E}_x\,[x \in R,\ x \text{ za } a]\,, \quad R_1 = R - R_2\,.$$

Z toho plyne snadno, že moh $I^p(R) \leqq \mathfrak{m}$. Podobně je též moh $I^l(R) \leqq$ $\leqq \mathfrak{m}$. Podle **6.1.14** je tedy $\chi^t(R) \leqq \mathfrak{m}$, a tudíž $\chi^t(R) = \mathfrak{m}$.

6.1.16. Budiž R uspořádaný prostor. Zvolme $M \subset R$ libovolně. Je-li M_1 (M_2) množina těch $x \in M$, které mají takové okolí zleva (zprava) H, že $H \cap M = (x)$, pak moh M_1 (moh M_2) $\leqq$ $\leqq \chi^t(R)$. Pokládáme-li $M \subset R$ za vnořený prostor, je $M_1 = I^l(M)$, $M_2 = I^p(M)$. Uvažované mohutnosti jsou podle **6.1.14** $\leqq \chi^t(M)$ a podle **4.12.18** $\chi^t(M) \leqq \chi^t(R)$.

Vycházejíce od přirozeného uspořádání (viz **3.2**) množiny $\mathbf{E}_1$ všech reálných čísel můžeme do $\mathbf{E}_1$ zavést topologii.

Definice **6.1.8.** Tuto topologii nazveme *přirozenou topologií* v $\mathbf{E}_1$. Není-li výslovně uveden opak, uvažujeme v dalším vždy tuto topologii v $\mathbf{E}_1$.

6.1.17. $\mathbf{E}_1$ je dědičně normální prostor s druhým axiomem spočetnosti. Viz **6.1.7** a **6.1.15.**

6.1.18. Budiž $M \subset \mathbf{E}_1$. Množina M_1 (M_2) těch $x \in M$, ke kterým existuje takové $\varepsilon > 0$, že

$$y \in M\,, \quad y < x \Rightarrow x - y > \varepsilon \quad (y \in M,\ y > x \Rightarrow y - x > \varepsilon)$$

je nejvýš spočetná. Viz **6.1.16.**

6.2. Kartézské součiny

Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $S(z)$ prostor. Zavedeme do kartézského součinu

$$S = \mathfrak{P}P(z) \quad (z \in \mathbf{C})$$

topologii. Za definující okolí bodu $a \in S$ prohlásíme všecky množiny tvaru

$$U = \mathfrak{P}V(z) \quad (z \in \mathbf{C})\,,$$

kde pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $V(z)$ v prostoru $P(z)$ okolím z-souřadnice $a(z)$ bodu a a mimo to existuje taková konečná $K \subset \mathbf{C}$ (závislá na U), že $V(z) = P(z)$ pro všecka $z \in \mathbf{C} - K$. Tato druhá podmínka je splněna vždy, když množina $\mathbf{C}$ je konečná. Všimněme si, že $P(z)$ je vždy okolím bodu $a(z) \in P(z)$ (viz **4.2.2**). Že popsaným způsobem skutečně vznikne topologie v P, plyne ze **4.3.1** a **4.3.3.**

Definice **6.2.1.** *Kartézským součinem* $S = \mathfrak{P}P(z)$ *topologických prostorů* rozumíme vždy P v právě popsané topologii.

Zvláště důležitý je případ, kdy $\mathbf{C}$ se skládá z konečně mnoha celých kladných čísel $1, 2, \ldots, n$ a pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $P(z) = \mathbf{E}_1$, takže $S = \mathbf{E}_n$.

Definice **6.2.2.** Právě zavedenou topologii nazveme *přirozenou topologií* v $\mathbf{E}_n$. Není-li výslovně uveden opak, uvažujeme v dalším vždy tuto topologii v $\mathbf{E}_n$.

6.2.1. Jest $\mathbf{E}_m \times \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_{m+n}$. Formálně jsme to měli už v článku **1.5**, ale nyní se to míní i o topologii.

6.2.2. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $M(z)$ bodová množina prostoru $P(z)$. Budiž

$$S = \mathfrak{P}P(z)\,, \quad T = \mathfrak{P}M(z) \quad (z \in \mathbf{C})\,.$$

Pak je $\overline{T} = \mathfrak{P}\overline{M(z)}$ $(z \in \mathbf{C})$. Viz **4.3.2.**

6.2.3. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $\mathfrak{V}(z)$ úplná soustava okolí bodu $a(z) \in P(z)$. Budiž a ten bod kartézského součinu $S = \mathfrak{P}P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$, jehož souřadnice jsou $a(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Budiž $\mathfrak{U}$ soustava všech množin $U = \mathfrak{P}_z V(z)$, kde $V(z) \in \mathfrak{V}(z)$ pro všecka $z \in \mathbf{C}$ a $V(z) = P(z)$ pro $z \in \mathbf{C} - K$, kde K je konečná část $\mathbf{C}$ (závislá na U). Pak je $\mathfrak{U}$ úplná soustava okolí bodu a v prostoru S.

6.2.4. Budiž S kartézský součin prostorů $P(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Jestliže pro každé $z \in \mathbf{C}$ danou topologii v $P(z)$ nahradíme hrubší topologií, dostaneme také v S hrubší topologii. Viz **4.3.4.**

6.2.5. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $M(z) \neq \emptyset$ bodová množina v prostoru $P(z)$. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $T = \mathfrak{P}_z M(z)$. Aby bodová množina T byla uzavřená v prostoru S, k tomu je nutné a stačí, aby pro každé $z \in \mathbf{C}$ bodová množina $M(z)$ byla uzavřená v prostoru $P(z)$. Viz **6.2.2.**

6.2.6. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $M(z) \neq \emptyset$ bodová množina v prostoru $P(z)$. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $T = \mathfrak{P}_z M(z)$. Aby bodová množina T byla otevřená v prostoru S, k tomu je nutné a stačí, aby [1] množina $M(z)$ byla pro každé $z \in \mathbf{C}$ otevřená v prostoru $P(z)$, a aby [2] existovala taková konečná množina $K \subset \mathbf{C}$, že $M(z) = P(z)$ pro $z \in \mathbf{C} - K$. (Podmínka [2] je vždy splněna, jestliže množina $\mathbf{C}$ je konečná.)

Důkaz. I. Zřejmě $T \neq \emptyset$; zvolme $a \in T$. Je-li $T \subset S$ otevřená, pak podle **4.4.13** existuje takové definující okolí U bodu a, že $U \subset T$. Množina U má tvar $U = \mathfrak{P}_z V(z)$ a existuje taková konečná množina $K \subset \mathbf{C}$, že $V(z) = P(z)$ pro každé $z \in \mathbf{C} - K$; pro $z \in \mathbf{C}$ je $V(z)$ okolím z-souřadnice $a(z)$ bodu a v prostoru $P(z)$, takže $V(z) \neq \emptyset$ podle **4.2.3.** Z toho plyne především, že $M(z) = P(z)$ pro každé $z \in \mathbf{C} - K$. Budiž $z_0 \in K$, $\xi \in M(z_0)$. Zřejmě existuje takový $x \in T$, že $x(z_0) = \xi$. Podle **4.4.13** existuje takové definující okolí $U^* \subset S$ bodu x, že $U^* \subset T$. Množina U^* má tvar $U^* = \mathfrak{P}_z V^*(z)$ a podle **4.2.2** je $V^*(z) \subset P(z)$ okolím bodu $x(z)$ pro každé $z \in \mathbf{C}$. Zejména je $V^*(z_0) = W$ okolím bodu ξ v prostoru $P(z_0)$. Protože $U^* \subset T$, jest $W \subset M(z_0)$. Tedy ke každému $\xi \in M(z_0)$ existuje takové okolí W bodu ξ v prostoru $P(z_0)$, že $W \subset M(z_0)$. Podle **4.2.4**, **4.2.8** a **4.4.12** je tedy $M(z_0)$ otevřená pro každý $z_0 \in K$.

II. Jsou-li podmínky [1] a [2] splněny, je množina T zřejmě otevřená.

6.2.7. Budiž $z_0 \in \mathbf{C}$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ prostor. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $a \in S$. Budiž T množina těch $x \in S$, pro něž

$$z \in \mathbf{C}\,, \quad z \neq z_0 \Rightarrow x(z) = a(z)\,.$$

Pokládáme-li T za prostor vnořený do S a položíme-li $f(x) = x(z_0)$ pro $x \in T$, pak f je homeomorfní zobrazení prostoru T na prostor $P(z_0)$. Plyne z **6.2.2.** Věty **6.2.7** užíváme, máme-li o nějaké topologické vlastnosti prostoru S zjistit, že platí též pro prostor $P(z_0)$. Podle **6.2.7** můžeme při tom prostor $P(z_0)$ nahradit prostorem T.

6.2.8. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ prostor. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $a \in S$. Aby a byl slabý F-bod prostoru S, k tomu je nutné a stačí, aby $a(z)$ byl slabý F-bod prostoru $P(z)$ pro každé $z \in \mathbf{C}$.

