§ 3. USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

3.1. Pojem uspořádání. Typ uspořádání

Množinu R nazveme *uspořádanou*, je-li dána množina $\mathfrak{D} \subset R \times R$ splňující následující axiomy (x, y, z jsou libovolné prvky R):

[I$\mathfrak{D}$] Je-li $(x, y) \in \mathfrak{D}$, pak není $(y, x) \in \mathfrak{D}$.

[II$\mathfrak{D}$] Není-li ani $(x, y) \in \mathfrak{D}$ ani $(y, x) \in \mathfrak{D}$, pak $x = y$.

[III$\mathfrak{D}$] $(x, y) \in \mathfrak{D}$, $(y, z) \in \mathfrak{D} \Rightarrow (x, z) \in \mathfrak{D}$.

Pravíme, že $\mathfrak{D}$ je *uspořádání* množiny R. Je-li $(x, y) \in \mathfrak{D}$, pravíme, že x *leží před* y a že y *leží za* x v uspořádané množině R. Je-li buďto současně $(x, y) \in \mathfrak{D}$, $(y, z) \in \mathfrak{D}$ nebo současně $(z, y) \in \mathfrak{D}$, $(y, x) \in \mathfrak{D}$, pravíme, že y *leží mezi* x a z (nebo mezi z a x). Pravíme, že $a \in R$ je *první* v R, jestliže žádné $x \in R$ neleží před a; pravíme, že $b \in R$ je *poslední* v R, jestliže žádné $x \in R$ neleží za b. Podle [I$\mathfrak{D}$] žádné $a \in R$ neleží samo před sebou. Podle [II$\mathfrak{D}$] má R nejvýš jeden první a nejvýš jeden poslední prvek.

Z věty **3.6.1** plyne, že každou množinu lze aspoň jedním způsobem uspořádat. Jestliže R obsahuje více než jeden prvek, dá se různými způsoby uspořádat. Je-li $\mathfrak{D}$ jedno uspořádání, pak

$$(x, y) \in \mathfrak{D}^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in \mathfrak{D}$$

určuje nové uspořádání $\mathfrak{D}^{-1}$, které nazveme *inversním* k $\mathfrak{D}$. Zřejmě $(\mathfrak{D}^{-1})^{-1} = \mathfrak{D}$.

Je-li $\mathfrak{D}$ uspořádání množiny R a je-li $A \subset R$, je $\mathfrak{D}_A$ uspořádání množiny A, jestliže

$$(x, y) \in \mathfrak{D}_A \Leftrightarrow x \in A\,, \quad y \in A\,, \quad (x, y) \in \mathfrak{D}\,. \tag{1}$$

Při studiu uspořádané množiny pokládáme každou podmnožinu za uspořádanou podle (1).

Je-li R uspořádána a leží-li $a \in R$ před $b \in R$, pravíme, že a leží *přímo před* b a že b leží *přímo za* a, jestliže žádné $x \in R$ neleží mezi a a b.

3.1.1. R buďiž uspořádána. Jestliže mezi $a \in R$ a $b \in R$ (a před b) leží jen konečně mnoho prvků z R, existuje prvek $x \in R$, který leží přímo za a, a prvek $y \in R$, který leží přímo před b.

Dvě uspořádané množiny R, S nazveme *podobné*, existuje-li zobrazení f množiny R na S s vlastností

$$x \in R\,, \quad y \in R\,, \quad x \text{ před } y \Rightarrow f(x) \text{ před } f(y)\,.$$

Také zobrazení f nazveme *podobným*. Podobné zobrazení je prosté a také inversní zobrazení je podobné.

Důležitý příklad uspořádání dávají *monotónní soustavy množin*. Soustavu množin $\mathfrak{M}$ nazveme monotónní, jestliže pro $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ je vždy buďto $A \subset B$ nebo $B \subset A$. Je-li $\mathfrak{M}$ monotónní, pak

$$(A, B) \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow A \supset B \neq A$$

definuje uspořádání soustavy $\mathfrak{M}$, které nazveme *vzestupným* a $\mathfrak{O}^{-1}$ nazveme *sestupným*.

R buďiž uspořádána. Každému $a \in R$ přiřaďme množinu $\mathbf{A}(a) \subset R$, kde

$$\mathbf{A}(a) = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ před } a]\,.$$

$\mathbf{A}(a)$ nazveme *úsekem* množiny R *určeným* prvkem a. Různé prvky určují různé úseky; soustava všech úseků je monotónní soustava.

3.1.2. $\mathbf{A}$ je podobné zobrazení množiny R na vzestupně uspořádanou soustavu všech jejích úseků.

V článku **2.3** jsme zavedli pojem mohutnosti množiny na základě pojmu prostého zobrazení. V případě uspořádaných množin můžeme zavést nový pojem *typu uspořádané množiny* způsobem zcela obdobným s tím pouze rozdílem, že místo o prostá zobrazení se opíráme o podobná zobrazení. Jelikož běží o úvahu velmi podobnou úvaze podrobně rozvedené v článku **2.3**, stačí říci stručně toto: O dvou uspořádaných množinách A, B (náležejících do soustavy $\mathfrak{M}$, což se obyčejně jen mlčky předpokládá) pravíme, že mají týž typ, jestliže existuje podobné zobrazení A na B. Protože každé podobné zobrazení je prosté, je jasné, že z rovnosti typ A = typ B plyne rovnost moh A = moh B, tj. všecky uspořádané množiny téhož typu mají také touž mohutnost, kterou nazýváme *mohutností typu*. Pouze pro konečné množiny je možné (cvič. 3.10.1) obráceně z rovnosti mohutností soudit na rovnost typů; proto pro typy konečných uspořádaných množin zavádíme tytéž značky 0, 1, 2, 3, ... jako pro mohutnosti konečných množin. Typ přirozeně uspořádané (viz čl. **3.2**) množiny všech celých kladných čísel značíme ω; typ přirozeně uspořádané množiny všech racionálních čísel značíme η; zřejmě $\omega \neq \eta$. Je-li α typ množiny A určitým způsobem uspořádané, značíme α^* typ téže množiny A v jejím inversním uspořádání; zřejmě $\omega^* \neq \omega$, ale $\eta^* = \eta$.

Součet $\alpha + \beta$ dvou typů α, β definujeme takto. Zvolíme dvě *disjunktní* uspořádané množiny A, B tak, aby bylo $\alpha =$ typ A, $\beta =$ typ B a položíme $\alpha + \beta =$ typ C, kde C je sjednocení množin A, B uspořádané tak, aby každé $x \in A$ bylo v množině C před každým $y \in B$ a aby uspořádání množin A, B určené uspořádáním množiny C splynulo s původním uspořádáním množin A, B. Jestliže moh α, moh β jsou konečné, pak takto definovaný součet $\alpha + \beta$ souhlasí s obyčejným pojmem součtu. V obecném případě platí, jak se snadno zjistí, asociativní zákon

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)\,,$$

takže můžeme psát $\alpha + \beta + \gamma$ bez závorky, neplatí však obecně komutativní zákon, neboť je sice $n + \omega = \omega$ pro všecka $n = 1, 2, 3, \ldots$, ale typy $\omega + n$ jsou vesměs různé navzájem a různé od ω. Snadno se zjistí, že

$$1^\circ\ \eta\,,\quad 2^\circ\ 1 + \eta\,,\quad 3^\circ\ \eta + 1\,,\quad 4^\circ\ 1 + \eta + 1$$

je typ přirozeně uspořádané množiny všech těch racionálních čísel x, pro něž platí

$$1^\circ\ 0 < x < 1\,,\quad 2^\circ\ 0 \leqq x < 1\,,\quad 3^\circ\ 0 < x \leqq 1\,,\quad 4^\circ\ 0 \leqq x \leqq 1\,.$$

3.2. Přirozené uspořádání množiny celých nebo racionálních čísel

Je-li $R \subset \mathbf{E}_1$, pak

$$(x, y) \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow x < y$$

definuje uspořádání množiny R, které nazveme jejím *přirozeným uspořádáním*.

Přirozené uspořádání množiny všech celých čísel $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ nebo kterékoli její podmnožiny R má tu vlastnost, že mezi dvěma různými čísly množiny R leží jen konečný počet čísel této množiny. Obráceně platí:

3.2.1. Množina $R \neq \emptyset$ budiž uspořádána tak, že mezi dvěma různými prvky leží vždy jen konečný počet prvků. Jsou čtyři možné případy:

[1] R má první i poslední prvek;
[2] R má první a nemá poslední prvek;
[3] R nemá první a má poslední prvek;
[4] R nemá první ani poslední prvek.

Případ [1] nastane právě tehdy, jestliže množina R je konečná. Dané uspořádání množiny R je podobné přirozenému uspořádání

[1] množiny všech celých kladných čísel $\leqq p$, kde p znamená počet prvků množiny R;
[2] množiny všech celých kladných čísel;
[3] množiny všech celých záporných čísel;
[1] množiny všech celých čísel.

Důkaz. I. Nechť platí případ [1] nebo [2], takže R má první prvek; označme jej a_1. Je-li pro nějaké n prvek $a_n \in R$ už definován a není-li a_n posledním v R (tím není nic řečeno o existenci posledního prvku), existuje $b \in R$ za a_n a podle **3.1.1** existuje $a_{n+1} \in R$ ležící přímo za a_n.

Nyní jsou dva možné případy: buďto (případ α) dostaneme konečnou posloupnost $\{a_n\}_1^p$ prvků z R, kde a_p je poslední v R, nebo (případ β) dostaneme nekonečnou posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ prvků z R. Dokážeme, že množina hodnot (konečné nebo nekonečné) posloupnosti $\{a_n\}$ je totožná s celou R; z toho pak čtenář snadno odvodí, že $f(a_n) = n$ dává žádané podobné zobrazení f množiny R, takže případ α splyne s případem [1] a případ β s [2].

Předpokládejme tedy, že určité $b \in R$ je různé od všech a_n. Protože a_1 je první v R, leží b za a_1. Ale b neleží za všemi a_n (v případě α, protože a_p je poslední; v případě β, protože mezi a_1 a b je konečně mnoho prvků z R). Tedy existuje index m ($m < p$ v případě α), pro který b

leží za a_m, ale před a_{m+1}, tedy mezi a_m a a_{m+1}, což je nemožné, neboť a_{m+1} leží přímo za a_m.

