Čísla a početní výkony

III. Reálná čísla

In: Eduard Čech (author): Čísla a početní výkony. (Czech). Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1954. pp. 92--137.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402583

III. REÁLNÁ ČÍSLA

§ 1. Pojem posloupnosti. Posloupnost vybraná, monotonní, omezená

Jestliže každému přirozenému číslu n přiřadíme podle nějakého pravidla jakoukoli věc, kterou označím třeba A_n, dostaneme *posloupnost*. Označím ji

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \tag{1,1}$$

Věc A_n nazveme *n-tým členem posloupnosti* (1,1). Členy posloupnosti (1,1) nemusí být navzájem různé, t. j. jsou-li m, n přirozená čísla a je-li $m \neq n$, může být $A_m = A_n$ (viz poznámku II 8,2). Jestliže pro $m \neq n$ je vždy $A_m \neq A_n$, řekneme, že posloupnost (1,1) je *prostá*.

Poznámka 1,1. Místo písmena A můžeme ovšem užít jakéhokoli jiného písmena. Uvažujeme-li současně několik posloupností, musíme ovšem užít pro každou z nich jiného písmena. Také není nikterak nutné, aby n-tý člen posloupnosti byl označen právě A_n (nebo a_n nebo α_n nebo b_n atd.), t. j. aby v označení členu se vyskytoval index, udávající, o kolikátý člen posloupnosti jde, ačkoli takové označení je výhodné a budeme ho velmi často užívat. Tak na př. je-li (1,1) posloupnost, jsou také

$$A_4, A_5, A_6, \ldots \tag{1,2}$$

a

$$A_2, A_4, A_6, \ldots \tag{1,3}$$

posloupnosti; n-tým členem posloupnosti (1,2) je A_{n+3}, n-tým členem posloupnosti (1,3) je A_{2n}. Jiný příklad: jsou-li a, b jakékoli dvě věci, je

$$a, b, a, b, \ldots \tag{1,4}$$

posloupnost, jejíž n-tý člen je roven a při lichém n, b při sudém n. Příležitostně je vhodnější místo indexu užívat závorky, tedy označit n-tý člen posloupnosti třeba $A(n)$ místo A_n.

Poznámka 1,2. Označení (1,1) pro posloupnost je mnohdy příliš zdlouhavé a leckdy nepohodlné; posloupnost (1,1) můžeme označit kratčeji $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$; potom posloupnost (1,2) označíme $\{A_{n+3}\}_{n=1}^{\infty}$, posloupnost (1,3) $\{A_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, t. j. uvnitř závorky {} stojí n-tý člen posloupnosti. Místo písmena n můžeme užít kteréhokoli jiného písmena; užijeme-li třeba písmena k, píšeme $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ a pod. Je-li na př. každé dvojici $[r, s]$ přirozených čísel přiřazena nějaká věc $A(r, s)$, potom pro každé přirozené číslo r je $\{A(r, s)\}_{s=1}^{\infty}$ určitá posloupnost,* a pro každé přirozené číslo s je $\{A(r, s)\}_{r=1}^{\infty}$ určitá posloupnost. Nejčastěji budeme užívat písmena n a místo $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme často psát krátce $\{A_n\}$.

Poznámka 1,3. Symbol ∞, se kterým se ve vyšší matematice velmi často setkáváme, čteme slovem *nekonečno*. Na př. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme číst: (velké) A s indexem n, n rovné jedné až do nekonečna. V žádném členu A_n této posloupnosti není ovšem $n = \infty$, neboť ∞ není přirozeným číslem, nýbrž jen symbolem, který v daném případě naznačuje, že n probíhá přirozená čísla bez jakéhokoli omezení.

Poznámka 1,4. Je-li (1,1) libovolná posloupnost a je-li k určité (libovolné) přirozené číslo, potom $\{A_n\}_{n=k}^{\infty}$ znamená posloupnost

$$A_k, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots$$

Podobně $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ znamená posloupnost

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

Členy posloupnosti mohou býti zcela libovolné věci, na př. čísla nebo body nebo množiny nebo matematické věty; jsou také posloupnosti, jejichž členy samy jsou posloupnostmi. Pro nás jsou daleko nejdůležitější mezi všemi posloupnostmi ***číselné posloupnosti***, jejichž členy jsou čísla (prozatím, dokud jiná čísla neznáme, slovem číslo rozumíme: číslo racionální).