Důkaz. I. Je-li a slabý F-bod prostoru S, je $a(z_0)$ pro každé $z_0 \in \mathbf{C}$ slabý F-bod prostoru $P(z_0)$ podle **4.6.11** a **6.2.7.**

II. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $a(z)$ slabý F-bod prostoru $P(z)$. Budiž U okolí a v prostoru S. Existuje taková konečná $K \subset \mathbf{C}$, že $\mathfrak{P}_z V(z) \subset U$, kde $V(z) = P(z)$ pro $z \in \mathbf{C} - K$ a $V(z)$ je okolí $a(z)$ v prostoru $P(z)$ pro $z \in K$. Podle **4.5.1** existuje pro každé $z \in K$ takové okolí $W(z)$ bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$, že $V(z)$ je v prostoru $P(z)$ okolím každého $\xi \in W(z)$. Pro $z \in \mathbf{C} - K$ budiž $W(z) = P(z)$. Pak $U^* = \mathfrak{P}_z W(z)$ je takové okolí a v prostoru S, pro které U je v S okolím každého $x_0 \in U^*$; tudíž a je podle **4.5.1** slabý F-bod prostoru S.

6.2.9. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ prostor. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $a \in S$. Aby a byl silný F-bod prostoru S, k tomu je nutné a stačí, aby $a(z)$ byl silný F-bod prostoru $P(z)$ pro každé $z \in \mathsf{C}$.

Důkaz. I. Je-li a silný F-bod prostoru S, je $a(z_0)$ pro každé $z_0 \in \mathsf{C}$ silný F-bod prostoru $P(z)$ podle **4.6.12** a **6.2.7.**

II. Pro každé $z \in \mathsf{C}$ budiž $a(z)$ silný F-bod prostoru $P(z)$. Pro každé $z \in \mathsf{C}$ tvoří všecka otevřená okolí bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$ úplnou soustavu $\mathfrak{V}(z)$ okolí $a(z) \in P(z)$. Budiž $\mathfrak{U}$ soustava všech množin tvaru $\mathfrak{P}_z V(z)$, kde $V(z) \in \mathfrak{V}(z)$ pro $z \in K$, $V(z) = P(z)$ pro $z \in \mathsf{C} - K$ a K probíhá všecky konečné podmnožiny C. Podle **6.2.3** je $\mathfrak{U}$ úplná soustava okolí bodu a v prostoru S; podle **6.2.6** se $\mathfrak{U}$ skládá z otevřených množin.

6.2.10. Kartézský součin F-prostorů je F-prostor (při libovolném $\mathsf{C} \neq \emptyset$). Plyne jednak ze **4.5.5** a **6.2.8**, jednak také ze **4.5.6** a **6.2.9.**

6.2.11. Bod $a \in S = \mathfrak{P}P(z)$ $(z \in \mathsf{C})$ je právě tehdy isolovaným bodem prostoru S, jestliže předně množina těch $z \in \mathsf{C}$, pro něž $P(z)$ obsahuje aspoň dva různé body, je konečná, a za druhé pro každé $z \in \mathsf{C}$ je $a(z)$ isolovaný bod prostoru $P(z)$. Plyne ze **6.2.6.**

6.2.12. Nechť $\mathsf{C} \neq \emptyset$ je konečná množina. Nechť pro každé $z \in \mathsf{C}$ je $P(z)$ neprázdný prostor. Prostor $\mathfrak{P}_z P(z)$ je právě tehdy hustě rozložený, jestliže existuje takové $z_0 \in \mathsf{C}$, že $P(z_0)$ je hustě rozložený prostor. Plyne ze **6.2.11.**

6.2.13. Nechť C je nekonečná množina. Nechť pro každé $z \in \mathsf{C}$ je $P(z)$ prostor obsahující aspoň dva různé body. Pak prostor $\mathfrak{P}_z P(z)$ je hustě rozložený. Plyne ze **6.2.11.**

6.2.14. Budiž $\mathsf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathsf{C}$ budiž $P(z)$ prostor obsahující aspoň dva různé body. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $a \in S$. Je-li množina C konečná, budiž $\mathfrak{c} = 1$; je-li C nekonečná, budiž $\mathfrak{c} = \text{moh}\, \mathsf{C}$. Je-li $\chi(a)$ charakter bodu a v prostoru S a jestliže pro $z \in C$ je $\chi[a(z)]$ charakter bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$, pak $\chi(a)$ je nejmenší ze všech těch mohutností $\mathfrak{m}$, pro které

$$\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{m}\,; \quad z \in \mathsf{C} \Rightarrow \chi[a(z)] \leqq \mathfrak{m}\,.$$

Důkaz. I. Dokážeme nejprve, že $\psi(a) \geqq \mathfrak{c}$. (Budeme to potřebovat při důkazu věty **6.2.15.**) Nechť naopak $\mathfrak{c} > \psi(a)$. Pak množina $\mathbf{C}$ je nekonečná a existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí bodu a, že moh $\mathfrak{U} \leqq \leqq \psi(a)$, $(a) = \bigcap U(U \in \mathfrak{U})$. Pro každé $U \in \mathfrak{U}$ existuje takové definující okolí $\varphi(U)$ bodu a v prostoru S, že $a \in \varphi(U) \subset U$, takže $(a) = \bigcap \varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$. Podle definice **6.2.1** pro každé $U \in \mathfrak{U}$ máme $\varphi(U) = \mathfrak{P}_z W(U, z)$ $(z \in \mathbf{C})$, kde pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $W(U, z) \subset P(z)$ a existuje taková konečná množina $K(U) \subset \mathbf{C}$, že $z \in \mathbf{C} - K(U) \Rightarrow W(U, z) = P(z)$. Protože moh $\mathfrak{U} \leqq \psi(a)$, soudíme ze **3.7.10**, že mohutnost množiny $H = \bigcup K(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ je buďto konečná nebo $\leqq \psi(a)$, tedy jistě $< \mathfrak{c}$, takže existuje $z_0 \in \mathbf{C} - H$. Protože prostor $P(z_0)$ obsahuje více než jeden bod, existuje takový $b \in S$, že $b(z_0) \neq a(z_0)$, avšak $b(z) = a(z)$ pro každé $z \in \mathbf{C} - (z_0)$. Potom však zároveň s bodem a musí také bod b náležet do množiny $\bigcap \varphi(U)$ $(U \in \mathfrak{U})$ a to je nemožné.

II. Podle **4.12.1** je $\psi(a) \leqq \chi(a)$, takže podle I je $\mathfrak{c} \leqq \chi(a)$. Podle **4.12.3** a **6.2.7** je $\chi[a(z)] \leqq \chi(a)$.

III. Nechť předně $\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{m}$ a za druhé $z \in \mathbf{C} \Rightarrow \chi[a(z)] \leqq \mathfrak{m}$. Máme dokázat, že $\chi(a) \leqq \mathfrak{m}$. Je-li $\mathfrak{m}$ konečná mohutnost, je $\chi[a(z)] = 1$ podle **4.12.1** a množina $\mathbf{C}$ je konečná, takže $\chi(a) = 1$ podle **4.12.1** a **6.2.11.** Nechť tedy $\mathfrak{m}$ je nekonečná mohutnost. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ zvolme takovou úplnou soustavu $\mathfrak{V}(z)$ okolí bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$, že moh $\mathfrak{V}(z) = \chi[a(z)]$. Dále označme $\mathfrak{K}$ soustavu všech konečných částí množiny $\mathbf{C}$. Pro každou $K \in \mathfrak{K}$ označme $\mathfrak{W}(K)$ soustavu všech množin tvaru $\mathfrak{P}_z V(z)$, kde $z \in K \Rightarrow V(z) \in \mathfrak{V}(z)$, $z \in \mathbf{C} - K \Rightarrow V(z) = P(z)$. Posléze položme $\mathfrak{U} = \bigcup \mathfrak{W}(K)$ $(K \in \mathfrak{K})$. Podle **6.2.3** je $\mathfrak{U}$ úplná soustava okolí bodu a v prostoru S, takže máme pouze dokázat, že moh $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{m}$. Pro $K \in \mathfrak{K}$ je moh $\mathfrak{W}(K) \leqq \mathfrak{m}$ podle **3.7.9** a podle **3.7.11** je také moh $\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{m}$. Tudíž moh $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{m}$ podle **3.7.10.**

6.2.15. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ prostor obsahující aspoň dva různé body. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $a \in S$. Je-li množina $\mathbf{C}$ konečná, budiž $\mathfrak{c} = 1$; je-li $\mathbf{C}$ nekonečná, budiž $\mathfrak{c} = $ moh $\mathbf{C}$. Je-li $\psi(a)$ pseudocharakter bodu a v prostoru S a jestliže pro $z \in \mathbf{C}$ je $\psi[a(z)]$ pseudocharakter bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$, pak $\psi(a)$ je nejmenší ze všech těch mohutností $\mathfrak{m}$, pro které

$$\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{m}\,; \quad z \in \mathbf{C} \Rightarrow \psi[a(z)] \leqq \mathfrak{m}\,.$$

Důkaz. I. Podle **4.12.3** a **6.2.7** je $\psi[a(z)] \leqq \psi(a)$. Podle části I důkazu věty **6.2.14** je $\mathfrak{c} \leqq \psi(a)$.