II. Případ [3] se převede na [2] pomocí inversního uspořádání.

III. V případě [4] zvolíme libovolně $a_0 \in R$ a položíme

$$R_1 = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ před } a_0]\,, \quad R_2 = \mathscr{E}_x \quad [x \text{ za } a_0]\,.$$

Pak R se rovná sjednocení tří disjunktních množin $(a_0) \cup R_1 \cup R_2$ a snadno se zjistí, že pro R_1 nastane případ [3], pro R_2 případ [2]. Podle dokázaného existuje podobné zobrazení f_1 množiny R_1 na množinu všech celých záporných čísel a podobné zobrazení f_2 množiny R_2 na množinu všech celých kladných čísel. Je-li

$$f(a_0) = 0\,, \quad x \in R_1 \Rightarrow f(x) = f_1(x)\,, \quad x \in R_2 \Rightarrow f(x) = f_2(x)\,,$$

je f žádané podobné zobrazení množiny R.

R budiž uspořádána. Pravíme, že R je *hustě uspořádaná*, obsahuje-li R aspoň dva prvky a jestliže pro $(x, y) \in R \times R$ nikdy x neleží přímo před y. Ze **3.1.1** plyne:

3.2.2. Hustě uspořádaná množina je nekonečná, dokonce mezi kterýmikoli dvěma různými prvky leží nekonečně mnoho prvků.

Spočetná (viz **2.2.7**) množina všech racionálních čísel je (ve svém přirozeném uspořádání) hustě uspořádána.

3.2.3. R budiž nejvýš spočetná uspořádaná množina, H budiž hustě uspořádaná množina. Pak existuje $S \subset H$, která je podobná s R. Nechť R je nekonečná. (Jinak je věta triviální.) Pak R je množina hodnot prosté posloupnosti $\{a_n\}$. Protože H je nekonečná, můžeme zvolit $b_1 \in H$ tak, že b_1 není první ani poslední v H. Nechť nyní při určitém $q \in \mathbf{N}$ jsou už $b_n \in H$ $(1 \leqq n \leqq q)$ určeny tak, že žádný není prvním ani posledním v H a že

$$a_m \text{ před } a_n \Leftrightarrow b_m \text{ před } b_n \tag{1}$$

platí pro $1 \leqq m, n \leqq q$. (Pro $q = 1$ je to správné.) Snadno se nahlédne, že lze (nekonečně mnoha způsoby) určit $b_{q+1} \in H$ tak, aby (1) platilo pro $1 \leqq m, n \leqq q + 1$; můžeme předpokládat, že b_{q+1} není první ani poslední v H. Tím je rekurentně určena posloupnost $\{b_n\}$ a je-li $S \subset H$

její množina hodnot, pak $f(b_n) = a_n$ dává podobné zobrazení f množiny S na R.

3.2.4. Budiž R nejvýš spočetná uspořádaná množina. Existuje množina S složená z kladných racionálních čísel, která ve svém přirozeném uspořádání je podobná s R. To je zvláštní případ věty **3.2.3.**

3.2.5. Buďtež R, S dvě spočetné hustě uspořádané množiny; nechť obě mají první prvek nebo žádná; nechť obě mají poslední prvek nebo žádná. Pak R a S jsou podobné.

Důkaz. I. Prostým vynecháním prvního nebo posledního prvku převedeme ostatní možnosti na případ, kdy R a S nemají první ani poslední prvek. Existují prosté posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, jejichž množiny hodnot jsou R resp. S. Sestrojíme rekurentně nové posloupnosti $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ s týmiž množinami hodnot.

II. Zvolíme $u_1 = a_1$, $v_1 = b_1$. Nechť při daném $q \in \mathbf{N}$ už máme určeny $u_n \in R$, $v_n \in S$ $(1 \leqq n \leqq q)$ tak, že

$$u_m \text{ před } u_n \Leftrightarrow v_m \text{ před } v_n \tag{2}$$

pro $1 \leqq m$, $n \leqq q$. Rozeznáváme dva případy. Jestliže předně q je liché, zvolíme nejprve $u_{q+1} = a_h$ tak, že h je nejmenší index, pro který

$$1 \leqq n \leqq q \Rightarrow a_h \neq u_n\,; \tag{3}$$

potom zvolíme $v_{q+1} = b_k$ s takovým k, aby (2) platilo pro $1 \leqq m$, $n \leqq q + 1$. (Protože S je hustě uspořádaná množina bez prvního a posledního prvku, je nekonečně mnoho takových k.) Jestliže za druhé q je sudé, pak postupujeme obráceně: nejprve zvolíme $v_{q+1} = b_h$ tak, že h je nejmenší index, pro který

$$1 \leqq n \leqq q \Rightarrow b_h \neq v_n$$

a potom zvolíme $u_{q+1} = a_k$ s takovým k, aby (2) platilo pro $1 \leqq m$, $n \leqq q + 1$. (Opět je nekonečně mnoho takových k.)

III. Určili jsme posloupnost $\{u_n\}$ s množinou hodnot $U \subset R$ a posloupnost $\{v_n\}$ s množinou hodnot $V \subset S$ a zřejmě $f(u_n) = v_n$ dává podobné zobrazení U na V. Zbývá dokázat, že $U = R$, $V = S$. Je-li $U \neq R$, budiž m nejmenší index, pro který a_m je různé od všech u_n.

Pak je $m > 1$ a existuje takové liché q, že každé a_i $(1 \leqq i \leqq m - 1)$ se vyskytuje mezi u_n $(1 \leqq n \leqq q)$. Protože h byl nejmenší index s vlastností (3), je $u_{q+1} = a_m$, což je spor. Stejně se dokáže, že $V = S$.

3.2.6. Budiž R spočetná hustě uspořádaná množina. Jestliže R

[1] má první i poslední prvek;
[2] má první, ale nemá poslední prvek;
[3] nemá první, ale má poslední prvek;
[4] nemá první ani poslední prvek,

pak R je podobná s přirozeně uspořádanou množinou všech těch racionálních čísel x, pro která

$$[1]\ 0 \leqq x \leqq 1\,; \quad [2]\ 0 \leqq x < 1\,; \quad [3]\ 0 < x \leqq 1\,; \quad [4]\ 0 < x < 1\,.$$

To je zvláštní případ věty **3.2.5.**

3.3. Mezery

R budiž uspořádaná množina. *Řezem* v množině R rozumíme dvojici $\alpha = (A_1, A_2)$ takovou, že předně

$$A_1 \neq \emptyset \neq A_2\,; \quad A_1 \cup A_2 = R$$

a za druhé

$$(1) \qquad x_1 \in A_1\,, \quad x_2 \in A_2 \Rightarrow x_1 \text{ před } x_2\,.$$

Z (1) plyne, že A_1, A_2 jsou disjunktní, takže $A_2 = R - A_1$. Množina A_1 se jmenuje *dolní skupina*, množina A_2 *horní skupina* řezu α.

Víme-li, že A_1, A_2 jsou disjunktní, můžeme vlastnost (1) zapsat také ve tvaru

$$x_1 \text{ před } x_2\,, \quad x_2 \in A_1 \Rightarrow x_1 \in A_1$$

nebo ve tvaru

$$x_2 \text{ za } x_1\,, \quad x_1 \in A_2 \Rightarrow x_2 \in A_2\,.$$

Dva druhy řezů mají své názvy: [1] *skok* v R je řez, jehož dolní skupina má poslední a horní skupina má první prvek; [2] *mezera* v R je naopak řez, jehož dolní skupina nemá poslední a horní skupina nemá první prvek.

3.3.1. Uspořádaná množina s aspoň dvěma různými prvky je hustě uspořádána právě tehdy, nemá-li skoky.

Budiž R množina všech racionálních čísel ve svém přirozeném uspořádání. Každé iracionální číslo α vytvořuje v R mezeru (A_1, A_2), je-li A_1 (A_2) množina těch $x \in R$, pro něž $x < \alpha$ $(x > \alpha)$. Obráceně je známo, že každá mezera v R je v tomto smyslu vytvořena nějakým iracionálním číslem α: v Dedekindově teorii se iracionální čísla přímo definují mezerami v R.

3.4. Pojem dobrého uspořádání. Pořadová čísla

Budiž R uspořádaná množina. Pravíme, že R je *dobře uspořádána,* jestliže každá její část $A \neq \emptyset$ má první prvek, tedy takový prvek $a \in A$, že

$$x \in A\,, \quad x \neq a \Rightarrow a \text{ před } x\,.$$

Každá konečná uspořádaná množina je dobře uspořádána. Dobré uspořádání množiny určuje dobré uspořádání každé její části. Přirozené uspořádání množiny všech celých kladných (záporných) čísel je (není) dobré. Při podobném zobrazení přejde dobré uspořádání v dobré uspořádání.

3.4.1. Budiž f podobné zobrazení dobře uspořádané množiny R na část množiny R. Pak pro žádné $x \in R$ není $f(x)$ před x. Jestliže množina $A = \mathscr{E}_x\,[f(x) \text{ před } x]$ není prázdná, má první prvek a. Je-li $b = f(a)$, je b před a podle definice A, a protože f je podobné, je $f(b)$ před $f(a)$ neboli $f(b)$ před b, takže $b \in A$. To je spor, neboť b leží před prvním prvkem a množiny A.

3.4.2. Jestliže dvě dobře uspořádané množiny R, S jsou podobné, pak existuje jen jediné podobné zobrazení R na S. Nechť f, g jsou dvě taková zobrazení. Nejsou-li totožná, existuje takové $a \in R$, že $f(a) \neq g(a)$. Pro určitost budiž

$$f(a) \text{ před } g(a)\,. \tag{1}$$

Je-li
$$y \in S \Rightarrow \varphi(y) = f[g_{-1}(y)]\,,$$
je φ podobné zobrazení S na S, při kterém $\varphi[g(a)] = f(a)$, takže podle (1) je $\varphi[g(a)]$ před $g(a)$ a to je spor proti **3.4.1.**

Pojem úseku $\mathbf{A}(a)$ uspořádané množiny R určeného prvkem a má u dobře uspořádaných množin základní důležitost.