Příklad 1,1. Posloupnosti se vyskytly v této knize už v I § 4, aniž jsme tehdy ještě zavedli *slovo* posloupnost. Mluvili jsme tehdy o ***rekurentní definici*** posloupnosti (1,1). Při takové rekurentní definici uvažujeme vedle posloupnosti (1,1) samé ještě posloupnost

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

pravidel, s jejichž pomocí se z libovolného členu A_n posloupnosti (1,1) vypočte následující člen A_{n+1}. Dále jsme v I § 4 měli posloupnost matematických vět

$$V_1, V_2, V_3, \ldots;$$

neužívali jsme tehdy slova posloupnost, nýbrž jsme mluvili o „větě V_n závislé na přirozeném čísle n“.

Číselná posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá:

[1] *rostoucí*, [2] *klesající*, [3] *nerostoucí*, [4] *neklesající*, jestliže pro dvě přirozená čísla m, n, pro která je $m < n$, je vždy také:

$$[1]\ a_m < a_n,\quad [2]\ a_m > a_n,\quad [3]\ a_m \geqq a_n,\quad [4]\ a_m \leqq a_n.$$

Je zřejmé, že každá rostoucí posloupnost je zároveň neklesající a že každá klesající posloupnost je zároveň nerostoucí. Opak ovšem neplatí, ale každá *prostá* neklesající posloupnost je rostoucí, každá *prostá* nerostoucí posloupnost je klesající. Posloupnost, jejíž všechny členy jsou rovny témuž číslu, je zároveň neklesající i nerostoucí; obráceně, jestliže nějaká posloupnost je zároveň neklesající i nerostoucí, jsou všecky její členy rovny témuž číslu. Společný název pro neklesající a nerostoucí posloupnosti je: *posloupnosti monotonní*. *Ryze monotonní* je taková posloupnost, která je prostá a monotonní; posloupnosti ryze monotonní je tedy společný název pro posloupnosti rostoucí a klesající.

Příklad 1,2. Věta II 6,7 praví, že $\{\alpha^n\}$ je rostoucí posloupnost v případě $\alpha > 1$ a klesající posloupnost v případě $0 < \alpha < 1$.

Příklad 1,3. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel, plyne z věty II 6,3, že jestliže $\{a_n\}$ je [1] rostoucí, [2] klesající, [3] neklesající, [4] nerostoucí, pak $\{a_n^{-1}\}$ je [1] klesající, [2] rostoucí, [3] nerostoucí, [4] neklesající. Na př. $\{n\}$ je zřejmě rostoucí posloupnost, tedy $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ je klesající. Ze zákona monotonie sčítání plyne, že také $\left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ neboli $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ je klesající posloupnost, takže $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ je rostoucí posloupnost.

Věta 1,1. *Budiž $\{a_n\}$ číselná posloupnost. Jestliže pro každé přirozené číslo n je*

$$[1]\ a_n < a_{n+1},\qquad [2]\ a_n > a_{n+1},\qquad [3]\ a_n \leqq a_{n+1},\qquad [4]\ a_n \geqq a_{n+1},$$

potom posloupnost $\{a_n\}$ je

[1] *rostoucí*, [2] *klesající*, [3] *neklesající*, [4] *nerostoucí*.

Důkaz. Jsou-li m, n přirozená čísla a je-li $m < n$, dospějeme po konečném počtu kroků k indexu n, jestliže vyjdeme od indexu m a postupně zvětšujeme index stále o jedničku. Tudíž věta plyne z transitivního zákona pro nerovnosti.

Příklad 1,4. Posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí. Podle věty 1,1 je třeba zjistit, že pro každé $n \geqq 2$ je

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}. \tag{1,5}$$

Jestliže ve větě II 6,16 volíme $t = 1 - \frac{1}{n^2}$, dostaneme

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n} \text{ neboli } \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \frac{n-1}{n},$$

a jelikož $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, je

$$(n+1)^n (n-1)^n > (n-1)\, n^{2n-1} = (n-1)\, n^n \,.\, n^{n-1};$$

je tedy

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1},$$

a to je právě (1,5).

