## § 2. SPOČETNÉ MNOŽINY. MOHUTNOSTI

### 2.1. Posloupnosti

Množinu všech celých kladných čísel 1, 2, 3, ... označíme $\mathbf{N}$.

Zobrazení množiny $\mathbf{N}$ (do jakékoli množiny) nazýváme *posloupnost*. Hodnotu zobrazení v čísle $n$ značíme obyčejně $a_n$ (nebo $b_n$, $\alpha_n$, $A_n$ apod.) a nazýváme ji *n-tým členem* posloupnosti. Celou posloupnost pak značíme

$$\{a_n\} \quad \text{nebo} \quad \{a_n\}_1^\infty \quad \text{nebo} \quad \{a_n\}_{n=1}^\infty .$$

Posloupnost $\{a_n\}$ je prostá (viz článek **1.3**), jestliže

$$m \in \mathbf{N}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad m \neq n \Rightarrow a_m \neq a_n .$$

Často se vyskytují *posloupnosti množin* $\{A_n\}$, jejichž členy jsou množiny. Posloupnost množin $\{A_n\}$ je *disjunktní* (viz článek **1.4**), jestliže

$$m \in \mathbf{N}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad m \neq n \Rightarrow A_m \cap A_n = \emptyset .$$

Je-li $\{i_n\}$ *rostoucí* posloupnost přirozených čísel (tj. je-li $i_n \in \mathbf{N}$, $i_n < i_{n+1}$) a je-li $\{a_n\}$ jakákoli posloupnost, nazýváme $\{a_{i_n}\}_{n=1}^\infty$ *posloupností vybranou* z posloupnosti $\{a_n\}$. Posloupnost vybraná z posloupnosti vybrané z posloupnosti $\{a_n\}$ je zase vybrána z posloupnosti $\{a_n\}$.

Aby posloupnost $\{a_n\}$ byla jednoznačně definována, stačí: [1] udat její první člen $a_1$, [2] udat předpis určující $a_{n+1}$ za předpokladu, že členy $a_1, \ldots, a_n$ jsou již známy. Mluvíme pak o *rekurentní definici* posloupnosti.

Dosud uvažované posloupnosti nazýváme určitěji *nekonečnými posloupnostmi*. *Konečná posloupnost* je zobrazení množiny všech celých kladných čísel $\leq p$ (do jakékoli množiny), kde $p \in \mathbf{N}$ je dáno; označení $\{a_n\}_1^p$ a pod. Slovem posloupnost bez dalšího dodatku budeme vždy rozumět nekonečnou posloupnost.

Množina $A$ se nazývá *konečná*, jestliže buďto $A = \emptyset$ nebo $A$ je množina hodnot nějaké konečné posloupnosti; $A$ je *nekonečná*, jestliže není konečná. Množina $A$ se nazývá *spočetná*, je-li množinou hodnot prosté nekonečné posloupnosti, tj. existuje-li prosté zobrazení množiny $\mathbf{N}$ na množinu $A$. Podle naší definice každá spočetná množina je nekonečná; množinu $A$ nazveme *nejvýš spočetnou*, je-li buďto konečná nebo spočetná; množinu $A$ nazveme *nespočetnou*, není-li nejvýš spočetná, tj. je-li sice nekonečná, ne však spočetná.

**2.2.1.** Množina hodnot libovolné posloupnosti $\{a_n\}$ je nejvýš spočetná.

**2.2.2.** Každá část nejvýš spočetné množiny je nejvýš spočetná; každá nekonečná část spočetné množiny je spočetná.

**2.2.3.** Existuje-li zobrazení množiny $A$ na množinu $B$ a je-li $A$ nejvýš spočetná, je také $B$ nejvýš spočetná.

**2.2.4.** Množina $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ je spočetná. Pro $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ budiž $f(m, n) = 2^{m+n} + m$. Jest $0 < m < 2^m < 2^{m+n}$, tedy

$$2^{m+n} < f(m, n) < 2^{m+n+1} \, . \tag{1}$$

Ze znalosti čísla $f(m, n)$ můžeme podle (1) určit jednoznačně nejprve $m + n$ a potom dále $m = f(m, n) - 2^{m+n}$, $n = (m + n) - m$. Tedy $f$ je prosté zobrazení množiny $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ na nekonečnou část množiny $\mathbf{N}$, z čehož už snadno plyne správnost věty.