3.4.3. Dobře uspořádaná množina R není podobná žádnému svému úseku. Je-li f podobné zobrazení R na $\mathbf{A}(a)$, kde $a \in R$, je $f(a) \in \mathbf{A}(a)$ neboli $f(a)$ před a a to je spor proti **3.4.1.**

3.4.4. Dva různé úseky dobře uspořádané množiny R si nejsou podobné. Je-li totiž např. $a \in R$ před $b \in R$, pak $\mathbf{A}(a)$ je úsekem dobře uspořádané množiny $\mathbf{A}(b)$, takže $\mathbf{A}(a)$, $\mathbf{A}(b)$ podle **3.4.3** si nejsou podobné.

3.4.5. R budiž dobře uspořádána. Nechť $M \subset R$ má vlastnost
$$x \in M\,, \quad y \in R\,, \quad y \text{ před } x \Rightarrow y \in M\,.$$
Pak je buďto $M = R$ nebo M je úsek R. Je-li $M \neq R$, tedy $R - M \neq \emptyset$, budiž a první v $R - M$. Je-li $x \in \mathbf{A}(a)$, je x před a, tedy $x \in M$. Kdyby bylo $M \neq \mathbf{A}(a)$, existovalo by $b \in M - \mathbf{A}(a)$. Zřejmě je a před b, ale to je nemožné, neboť
$$b \in M\,, \quad a \in R\,, \quad a \text{ před } b \Rightarrow a \in M\,.$$

3.4.6. Jsou-li R, S dobře uspořádané množiny, nastane právě jeden z těchto tří případů:

[1] R a S jsou podobné;

[2] S je podobná úseku množiny R;

[3] R je podobná úseku množiny S.

Důkaz. I. Podle **3.4.3** nemohou nastat současně ani [1] a [2] ani [1] a [3]. Nastanou-li současně [2] a [3], existuje podobné zobrazení f množiny R na úsek množiny S a podobné zobrazení g množiny S na úsek množiny R. Protože f je zobrazení R do S, existuje zobrazení φ složené z f a g. Zřejmě φ je podobné zobrazení množiny R na její úsek, což je spor proti **3.4.3.**

II. Budiž T množina všech těch dvojic $(x, y) \in R \times S$, pro které úsek množiny R určený prvkem x je podobný úseku množiny S určenému prvkem y. Podle **3.4.4** k danému $x \in R$ nebo k danému $y \in S$ vždy existuje nejvýš jedna dvojice $(x, y) \in T$. Z toho plyne (viz článek **1.2**), že množinu T lze považovat za prosté zobrazení f jakési množiny $A \subset R$ na jakousi množinu $B \subset S$. (Je vhodné si všimnout, že je-li $R \neq \emptyset \neq S$, je $T \neq \emptyset$, neboť $(a, b) \in T$, je-li a první prvek v R a b první prvek v S.)

III. Budiž $a \in A$, $b = f(a)$ neboli $(a, b) \in T$. Pak existuje podobné zobrazení φ úseku $\mathbf{A}(a)$ množiny R na úsek $\mathbf{A}(b)$ množiny S. Je-li $x \in \mathbf{A}(a)$, je zřejmé, že existuje zúžení zobrazení φ, které je podobným zobrazením úseku $\mathbf{A}(x)$ množiny R na úsek $\mathbf{A}(y)$ množiny S, jestliže $y = \varphi(x)$. Je tedy $x \in A$ a mimo to $y = f(x)$ leží před $b = f(a)$. Zjistili jsme tedy, že f je podobné zobrazení A na B a mimo to soudíme ze **3.4.5**, že je buďto $A = R$ nebo A je úsekem množiny R. Podobně je buďto $B = S$ nebo B je úsekem množiny S.

IV. Zbývá uvést ke sporu předpoklad, že $A = \mathbf{A}(\alpha)$ je úsekem množiny R a zároveň $B = \mathbf{A}(\beta)$ je úsekem množiny S. Potom by však bylo f podobné zobrazení $\mathbf{A}(\alpha)$ na $\mathbf{A}(\beta)$, takže by bylo $(\alpha, \beta) \in T$, tedy $\alpha \in A$, což je spor.

3.4.7. Budiž S část dobře uspořádané množiny R, takže také S je dobře uspořádaná množina. Pak S je podobná buďto s R nebo s nějakým úsekem množiny R. Jinak by totiž podle **3.4.6** existovalo podobné zobrazení f množiny R na úsek množiny S určený prvkem $a \in S$; pak by však bylo $f(a)$ před a, což je spor proti **3.4.1**.

Pojem typu (viz čl. **3.1**) je zvláště důležitý u dobře uspořádaných množin, protože pro tyto typy lze definovat vztah „menší", který má podobné vlastnosti jako stejně označený vztah mezi reálnými čísly. Z tohoto důvodu se typy dobře uspořádaných množin obyčejně nazývají *pořadová* nebo *ordinální čísla*. Snadno se zjistí, že *součet dvou pořadových čísel* je opět pořadové číslo. Mezi pořadová čísla patří všecka nezáporná celá čísla 0, 1, 2, ...; ostatní pořadová čísla, tedy typy nekonečných dobře uspořádaných množin, nazývají se mnohdy *transfinitní čísla*.

Jsou-li α, β pořadová čísla, pravíme, že α je menší než β nebo že β je větší než α a píšeme $\alpha < \beta$ nebo $\beta > \alpha$, jestliže (jedna a tudíž každá) dobře uspořádaná množina typu β obsahuje úsek typu α (který podle **3.4.4** je jediný). Ze **3.4.6** plyne, že pro libovolně daná pořadová čísla α, β platí právě jeden ze tří případů: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$. Mimo to je patrné, že jestliže $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, je také $\alpha < \gamma$. Tudíž pro kteroukoli množinu M pořadových čísel vztah

$$\alpha \text{ před } \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

definuje uspořádání množiny M, které nazveme jejím *přirozeným uspořádáním*. Je-li α libovolné pořadové číslo, označíme $W(\alpha)$ množinu všech pořadových čísel menších než α (neboli množinu typů všech úseků dobře uspořádané množiny typu α), při čemž máme na mysli přirozené uspořádání této množiny; snadno se zjistí, že přirozené uspořádání množiny $W(\alpha)$ je dobré a že jeho typ je roven α, takže také moh α = moh $W(\alpha)$. Také přirozené uspořádání množiny $W(\alpha) \cup (\alpha)$ všech pořadových čísel $\leqq \alpha$ je dobré; jeho typ je zřejmě $\alpha + 1$.

Pořadové číslo $\alpha \neq 0$ se nazývá *isolované*, jestliže v množině $W(\alpha)$ existuje poslední (největší) prvek. Je-li β tento poslední prvek, zjistí se snadno, že $\alpha = \beta + 1$. Obráceně každé pořadové číslo tvaru $\beta + 1$ (kde β je libovolné pořadové číslo), je isolované. Mezi isolovaná pořadová čísla počítáme také číslo 0. Pořadové číslo α se nazývá *limitní*, jestliže není isolované, tedy jestliže $\alpha \neq 0$ a jestliže ke každému $\beta < \alpha$ existuje takové $\gamma < \alpha$, že $\beta < \gamma$.

3.5. Transfinitní indukce

K důkazu správnosti nějaké vlastnosti pro všecky prvky dobře uspořádané množiny se často užívá následující věty **3.5.1**, jejímž zvláštním případem (je-li R množina všech celých kladných čísel ve svém přirozeném uspořádání) je známá metoda indukce; proto se v obecném případě mluví o *důkazu transfinitní indukcí.*

3.5.1. Nechť pro každý prvek x dobře uspořádané množiny R má smysl vlastnost $V(x)$. Máme-li dokázat, že $V(x)$ je správná pro každé $x \in R$, stačí pro každé $x \in R$ odvodit správnost vlastnosti $\mathsf{V}(x)$ z předpokladu, že vlastnost $\mathsf{V}(y)$ je správná pro všecka $y \in \mathsf{A}(x)$.

Poznámka. Je-li x první v R, je $\mathsf{A}(x) = \emptyset$, takže neexistuje žádné $y \in \mathsf{A}(x)$ a můžeme říci, že v tomto případě předpoklad správnosti $\mathsf{V}(y)$ pro všecka $y \in \mathsf{A}(x)$ je vždy splněn, tj. je-li x první v R, musíme umět odvodit správnost $\mathsf{A}(x)$ bez jakéhokoli předpokladu.

Důkaz. Budiž A množina těch $x \in R$, pro které vlastnost $\mathsf{V}(x)$ je nesprávná. Kdyby bylo $A \neq \emptyset$, existoval by v A první prvek x. Předpoklad správnosti $\mathsf{V}(y)$ pro všecka $y \in \mathsf{A}(x)$ by byl splněn a přesto by vlastnost $\mathsf{V}(x)$ byla nesprávná. To je spor.

Také to, čemu se někdy říká definice indukcí neboli rekurentní definice posloupnosti (tj. zobrazení, jehož oborem je množina N) dá se přenést na zobrazení, jejichž oborem je libovolná dobře uspořádaná množina. Platí totiž:

3.5.2. Budiž R dobře uspořádaná množina; M budiž jakákoli množina. Budiž dáno pravidlo f, které pro každý úsek množiny R každému zobrazení φ tohoto úseku do M přiřazuje určitý prvek $f(\varphi) \in M$. Pak existuje zobrazení ψ množiny R do M s tou vlastností, že pro každé $x \in R$ je $\psi(x) = f(\varphi)$, znamená-li φ zúžení zobrazení ψ na úsek $\mathsf{A}(x)$ množiny R.

Poznámka. Snadno se zjistí, že takové zobrazení ψ je jediné. Užití věty **3.5.2** (nebo následující věty **3.5.3**) se obyčejně nazývá *definice transfinitní indukcí,* ač vhodnější by byl název *transfinitně rekurentní definice.*

Důkaz. I. Budiž S množina těch $x \in R$, pro něž existuje zobrazení φ úseku $\mathsf{A}(x)$ do M s vlastností

$$(1) \qquad y \in \mathsf{A}(x) \Rightarrow \varphi(y) = f(\varphi_y)\,, \quad \text{kde} \quad \varphi_y = \varphi \mid \mathsf{A}(y)\,.$$

Taková zobrazení φ nazveme přípustná. (Je-li a první prvek v R, pak $\mathsf{A}(a) = \emptyset$ a vlastnost (1) je pro $y = a$ splněna při $\varphi = \emptyset$; je tedy $a \in S$.)