Příklad 1,5. Posloupnost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ je klesající. Podle věty 1,1 je třeba zjistit, že pro každé $n \geqq 2$ je

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{1,6}$$

Jestliže ve větě II 6,16 volíme $t = 1 + \frac{1}{n^2-1}$, dostaneme

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1}.$$

Avšak $n^2 - 1 < n^2$, tedy $\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$, $\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$,

a proto

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n} \text{ neboli } \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n};$$

jelikož $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, je

$$n^{2n+1} > (n-1)^n (n+1)^{n+1},$$

tedy

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

a to je právě (1,6).

Je-li $\{a_n\}$ libovolná posloupnost a je-li

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$

říkáme, že $\{s_n\}$ je *posloupnost částečných součtů posloupnosti* $\{a_n\}$.

Příklad 1,6. Je-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{a_n\}$, pak jestliže $\{a_n\}$ je [1] rostoucí, [2] klesající, [3] neklesající, [4] nerostoucí, platí totéž i o posloupnosti $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}$. Pro určitost uvažujeme případ rostoucí posloupnosti $\{a_n\}$. Pro každé n máme n nerovností

$$a_1 < a_{n+1}, \quad a_2 < a_{n+1}, \ldots, a_n < a_{n+1},$$

takže podle obecného zákona monotonie sčítání je

$$s_n < n \,.\, a_{n+1},$$

tedy též

$$ns_n + s_n < ns_n + na_{n+1},$$

$$(n+1)\, s_n < n(s_n + a_{n+1}),$$

$$(n+1)\, s_n < n \,.\, s_{n+1},$$

$$\frac{s_n}{n} < \frac{s_{n+1}}{n+1},$$

takže $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}$ je rostoucí posloupnost podle věty 1,1.

Věta 1,2. *Budiž* $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *rostoucí posloupnost přirozených čísel* (t. j. každý člen posloupnosti je přirozeným číslem). *Potom pro každé přirozené číslo* n *je* $k(n) \geqq n$.

D ů k a z indukcí vzhledem k n. Protože $k(1)$ je přirozené číslo, je $k(1) \geqq 1$. Předpokládejme, že pro určité n je $k(n) \geqq n$. Protože naše posloupnost je rostoucí, je $k(n+1) > k(n)$, takže podle věty I 5,3 je $k(n+1) \geqq k(n) + 1 \geqq n + 1$.

Budiž nyní $\{A_n\}$ zcela libovolná posloupnost (t. j. její členy nemusí být čísla). Zvolíme-li libovolnou rostoucí posloupnost $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel a položíme-li $B_n = A_{k(n)}$ pro každé přirozené číslo n, dostaneme novou posloupnost $\{B_n\}$, o které říkáme, že je *vybrána* z posloupnosti $\{A_n\}$.

Poznámka 1,5. Naše definice vybrané posloupnosti nevylučuje případ, že $k(n) = n$ pro všechna n, takže mezi posloupnosti vybrané z $\{A_n\}$ patří také posloupnost $\{A_n\}$ sama.

Věta 1,3. *Je-li posloupnost $\{B_n\}$ vybrána z posloupnosti $\{A_n\}$ a je-li posloupnost $\{C_n\}$ vybrána z posloupnosti $\{B_n\}$, je posloupnost $\{C_n\}$ vybrána z posloupnosti $\{A_n\}$.*

Důkaz. Podle předpokladu existují takové rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, že pro každé přirozené číslo n je

$$B_n = A_{k(n)}\,, \quad C_n = B_{h_n}\,.$$

Potom je však

$$C_n = A_{k(h_n)}\,. \tag{1,7}$$

Jsou-li nyní m, n přirozená čísla a je-li $m < n$, je $h_m < h_n$, tedy též $k(h_m) < k(h_n)$, takže $\{k(h_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a z (1,7) je patrné, že posloupnost $\{C_n\}$ je vybrána z posloupnosti $\{A_n\}$.

Věta 1,4. *Je-li posloupnost $\{b_n\}$ vybrána z číselné posloupnosti $\{a_n\}$, která je*

[1] *rostoucí,* [2] *klesající,* [3] *nerostoucí,* [4] *neklesající,*

pak platí totéž i o posloupnosti $\{b_n\}$.

Důkaz proveďme třeba pro rostoucí posloupnost $\{a_n\}$. Podle předpokladu existuje taková rostoucí posloupnost $\{k(n)\}$ přirozených čísel, že $b_n = a_{k(n)}$ pro všecka n. Je-li index m menší než index n, je $k(m) < k(n)$, tedy $a_{k(m)} < a_{k(n)}$, t. j. $b_m < b_n$.