II. Nechť předně $\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{m}$ a za druhé $z \in \mathbf{C} \Rightarrow \psi[a(z)] \leqq \mathfrak{m}$. Máme dokázat, že $\psi(a) \leqq \mathfrak{m}$. Je-li $\mathfrak{m}$ konečná mohutnost, je $\psi[a(z)] = 1$ podle **4.12.1** a množina $\mathbf{C}$ je konečná, takže $\psi(a) = 1$ podle **4.12.1** a **6.2.11**. Nechť tedy $\mathfrak{m}$ je nekonečná mohutnost. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ zvolme soustavu $\mathfrak{B}(z)$ okolí bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$ tak, aby bylo moh $\mathfrak{B}(z) = \psi[a(z)]$, $(a(z)) = \bigcap X \; [X \in \mathfrak{B}(z)]$. Dále pro každé $z_0 \in \mathbf{C}$ označme $\mathfrak{W}(z_0)$ soustavu všech množin tvaru $\mathfrak{P}_z V(z)$, kde $V(z_0) \in \mathfrak{B}(z_0)$; $z \in \mathbf{C}$, $z \neq z_0 \Rightarrow V(z) = P(z)$, takže $\mathfrak{W}(z_0)$ je soustava okolí bodu $a \in P$ a jest moh $\mathfrak{W}(z_0) = \psi[a(z_0)]$. Posléze položme $\mathfrak{U} = \bigcup \mathfrak{W}(z)$ $(z \in \mathbf{C})$. Pak $\mathfrak{U}$ je soustava okolí bodu $a \in P$, podle **3.7.10** je moh $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{m}$ a snadno se zjistí, že $(a) = \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{U})$. Tudíž $\psi(a) \leqq \mathfrak{m}$.

6.2.16. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ prostor obsahující aspoň dva různé body. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $a \in S$. Budiž $\omega(a)$ vnitřní charakter bodu a v prostoru S a pro $z \in \mathbf{C}$ budiž $\omega[a(z)]$ vnitřní charakter bodu $a(z)$ v prostoru $P(z)$. Budiž D množina těch $z \in \mathbf{C}$, pro které je $\omega[a(z)] > 1$. Je-li množina $\mathbf{C}$ konečná a je-li $D = \emptyset$, je $\omega(a) = 1$. Je-li $\mathbf{C}$ konečná a je-li $D \neq \emptyset$, je $\omega(a)$ nejmenší ze všech mohutností $\omega[a(z)]$ $(z \in D)$. Je-li $\mathbf{C}$ nekonečná, jest $\omega(a) = \aleph_0$.

Důkaz. I. Ze **4.12.1** a **6.2.11** plyne, že právě tehdy je $\omega(a) = 1$ (tj. $a \in S$ je isolovaný bod), je-li $\mathbf{C}$ konečná a $D = \emptyset$. Tento případ tedy můžeme vyloučit.

II. Budiž $\mathbf{C}$ konečná a budiž $D \neq \emptyset$. Podle **4.12.3** a **6.2.7** jest $z \in D \Rightarrow \omega(a) \leqq \omega[a(z)]$. Předpokládejme, že $z \in D \Rightarrow \omega(a) < \omega[a(z)]$; máme odvodit spor. Podle **4.12.2** existuje taková soustava $\mathfrak{U}$ okolí bodu $a \in S$, že moh $\mathfrak{U} = \omega(a)$ a že množina $\bigcap X$ $(X \in \mathfrak{U})$ není okolím bodu $a \in S$. Pro každou $U \in \mathfrak{U}$ je $\mathfrak{P}_z V(z, U) \subset U$, je-li $V(z, U)$ vhodně volené okolí bodu $a(z) \in P(z)$. Pro $z \in \mathbf{C}$ budiž $W(z) = \bigcap V(z, U)$ $(U \in \mathfrak{U})$; protože buďto $\omega[a(z)] = 1$ nebo moh $\mathfrak{U} < \omega[a(z)]$, zjistí se snadno, že pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $W(z)$ okolím bodu $a(z) \in P(z)$. Protože množina $\mathbf{C}$ je konečná, je $\mathfrak{P}_z W(z)$ okolím bodu $a \in S$. To je spor proti **4.2.4**, neboť zřejmě $\mathfrak{P}_z W(z) \subset \bigcap X$ $(X \in \mathfrak{U})$.

III. Budiž $\mathbf{C}$ nekonečná; máme dokázat, že $\omega(a) = \aleph_0$. Podle I je $\omega(a) \neq 1$, takže (viz **4.12.1**) stačí dokázat, že $\omega(a) \leqq \aleph_0$. Budiž $H \subset \mathbf{C}$ spočetná množina. Pro každé $z \in H$ zvolme v prostoru $P(z)$ bod $b(z) \neq a(z)$ a položme $U(z_0) = \mathfrak{P}_z V(z_0, z)$ pro každé $z_0 \in H$, kde $V(z_0, z_0) = P(z_0) - (b(z_0))$, $V(z_0, z) = P(z)$ pro $z \in \mathbf{C}$, $z \neq z_0$. Podle **4.2.2** a **4.2.6** je $U(z_0)$ definujícím okolím bodu $a \in S$ pro každé $z_0 \in H$. Kdyby bylo $\omega(a) > \aleph_0$, pak by podle **4.12.2** množina $W = \bigcap U(z_0)$ $(z_0 \in H)$ byla okolím bodu $a \in S$. Je-li však W okolí bodu a v prostoru S, pak existuje taková konečná množina $K \subset C$, že $W \supset \mathfrak{P}_z T(z)$, kde $T(z)$ pro $z \in K$ je vhodně voleným okolím bodu $a(z) \in P(z)$ a pro $z \in \mathbf{C} - K$ je $T(z) = P(z)$. Protože množina H je nekonečná, existuje $z_0 \in H - K$. Protože $\mathfrak{P}_z T(z) \subset W \subset U(z_0) = \mathfrak{P}_z V(z_0, z)$ a protože $z \in \mathbf{C} \Rightarrow T(z) \neq \emptyset$, je $T(z_0) \subset V(z_0, z_0)$ neboli $P(z_0) \subset P(z_0) - (b(z_0))$ a to je spor.

6.2.17. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ F-prostor obsahující aspoň dva různé body. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, takže také S je F-prostor (viz **6.2.10**). Je-li množina $\mathbf{C}$ konečná, budiž $\mathfrak{c} = 1$; je-li $\mathbf{C}$ nekonečná, budiž $\mathfrak{c} = \text{moh}\, \mathbf{C}$. Pak je $\chi^t(S)$ nejmenší ze všech takových mohutností $\mathfrak{m}$, pro které

$$\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{m}\,; \quad z \in \mathbf{C} \Rightarrow \chi^t[P(z)] \leqq \mathfrak{m}\,.$$

Důkaz. I. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $\chi^t[P(z)] \leqq \chi^t(S)$ podle **4.12.18** a **6.2.7.** Zvolme bod $a \in S$; podle **4.12.19** je $\chi(a) \leqq \chi^t(S)$ a podle **6.2.14** je $\mathfrak{c} \leqq \chi(a)$; tedy $\mathfrak{c} \leqq \chi^t(S)$.

II. Budiž předně $\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{m}$ a za druhé $z \in \mathbf{C} \Rightarrow \chi^t[P(z)] \leqq \mathfrak{m}$. Máme dokázat, že $\chi^t(S) \leqq \mathfrak{m}$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ zvolme takovou otevřenou basi $\mathfrak{B}(z)$ prostoru $P(z)$, že $\text{moh}\, \mathfrak{B}(z) = \chi^t[P(z)]$. Dále označme $\mathfrak{K}$ soustavu všech konečných částí množiny $\mathbf{C}$. Pro každou $K \in \mathfrak{K}$ budiž $\mathfrak{W}(K)$ soustava všech množin tvaru $\mathfrak{P}_z V(z)$, kde $z \in K \Rightarrow V(z) \in \mathfrak{B}(z)$, $z \in \mathbf{C} - K \Rightarrow V(z) = P(z)$. Posléze položme $\mathfrak{U} = \bigcup \mathfrak{W}(K)$ $(K \in \mathfrak{K})$. Podle **4.5.17**, **6.2.3** a **6.2.6** je $\mathfrak{U}$ otevřená base prostoru S a máme pouze dokázat, že $\text{moh}\, \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{m}$. Pro každou $K \in \mathfrak{K}$ je $\text{moh}\, \mathfrak{W}(K) \leqq \mathfrak{m}$ podle **3.7.9** a podle **3.7.11** je také $\text{moh}\, \mathfrak{K} \leqq \mathfrak{m}$. Tudíž $\text{moh}\, \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{m}$ podle **3.7.10.**

6.2.18. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ prostor. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $a \in S$. Aby a byl H-bod prostoru S, k tomu je nutné a stačí, aby pro každé $z \in \mathbf{C}$ byl $a(z)$ H-bod prostoru $P(z)$.