II. Ke každému $x \in S$ patří jediné přípustné zobrazení φ, které v dalších částech důkazu označíme φ_x. Jsou-li totiž φ_1, φ_2 dvě přípustná zobrazení patřící k prvku x a je-li $\varphi_1 \neq \varphi_2$, pak existuje první $y \in \mathsf{A}(x)$ s vlastností $\varphi_1(y) \neq \varphi_2(y)$. Pro $z \in \mathsf{A}(y)$ je potom $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$, takže zúžení $\varphi_{1y} = \varphi_1 \mid \mathsf{A}(y)$, $\varphi_{2y} = \varphi_2 \mid \mathsf{A}(y)$ jsou totožná. Avšak podle (1) je $\varphi_1(y) = f(\varphi_{1y})$, $\varphi_2(y) = f(\varphi_{2y})$, tedy $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$, což je spor.

III. Snadno se zjistí, že jestliže $x \in S$, pak je $\mathsf{A}(x) \subset S$ a pro $y \in \mathsf{A}(x)$ je zobrazení φ_y totožné se zúžením $\varphi_x \mid \mathsf{A}(y)$.

IV. Pro $x \in S$ budiž $\psi(x) = f(\varphi_x)$. Je tedy ψ zobrazení S do M. Pro $x \in S$ je φ_x totožné se zúžením $\psi \mid \mathsf{A}(x)$. [Toto zúžení existuje, protože $\mathsf{A}(x) \subset S$ podle III.] Neboť pro $y \in \mathsf{A}(x)$ hodnota zobrazení $\psi \mid \mathsf{A}(x)$ v prvku y je rovna $\psi(y)$ neboli $f(\varphi_y)$, a mimo to je φ_x přípustné, takže $\varphi_x(y) = f[\varphi_x \mid \mathsf{A}(y)]$ a podle III je $\varphi_x \mid \mathsf{A}(y) = \varphi_y$.

V. Je tedy pro každé $x \in S$

$$\psi(x) = f(\varphi_x) = f[\psi \mid \mathsf{A}(x)]$$

a zbývá dokázat, že $S = R$. V případě $S \neq R$ však soudíme z III podle **3.4.5**, že $S = \mathsf{A}(a)$ je úsek množiny R. Potom je však ψ přípustné zobrazení $\mathsf{A}(a)$ do M, takže podle definice S je $a \in S$ neboli $a \in \mathsf{A}(a)$ a to je spor.

Věty **3.5.2** se obyčejně užívá v tom případě (na který se lehko obecný případ převede), kdy R je přirozeně uspořádaná množina všech pořadových čísel $\leqq \alpha$, kde α je libovolné pořadové číslo. Při tom se zpravidla postupuje způsobem popsaným v následující větě, jehož správnost snadno plyne z věty **3.5.2.**

3.5.3. Abychom jednoznačně definovali věc $v(\alpha)$ přiřazenou libovolnému pořadovému číslu α, stačí: 1° definovat věc $v(0)$; 2° pro libovolné isolované pořadové číslo $\xi = \eta + 1$ udat předpis určující věc $v(\xi)$ za předpokladu, že věc $v(\eta)$ je již určena; 3° pro libovolné limitní pořadové číslo ξ udat předpis určující věc $v(\xi)$ za předpokladu, že pro každé pořadové číslo $\eta < \xi$ je věc $v(\eta)$ již určena.

3.6. Existence dobrého uspořádání

Budiž $\mathfrak{R}$ soustava všech neprázdných částí množiny R. *Výběrovým pravidlem v množině R* nazveme zobrazení φ soustavy $\mathfrak{R}$ do množiny R, které má vlastnost

$$X \in \mathfrak{R} \Rightarrow \varphi(X) \in X .$$

Za správný pokládáme v celé knize *axiom výběru*, který praví, že v každé množině existuje výběrové pravidlo.

3.6.1. Každou množinu R lze dobře uspořádat.

Důkaz. I. Zvolme výběrové pravidlo φ v množině R. Označme $\mathfrak{S}$ soustavu všech těch částí S množiny R, které se dají dobře uspořádat tak, že

$$x \in S \Rightarrow \varphi(R - \mathsf{A}(x)) = x ,$$

kde $\mathsf{A}(x)$ je úsek dobře uspořádané množiny S určený jejím prvkem x. Takové dobré uspořádání nazveme přípustné.

II. Budiž W_1 přípustné dobré uspořádání množiny $S_1 \in \mathfrak{S}$ a budiž W_2 přípustné dobré uspořádání množiny $S_2 \in \mathfrak{S}$. Podle **3.4.6** existují množiny $S_1^* \subset S_1$, $S_2^* \subset S_2$ s těmito vlastnostmi: [1] není současně $S_1^* \neq S_1$, $S_2^* \neq S_2$, [2] je-li $S_i^* \neq S_i$ $(i = 1, 2)$, je S_i^* úsek S_i, [3] existuje podobné zobrazení f množiny S_1^* na S_2^*. Jestliže existuje $x \in S_1^*$, pro které $f(x) \neq x$, musí existovat první takové x. Pro toto x je úsek A množiny S_1 určený prvkem x totožný s úsekem množiny S_2 určeným prvkem $f(x)$ a protože W_1, W_2 jsou přípustná, je $\varphi(R - A) = x$, $\varphi(R - A) = f(x)$, a tedy $f(x) = x$, což je spor. Tím je dokázáno, že $x \in S_1^* \Rightarrow f(x) = x$, takže $S_1^* = S_2^*$. Protože vždy je buďto $S_1^* = S_1$ nebo $S_2^* = S_2$, soudíme nejprve, že v případě $S_1 = S_2$ je nutně $W_1 = W_2$, tj. každá $S \in \mathfrak{S}$ má jediné přípustné dobré uspořádání. Dále však soudíme v případě $S_1 \neq S_2$, že je buďto $S_1 \subset S_2$ nebo $S_2 \subset S_1$, a že jestliže např. $S_1 \subset S_2$, pak pro $x \in S_1$, $y \in S_1$ platí právě tehdy „x před y" ve smyslu W_1, jestliže platí „x před y" ve smyslu W_2.

III. Z toho snadno plyne, že sjednocení T všech $S \in \mathfrak{S}$ můžeme uspořádat předpisem, že pro $x \in T$, $y \in T$ je „x před y" právě tehdy, jestliže existuje taková $S \in \mathfrak{S}$, že $x \in S$, $y \in S$, a že je x před y ve smyslu přípustného dobrého uspořádání množiny S. Takto definované uspořádání množiny T je dobré. Neboť je-li $T \supset A \neq \emptyset$, zvolme $a \in A$. Existuje $S \in \mathfrak{S}$, $a \in S$; tato S obsahuje celý úsek množiny T určený prvkem a. Jest $\emptyset \neq A \cap S \subset S$ a protože S je dobře uspořádána, existuje prvek b první v $A \cap S$, který je prvním také v A.

IV. Naše dobré uspořádání množiny T je přípustné. Neboť je-li $a \in T$, opět existuje $S \in \mathfrak{S}$, $a \in S$. Zřejmě prvek a určuje v obou množinách S, T týž úsek A a protože dobré uspořádání množiny S je přípustné, je $\varphi(A) = a$.

V. Protože T je dobře uspořádána, stačí dokázat, že $T = R$. Je-li $T \neq R$, pak $c = \varphi(R - T) \in R - T$. V množině $T \cup (c)$ definujeme uspořádání tak, že „x před c" pro všecka $x \in T$ a že pro $x \in T$, $y \in T$ je „x před y" v $T \cup (c)$ právě tehdy, jestliže „x před y" v T. Snadno se nahlédne, že vznikne přípustné dobré uspořádání množiny $T \cup (c)$. Je tedy $T \cup (c) \in \mathfrak{S}$, a tudíž $T \cup (c) \subset T$ a to je spor.

Definice. *Normální uspořádání* množiny R je takové dobré uspořádání množiny R, že moh $A \neq$ moh R pro každý úsek A množiny R.

3.6.2. Každou množinu R lze normálně uspořádat.

Podle **3.6.1** můžeme předpokládat, že je dáno dobré uspořádání množiny R. Budiž $S = \mathscr{E}_x[\text{moh } \mathbf{A}(x) = \text{moh } R]$. Je-li $S = \emptyset$, je důkaz hotov. Je-li $S \neq \emptyset$, má S první prvek a a jest moh $\mathbf{A}(a) =$ moh R, avšak pro $x \in \mathbf{A}(a)$ je moh $\mathbf{A}(x) \neq$ moh R, tedy moh $\mathbf{A}(x) \neq$ moh $\mathbf{A}(a)$. Tudíž množina $\mathbf{A}(a)$ je normálně uspořádána. Protože moh $\mathbf{A}(a) =$ $=$ moh R, existuje prosté zobrazení f množiny R na $\mathbf{A}(a)$. Jestliže pro $x \in R$, $y \in R$ x před y v novém smyslu $\Leftrightarrow f(x)$ před $f(y)$ ve starém smyslu, dostáváme normální uspořádání R.

3.6.3. Všecka normální uspořádání množiny R jsou si podobná. Nechť symboly R_1, R_2 znamenají množinu R ve dvou různých normálních uspořádáních. Mohutnost každého úseku množiny R_1 je různá od moh R a proto žádný úsek množiny R_1 není podobný s R_2. Stejně žádný úsek množiny R_2 není podobný s R_1. Tudíž R_1, R_2 jsou si podobné podle **3.4.6.**

Teorie dobrého uspořádání má důležité aplikace na nauku o mohutnostech. Jako v článku **2.3** uvažujme mohutnosti množin náležejících do dané soustavy $\mathfrak{M}$. Mohutnosti značíme malými gotickými písmeny.