**2.2.5.** Každá neprázdná nejvýš spočetná množina je množinou hodnot nějaké posloupnosti.

**2.2.6.** Množina $\mathbf{C} \neq \emptyset$ budiž nejvýš spočetná. Pro každé $z \in \mathbf{C}$ budiž $A(z)$ nejvýš spočetná množina. Pak také sjednocení $\bigcup A(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ je nejvýš spočetná množina. Můžeme předpokládat $\bigcup A(z) \neq \emptyset$ a zvolit $\alpha \in \bigcup A(z)$. Podle **2.2.5** existuje posloupnost $\{u_n\}_1^\infty$, jejíž množinou hodnot je $\mathbf{C}$. Pro $z \in \mathbf{C}$ je buďto $A(z) \neq \emptyset$, načež podle **2.2.5** je $A(z)$ množinou hodnot posloupnosti $\{v_n(z)\}_1^\infty$ nebo je $A(z) = \emptyset$ a položíme $v_n(z) = \alpha$ pro všecka $n \in \mathbf{N}$. Pro $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ budiž $f(m, n) = v_n(u_m)$. Pak je $f$ zobrazení $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ na $\bigcup A(z)$ a naše věta plyne z **2.2.3** a **2.2.4.**

**2.2.7.** Množina všech racionálních čísel je spočetná. Odvodí se snadno z **2.2.3** a **2.2.4.**

**2.2.8.** Každá nekonečná množina $M$ obsahuje spočetnou část.

**2.2.9.** Je-li $M$ nekonečná množina a je-li $S \neq \emptyset$ nejvýš spočetná množina, existuje prosté zobrazení $M$ na $M \cup S$.

**2.2.10.** Je-li $M$ nekonečná množina a je-li $K$ konečná množina, existuje prosté zobrazení $M$ na $M - K$.

## 2.3. Mohutnosti

Budiž dána soustava množin $\mathfrak{M}$. Pro $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ budiž $(A, B) \in \mathfrak{E}$ právě tehdy, jestliže existuje prosté zobrazení množiny $A$ na množinu $B$. Pak $\mathfrak{E}$ je (viz článek **1.3**) vztah ekvivalence v $\mathfrak{M}$, který určuje rozklad $\mathfrak{R}$ soustavy $\mathfrak{M}$. Každému pásu rozkladu $\mathfrak{R}$ přiřaďme nějaký symbol, ale tak, aby různým pásům byly přiřazeny různé symboly. (Za takové symboly můžeme zvolit samy pásy rozkladu $\mathfrak{R}$.) *Mohutností* množiny $A \in \mathfrak{M}$, značka moh $A$, nazveme symbol přiřazený tomu pásu, jehož prvkem je $A$.

Zavedli jsme takto pojem mohutnosti pro ty množiny, které náležejí do dané soustavy množin $\mathfrak{M}$. Je-li však $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$ a je-li $\mathfrak{E}_1$ vztah ekvivalence v $\mathfrak{M}_1$ definovaný stejně jako $\mathfrak{E}$ v $\mathfrak{M}$, je jasné, že pro $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$

$$(A, B) \in \mathfrak{E}_1 \Leftrightarrow (A, B) \in \mathfrak{E}\,,$$

tj. množiny $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ mají v širší soustavě $\mathfrak{M}_1$ touž mohutnost právě tehdy, jestliže měly touž mohutnost už v užší soustavě $\mathfrak{M}$. Vzhledem k tomu je při úvahách o mohutnostech zpravidla dovoleno neudávat zvolenou soustavu $\mathfrak{M}$; tato soustava musí být tak velká, aby do ní náležely všecky vyšetřované množiny, ale jinak na bližší volbě soustavy $\mathfrak{M}$ nezáleží. Nějaká, byť i jen mlčky učiněná, volba soustavy $\mathfrak{M}$ je pro zavedení pojmu mohutnosti logicky nepostradatelná.

Opakujeme: o dvou množinách $A$, $B$ (které obě náležejí do soustavy $\mathfrak{M}$, což se však v dalším stále mlčky předpokládá) pravíme, že *mají touž mohutnost,* jestliže existuje prosté zobrazení $A$ na $B$. O symbolech pro mohutnosti učiníme tu dohodu, že je-li $p$ nezáporné celé číslo, volíme toto číslo za symbol mohutnosti množiny těch celých kladných čísel $n$, pro něž platí $1 \leqq n \leqq p$; je tedy moh $A = p$ právě tehdy, je-li $A$ konečná množina s počtem prvků rovným $p$, a zejména moh $A = 0$ právě tehdy, jestliže $A = \emptyset$. Pro mohutnost množiny $\mathbf{N}$ se zavádí značka $\aleph_0$; je tedy moh $A = \aleph_0$ právě tehdy, jestliže $A$ je spočetná množina, a mohutnosti nejvýš spočetných množin jsou $\aleph_0, 0, 1, 2, \ldots$ Mohutnosti konečných množin se jmenují *konečné* a mohutnosti nekonečných množin *nekonečné.* Mohutnosti značíme mnohdy malými gotickými písmeny.