Věta 1,5. *Z každé číselné posloupnosti $\{a_n\}$ lze vybrat monotonní posloupnost.*

Důkaz rozdělíme na tři části.

Část první. Předpokládejme, že v posloupnosti $\{a_n\}$ neexistuje největší člen, že tedy ke každému členu a_n existuje jiný člen, který je větší než a_n. Těch členů větších než a_n musí být nekonečně mnoho, neboť jinak by jeden z nich, třeba a_k, byl největší, a v celé posloupnosti $\{a_n\}$ by už nemohl být člen větší než a_k, což odporuje předpokladu. Proto lze ke každému indexu n určit takový index r, že

$$r > n, \quad a_r > a_n\,.$$

Lze tedy rekurentně definovat takovou posloupnost $\{k(n)\}$ přirozených čísel, že

$$k(1) = 1\,, \quad k(n+1) > k(n)\,, \quad a_{k(n+1)} > a_{k(n)}\,.$$

Podle věty 1,1 je $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, takže položíme-li $b_n = a_{k(n)}$, je posloupnost $\{b_n\}$ vybrána z posloupnosti $\{a_n\}$. Avšak $b_{n+1} > b_n$, takže podle věty 1,1 je $\{b_n\}$ rostoucí posloupnost.

Část druhá. Předpokládejme dále, že z posloupnosti $\{a_n\}$ lze vybrat posloupnost $\{b_n\}$, ve které neexistuje největší člen. Podle první části lze potom z $\{b_n\}$ vybrat rostoucí posloupnost, která podle věty 1,3 je vybrána i z posloupnosti $\{a_n\}$.

Část třetí. Zbývá případ, že není splněn předpoklad učiněný v části druhé, že tedy v každé posloupnosti vybrané z $\{a_n\}$ existuje největší člen. Je-li však h libovolné nezáporné celé číslo, je posloupnost

$$a_{h+1}, a_{h+2}, a_{h+3}, \ldots$$

vybrána z posloupnosti $\{a_n\}$, takže v ní existuje největší člen, t. j. existuje takový index $r > h$, že pro všecky indexy $s > h$ je $a_s \leqq a_r$. Definujme nyní rekurentně posloupnost $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel takto: Nejprve zvolíme přirozené číslo $k(1)$ tak, že $a_{k(1)}$ je největší člen celé naší posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Jestliže při určitém n je číslo $k(n)$ už definováno, zvolíme přirozené číslo $k(n+1) > k(n)$ tak, aby $a_{k(n+1)}$ byl největší člen posloupnosti

$$a_{k(n)+1}, a_{k(n)+2}, a_{k(n)+3}, \ldots$$

Podle věty 1,1 je $\{k(n)\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, takže posloupnost $\{b_n\} = \{a_{k(n)}\}$ je vybrána z posloupnosti $\{a_n\}$. Důkaz bude dokončen, dokážeme-li, že $\{b_n\}$ je nerostoucí posloupnost, t. j. (podle věty 1,1) dokážeme-li, že pro každé n je

$$a_{k(n+1)} \leqq a_{k(n)} .$$

To je však patrné z toho, že $a_{k(n)}$ je největším členem určité posloupnosti, jejímž členem je také $a_{k(n+1)}$.

Číselná posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *omezená* (nebo *ohraničená*), existuje-li takové číslo M, že

$$|a_n| < M \tag{1,8}$$

pro všechny indexy n. Číslo M je nutně kladné. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *neomezená* (nebo *neohraničená*), není-li omezená.

Následující věty 1,6 až 1,13 jsou zřejmé.

Věta 1,6. *Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, jestliže posloupnost $\{|a_n|\}$ je omezená.*

Věta 1,7. *Buďtež* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *takové číselné posloupnosti, že pro určité číslo* N *platí, že* $|a_n| \geqq |b_n|$ *pro všecka* $n > N$. *Je-li posloupnost* $\{a_n\}$ *omezená, je také* $\{b_n\}$ *omezená.*

Věta 1,8. *Existuje-li takový soubor konečně mnoha čísel, že každý člen posloupnosti* $\{a_n\}$ *je roven některému z nich, je* $\{a_n\}$ *omezená posloupnost.*