Definice. Pro dvě mohutnosti $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ budeme definovat vztah „$\mathfrak{h}$ je *menší* než $\mathfrak{k}$“ neboli „$\mathfrak{k}$ je *větší* než $\mathfrak{h}$“, který zapisujeme $\mathfrak{h} < \mathfrak{k}$ nebo $\mathfrak{k} > \mathfrak{h}$. Za tím účelem zvolíme $H \in \mathfrak{M}$, $K \in \mathfrak{M}$ tak, že moh $H = \mathfrak{h}$, moh $K = \mathfrak{k}$. Potom $\mathfrak{h} < \mathfrak{k}$ znamená, že K obsahuje část mohutnosti $\mathfrak{h}$, ale H neobsahuje část mohutnosti $\mathfrak{k}$. Na bližší volbě H, K při tom nezáleží, jen když H, K mají dané mohutnosti. Rovněž tak se na významu vztahu $\mathfrak{h} < \mathfrak{k}$ nic nemění, nahradíme-li soustavu $\mathfrak{M}$ širší soustavou $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}$. Posléze pro konečné mohutnosti má vztah $\mathfrak{h} < \mathfrak{k}$ obvyklý smysl. Místo „$\mathfrak{h} < \mathfrak{k}$ nebo $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$“ píšeme stručně $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{k}$ (nebo $\mathfrak{k} \geqq \mathfrak{h}$). Ze **2.3.2** plyne:

3.7.1. Je-li $\mathfrak{h} =$ moh H, $\mathfrak{k} =$ moh K, pak vztah $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{k}$ znamená, že K obsahuje množinu mohutnosti $\mathfrak{h}$. Zejména tedy

$$H \subset K \Rightarrow \mathfrak{h} \leqq \mathfrak{k} . \tag{1}$$

Abychom prokázali účelnost zavedené definice, musíme dokázat, že

$$(\mathfrak{h}, \mathfrak{k}) \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow \mathfrak{h} < \mathfrak{k}$$

dává *uspořádání soustavy mohutností* všech množin soustavy $\mathfrak{M}$, tj. že jsou splněny axiomy [I$\mathfrak{O}$], [II$\mathfrak{O}$] a [III$\mathfrak{O}$] článku **3.1.** Toto uspořádání $\mathfrak{O}$ nazveme *přirozeným.*

I. Axiom [I$\mathfrak{O}$] je zřejmě splněn.

II. Dokažme [III$\mathfrak{O}$]. Budiž $\mathfrak{h} =$ moh H, $\mathfrak{k} =$ moh K, $\mathfrak{l} =$ moh L, $H \in \mathfrak{M}$, $K \in \mathfrak{M}$, $L \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{h} < \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} < \mathfrak{l}$, takže podle [I$\mathfrak{O}$] je $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{l}$. Protože $\mathfrak{h} < \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} < \mathfrak{l}$, obsahuje K část mohutnosti $\mathfrak{h}$ a L obsahuje část mohutnosti $\mathfrak{k}$. Z toho plyne, že L obsahuje část mohutnosti $\mathfrak{h} =$ moh H. Avšak H neobsahuje část mohutnosti $\mathfrak{l} =$ moh L, neboť jinak by bylo $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}$ podle **2.3.2.**

III. K důkazu platnosti [II$\mathfrak{O}$] je nezbytná věta **3.6.1.** Máme dokázat, že předpoklad „ani $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{k}$ ani $\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{h}$“ je nemožný. Je-li opět $\mathfrak{h} =$ moh H, $\mathfrak{k} =$ moh K, znamená tento předpoklad, že ani K neobsahuje část mohutnosti $\mathfrak{h}$, ani H neobsahuje část mohutnosti $\mathfrak{k}$. To je u dobře uspořádaných množin podle **3.4.6** nemožné a podle **3.6.1** můžeme předpokládat, že H, K jsou dobře uspořádány.

3.7.2. Množina K budiž normálně uspořádána. Pak je právě tehdy moh $H <$ moh K, jestliže moh H je rovna mohutnosti některého úseku množiny K.

Důkaz. I. Mohutnost kteréhokoli úseku K je podle **3.7.1** menší než $\mathfrak{k} =$ moh K, neboť podle definice normálního uspořádání nemůže tato mohutnost být rovna $\mathfrak{k}$.

II. Budiž $\mathfrak{h} =$ moh H, $\mathfrak{h} < \mathfrak{k}$. Podle **3.6.1** můžeme předpokládat, že H je dobře uspořádána. H není podobná K, neboť to by dalo $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$; také žádný úsek množiny H není podobný K, neboť to by podle **3.7.1** dalo $\mathfrak{h} \geqq \mathfrak{k}$. Tudíž podle **3.4.6** je H podobná úseku A množiny K, takže $\mathfrak{h} =$ moh A.

3.7.3. Přirozené uspořádání soustavy mohutností všech množin libovolně dané soustavy $\mathfrak{M}$ je dobré. Budiž $\emptyset \neq \mathfrak{C} \subset \mathfrak{M}$. Podle **3.7.1** stačí dokázat existenci takové $C \in \mathfrak{C}$, že každá $X \in \mathfrak{C}$ obsahuje část mohutnosti rovné moh C. Budiž S sjednocení všech množin soustavy $\mathfrak{C}$. Podle **3.6.2** můžeme předpokládat, že S je normálně uspořádána. Pro $X \in \mathfrak{C}$ je $X \subset S$, tedy moh $X \leqq$ moh S podle **3.7.1**. Budiž T množina všech těch $s \in S$, pro něž mohutnost úseku $\mathbf{A}(s)$ množiny S je při některé $X \in \mathfrak{C}$ rovna moh X. Je-li $T = \emptyset$, pak podle **3.7.2** je moh $X =$ moh S pro každou $X \in \mathfrak{C}$ a $C \in \mathfrak{C}$ lze zvolit libovolně. Je-li $T \neq \emptyset$, zvolíme $C \in \mathfrak{C}$ tak, aby bylo moh $C =$ moh $\mathbf{A}(a)$, kde a je první prvek množiny T. Ze **3.7.2** plyne, že C má žádanou vlastnost.

3.7.4. Pro každou mohutnost $\mathfrak{m}$ je $\mathfrak{m} < \exp \mathfrak{m}$. Neboť $\mathfrak{m} \leqq \exp \mathfrak{m}$ podle **3.7.1** a $\mathfrak{m} = \exp \mathfrak{m}$ je podle **2.3.3** vyloučeno.

3.7.5. Pro každou nekonečnou mohutnost $\mathfrak{m}$ je $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Plyne z **2.2.8.**

Existují mohutnosti větší než $\aleph_0$, např. $\exp \aleph_0$. Ze **3.7.3** plyne, že existuje nejmenší taková mohutnost. Je jednoznačně určena a zavedeme pro ni označení $\aleph_1$. Tedy:

3.7.6. Jest $\aleph_0 < \aleph_1$. Pro každou nekonečnou mohutnost $m \neq \aleph_0$ jest $m \geqq \aleph_1$.

Hypothesa

$$\aleph_1 = \exp \aleph_0$$

se nazývá *hypothesa kontinua*. Nebyla dosud ani dokázána ani vyvrácena, ale Gödel dokázal, že úvahy předpokládající její správnost nemohou vést ke sporu.

3.7.7. Nekonečná množina R budiž normálně uspořádána. Pak R nemá poslední prvek. Je-li a poslední prvek, pak jím určený úsek je $A(a) = R - (a)$, takže podle **2.2.10** je moh $A(a)$ = moh R, a to je spor.

3.7.8. Pro každou nekonečnou množinu R je moh $(R \times R) =$ = moh R.

Důkaz. I. Podle **3.6.2** předpokládejme, že R je normálně uspořádána, takže podle **3.7.2** je moh $A <$ moh R pro každý její úsek A.

II. Z **3.5.1** a **3.7.3** plyne snadno, že při důkazu můžeme předpokládat, že moh $(S \times S)$ = moh S pro každou nekonečnou $S \subset R$, pro kterou je moh $S <$ moh R. Tedy pro každý úsek A množiny R platí, že buďto A je konečná množina nebo moh $(A \times A)$ = moh A.

III. Pro $(x, y) \in R \times R$ budiž

$$\mu(x, y) = y, \text{ leží-li } x \text{ před } y\,; \quad \text{jinak } \mu(x, y) = x\,.$$

Zavedeme jakékoli předběžné dobré uspořádání W_1 množiny $R \times R$ (podle **3.6.1**) a zavedeme nové její dobré uspořádání W_2 takto:

$$(x_1, y_1) \text{ před } (x_2, y_2) \text{ vzhledem k } W_2$$

znamená, že je buďto $\mu(x_1, y_1)$ před $\mu(x_2, y_2)$ nebo je současně

$$\mu(x_1, y_1) = \mu(x_2, y_2)\,; \quad (x_1, y_1) \text{ před } (x_2, y_2) \text{ vzhledem k } W_1\,.$$

Snadno se zjistí, že W_2 skutečně je dobré uspořádání množiny $R \times R$.

IV. Budiž U prvkem $(x, y) \in R \times R$ určený úsek množiny $R \times R$ (vzhledem k W_2). Dokážeme, že moh $U <$ moh R. Podle **3.7.7** existuje takový $a \in R$, že jím určený úsek A množiny R obsahuje oba prvky x, y. Potom z definice W_2 plyne, že $U \subset A \times A$. Podle II je množina $A \times A$ buďto konečná nebo moh $(A \times A)$ = moh A, takže v každém případě je moh $(A \times A) <$ moh R a podle (1) na str. 45 též moh $U <$ $<$ moh R.

V. Kdyby nebylo moh $(R \times R) =$ moh R, pak by podle **3.7.1** bylo moh $R <$ moh $(R \times R)$. Ze IV by pak plynulo, že W_2 by bylo normální uspořádání množiny $R \times R$, načež by podle **3.7.2** měla $R \times R$ úsek mohutnosti moh R a to je spor proti IV.

3.7.9. Budiž $\mathfrak{m}$ nekonečná mohutnost. Budiž $n \in \mathbf{N}$. Pro $1 \leqq i \leqq n$ budiž moh $R_i \leqq \mathfrak{m}$. Pak také kartézský součin $\mathfrak{P}_{i=1}^{n} R_i$ má mohutnost $\leqq \mathfrak{m}$. Obecný případ se převede indukcí na případ $n = 2$. Je-li $\mathfrak{m} =$ moh R, pak podle **3.7.1** je moh $(R_1 \times R_2) \leqq$ $\leqq$ moh $(R \times R)$, takže podle **3.7.8** je moh $(R_1 \times R_2) \leqq \mathfrak{m}$.