Důkaz. I. Je-li a H-bod prostoru S, pak pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $a(z)$ H-bod prostoru $P(z)$ podle **5.2.2** a **6.2.7.**

II. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $a(z)$ H-bod prostoru $P(z)$. Máme dokázat, že a je H-bod prostoru S. Budiž tedy dán $b \in S$, $b \neq a$; máme udat takové okolí U bodu $a \in S$, že $b \in S - \overline{U}$. Existuje takové $z_0 \in \mathbf{C}$, že $b(z_0) \neq a(z_0)$. Protože $a(z_0)$ je H-bod prostoru $P(z_0)$, existuje okolí $V(z_0)$ bodu $a(z_0) \in P(z_0)$, pro které $b(z_0) \in P(z_0) - \overline{V(z_0)}$. Je-li $V(z) = P(z)$ pro $z \in \mathbf{C}$, $z \neq z_0$, pak $U = \mathfrak{P}_z V(z)$ je okolí bodu $a \in P$. Podle **6.2.2** je $\overline{U} = \mathfrak{P}_z \overline{V(z)}$, takže $b \in S - \overline{U}$.

6.2.19. Kartézský součin H-prostorů je H-prostor (při libovolném $\mathbf{C} \neq \emptyset$). Viz **5.2.3** a **6.2.18.**

6.2.20. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $P(z)$ prostor. Budiž $S = \mathfrak{P}_z P(z)$, $a \in S$. Aby a byl R-bod prostoru S, k tomu je nutné a stačí, aby pro každé $z \in \mathbf{C}$ byl $a(z)$ R-bod prostoru $P(z)$.

Důkaz. I. Je-li a R-bod prostoru S, pak pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $a(z)$ R-bod prostoru $P(z)$ podle **5.3.1** a **6.2.7.**

II. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $a(z)$ R-bod prostoru $P(z)$. Máme dokázat, že ke každému okolí U bodu $a \in P$ existuje okolí U_0 bodu $a \in P$, pro které $\overline{U_0} \subset U$. Můžeme předpokládat, že U je definující okolí, tj. že existuje taková konečná množina $K \subset \mathbf{C}$, že $U = \mathfrak{P}_z V(z)$, kde $V(z)$ je okolí bodu $a(z) \in P(z)$ pro $z \in K$ a $z \in \mathbf{C} - K \Rightarrow V(z) = P(z)$. Protože $a(z)$ je R-bod prostoru $P(z)$, existuje pro každé $z \in K$ okolí $V_0(z)$ bodu $a(z) \in P(z)$, pro které $\overline{V_0(z)} \subset V(z)$; pro $z \in \mathbf{C} - K$ budiž $V_0(z) = P(z)$. Pak $U_0 = \mathfrak{P}_z V_0(z)$ je okolím bodu $a \in P$ a podle **6.2.2** je $\overline{U_0} \subset U$.

6.2.21. Kartézský součin R-prostorů je R-prostor (při libovolném $\mathbf{C} \neq \emptyset$).

6.3. L-PROSTORY

Definice **6.3.1.** Pravíme, že bod $a \in P$ je *limitní bod* bodové posloupnosti $\{a_n\}$ (v prostoru P), značka $\lim a_n = a$ nebo určitěji $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, jestliže [1] ke každému okolí U bodu a existuje takový index k, že $n > k \Rightarrow a_n \in U$, [2] ke každému bodu $b \neq a$ existuje okolí V a takový index l, že $n > l \Rightarrow a_n \in P - V$. Pravíme, že bodová posloupnost $\{a_n\}$ je *konvergentní* (v prostoru P), jestliže existuje její limitní bod.

6.3.1. Konvergentní bodová posloupnost má jediný limitní bod.

6.3.2. Existuje-li takový index k, že $n > k \Rightarrow a_n = a$, pak $\lim a_n = a$. Viz **4.2.3** a **4.2.6.**

6.3.3. Je-li $\lim a_n = a$ a je-li $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost vybraná z $\{a_n\}$, jest $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = a$.

6.3.4. Budiž Q vnořen do P. Budiž $\{a_n\}$ bodová posloupnost v Q. Budiž $\lim a_n = a$ v prostoru P. Je-li $a \in Q$, pak $\lim a_n = a$ také v prostoru Q. Je-li však $a \in P - Q$, pak posloupnost $\{a_n\}$ není konvergentní v prostoru Q. Viz **4.6.2.**

6.3.5. Budiž a H-bod prostoru P. Nechť bodová posloupnost $\{a_n\}$ má tu vlastnost, že ke každému okolí U bodu a existuje takový index k, že $n > k \Rightarrow a_n \in U$. Pak je $\lim a_n = a$. Předpoklad, že a je H-bod, nelze vynechat (příklad **6.4.10**).

Důkaz. Je-li $b \in P$, $b \neq a$, existuje okolí U bodu a, pro které $b \in P - \overline{U}$. Podle **4.2.9** existuje okolí V bodu b, pro které $U \cap V = \emptyset$. Je-li $n > k \Rightarrow a_n \in U$, pak $n > k \Rightarrow a_n \in P - V$.

6.3.6. Budiž Q vnořen do H-prostoru P. Budiž $\{a_n\}$ bodová posloupnost v Q. Je-li $\{a_n\}$ konvergentní v Q, je $\{a_n\}$ také v P konvergentní, a to s týmž limitním bodem. Viz **4.6.2**, **5.2.3** a **6.3.5.** Předpoklad H-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.10**).

6.3.7. Budiž $M \subset P$. Budiž $\{a_n\}$ bodová posloupnost v M. Budiž $\lim a_n = a$ v P. Pak je $a \in \overline{M}$. Viz **4.2.9.**

Definice **6.3.2.** Prostor P se nazývá *L-prostor* (a jeho topologie se nazývá *L-topologie*), jestliže pro každou bodovou množinu M existuje ke každému $a \in \overline{M}$ taková posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in M$ pro všecka n a že $\lim a_n = a$.

6.3.8. Budiž P L-prostor. Uzávěr $\overline{M}$ bodové množiny M je množina těch $x \in P$, ke kterým existuje v M taková posloupnost $\{x_n\}$, že $\lim x_n = x$.

6.3.9. Prostor vnořený do L-prostoru je L-prostor. Viz **6.3.4.**

6.3.10. Budiž a bod L-prostoru P. Nechť bodová posloupnost $\{a_n\}$ má tu vlastnost, že ke každému okolí U bodu a existuje takový index k, že $n > k \Rightarrow a_n \in U$. Pak je $\lim a_n = a$. Předpoklad L-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.10**).

Důkaz. Budiž $b \in P$, $b \neq a$. Podle **4.2.2** a **4.2.6** je $P - (b)$ okolí bodu a, takže existuje takový index l, že $n > l \Rightarrow a_n \neq b$. Budiž M množina všech těch a_n, pro něž $n > l$; je tedy $b \in P - M$. Stačí dokázat, že $b \in P - \overline{M}$; neboť pak je $V = P - M$ takové okolí bodu b, že $n > l \Rightarrow a_n \in P - V$. Předpokládáme-li však $b \in \overline{M}$, pak existuje v M taková posloupnost $\{b_n\}$, že $\lim b_n = b$. Protože $b \in P - M$, $b_n \in M$, $\lim b_n = b$, nelze (viz **6.3.2** a **6.3.3**) z $\{b_n\}$ vybrat posloupnost, jejíž všecky členy by si byly navzájem rovny. Z toho však plyne snadno, že existuje posloupnost $\{a_{i_n}\}$ vybraná současně z $\{a_n\}$ i z $\{b_n\}$. Podle **6.3.3** je $\lim a_{i_n} = b$. Protože $a \neq b$, existuje takové okolí U bodu a a takový index k, že $n > k \Rightarrow a_{i_n} \in P - U$. To je však nemožné.

6.3.11. Budiž P H-prostor nebo L-prostor. Budiž $a \in P$. Nechť bodová posloupnost $\{a_n\}$ má tu vlastnost, že ke každé posloupnosti $\{a_{i_n}\}$ vybrané z $\{a_n\}$ existuje posloupnost $\{a_{j_n}\}$ vybraná z $\{a_{i_n}\}$, pro kterou je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{j_n} = a$. Pak je $\lim a_n = a$.

Předpoklad, že P je H-prostor nebo L-prostor, nelze vynechat (viz cvičení 12.4.11).