Věta 1,9. *Posloupnost vybraná z omezené posloupnosti je omezená.*

Věta 1,10. *Je-li* $\{a_n\}$ *omezená posloupnost a je-li* c *libovolné číslo, je také* $\{ca_n\}$ *omezená posloupnost.*

Věta 1,11. *Je-li* $\{a_n\}$ *omezená posloupnost, je také* $\{-a_n\}$ *omezená posloupnost.*

Věta 1,12. *Je-li* $\{a_n\}$ *neklesající posloupnost a existuje-li takové číslo* H, *že* $a_n < H$ *pro všecka* n, *je* $\{a_n\}$ *omezená posloupnost.*

Věta 1,13. *Je-li* $\{a_n\}$ *nerostoucí posloupnost a existuje-li takové číslo* K, *že* $a_n > K$ *pro všecka* n, *je* $\{a_n\}$ *omezená posloupnost.*

Věta 1,14. *Jsou-li* $\{a_1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_2(n)\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{a_k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *omezené posloupnosti* (v konečném počtu $k > 0$), *jsou také*

$$\{a_1(n) + a_2(n) + \ldots + a_k(n)\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\{a_1(n) \,.\, a_2(n) \ldots a_k(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

omezené posloupnosti.

Důkaz. Pro $1 \leqq r \leqq k$ existují podle předpokladu taková kladná čísla M_r, že $|a_r(n)| < M_r$ pro všecka n. Potom je však

$$|a_1(n) + a_2(n) + \ldots + a_k(n)| < M_1 + M_2 + \ldots + M_k$$

podle vět I 5,8 a I 9,7 a

$$|a_1(n)\, a_2(n) \ldots a_k(n)| < M_1 M_2 \ldots M_k$$

podle vět I 5,9 a I 8,1.

Příklad 1,7. Je-li $0 < x < 1$, je $\{nx^n\}$ omezená posloupnost. Abychom se o tom přesvědčili, volme $t = \frac{1}{x}$ ve větě II 6,16. Dostaneme

$$\frac{1}{x^n} \geqq 1 + n\left(\frac{1}{x} - 1\right) > n\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

neboli

$$n\,\frac{1-x}{x} < \frac{1}{x^n}\,.$$

Znásobíme-li obě strany této nerovnosti kladným číslem $x^n \dfrac{x}{1-x}$, vyjde

$$0 < nx^n < \frac{x}{1-x} .$$

§ 2. Nulové a konvergentní posloupnosti. Pojem reálného čísla

V tomto paragrafu zavedeme pojem konvergentní posloupnosti, který je jedním z nejzákladnějších pojmů vyšší matematiky. Počneme nejjednodušším zvláštním případem tohoto pojmu, totiž pojmem *nulové posloupnosti.*

Stručně, ale ne zcela přesně, můžeme říci, že číselná posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá nulová, jestliže pro všecka dosti velká n je a_n přibližně rovné nule. Nulové posloupnosti jsou na př.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots; \tag{2,1}$$

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, -\frac{1}{2^4}, \ldots; \tag{2,2}$$

$$-100, -\frac{100}{2}, -\frac{100}{3}, -\frac{100}{4}, -\frac{100}{5}, \ldots; \tag{2,3}$$

$$\frac{1}{1000}, \frac{1000}{2}, \frac{1}{3 \,.\, 1000}, \frac{1000}{4}, \frac{1}{5 \,.\, 1000}, \ldots \tag{2,4}$$

Slova „přibližně rovné nule“ a „dosti velká n“ nemají jednoznačně určitý smysl a teprve když řádně vyložíme, co se jimi míní, dospějeme k vědecky správné definici pojmu nulové posloupnosti. Číslo x můžeme považovat za přibližně rovné nule třeba už tehdy, jestliže se liší od nuly o méně než 0,001, t. j. jestliže $|x| < \dfrac{1}{10^3}$, ale také se můžeme dohodnout, že budeme považovat za přibližně rovná nule pouze ta x, pro která je $|x| < \dfrac{1}{10^6}$, nebo dokonce jen ta x, pro která je $|x| < \dfrac{1}{10^{20}}$, a můžeme požadovat ještě mnohem ostřejší nerovnosti; máme tu nekonečně mnoho možností. Při *každé* z těchto možností musí u nulové posloupnosti být a_n přibližně rovné nule pro všecky dosti velké indexy, t. j. pro všecka n větší než *vhodně volené* přirozené číslo; *jak volené*, to závisí jednak na tom, jak jsme pojem „přibližně rovné nule“ precisovali, jednak na tom, kterou nulovou posloupnost zkoumáme.