**2.3.1.** Je-li $A \supset B \supset C$ a je-li moh $A =$ moh $C$, je také moh $A =$ $=$ moh $B$. Zvolme prosté zobrazení $f$ množiny $A$ na množinu $C$ a definujme rekurentně posloupnost $\{A_n\}$, kde $A_n \subset A$, takto: [1] $A_1 = A$, $A_2 = B$; [2] $A_{n+2} = f^1(A_n)$. Indukcí se odvodí $A_n \supset A_{n+1}$. Budiž $D =$ $= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Zřejmě

$$A - D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}), \quad B - D = \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n - A_{n+1}),$$

kde v obou vzorcích množiny vpravo jsou disjunktní. Je-li

$$\varphi(x) = x \text{ pro } x \in D \text{ a pro } x \in A_n - A_{n+1} \text{ při sudém } n,$$
$$\varphi(x) = f(x) \text{ pro } x \in A_n - A_{n+1} \text{ při lichém } n,$$

je $\varphi$ prosté zobrazení $A$ na $B$.

**2.3.2.** Má-li $A$ touž mohutnost jako nějaká část $B$ a má-li $B$ touž mohutnost jako nějaká část $A$, jest moh $A =$ moh $B$. Zvolme prosté zobrazení $f$ množiny $A$ do $B$ a prosté zobrazení $g$ množiny $B$ do $A$. Je-li $B_1 = f^1(A) \subset B$, $A_1 = g^1(B) \subset A$, $A_2 = g^1(B_1) \subset A_1$, jest moh $A =$ moh $B_1$, moh $B_1 =$ moh $A_2$ a tedy moh $A =$ moh $A_2$.

Mimo to $A \supset A_1 \supset A_2$, takže podle **2.3.1** je moh $A$ = moh $A_1$ = = moh $B$.

Je-li $f$ prosté zobrazení množiny $A$ na množinu $B$, je zřejmě $f^1$ prosté zobrazení soustavy $\mathfrak{A}$ všech částí $A$ na soustavu $\mathfrak{B}$ všech částí $B$, tj.

$$\text{moh}\, A = \text{moh}\, B \Rightarrow \text{moh}\, \mathfrak{A} = \text{moh}\, \mathfrak{B}\,.$$

Můžeme tudíž zavést toto označení: Je-li $\mathfrak{m}$ mohutnost množiny $M$, označíme $\exp \mathfrak{m}$ mohutnost soustavy všech částí $M$.

**2.3.3.** Pro žádnou mohutnost $\mathfrak{m}$ není $\exp \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Dokazujíce nepřímo předpokládejme, že $f$ je prosté zobrazení $M$ na soustavu $\mathfrak{M}$ všech částí $M$. Položme

$$K = \mathscr{E}_x \quad [x \in M - f(x)]\,. \tag{1}$$

Pak je $K \subset M$ neboli $K \in \mathfrak{M}$, takže $K = f(a)$ při vhodném $a \in M$. Jsou dvě možnosti: $a \in K$, $a \in M - K$. Je-li $a \in K$, pak podle (1) je $a \in M - f(a)$ neboli $a \in M - K$, což je spor. Není-li $a \in K$, pak podle (1) není $a \in M - f(a)$, tj. není $a \in M - K$ neboli jest $a \in K$, což je zase spor.

Zejména je $\exp \aleph_0 \neq \aleph_0$. V tom je obsažen známý fakt, že množina $\mathbf{E}_1$ všech reálných čísel je nespočetná, neboť:

**2.3.4.** moh $\mathbf{E}_1 = \exp \aleph_0$. To plyne z **2.3.2**, dokážeme-li, že existuje prosté zobrazení $f$ množiny $\mathfrak{N}$ všech částí $\mathbf{N}$ do množiny $\mathbf{E}_1$ a prosté zobrazení $g$ množiny $\mathbf{E}_1$ do $\mathfrak{N}$. Zobrazení $f$ dostaneme, jestliže pro $X \subset \mathbf{N}$ volíme $f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \,.\, 10^{-n}$, kde $\varepsilon_n = 1$ pro $n \in X$, $\varepsilon_n = 0$ pro $n \in \mathbf{N} - X$. Zobrazení $g$ dostaneme např. takto. Podle **2.2.7** existuje prosté zobrazení $\varphi$ množiny $\mathbf{N}$ na množinu všech racionálních čísel; pro $x \in \mathbf{E}_1$ položíme $g(x)$ rovné množině všech těch $n \in \mathbf{N}$, pro které $\varphi(n) < x$.

## 2.4. Cvičení k § 2

2.4.1. Kartézský součin konečného počtu $n > 0$ spočetných množin je spočetný.

2.4.2. Soustava všech spočetných částí libovolné nekonečné množiny je nespočetná.

2.4.3. Každá nekonečná množina obsahuje nespočetnou soustavu spočetných množin.

2.4.4. Větu **2.2.4** můžeme dokázat pomocí prostého zobrazení $f$ množiny $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ na $\boldsymbol{N}$, kde $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$.