Důkaz. Budiž U okolí bodu a. Kdyby existovala taková $\{a_{i_n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, pro kterou by bylo $a_{i_n} \in P - U$ pro všecka n, pak by zřejmě nemohla být $\lim a_{j_n} = a$ pro žádnou $\{a_{j_n}\}$ vybranou z $\{a_{i_n}\}$. Tedy ke každému okolí U bodu a existuje index k, pro který $n > k \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n \in U$. Tím je věta podle **6.3.5** (viz též **5.2.3**) a podle **6.3.10** už dokázána.

6.3.12. Budiž P libovolná množina. Budiž dána soustava Λ posloupností, jejichž členy jsou prvky množiny P. Každé posloupnosti $\{a_n\} \in \Lambda$ budiž přiřazen určitý prvek množiny P, který označme λa_n. Předpokládejme, že jsou splněny tyto dva axiomy:

(IL) Je-li $a \in P$ a je-li $a_n = a$ pro všecka n, pak $\{a_n\} \in \Lambda$, $\lambda a_n = a$.

(IIL) Je-li $\{a_{i_n}\}$ posloupnost vybraná z posloupnosti $\{a_n\} \in \Lambda$, je $\{a_{i_n}\} \in \Lambda$, $\lambda a_{i_n} = \lambda a_n$.

Soustava Φ všech těch topologií v P, při nichž každá $\{a_n\} \in \Lambda$ je konvergentní s limitním bodem λa_n, není prázdná. Existuje nejjemnější topologie u soustavy Φ; u je L-topologie.

Důkaz. I. Pro každou $M \subset P$ budiž uM množina všech těch $x \in P$, ke kterým existuje taková $\{a_n\} \in \Lambda$, že $a_n \in M$ pro všecka n a že $\lambda a_n = x$. Snadno se zjistí, že u je topologie, tj. že jsou splněny axiomy ($\bar{\mathrm{I}}$) a ($\bar{\mathrm{II}}$), neboť (IL) $\Rightarrow$ ($\bar{\mathrm{I}}$), (IIL) $\Rightarrow$ ($\bar{\mathrm{II}}$).

II. Budiž $\{a_n\} \in \Lambda$, $\lambda a_n = a$. Budiž U u-okolí bodu $a \in P$. Kdyby pro žádný index k neplatilo $n > k \Rightarrow a_n \in U$, existovala by taková $\{a_{i_n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, že $a_{i_n} \in P - U$ pro všecka n; podle (IIL) by pak bylo $\{a_{i_n}\} \in \Lambda$, $\lambda a_{i_n} = a$ a z definice u bychom měli $a \in u(P - U)$, což je nemožné, neboť U je u-okolí a. Budiž dále $b \in P$, $b \neq a$. Kdyby existovala taková $\{a_{i_n}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, že $a_{i_n} = b$ pro všecka n, bylo by $\lambda a_{i_n} = b$ podle (IL); avšak podle (IIL) je $\lambda a_{i_n} = a$. Tudíž existuje index l, pro který $n > l \Rightarrow a_n \neq b$. Je-li nyní M množina těch a_n, pro něž $n > l$, pak z (IL) a (IIL) následuje, že $uM = M \cup (a)$, takže $V = P - M$ je u-okolí bodu b, pro něž platí $n > l \Rightarrow a_n \in P - V$. Tím je dokázáno, že $u \in \Phi$.

III. Z definice u plyne snadno, že u je L-topologie.

IV. Budiž $v \in \Phi$, $M \subset P$. Je-li $a \in uM$, pak existuje taková $\{a_n\} \in \Lambda$, že $a_n \in M$ pro všecka n a že $a = \lambda a_n$. Protože $v \in \Phi$, je $a \in vM$ podle **6.3.7.** Tedy $M \subset P \Rightarrow uM \subset vM$, tj. u je jemnější než v.

6.3.13. Budiž P libovolná množina. Budiž dána soustava Λ posloupností, jejichž členy jsou prvky množiny P. Každé posloupnosti $\{a_n\} \in \Lambda$ budiž přiřazen určitý prvek množiny P, který označme λa_n. Aby existovala v P taková L-topologie u, že soustava všech při u konvergentních bodových posloupností splyne se soustavou Λ a že $\{a_n\} \in \Lambda \Rightarrow \lim a_n = \lambda a_n$, k tomu je nutné a stačí, aby byly splněny tyto tři axiomy:

(IL) Je-li $a \in P$ a je-li $a_n = a$ pro všecka n, pak $\{a_n\} \in \Lambda$, $\lambda a_n = a$.

(IIL) Je-li $\{a_{i_n}\}$ posloupnost vybraná z posloupnosti $\{a_n\} \in \Lambda$, je $\{a_{i_n}\} \in \Lambda$, $\lambda a_{i_n} = \lambda a_n$.

(IIIL) Má-li $a \in P$ vzhledem k posloupnosti $\{a_n\}$ tu vlastnost, že ke každé $\{a_{i_n}\}$ vybrané z $\{a_n\}$ existuje taková $\{a_{j_n}\}$ vybraná z $\{a_{i_n}\}$, že $\{a_{j_n}\} \in \Lambda$, $\lambda a_{j_n} = a$, jest $\{a_n\} \in \Lambda$.

Jsou-li axiomy splněny, je L-topologie u jednoznačně určena.

Důkaz. I. Nutnost axiomů plyne ze **6.3.2**, **6.3.3** a **6.3.11.** Předpokládejme tedy, že jsou splněny.

II. Stejně jako v předešlém důkazu definujeme topologii u v P tím, že pro $M \subset P$ je právě tehdy $x \in uM$, jestliže existuje taková $\{a_n\} \in \Lambda$, že $a_n \in M$ pro všecka n a že $\lambda a_n = x$. V předešlém důkaze jsme už zjistili, že u je L-topologie a že $\{a_n\} \in \Lambda \Rightarrow \lim a_n = \lambda a_n$.

III. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní při u a nechť $\lim a_n = a$. Budiž $\{a_{i_n}\}$ libovolná posloupnost vybraná z $\{a_n\}$. Jsou dva možné případy. Nechť předně existuje taková $\{a_{j_n}\}$ vybraná z $\{a_{i_n}\}$, že $a_{j_n} = a$ pro všecka n; pak podle (IL) je $\{a_{j_n}\} \in \Lambda$, $\lambda a_{j_n} = a$. Druhý možný případ je ten, že existuje taková $\{a_{h_n}\}$ vybraná z $\{a_{i_n}\}$, že $a_{h_n} \neq a$ pro všecka n neboli že $a \in P - H$, znamená-li H množinu všech členů posloupnosti $\{a_{h_n}\}$. Podle **6.3.3** je $\lim a_{h_n} = a$, takže podle **6.3.7** je $a \in uH$, a to znamená, že existuje taková $\{b_n\} \in \Lambda$, že $b_n \in H$ pro všecka n a že $\lambda b_n = a$; protože není $a \in H$, plyne snadno z (IL) a (IIL) podle definice H, že existuje posloupnost $\{a_{j_n}\}$ vybraná současně z $\{b_n\}$ i z $\{a_{i_n}\}$; podle (IIL) je pak $\{a_{j_n}\} \in \Lambda$, $\lambda a_{j_n} = a$. Tím je dokázáno, že v každém případě z každé $\{a_{i_n}\}$ vybrané z $\{a_n\}$ lze vybrat takovou $\{a_{j_n}\}$, že $\{a_{j_n}\} \in \Lambda$, $\lambda a_{j_n} = a$. Podle (IIIL) je nyní $\{a_n\} \in \Lambda$ a podle (IIL) je $\lambda a_n = a$.

IV. L-topologie u splňuje tedy všecky požadavky ve větě vyslovené; podle **6.3.8** je u těmito požadavky jednoznačně určena.

6.3.14. Budiž a H-bod prostoru P. Budiž $M \subset P$, $a \in \overline{M}$. Je-li $\chi(a) \leqq \aleph_0$, pak existuje taková bodová posloupnost $\{a_n\}$, že $a_n \in M$ pro všecka n a že $\lim a_n = a$. Protože $\chi(a) \leqq \aleph_0$, existuje podle **4.12.16** posloupnost $\{U_n\}$, jejíž členy tvoří úplnou soustavu okolí bodu a a která je monotónní v tom smyslu, že $U_n \supset U_{n+1}$ pro všecka n. Protože $a \in \overline{M}$, existuje podle **4.2.9** pro každé n bod $a_n \in U_n \cap \cap M$. Je-li U libovolné okolí bodu a, existuje index k, pro který je $U_k \subset U$. Protože $\{U_n\}$ je monotónní, je $n > k \Rightarrow U_n \subset U_k \Rightarrow a_n \in U$. Tudíž je $\lim a_n = a$ podle **6.3.5.**

6.3.15. H-prostor s prvním axiomem spočetnosti je L-prostor. Viz **5.2.3** a **6.3.14.**

6.3.16. Budiž P L-prostor. Budiž $a \in P$, $b \in P$, $a \neq b$, $\chi(a) \leqq \aleph_0$, $\chi(b) \leqq \aleph_0$. Pak body a, b jsou H-oddělené. Předpoklad o charakterech nelze vynechat (příklad **6.4.11** nebo cvičení 6.5.7).