Obecně precisujeme pojem „přibližně rovné nule“ tak, že si zvolíme určité kladné číslo ε a za přibližně rovná nule považujeme ta čísla x, pro která platí

$$|x| < \varepsilon \quad \text{neboli} \quad -\varepsilon < x < \varepsilon$$

a žádná jiná x. Při každé volbě čísla $\varepsilon > 0$ musí být u nulové posloupnosti možné určit přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n > N\,. \tag{2,5}$$

Poznámka 2,1. Tím, že píšeme $N = N(\varepsilon)$, naznačujeme, že hodnota čísla N závisí na učiněné volbě kladného čísla ε.

Budiž třeba

$$\varepsilon = \frac{1}{10^3}\,. \tag{2,6}$$

Pak u posloupnosti (2,1) můžeme volit $N = 10^3$ nebo si můžeme zvolit za N jakékoli přirozené číslo N ještě větší než 10^3, jelikož *podmínka* (2,5) *zůstane splněna, nahradíme-li původně zvolené přirozené číslo N jiným větším.* U posloupnosti (2,2) při volbě (2,6) čísla ε zase můžeme zvolit $N = 10^3$, ale můžeme si v tomto případě zvolit N mnohem menší; nejmenší možné N v uvažovaném případě je $N = 10$. U posloupnosti (2,3) při volbě (2,6) nejmenší možná hodnota čísla N je $N = 10^5$. U posloupnosti (2,4) při volbě (2,6) nejmenší možná hodnota čísla N je $N = 10^6$; nerovnost $|a_n| < \varepsilon$ zde sice platí už pro všecka lichá čísla větší než jedna, takže velmi mnoho indexů n menších než 10^6 má tu vlastnost, že $|a_n| < \varepsilon$, ale teprve pro $N = 10^6$ platí $|a_n| < \varepsilon$ pro *všecka* $n > N$.

Vyslovme znovu přesnou definici nulové posloupnosti: Číselná posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá nulová, jestliže každému číslu $\varepsilon > 0$ lze přiřadit přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že platí (2,5).

Poznámka 2,2. Definici nulové posloupnosti můžeme dát také tento tvar. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá nulová, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ je jen konečný počet ($\geqq 0$) takových indexů n, že $|a_n| \geqq \varepsilon$.

Následující věty 2,1 až 2,6 jsou zřejmé z definice.

Věta 2,1. *Číselná posloupnost $\{a_n\}$ je nulová, existuje-li takové přirozené číslo N, že $a_n = 0$ pro všecka $n > N$.*

Věta 2,2. *Posloupnost $\{a_n\}$ je nulová právě tehdy, jestliže posloupnost $\{|a_n|\}$ je nulová.*

Věta 2,3. *Posloupnost vybraná z nulové posloupnosti je nulová.*

Věta 2,4. *Každá nulová posloupnost je omezená.*

Věta 2,5. *Buďtež $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takové číselné posloupnosti, že pro určité přirozené číslo N platí, že $|a_n| \geqq |b_n|$ pro všecka $n > N$. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nulová, je také $\{b_n\}$ nulová.*

Věta 2,6. *Je-li $\{a_n\}$ nulová posloupnost, je také $\{-a_n\}$ nulová posloupnost.*

Příklad 2,1. Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nulová. To jsme si již řekli, ale nyní si podáme přesné odůvodnění. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, existuje podle věty II 6,10 takové přirozené číslo N, že $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Pro $n > N$ je $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ podle věty II 6,3, tedy $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ pro všecka $n > N$. Přesné odůvodnění, že posloupnosti (2,2), (2,3), (2,4) jsou nulové, bude podáno v příkladech 2,2; 2,3 a 2,4.

Věta 2,7. *Je-li $\{a_n\}$ nulová posloupnost a je-li c libovolné číslo, je také $\{ca_n\}$ nulová posloupnost.*

Důkaz. Pro $c = 0$ je to důsledek věty 2,1. Nechť tedy $c \neq 0$, takže $|c| > 0$. Je-li ε kladné číslo, je také $\frac{\varepsilon}{|c|}$ kladné číslo. Protože posloupnost $\{a_n\}$ je nulová, existuje takové přirozené číslo N, že pro všecka $n > N$ platí nerovnost

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}\,. \tag{2,7}$$

Avšak $|c| > 0$, takže nerovnost (2,7) je dovoleno násobit číslem $|c|$. Protože $|c| \,.\, |a_n| = |ca_n|$, vyjde, že $|ca_n| < \varepsilon$ pro všecka $n > N$; tím je věta dokázána.