3.7.10. Budiž $\mathfrak{m}$ nekonečná mohutnost. Budiž $\emptyset \neq \mathbf{C}$, moh $\mathbf{C} \leqq$ $\leqq \mathfrak{m}$. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž moh $\mathbf{A}(z) \leqq \mathfrak{m}$. Pak také sjednocení $S = \bigcup \mathbf{A}(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ má mohutnost $\leqq \mathfrak{m}$. Je-li moh $R = \mathfrak{m}$, zjistí se snadno, že existuje prosté zobrazení S do $R \times R$; pak užijeme **3.7.1** a **3.7.8.**

3.7.11. Budiž R nekonečná množina a budiž $\mathfrak{S}$ soustava všech jejích konečných částí. Pak je moh $\mathfrak{S} =$ moh R. Jest $\mathfrak{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_{n-1}$, kde $\mathfrak{K}_{n-1}$ je soustava všech těch částí R, které obsahují každá právě $n - 1$ prvků. Pro $n > 1$ se snadno najde prosté zobrazení množiny $\mathfrak{K}_{n-1}$ do kartézského součinu $\mathfrak{P}_{i=1}^{n} R_i$ (kde $R_i = R$ pro všecka i). Podle **3.7.1** a **3.7.9** je tedy moh $\mathfrak{K}_{n-1} \leqq$ moh R, což platí ovšem i pro $n = 1$. Protože také $\aleph_0 \leqq$ moh R, je moh $\mathfrak{S} \leqq$ moh R podle **3.7.10.** Avšak $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{K}_1$, moh $\mathfrak{K}_1 =$ moh R, tedy moh $\mathfrak{S} \geqq$ moh R, takže moh $\mathfrak{S} =$ $=$ moh R.

3.8. Konfinalita

Definice. Budiž $R \neq \emptyset$ uspořádaná množina. Nazveme *konfinální* s R takovou $S \subset R$, že ke každému $x \in R$ existuje $y \in S$, pro které je buďto $y = x$ nebo x před y. Má-li R poslední prvek a, pak $S \subset R$ je konfinální s R právě tehdy, jestliže $a \in S$. Nemá-li $R \neq \emptyset$ poslední prvek, pak $S \subset R$ je konfinální s R právě tehdy, jestliže za každým $x \in R$ je nějaký $y \in S$. Množinu $\emptyset$, a jen tuto množinu, považujeme za konfinální s $\emptyset$.

Vždy je R konfinální s R. Je-li S konfinální s R a je-li T konfinální s S, je také T konfinální s R. Je-li $S \subset T \subset R$ a je-li S konfinální s R, je S konfinální s T a T je konfinální s R.

3.8.1. Budiž R uspořádaná množina mohutnosti $\mathfrak{m}$. Pak existuje s R konfinální $S \subset R$ s těmito vlastnostmi: S je dobře uspořádána (jestliže uspořádání S je určeno uspořádáním R). Je-li T normálně uspořádaná množina mohutnosti $\mathfrak{m}$ (taková T existuje podle **3.6.2**), pak S je podobná buďto s T nebo s nějakým úsekem množiny T. (Podle **3.6.3** nezáleží na bližší volbě množiny T.)

Důkaz. I. Můžeme předpokládat (pouze pro větší jasnost důkazu), že $R \neq \emptyset$ a že R a T jsou disjunktní. Protože moh T = moh R, existuje prosté zobrazení f množiny R na T. Definujme $S \subset R$ takto:

$$S = \mathscr{E}_x \; [y \in R, \; f(y) \text{ před } f(x) \Rightarrow y \text{ před } x] \,.$$

Je jasné, že zúžení $f \mid S$ je podobným zobrazením S na $f^1(S) \subset T$. Jakožto část T je $f^1(S)$ dobře uspořádaná; podle **3.4.7** je $f^1(S)$ podobná buďto s T nebo s úsekem T. Protože zobrazení $f \mid S$ je podobné, je také S dobře uspořádaná a podobná buďto s T nebo s úsekem T. Je-li c ten prvek množiny R, pro který je $f(c)$ první prvek množiny T, je zřejmě $c \in S$; tudíž $S \neq \emptyset$.

II. Zbývá ukázat, že S je konfinální s R. Budiž M množina těch $x \in R$, pro které: $y \in S \Rightarrow x$ za y. Máme dokázat, že $M = \emptyset$. Je-li však $M \neq \emptyset$, pak v množině $f^1(M) \subset T$ existuje první prvek; nechť pro $a \in M$ je $f(a)$ první v $f^1(M)$. Protože $a \in M$, je

$$y \in S \Rightarrow a \text{ za } y \Rightarrow a \neq y \,,$$

tj. $a \in R - S$. Tudíž podle definice S existuje takové $z \in R$, že je sice $f(z)$ před $f(a)$, avšak z za a. Protože $f(a)$ je první v $f^1(M)$ a protože je $f(z)$ před $f(a)$, je $z \in R - M$, takže existuje $y \in S$, pro které je buďto $y = z$ nebo je y za z. Protože z leží za a, leží také y za a a to je spor, neboť $a \in M$, $y \in S$.

Definice. Uspořádaná množina R se nazývá *regulárně uspořádaná*, jestliže R je dobře uspořádána a každá s R konfinální část R je podobná s R.

3.8.2. Každá regulárně uspořádaná množina R je normálně uspořádána. Budiž R regulárně uspořádána a budiž T normálně uspořádaná množina mohutnosti moh R (viz **3.6.2**). Stačí dokázat, že R je podobná s T. Podle **3.8.1** existuje s R konfinální $S \subset R$ podobná buďto s T nebo s úsekem T. Podle definice regulárního uspořádání je S podobná s R, takže R je podobná buďto s T nebo s úsekem T; druhá možnost by však podle **3.7.2** dala spor moh $R <$ moh T. Tudíž R je podobná s T.

3.8.3. Budiž R uspořádaná množina. Existuje s R konfinální část, která je (ve svém uspořádání určeném daným uspořádáním R) regulárně uspořádána. Každé dvě takové části R jsou si podobné.

Důkaz. I. Předpokládejme, že žádná s R konfinální část R není regulárně uspořádána. Podle **3.8.1** existuje s R konfinální dobře uspořádaná $T \subset R$. Podle předpokladu T nemůže být regulárně uspořádána, takže existuje s T konfinální $S \subset T$, které není podobná s T. Množina S je konfinální také s R. Podle **3.4.7** je S podobná s úsekem T. Je tedy $M \neq \emptyset$, znamená-li M množinu těch $x \in T$, pro které existuje s úsekem $\mathbf{A}(x)$ množiny T podobná a s R konfinální část T.

II. Zvolme nyní množinu $T_0 \subset T$ konfinální s R tak, že T_0 je podobná s $\mathbf{A}(a)$, kde a je první v M. Opakujeme-li pro T_0 úsudek provedený v I pro T, dostaneme, že existuje s R konfinální $S_0 \subset T_0$ (tedy $S_0 \subset T$), která je podobná s nějakým úsekem množiny T_0. Protože však T_0 je podobná s úsekem $\mathbf{A}(a)$ množiny T, je S_0 podobná s úsekem $\mathbf{A}(b)$ množiny T, kde b leží v T před a. Potom je však $b \in M$ a to je nemožné, neboť a je první v M.

III. Nechť S_1, S_2 jsou dvě regulárně uspořádané s R konfinální části R. Máme dokázat, že S_1, S_2 jsou si podobné. Případ $R = \emptyset$ je triviální ($S_1 = \emptyset = S_2$); rovněž tak případ, kdy R má poslední prvek c [$S_1 = (c) = S_2$]. Vyloučíme-li tyto triviální případy, jsou S_1, S_2 zřejmě nekonečné. Položme $\mathfrak{s}_1 =$ moh S_1, $\mathfrak{s}_2 =$ moh S_2; při tom můžeme předpokládat $\mathfrak{s}_2 \leqq \mathfrak{s}_1$. Protože $S_1 \subset R$, $S_2 \subset R$ jsou dobře uspořádány, je patrně také $S_1 \cup S_2$ dobře uspořádána (ve svém uspořádání určeném daným uspořádáním R). Ze **3.7.10** soudíme, že moh $(S_1 \cup S_2) = \mathfrak{s}_1$. Je-li A libovolný úsek $S_1 \cup S_2$, dokáže se snadno (viz **3.4.5** a definici konfinality), že $A = A_1 \cup A_2$, kde A_i $(i = 1, 2)$ znamená úsek S_i. Protože S_i je regulárně uspořádána, je moh $A_i \neq$ moh S_i, tedy moh $A_i < \mathfrak{s}_i \leqq \mathfrak{s}_1$. Podle **3.7.1** a **3.7.10** je potom také moh $A < \mathfrak{s}_1 =$ $=$ moh $(S_1 \cup S_2)$. Protože A byl libovolný úsek $S_1 \cup S_2$, je tato množina normálně uspořádána. Podle **3.8.2** také S_1 je normálně uspořádána. Protože moh $(S_1 \cup S_2) =$ moh S_1, soudíme ze **3.6.3**:

(1) $$S_1 \cup S_2 \text{ je podobná s } S_1\,.$$

Protože S_1 je regulárně uspořádána, je tedy také $S_1 \cup S_2$ regulárně uspořádána. Protože $S_2 \subset (S_1 \cup S_2) \subset R$ je konfinální s R, je S_2 konfinální s regulárně uspořádanou $S_1 \cup S_2$, takže $S_1 \cup S_2$ je podobná s S_2. Tudíž podle (1) S_1, S_2 si jsou podobné.

Definice. Mohutnost $\mathfrak{m}$ se nazývá *regulární*, existuje-li regulárně uspořádaná množina mohutnosti $\mathfrak{m}$; jinak je $\mathfrak{m}$ *iregulární*.