2.4.5. Soustava $M$ všech konečných posloupností, jejichž členy jsou přirozená čísla, je spočetná. To můžeme dokázat přímo pomocí prostého zobrazení $f$ množiny $M$ na $\boldsymbol{N}$, kde $f(\{a_n\}_1^p) = \sum_{n=1}^{p} 2^{a_1 + \cdots + a_n - 1}$.

2.4.6. Budiž $\boldsymbol{C}$ nekonečná množina. Pro každé $z \in \boldsymbol{C}$ budiž $A(z)$ množina obsahující aspoň dva prvky. Množina $R = \mathfrak{P}A(z)$ $(z \in \boldsymbol{C})$ je nespočetná. Dokonce lze dokázat, že $R$ obsahuje podmnožinu mohutnosti $\exp \aleph_0$.

2.4.7. Množina všech funkcí v oboru $\boldsymbol{E}_1$ má mohutnost $\exp \exp \aleph_0$.

2.4.8. Mohutnost množiny všech prostých zobrazení množiny $\boldsymbol{N}$ na množinu $\boldsymbol{N}$ je $\exp \aleph_0$.

2.4.9. Udejte prosté zobrazení: [1] množiny $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ na množinu $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$; [2] soustavy všech částí $\boldsymbol{N}$ na soustavu všech nekonečných částí $\boldsymbol{N}$; [3] množiny $\boldsymbol{E}_1$ na množinu všech částí $\boldsymbol{N}$.

2.4.10. Soustava $\mathfrak{M}$ všech částí nekonečné množiny $M$ má touž mohutnost jako soustava všech nekonečných částí $M$. Je-li $M$ nespočetná, má $\mathfrak{M}$ touž mohutnost jako soustava všech nespočetných částí $M$.

Ve cvičeních 2.4.11 až 2.4.14 množiny $X_n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ jsou části určité dané množiny $P$. Značka $\operatorname{Lim\,sup} X_n$ znamená množinu všech těch $x \in P$, jež pro nekonečně mnoho indexů $n$ jsou prvky množiny $X_n$; $\operatorname{Lim\,inf} X_n$ znamená množinu všech těch $x \in P$, k nimž existuje takový index $k$ (závislý na $x$), že

$$n \in \boldsymbol{N}, \quad n > k \Rightarrow x \in X_n .$$

Je-li $\operatorname{Lim\,sup} X_n = \operatorname{Lim\,inf} X_n$, pak touž množinu označíme také $\operatorname{Lim} X_n$; je-li však $\operatorname{Lim\,sup} X_n \neq \operatorname{Lim\,inf} X_n$, pak symbol $\operatorname{Lim} X_n$ je bezvýznamný.

2.4.11. Je-li posloupnost $\{X'_n\}$ vybrána z posloupnosti $\{X_n\}$, pak $\operatorname{Lim\,sup} X_n \supset$ $\supset \operatorname{Lim\,sup} X'_n \supset \operatorname{Lim\,inf} X'_n \supset \operatorname{Lim\,inf} X_n$. Co z toho plyne, existuje-li $\operatorname{Lim} X_n$?

2.4.12. Je-li $X_n \subset X_{n+1}$ pro všecka $n \in \boldsymbol{N}$, je $\operatorname{Lim} X_n = \bigcup X_n$. Je-li $X_n \supset X_{n+1}$ pro všecka $n \in \boldsymbol{N}$, je $\operatorname{Lim} X_n = \bigcap X_n$.

2.4.13. Je-li $S_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} X_i$, $P_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} X_i$, jest $\operatorname{Lim\,sup} X_n = \operatorname{Lim} S_n$, $\operatorname{Lim\,inf} X_n =$ $= \operatorname{Lim} P_n$.

Charakteristickou funkcí množiny $M \subset P$ rozumíme tu funkci $\chi$ v oboru $P$, pro kterou

$$x \in M \Rightarrow \chi(x) = 1\,, \quad x \in P - M \Rightarrow \chi(x) = 0\,.$$

Ve cvičení 2.4.14 jsou $\chi_n$, $\chi'$, $\chi''$ charakteristické funkce množin $X_n$, Lim sup $X_n$, Lim inf $X_n$.

2.4.14. Pro každé $x \in P$ je $\overline{\lim}\, \chi_n(x) = \chi'(x)$, $\underline{\lim}\, \chi_n(x) = \chi''(x)$. Lim $X_n$ existuje právě tehdy, jestliže pro každé $x \in P$ existuje $\lim \chi_n(x)$.