Důkaz. Podle **4.12.16** existují takové dvě posloupnosti $\{U_n\}$, $\{V_n\}$, že členy první (druhé) z nich tvoří úplnou soustavu okolí bodu a (b) a že $U_{n+1} \subset U_n$, $V_{n+1} \subset V_n$ pro všecka n. Stačí dokázat, že $U_n \cap V_n = \emptyset$ pro některé n. Nechť naopak $a_n \in U_n \cap V_n$ pro všecka n. Podle **6.3.10** je pak jednak $\lim a_n = a$, jednak $\lim a_n = b$ a to je spor proti **6.3.1.**

6.3.17. L-prostor s prvním axiomem spočetnosti je H-prostor.

6.3.18. Budiž a bod L-prostoru P. Pak je $\omega(a) \leqq \aleph_0$. Je-li a isolovaný bod prostoru P, je $\omega(a) = 1$ podle **4.12.1.** Jinak plyne ze **4.7.4**, že $a \in P'$, tj. $a \in \overline{P - (a)}$. Protože P je L-prostor, existuje v $P - (a)$ taková posloupnost $\{a_n\}$, že $\lim a_n = a$. Je-li H množina všech členů posloupnosti $\{a_n\}$, je H nejvýš spočetná a podle **6.3.7** je $a \in \overline{H}$. Protože $a \in P - H$, je $a \in H'$, tj. a je hromadný bod množiny H, takže $\omega(a) \leqq \aleph_0$ podle **4.12.24.**

6.3.19. Nechť u, v jsou dvě L-topologie v P. Aby byla u jemnější než v, k tomu je nutné a stačí, aby každá u-konvergentní posloupnost byla v-konvergentní s týmž limitním bodem.

Důkaz. I. Je-li podmínka splněna, je u jemnější než v podle **6.3.8.** II. Je-li u jemnější než v, je podmínka splněna podle **4.2.12** a **6.3.10.**

6.3.20. Budiž (P, u) H-prostor. Existuje taková L-topologie v v P, že v je jemnější než u a že každá L-topologie v P, která je jemnější než u, je jemnější než v. Předpoklad H-prostoru nelze vynechat (příklad **6.4.10**).

Důkaz. Budiž Λ soustava všech u-konvergentních bodových posloupností. Pro $\{a_n\} \in \Lambda$ budiž $\lambda a_n = \lim a_n$. Podle **6.3.2, 6.3.3** a **6.3.11** jsou splněny axiomy (IL), (IIL), (IIIL), které podle **6.3.13** určují L-topologii v v P. Ze **6.3.7** a **6.3.8** plyne, že v je jemnější než u. Je-li w L-topologie v P, která je jemnější než u, a je-li $\{a_n\}$ w-konvergentní s limitním bodem a, plyne ze **4.2.12, 5.2.3** a **6.3.5**, že $\{a_n\}$ je u-konvergentní s limitním bodem a; podle definice v je pak $\{a_n\}$ v-konvergentní s týmž limitním bodem. Tudíž w je jemnější než v podle **6.3.19.**

6.3.21. $\mathbf{E}_n$ je L-prostor. Viz **6.1.17, 6.2.19, 6.3.15.**

6.4. Různé příklady

Příklad **6.4.1.** Nechť prostor P se skládá z množiny $\mathbf{N}$ všech celých kladných čísel, z množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a z jednoho dalšího bodu ω. Uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ budiž definován takto: [1] bod $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ náleží do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže $(a, b) \in M$; [2] bod $a \in \mathbf{N}$ náleží do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $a \in M$ nebo existuje nekonečně mnoho takových $x \in \mathbf{N}$, že $(a, x) \in M$; [3] $\omega \in \overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $\omega \in M$ nebo existuje nekonečně mnoho takových $x \in \mathbf{N}$, že $x \in M$. Snadno se dokáže, že prostor P má tyto vlastnosti:

(1) P je LR-prostor, ale ω není slabý F-bod, takže P není F-prostor.

(2) Pro $M = (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cup (\omega)$ uzávěr $\overline{M}$ je a derivace M' není uzavřená množina. Obrácení věty **4.5.10** je tudíž nesprávné.

(3) Je-li N_1 množina všech sudých $x \in \mathbf{N}$ a $N_2 = \mathbf{N} - N_1$, jsou množiny $A = (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cup N_1$, $B = (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cup N_2$ otevřené a husté, ale množina $A \cap B$ není hustá. Proto ve **4.9.6** a **4.9.7** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor. Množiny N_1, N_2 jsou řídké, ne však množina $N_1 \cup N_2$. Proto ve **4.10.11** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

(4) Množina $\mathbf{N}$ je řídká v $P - (\omega)$, ne však v P. Proto ve **4.10.10** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

(5) Množina $M = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ není hustá, ale pro každou otevřenou $G \neq \emptyset$ je $M \cap G \neq \emptyset$. Proto ve **4.9.5** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

(6) Množina $M = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ není hustá, $Q = P - (\omega)$ je hustá, M je hustá v Q. Proto ve **4.9.8** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

(7) Množina $\mathbf{N}$ není řídká, ale $\overline{\mathbf{N}}$ neobsahuje žádnou neprázdnou otevřenou množinu a ke každé otevřené $G \neq \emptyset$ lze udat takovou otevřenou $\Gamma \neq \emptyset$, že $\Gamma \subset G$, $\mathbf{N} \cap \Gamma = \emptyset$. Proto ve **4.10.8** a **4.10.9** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

(8) Množina $\mathbf{N}$ není řídká, ale každý $x \in \mathbf{N}$ má takové okolí U, že množina $U \cap \mathbf{N}$ je řídká. Proto ve **4.10.13** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

(9) Volíme-li $Q = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \cap (\omega)$, vidíme, že ve **4.6.17** nelze vynechat předpoklad $Q = F \cap G$.

(10) Volíme-li $M = \mathbf{N} \cup (\omega)$ nebo $M = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, vidíme, že ve **4.10.14** nelze vynechat předpoklad F-prostoru.

Příklad **6.4.2.** Budiž P spočetná množina. Pro $X \subset P$ budiž $\overline{X} = X$ nebo $\overline{X} = P$ podle toho, zda X je konečná či nekonečná. Snadno se dokáže, že prostor P má tyto vlastnosti:

(1) P je F-prostor, ale není H-prostor; je-li $x \in P$, $y \in P$, pak body x, y nejsou H-oddělené.

(2) Každá isolovaná bodová množina je konečná. Proto v **5.2.4** nelze vynechat předpoklad, že P je H-prostor.

(3) Soustava všech uzavřených množin je spočetná. Proto v **5.2.5** předpoklad, že P je FH-prostor, nelze nahradit předpokladem, že P je F-prostor; nevím však, zda snad v **5.2.5** by nestačil předpoklad, že P je H-prostor.

Příklad **6.4.3.** $\mathbf{N}$ budiž opět množina všech celých kladných čísel; budiž $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup (0)$. Prostor P se skládá ze všech posloupností $\{a_n\}$, jejichž členy náležejí do $\mathbf{N}_0$ a pro něž platí

$$a_n = 0\,, \quad m < n \Rightarrow a_m = 0\,.$$

Zejména náleží do P ta posloupnost ω, jejíž všecky členy jsou rovny 0. Je-li $\{a_n\} \in P - (\omega)$, pak existuje první index k takový, že $a_k > 0$; číslo k nazveme *druhem* posloupnosti $\{a_n\}$. Uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ definujeme takto: [1] $\omega \in \overline{M}$ právě tehdy, jestliže $\omega \in M$ nebo jestliže ke každému $h \in \mathbf{N}$ existuje $x \in M - (\omega)$ druhu $\geqq h$; [2] je-li $\{a_n\} \in P - (\omega)$ a je-li k druh $\{a_n\}$, pak $\{a_n\}$ náleží do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže $\{a_n\} \in M$ nebo jestliže M obsahuje nekonečně mnoho takových $\{b_n\}$ druhu $k - 1$, pro něž $n \geqq k \Rightarrow b_n = a_n$. (Tato druhá možnost ovšem vyžaduje, aby bylo $k \geqq 2$.) Snadno se dokáže, že prostor P má tyto vlastnosti:

(1) P je LR-prostor.

(2) Jestliže $x \in P - (\omega)$ je druhu $\leqq 2$, pak x je silný F-bod; jestliže $x \in P - (\omega)$ je druhu > 2, pak x není slabý F-bod.

(3) Bod ω je slabý F-bod, ale není to silný F-bod.