3.8.4. Jsou právě dvě konečné regulární mohutnosti, totiž 0 a 1.

3.8.5. Nechť M je normálně uspořádána a nechť moh M je regulární. Pak M je regulárně uspořádána. To plyne ze **3.6.3** a **3.8.2.**

3.8.6. Nechť $\mathfrak{m}$ je mohutnost nekonečné množiny M. Právě tehdy je $\mathfrak{m}$ iregulární, jestliže existuje množina $\mathbf{C} \neq \emptyset$ a pro každé $z \in \mathbf{C}$ taková množina $A(z)$, že

[1] $M = \bigcup A(z)$ $(z \in \mathbf{C})$;
[2] moh $\mathbf{C} < \mathfrak{m}$;
[3] $z \in \mathbf{C} \Rightarrow$ moh $A(z) < \mathfrak{m}$.

Důkaz. I. Podle **3.6.2** můžeme předpokládat, že M je normálně uspořádána.

II. Je-li $\mathfrak{m}$ regulární, pak podle **3.8.5** je M regulárně uspořádána. Budiž $M = \bigcup A(z)$ $(z \in \mathbf{C})$, moh $\mathbf{C} < \mathfrak{m}$, $z \in \mathbf{C} \Rightarrow$ moh $A(z) < \mathfrak{m}$. Podle definice regulárního uspořádání není žádná $A(z)$ konfinální s M. Z toho plyne, že existuje takové zobrazení f množiny $\mathbf{C}$ do M, že:

$$(2) \qquad z \in \mathbf{C}, \quad x \in A(z) \Rightarrow x \text{ před } f(z) .$$

Avšak moh $f^1(\mathbf{C}) \leqq$ moh $\mathbf{C} < \mathfrak{m}$, takže podle definice regulárního uspořádání není $f^1(\mathbf{C})$ konfinální s M, a tedy existuje takové $x \in M$, že

$$z \in \mathbf{C} \Rightarrow f(z) \text{ před } x .$$

Jelikož $M = \bigcup A(z)$ $(z \in \mathbf{C})$, je to spor proti (2).

III. Je-li $\mathfrak{m}$ iregulární, není M regulárně uspořádána. Tedy existuje s M konfinální množina $C \subset M$, která není podobná s M. Podle **3.4.7** je C podobná s nějakým úsekem M. Podle I nemá žádný úsek M mohutnost rovnou $\mathfrak{m}$, takže podle **3.7.1** je mohutnost každého úseku množiny M menší než $\mathfrak{m}$. Zejména je moh $C < \mathfrak{m}$ a pro každé $z \in C$ je moh $A(z) < \mathfrak{m}$, kde $A(z)$ je úsek M určený prvkem z. Protože však M nemá poslední prvek a protože C je konfinální s M, je $M = \bigcup A(z)$ $(z \in C)$.

3.8.7. Budiž $\mathfrak{m}$ nekonečná mohutnost. Jestliže $\mathfrak{m} = \aleph_0$ nebo jestliže existuje mohutnost $\mathfrak{h} < \mathfrak{m}$, která je největší ze všech mohutností menších než $\mathfrak{m}$, pak $\mathfrak{m}$ je regulární. Zvolme množinu M mohutnosti $\mathfrak{m}$. Nechť $\mathbf{C} \neq \emptyset$, moh $\mathbf{C} < \mathfrak{m}$ a nechť pro každé $z \in \mathbf{C}$ je $A(z) \subset M$, moh $A(z) < \mathfrak{m}$. Množina $\bigcup A(z)$ je pro $\mathfrak{m} = \aleph_0$ konečná a pro $\mathfrak{m} \neq \aleph_0$ její mohutnost je podle **3.7.10** $\leqq \mathfrak{h}$, tedy $< \mathfrak{m}$. Tudíž

$$M \neq \bigcup A(z) \quad (z \in \mathbf{C})$$

a ze **3.8.6** plyne, že $\mathfrak{m}$ je regulární.

3.9. Zornovo lemma

Množinu R nazveme *částečně uspořádanou*, je-li dána množina: $\mathfrak{D} \subset R \times R$ splňující axiomy [I$\mathfrak{D}$] a [III$\mathfrak{D}$] vyslovené v článku **3.1**; při tom nemusí platit axiom [II$\mathfrak{D}$]. Je-li R částečně uspořádána a je-li $S \subset R$, je také S částečně uspořádána. Může se stát, že S je dokonce uspořádána, tj. že pro prvky množiny S je splněn také axiom [II$\mathfrak{D}$]; pro větší jasnost pak řekneme, že S je *lineárně uspořádaná* část R.

Je-li $S \neq \emptyset$ libovolná podmnožina částečně uspořádané množiny R, pak se může stát, že v R existuje *horní odhad* množiny S, tj. že existuje (aspoň jedno) takové $a \in R$, že

$$x \in S\,, \quad x \neq a \Rightarrow x \text{ před } a\,.$$

3.9.1. Budiž $R \neq \emptyset$ částečně uspořádaná množina. Nechť ke každé lineárně uspořádané $S \subset R$, $S \neq \emptyset$ existuje v R horní odhad. Pak v R existuje aspoň jeden „maximální" prvek, tj. takové $a \in R$, že pro žádné $x \in R$ není a před x.

Důkaz. I. Nechť naopak ke každému $a \in R$ existuje aspoň jedno takové $b \in R$, že je a před b. Užijeme věty **3.5.3** k tomu, abychom každému pořadovému číslu α přiřadili určitý prvek $f(\alpha)$ množiny R. Nejprve zvolíme $f(0) \in R$ libovolně. Je-li za druhé $\xi = \eta + 1$ isolované pořadové číslo a je-li $f(\eta) \in R$ už zvolen, zvolíme $f(\xi) \in R$ tak, aby prvek $f(\eta)$ ležel před prvkem $f(\xi)$. Je-li konečně ξ limitní pořadové číslo a jsou-li prvky $f(\eta) \in R$ už zvoleny pro všecka $\eta < \xi$, pak jestliže množina M všech těchto $f(\eta)$ je lineárně uspořádaná, zvolíme za $f(\xi)$ některý horní odhad této množiny; protože ξ je limitní, je zřejmě $f(\eta)$ před $f(\xi)$ pro každé $\eta < \xi$. Jestliže množina výše označená M není lineárně uspořádaná, pak zvolíme $f(\xi) \in R$ libovolně. Avšak pomocí věty **3.5.1** se snadno dokáže, že pro každé pořadové číslo α je $f(\xi)$ před $f(\alpha)$ pro každé $\xi < \alpha$, takže M je vždy lineárně uspořádaná.

II. Je tedy $f(\alpha) \neq f(\beta)$ pro $\alpha \neq \beta$, takže pro každé pořadové číslo α je mohutnost množiny $F(\alpha)$ všech $f(\xi)$, $\xi < \alpha$ rovna moh $W(\alpha) =$ $=$ moh α. Avšak podle **3.6.2** a **3.7.4** mohu α zvolit tak, že moh $\alpha >$ $>$ moh R, tedy moh $F(\alpha) >$ moh R, což je spor proti **3.7.1**, neboť $F(\alpha) \subset R$.

Věta **3.9.1** se nazývá obyčejně *Zornovo lemma*. Dokázali jsme ji užitím věty **3.5.3.** Význam věty **3.9.1** je v tom, že velmi mnohé věty z různých oborů matematiky, které se dříve dokazovaly užitím věty **3.5.3**, dají se užitím věty **3.9.1** dokázat jednodušeji.

3.9.2. Budiž $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ taková soustava podmnožin množiny R, že ke každé $X \in \mathfrak{M}$ existuje $h(X) \in \mathfrak{M}$, pro kterou je $X \subset h(X) \neq$ $\neq X$. Pak existuje taková neprázdná monotónní soustava $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, že sjednocení $\bigcup_X (X \in \mathfrak{M}_0)$ nenáleží do $\mathfrak{M}$. Nechť naopak pro každou monotónní soustavu $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0 \neq \emptyset$ sjednocení $S(\mathfrak{M}_0)$ všech $X \in \mathfrak{M}_0$ náleží do $\mathfrak{M}$. Pro $X \in \mathfrak{M}$, $Y \in \mathfrak{M}$ budiž

$$X \text{ před } Y \Leftrightarrow X \subset Y \neq X\,. \tag{1}$$

Tím je patrně definováno částečně uspořádání soustavy $\mathfrak{M}$, při kterém lineárně uspořádanými podsoustavami jsou zřejmě monotónní soustavy $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$. Pro každou takovou $\mathfrak{M}_0 \neq \emptyset$ je však $S(\mathfrak{M}_0)$ zřejmě horním odhadem, takže podle **3.9.1** existuje „maximální" $X \in \mathfrak{M}$. To je však nemožné, neboť podle definice je X před $h(X)$.

3.9.3. B u d i ž $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ t a k o v á s o u s t a v a p o d m n o ž i n m n o ž i n y R, ž e k e k a ž d é $X \in \mathfrak{M}$ e x i s t u j e $h(X) \in \mathfrak{M}$, p r o k t e r o u j e $X \supset h(X) \neq X$. P a k e x i s t u j e t a k o v á n e p r á z d n á m o n o t ó n n í s o u s t a v a $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, ž e p r ů n i k $\bigcap X$ $(X \in \mathfrak{M}_0)$ n e n á l e ž í d o $\mathfrak{M}$. Dokáže se stejně jako **3.9.2** s tím rozdílem, že místo předpisu (1) přijde předpis

$$X \text{ před } Y \Leftrightarrow X \supset Y \neq X\,.$$

Ostatně věta **3.9.3** pro soustavu $\mathfrak{M}$ je zřejmě ekvivalentní s větou **3.9.2** pro soustavu všech množin $R - X$, $X \in \mathfrak{M}$.

3.10. Cvičení k § 3

3.10.1. Je-li množina M konečná, pak má $n!$ uspořádání, kde $n = \text{moh}\, M$. Všecka tato uspořádání si jsou podobná.