Příklad **6.4.4.** Budiž: $\mathbf{N}$ množina všech celých kladných čísel, R množina všech racionálních kladných čísel, u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Prostor P se skládá z množiny $\mathbf{N}$, z množiny $R \times \mathbf{N}$ a z jednoho dalšího bodu ω. Uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ definujeme takto: [1] $(x, n) \in R \times \mathbf{N}$ náleží do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže $x \in uK$, kde K znamená množinu těch $y \in R$, pro něž je $(y, n) \in M$; [2] $n \in \mathbf{N}$ náleží do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $n \in M$ nebo množina těch $x \in R$, pro něž $(x, n) \in M$, je neomezená; [3] $\omega \in \overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $\omega \in M$ nebo M obsahuje nekonečně mnoho $n \in \mathbf{N}$. Snadno se dokáže, že prostor P má tyto vlastnosti:

(1) P je LR-prostor, ale není to F-prostor, protože ω není slabý F-bod.

(2) Bodová množina $Q = P - \mathbf{N}$ není hustě rozložená, ale $\overline{Q} = P$ je hustě rozložená. Proto ve **4.7.9** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

Příklad **6.4.5.** Budiž R množina všech racionálních čísel a budiž u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Budiž $P = \mathbf{E}_1$ a definujme uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ takto:

$$\overline{M} = M \cup [u(M \cap R) - R] \cup [R \cap u(M - R)]\,.$$

Snadno se dokáže, že P má tyto vlastnosti:

(1) P je LH-prostor, ale není to F-prostor; dokonce P nemá žádný slabý F-bod.

(2) Množiny R a $P - R$ jsou isolované, ale jejich sjednocení $R \cup (P - R) = P$ je hustě rozložená množina. Proto ve **4.7.11** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

Příklad **6.4.6.** Budiž R množina všech racionálních čísel, budiž D množina všech těch $x \in R$, pro které při vhodném $n \in \mathbf{N}$ číslo $2^n \,.\, x$ je celé; budiž u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Budiž $P = \mathbf{E}_1$ a definujeme uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ takto:

$$\overline{M} = M \cup u(M - D) \cup [R \cup u(M \cap D)]\,.$$

Snadno se dokáže, že P má tyto vlastnosti:

(1) P je LH-prostor, ale není to F-prostor.

(2) Množina D je řídká, ale množina $\overline{D}$ je hustá. Proto ve větě **4.10.4** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

V příkladech **6.4.7** až **6.4.9** se užívá známé věty z přirozené topologie prostoru $\mathbf{E}_1$: je-li množina všech iracionálních čísel rovna $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, pak existuje takové n, že množina $\overline{A}_n$ obsahuje interval (viz **9.4.23**).

Příklad **6.4.7.** Budiž R množina všech racionálních čísel, budiž D množina těch $x \in R$, pro které při vhodném $n \in \mathbf{N}$ číslo $2^n \,.\, x$ je celé; budiž S množina všech iracionálních čísel; budiž u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Budiž $P = \mathbf{E}_1$ a definujeme uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ takto:

$$\overline{M} = M \cup u(R \cap M) \cup [u(S \cap M) - D]\,.$$

Snadno se dokáže, že P má tyto vlastnosti:

(1) P je LH-prostor, ale není to F-prostor.

(2) Množina S je řídká, jestliže však $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = T$, kde množiny F_n jsou uzavřené, pak T není první kategorie. Proto ve **4.11.3** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

Příklad **6.4.8.** Nechť R, D, S, u mají týž význam jako v příkladě **6.4.7.** Budiž $P = \mathbf{E}_1$ a definujme uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ takto:

$$\overline{M} = M \cup [u(S \cap M) - D] \cup u[(R \cap M) - D] \cup [u(D \cap M) - (R - D)] .$$

Snadno se dokáže, ze P má tyto vlastnosti:

(1) P je LH-prostor, ale není to F-prostor.

(2) Množina S je první kategorie v $S \cup D$, ale ne v P. Proto ve **4.11.4** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

Příklad **6.4.9.** Nechť R, S, u mají týž význam jako v příkladě **6.4.7.** Budiž $P = \mathbf{E}_1$ a definujme uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ takto:

$$\overline{M} = M \cup u(R \cap M) \cup [u(S \cap M) - S] .$$

Snadno se dokáže, že P má tyto vlastnosti:

(1) P je LH-prostor, ale není to F-prostor.

(2) Množina S není první kategorie, avšak každý bod $x \in S$ má takové okolí U, že množina $U \cap S$ je řídká. Proto ve **4.11.7** a **4.11.8** nelze vynechat předpoklad, že P je F-prostor.

Poznámka. Nevím, zda je možné LH-prostory v příkladech **6.4.5** až **6.4.9** nahradit LR-prostory.

Příklad **6.4.10.** Budiž $P = \mathbf{N}$. Pro konečnou $M \subset P$ budiž $\overline{M} = M$; pro nekonečnou $M \subset P$ budiž $\overline{M} = M \cup (1) \cup (2)$. Snadno se dokáže, že prostor P má tyto vlastnosti:

(1) P je F-prostor, ale není to ani H-prostor ani L-prostor.

(2) Ke každému okolí U bodu $1 \in P$ a také ke každému okolí V bodu $2 \in P$ existuje takový index k, že pro všecka $n > k$ je $n \in U$, $n \in V$. Přesto není posloupnost $\{n\}$ konvergentní a zejména není ani $\lim n = 1$ ani $\lim n = 2$. Proto nelze vynechat ani v **6.3.5** předpoklad, že a je H-bod, ani v **6.3.10** předpoklad, že P je L-prostor.

(3) Příkladem prostoru P lze prokázat, že ani ve větě **6.3.6** ani ve větě **6.3.20** nelze vynechat předpoklad, že P je H-prostor.

Příklad **6.4.11.** Budiž R množina všech racionálních čísel; budiž u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Prostor P se skládá z množiny R a z jednoho dalšího bodu ω. Uzávěr $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ definujeme takto: Je-li $uM \subset R$, budiž $\overline{M} = uM$; je-li však $uM - R \neq \emptyset$, budiž $\overline{M} = [R \cap u(M \cap R)] \cup (\omega)$. Snadno se dokáže, že prostor P má tyto vlastnosti:

(1) P je spočetný LF-prostor.

(2) Pro každý $a \in P - (\omega)$ je $\chi(a) = \aleph_0$, avšak $\chi(\omega) > \aleph_0$.

(3) Je-li $a \in P - (\omega)$, pak body a, ω nejsou $H_r$oddělené.

Proto v **6.3.16** (a tudíž ani v **6.3.17**) nelze vynechat předpoklad o charakterech.

Příklad **6.4.12.** Nechť R, S, u mají týž význam jako v příkladě **6.4.7.** Zvolme takové zobrazení φ množiny S na množinu R, že

$$x \in R \Rightarrow u[\varphi^{-1}(x)] = \mathsf{E}_1 ;$$

snadno se zjistí, že takové φ existuje. Budiž Λ soustava všech těch v R obsažených posloupností $\{a_n\}$, které jsou konvergentní v (E_1, u). Je-li $\{a_n\} \in \Lambda$, $\lim a_n = \alpha$, je buďto $\alpha \in R$ nebo $\alpha \in S$; je-li $\alpha \in R$, budiž $\lambda a_n = \alpha$; je-li $\alpha \in S$, budiž $\lambda a_n = \varphi(a)$. Pak jsou pro $P = R$ splněny oba axiomy (IL) a (IIL) z věty **6.3.12,** takže v P vznikne topologie (v **6.3.12** označená u). Snadno se dokáže, že při této topologii má P tyto vlastnosti:

(1) P je spočetný LF-prostor.

(2) Pro každý $a \in P$ je $\chi(a)$ nespočetný charakter.

(3) Žádný $a \in P$ není H-bod.

Není mi známo, zda existuje LF-prostor $P \neq \emptyset$ neobsahující žádný H-bod.

Příklad **6.4.13.** Budiž P nespočetná množina. Zvolme prvek $\omega \in P$. Je-li $M \subset P$ konečná, budiž $\overline{M} = M$; je-li $M \subset P$ nekonečná, budiž $\overline{M} = M \cup (\omega)$. Uvažujme prostor $P \times P$ ve smyslu definice **6.2.1**. Snadno se dokáže:

(1) P je dědičně normální L-prostor. Otevřená množina $P - (\omega)$ není F_σ-množina, takže obrácení věty **5.4.11** by bylo nesprávné.

(2) Je-li F uzavřená v prostoru $P \times P$, je-li $(\omega, \omega) \in (P \times P) - F$ a je-li U okolí množiny F v $P \times P$, pak existuje taková množina M, že $F \subset M \subset U$ a že M je současně otevřená i uzavřená. Z toho plyne, že $P \times P$ je normální prostor.