3.10.2. Soustava všech uspořádání spočetné množiny má mohutnost $\exp \aleph_0$.

3.10.3. Kartézský součin $R_1 \times R_2$ dvou uspořádaných množin R_1, R_2 můžeme uspořádat pravidlem:

$$(x_1, y_1) \text{ před } (x_2, y_2) \Leftrightarrow \text{buďto } x_1 \text{ před } x_2 \text{ nebo současně } x_1 = x_2,\ y_1 \text{ před } y_2\,.$$

Jsou-li obě množiny R_1, R_2 dobře uspořádány, platí totéž o $R_1 \times R_2$; obrácení je správné, je-li $R_1 \neq \emptyset \neq R_2$. Obecněji při dobře uspořádané $\mathbf{C} \neq \emptyset$ můžeme z daných uspořádání množin $R(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ odvodit uspořádání množiny $\mathfrak{P}R(z)$ $(z \in \mathbf{C})$, které je dobré, jestliže všecka daná uspořádání jsou dobrá.

3.10.4. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$ uspořádaná množina; pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $A(z) \neq \emptyset$ uspořádaná množina. Jestliže soustava množin $A(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ je disjunktní, pak její sjednocení M můžeme uspořádat tímto pravidlem. Je-li $x_1 \in M$, $x_2 \in M$,

$x_1 \in A(z_1)$, $x_2 \in A(z_2)$, pak „x_1 před x_2" znamená, že buďto je z_1 před z_2 nebo je $z_1 = z_2$ a současně v množině $A(z_1)$ leží x_1 před x_2. Takto získané uspořádání množiny M je dobré právě tehdy, jestliže dané uspořádání množiny $\mathbf{C}$ je dobré a současně také pro každé $z \in \mathbf{C}$ dané uspořádání množiny $A(z)$ je dobré.

3.10.5. Budiž R hustě uspořádaná množina; budiž $S \subset R$ spočetná množina. Jestliže $a \in R$ leží před $b \in R$, pak nechť vždy nějaké $c \in S$ leží mezi a a b. Pak existuje podobné zobrazení f množiny R na (přirozeně uspořádanou) část množiny $\mathbf{E}_1$. Jestliže v R neexistuje ani první ani poslední prvek, je možné zvolit f tak, aby $f^1(S)$ byla množina všech racionálních čísel. Jestliže mimo to v R neexistují mezery, je možné zvolit f tak, aby bylo $f^1(R) = \mathbf{E}_1$ a aby $f^1(S)$ byla množina všech racionálních čísel.

3.10.6. Nechť α, β jsou daná pořadová čísla, $\alpha < \beta$; nechť ξ je hledané pořadové číslo. Rovnice $\alpha + \xi = \beta$ má vždy právě jedno řešení. Při konečném α má rovnice $\xi + \alpha = \beta$ nejvýš jedno řešení. Jestliže rovnice $\xi + \alpha = \beta$ má při nekonečném α řešení ξ_0, pak při libovolném $n \in \mathbf{N}$ také $\xi = \xi_0 + n$ je řešením téže rovnice a všecka tato řešení jsou navzájem různá.

Jsou-li α, β dva typy, zvolme R_1, R_2 tak, že typ $R_1 = \beta$, typ $R_2 = \alpha$ a označme $\alpha\beta$ typ množiny $R_1 \times R_2$ uspořádané podle pravidla vysloveného ve **3.10.3.** Jsou-li α, β pořadová čísla (tj. typy *dobře uspořádaných* množin), pak podle **3.10.3** také $\alpha\beta$ je pořadové číslo.

3.10.7. Budiž $\mathbf{C} \neq \emptyset$ uspořádaná množina typu β; pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $A(z)$ uspořádaná množina. Soustava množin $A(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ budiž disjunktní a všecky množiny $A(z)$ buďtež téhož typu α. Jestliže množinu $M = \bigcup A(z)(z \in \mathbf{C})$ uspořádáme podle pravidla vysloveného ve **3.10.4**, pak typ $M = \alpha\beta$.

3.10.8. Pro libovolné typy α, β, γ platí $0\alpha = \alpha 0 = 0$, $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$, $(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*$. Avšak typy $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ mohou být navzájem různé. Např. pro všecka $n \in \mathbf{N}$ je $n\omega = \omega$, ale typy ωn jsou všecky navzájem různé.

3.10.9. Znamená-li λ typ množiny $\mathbf{E}_1$ v jejím přirozeném uspořádání, je pro všecka $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}(1 + \lambda)\, n &= (1 + \lambda)\, \omega = 1 + \lambda\,,\\ (\lambda + 1)\, n &= (\lambda + 1)\, \omega^* = \lambda + 1\,,\\ (\lambda + 1)\, \omega &= (1 + \lambda)\, \omega^* = \lambda\,.\end{aligned}$$

3.10.10. Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ pořadová čísla a je-li $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta > 0$, je $\beta\alpha_1 < \beta\alpha_2$; nelze však tvrdit, že $\alpha_1\beta < \alpha_2\beta$, nýbrž pouze že $\alpha_1\beta \leqq \alpha_2\beta$.

3.10.11. Součin $\alpha\beta$ pořadových čísel α, β můžeme definovat transfinitní indukcí (viz **3.5.3**) takto: [1] $\alpha 0 = 0$, [2] $\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha$, [3] pro každé limitní pořadové číslo β je $\alpha\beta$ nejmenší pořadové číslo větší než všecka pořadová čísla $\alpha\xi$ $(\xi < \beta)$.

Jsou-li μ, α pořadová čísla, pak μ^α je pořadové číslo definované takto (viz 3.5.3): $0^0 = 1$, $0^\alpha = 0$ pro $\alpha > 0$, $1^\alpha = 1$ pro všecka α; $\mu^0 = 1$ pro všecka μ; $\mu^{\alpha+1} = \mu^\alpha \cdot \mu$; je-li β limitní pořadové číslo a je-li $\mu > 1$, pak μ^α je nejmenší pořadové číslo větší než všecka pořadová čísla μ^ξ ($\xi < \alpha$).

3.10.12. Pro libovolná pořadová čísla μ, α, β je $\mu^\alpha\mu^\beta = \mu^{\alpha+\beta}$, $(\mu^\alpha)^\beta = \mu^{\alpha\beta}$.

3.10.13. Jsou-li μ_1, μ_2 pořadová čísla a je-li $\mu_1\mu_2 = \mu_2\mu_1$, pak pro všecka pořadová čísla α je $\mu_1^\alpha\mu_2^\alpha = \mu_2^\alpha\mu_1^\alpha$.

3.10.14. Jsou-li μ, α, β pořadová čísla a je-li $\alpha < \beta$, $\mu > 1$, jest $\mu^\alpha < \mu^\beta$.

3.10.15. Přiřaďme každému pořadovému číslu α pořadové číslo $f(\alpha)$ tak, aby byly splněny tyto dvě vlastnosti: [1] $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$; [2] je-li α limitní číslo, pak $f(\alpha)$ je nejmenší pořadové číslo větší než všecka pořadová čísla $f(\xi)$, kde ξ probíhá pořadová čísla $< \alpha$. Pak pro každé pořadové číslo α je $f(\alpha) \geqq \alpha$ a ke každému pořadovému číslu α existuje takové pořadové číslo $\beta > \alpha$, že $f(\beta) = \beta$.

3.10.16. Zvolme pořadové číslo μ a položme $f(\alpha) = \mu + \alpha$ pro každé pořadové číslo α. Pak jsou splněny vlastnosti [1] a [2] vyslovené ve 3.10.15. Jest $f(\alpha) = \alpha$ právě tehdy, jestliže $\alpha \geqq \mu\omega$.

3.10.17. Zvolme pořadové číslo $\mu > 0$ a položme $f(\alpha) = \mu\alpha$ pro každé pořadové číslo α. Pak jsou splněny vlastnosti [1] a [2] vyslovené ve 3.10.15, takže existuje nekonečně mnoho takových α, že $f(\alpha) = \alpha$. Určete nejmenší taková α pro $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = \omega$.

3.10.18. Zvolme pořadové číslo $\mu > 1$ a položme $f(\alpha) = \mu^\alpha$ pro každé pořadové číslo α. Pak jsou splněny vlastnosti [1] a [2] vyslovené ve 3.10.15.

3.10.19. Zvolme pořadové číslo $\mu > 1$ a položme $f(\alpha) = \alpha + \mu$ nebo $f(\alpha) = \alpha\mu$ nebo $f(\alpha) = \alpha^\mu$. Pak nejsou splněny vlastnosti [1] a [2] vyslovené ve 3.10.15.

3.10.20. Nechť množina R má aspoň dva prvky. Budiž dána množina $\mathfrak{M} \subset R \times R \times R$ s těmito vlastnostmi.

[1] $(a, c, b) \in \mathfrak{M} \Rightarrow a \neq b$.
[2] $(a, c, b) \in \mathfrak{M} \Rightarrow (b, c, a) \in \mathfrak{M}$.
[3] $(a, c, b) \in \mathfrak{M} \Rightarrow a \neq c$.
[4] $(a, d, c) \in \mathfrak{M}$, $(a, c, b) \in \mathfrak{M} \Rightarrow (a, d, b) \in \mathfrak{M}$.
[5] $(a, d, c) \in \mathfrak{M}$, $(d, c, b) \in \mathfrak{M} \Rightarrow (a, c, b) \in \mathfrak{M}$.
[6] $(a, x, b) \in \mathfrak{M}$, $(a, y, b) \in \mathfrak{M}$, $x \neq y \Rightarrow$ buďto $(a, x, y) \in \mathfrak{M}$ nebo $(a, y, x) \in \mathfrak{M}$.
[7] $(a, c, x) \in \mathfrak{M}$, $(a, c, y) \in \mathfrak{M}$, $x \neq y \Rightarrow$ buďto $(c, x, y) \in \mathfrak{M}$ nebo $(c, y, x) \in \mathfrak{M}$.
[8] $a \neq b \neq c \neq a \Rightarrow$ buďto $(a, b, c) \in \mathfrak{M}$ nebo $(b, c, a) \in \mathfrak{M}$ nebo $(c, a, b) \in \mathfrak{M}$.

Pak existují právě dvě taková uspořádání množiny R, že $(a, c, b) \in \mathfrak{M}$ je nutnou a postačující podmínkou toho, aby c ležel mezi a a b. Tato dvě uspořádání jsou navzájem inversní.

3.10.21. Zůstane výsledek cvičení 3.10.6 správným, jestliže některou z vlastností [1] až [8] vynecháme?