(3) Uvažujme $S = (P \times P) - (\omega, \omega)$ jako prostor vnořený do $P \times P$. Podle **4.6.10, 5.3.2, 5.4.5** a **6.3.9** je S LFR-prostor. Budiž A množina všech (x, ω), kde $x \in P - (\omega)$; dále zvolme spočetnou $C \subset P - (\omega)$ a označme B množinu všech (ω, x), kde $x \in C$. Pak jsou A, B dvě disjunktní uzavřené množiny v prostoru S, které nejsou H-oddělené v S. Z toho plyne, že LFR-prostor S není normální a že normální prostor $P \times P$ není dědičně normální.

Příklad **6.4.14.** Budiž A normálně uspořádaná množina mohutnosti $\aleph_1$ (viz **3.6.2** a **3.7.6**). Položíme $B = A \cup (\tau)$, kde τ není prvkem A, a rozšíříme dané uspořádání množiny A na uspořádání množiny B tak, aby τ byl poslední v B. Pokládejme A, B za uspořádané prostory ve smyslu definice **6.1.2** a utvořme kartézský součin $A \times B$ podle definice **6.2.1.** Snadno se dokáže:

(1) A a B jsou dědičně normální prostory. A je L-prostor.

(2) Označme C množinu všech bodů (x, τ), kde $x \in A$; označme D množinu

všech bodů (x, x), kde $x \in A$; pak C, D jsou disjunktní uzavřené množiny v prostoru $A \times B$. Je-li U okolí C v $A \times B$, můžeme rekurentně definovat takovou posloupnost $\{x_n\}$, že $x_n \in A$ pro všecka n, $(x_n, x_{n+1}) \in U$ pro všecka n. Existuje takový bod $y \in A$, že $\lim x_n = y$ v prostoru A. Jest $(y, y) \in D \cap \overline{U}$ v prostoru $A \times B$. Z toho plyne, že množiny C, D nejsou H-oddělené v prostoru $A \times B$. Tudíž prostor $A \times B$ není normální.

Příklad **6.4.15.** Budiž ω symbol, který není prvkem $\mathbf{N}$. Budiž $P_1 = \mathbf{N} \cup (\omega)$, $P_2 = (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cup (\omega)$. Pro $X \subset P_1$ budiž $\overline{X} = X \cup (\omega)$, je-li X nekonečná, jinak $\overline{X} = X$. Pro $Y \subset P_2$ budiž $\overline{Y} = Y \cup (\omega)$, jestliže existuje takové $n \in \mathbf{N}$, že $(x, n) \in Y$ pro nekonečně mnoho $x \in \mathbf{N}$, jinak $\overline{Y} = Y$. Snadno se dokáže:

(1) P_1 a P_2 jsou dědičně normální LF-prostory.

(2) Pro $n \in \mathbf{N}$ budiž $A_n \subset P_2$ množina všech bodů (x, n), kde $x \in \mathbf{N}$. Budiž $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n) \times A_n \subset P_1 \times P_2$. Bod (ω, ω) náleží do uzávěru množiny $C \subset P_1 \times P_2$, ale pro žádnou v $P_1 \times P_2$ obsaženou posloupnost $\{a_n\}$ není $a_n \in C$, $\lim a_n = (\omega, \omega)$, takže $P_1 \times P_2$ není L-prostor.

Příklad **6.4.16.** Prostor P se skládá z množiny $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{N}$ a z jednoho dalšího bodu ω. Je-li $M \subset P$, pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ budiž M_n množina těch $x \in \mathbf{E}_1$, pro něž $(x, n) \in M$. Budiž u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Topologii prostoru P definujeme takto. Bod $(x, n) \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{N}$ náleží do uzávěru $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ právě tehdy, jestliže buďto $x \in uM_n$ nebo x je hromadným bodem množiny $M_{n+1} \subset \mathbf{E}_1$ (při topologii u). Bod ω náleží do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $\omega \in M$ nebo množina těch $n \in \mathbf{N}$, pro které $M_n \neq 0$, je nekonečná. Pak ω je slabý F-bod prostoru P. Pro každou uzavřenou množinu $F \subset P$, která neobsahuje bod ω, množiny (a), F jsou H-oddělené. Avšak ω není R-bod prostoru P. Z toho plyne, že v **5.3.6** nelze silný F-bod nahradit slabým F-bodem.

6.5. Cvičení k § 6

6.5.1. Budiž P prostor z příkladu **6.4.1.** Topologii prostoru P můžeme zavést pomocí definujících soustav $\mathfrak{U}(x)$ okolí jednotlivých $x \in P$ takto: Je-li $x \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, pak $\mathfrak{U}(x)$ se skládá z jediné množiny (x). Je-li $x \in \mathbf{N}$, pak $\mathfrak{U}(x)$ se skládá z množin $U_k(x)$ $(k \in \mathbf{N})$, kde $U_k(x)$ se skládá z bodu x a ze všech dvojic (x, n), kde $n \in \mathbf{N}$, $n \geqq k$. Posléze $\mathfrak{U}(\omega)$ se skládá z množin $U_k(\omega)$, $k \in \mathbf{N}$, kde $U_k(\omega)$ se skládá z bodu ω a ze všech $n \in \mathbf{N}$, $n \geqq k$.

6.5.2. Popište topologie prostorů z příkladů **6.4.2** až **6.4.15** pomocí definujících soustav okolí.

6.5.3. Popište konvergentní posloupnosti a jejich limity v prostorech z příkladů **6.4.1**, **6.4.3** až **6.4.9**, **6.4.11** až **6.4.15**.

6.5.4. Budiž $P = \mathbf{E}_1$. Do P můžeme zavést L-topologii, při které vztah $\lim a_n = a$ platí právě tehdy, jestliže předně tento vztah platí při přirozené topologii a za druhé existuje takové $k \in \mathbf{N}$, že $a_n \geqq a$ pro všecka $n > k$. Pak P je zobecněný uspořádaný L-prostor, ve kterém první axiom spočetnosti platí, ale druhý neplatí.

6.5.5. Budiž P prostor ze cvič. **6.5.4** a budiž $R = P \times P$. Existuje spočetná množina hustá v R, lze však udat nespočetný isolovaný prostor Q vnořený do R, takže v Q neexistuje hustá spočetná množina.

6.5.6. Nechť prostor P se skládá z množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a z jednoho dalšího bodu ω. Každý $x \in P - (\omega)$ nechť patří do uzávěru $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ pouze tehdy, jestliže $x \in M$. Bod ω nechť patří do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $\omega \in M$ nebo existuje nekonečně mnoho takových $m \in \mathbf{N}$, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbf{N}$ je $(m, n) \in M$. Pak P je dědičně normální prostor, ale žádná prostá bodová posloupnost není v prostoru P konvergentní, takže podle **6.3.14** charakter $\chi(\omega)$ je nespočetný, což lze snadno dokázat přímo.

6.5.7. Nechť prostor P se skládá z množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ a ze dvou dalších bodů a, b. Každý $x \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ nechť patří do uzávěru $\overline{M}$ množiny $M \subset P$ pouze tehdy, jestliže $x \in M$. Bod a nechť patří do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $a \in M$ nebo existuje takové $p \in \mathbf{N}$, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbf{N}$ je $(p, n) \in M$. Bod b nechť patří do $\overline{M}$ právě tehdy, jestliže buďto $b \in M$ nebo ke každému $k \in \mathbf{N}$ existuje takový bod $(m, n) \in (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \cap M$, že $n > k$. Pak P je FL-prostor, ve kterém body a, b nejsou H-oddělené.

6.5.8. Budiž u přirozená topologie v $\mathbf{E}_1$. Zvolme číslo $r \in \mathbf{E}_1$ tak, aby bylo $0 < r < 1$ a aby všecka čísla r^n $(n \in \mathbf{N})$ byla iracionální. Definujme v $\mathbf{E}_1$ dvě topologie v_1, v_2 takto. Je-li $M \subset \mathbf{E}_1$, $a \in \mathbf{E}_1$, pak $a \in v_1 M$ znamená, že buďto $a \in M$ nebo je nekonečně mnoho takových $k \in \mathbf{N}$, ke kterým existuje taková posloupnost $\{a_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$, že předně $a_{kn} \in M$ pro všecka n, za druhé $a_{k,n-1} > a_{kn}$ pro všecka n a za třetí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{kn} = a + r^k$ v prostoru $(\mathbf{E}_1, u)$; $a \in v_2 M$ znamená, že buďto $a \in v_1 M$ nebo existuje taková posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, že předně $b_n \in M$ pro všecka n, za druhé $b_{n+1} > b_n$ pro všecka n a za třetí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ v prostoru $(\mathbf{E}_1, u)$. Potom $(\mathbf{E}_1, v_1)$, $(\mathbf{E}_1, v_2)$ jsou FR-prostory, ve kterých každý bod má nespočetný charakter. V libovolném prostoru vnořeném do $(\mathbf{E}_1, v_1)$ každý bod má charakter buďto rovný 1 nebo nespočetný. Naproti tomu existuje prostor vnořený do $(\mathbf{E}_1, v_2)$, ve kterém existuje bod s charakterem $\aleph_0$.