Příklad 2,2. Z příkladu 2,1 plyne podle věty 2,7, že (2,3) je nulová posloupnost.

Příklad 2,3. Dokažme, že posloupnost $\{a^n\}$ je nulová právě tehdy, jestliže $|a| < 1$. [Volíme-li $a = -\frac{1}{2}$, dostaneme, že posloupnost (2,2) je nulová.] Budiž předně $|a| \geqq 1$; podle vět I 6,1; I 6,2; II 6,6 a II 6,8 je $|a^n| \geqq 1$ pro všecka n, takže posloupnost $\{a^n\}$ není nulová. Pro $a = 0$ je $\{a^n\}$ nulová podle věty 2,1. Zbývá případ $|a| < 1$, $a \neq 0$; podle vět II 6,8 a 2,2 můžeme předpokládat, že $0 < a < 1$.

Volíme-li ve větě II 6,16 $t = \frac{1}{a}$, dostaneme, že pro všecka n je

$$\frac{1}{a^n} \geqq 1 + n\left(\frac{1}{a} - 1\right) > n\left(\frac{1}{a} - 1\right) > 0$$

neboli

$$\frac{1}{a^n} > n\,\frac{1-a}{a} > 0\,,$$

takže podle vět II 6,2 a II 6,3 pro všecka n je

$$0 < a^n < \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1}{n}\,,$$

a jelikož posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nulová, je nulová také $\left\{\frac{a}{1-a} \cdot \frac{1}{n}\right\}$ podle věty 2,7, tudíž i $\{a^n\}$ podle věty 2,5.

Příklad 2,4. Protože $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nulová, je také $\left\{\frac{1000}{n}\right\}$ nulová podle věty 2,7, takže posloupnost (2,4) je nulová podle věty 2,5.

Věta 2,8. *Je-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů nulové posloupnosti $\{a_n\}$, je také $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}$ nulová posloupnost.*

Nástin důkazu. Dejme tomu, že ta čísla a_n, pro něž $n > 100$, jsou malá. Číslo

$$\frac{a_{101} + a_{102} + \ldots + a_n}{n} \tag{*}$$

je pro všecka $n > 100$ malé, protože sčítanci v čitateli jsou malí a jejich součet dělíme číslem n, které je větší než jejich počet. Číslo

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}}{n} \tag{**}$$

může být velké pro *některá* n větší než 100, ale pro dosti veliká n bude také malé. Tedy pro dosti velká n jsou malá obě čísla (*) i (**), takže je malý i jejich součet, který je roven $\frac{s_n}{n}$.

Důkaz. Podle věty 2,4 existuje takové kladné číslo M, že

$$|a_n| < M \quad \text{pro všecka } n\,. \tag{2,8}$$

Budiž nyní dáno kladné číslo ε. Potom je také $\frac{1}{2}\varepsilon$ kladné číslo, takže existuje takové přirozené číslo N_1, že

$$|a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{pro všecka } n > N_1 \,. \tag{2,9}$$

Podle věty II 6,9 existuje přirozené číslo $N_2 > \dfrac{2MN_1}{\varepsilon}$. Budiž nyní N přirozené číslo větší než N_1 i než N_2. Dokážeme, že

$$\left|\frac{s_n}{n}\right| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n > N \,,$$

a tím budeme hotovi. Budiž tedy $n > N$. Potom je především $n > N_1$ a z (2,9) plyne podle věty I 9,7, že

$$|a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \ldots + a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \,.\, (n - N_1) < \tfrac{1}{2}\varepsilon n \,. \tag{2,10}$$

Za druhé je však $n > N_2$, tedy $n > \dfrac{2MN_1}{\varepsilon}$, takže $MN_1 < \frac{1}{2}\varepsilon n$; podle věty I 9,7 plyne tedy z (2,8), že

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_1}| \leqq MN_1 < \tfrac{1}{2}\varepsilon n \,. \tag{2,11}$$

Užijeme-li ještě jednou věty I 9,7, dostaneme

$$|s_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_1}| + \\ + |a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \ldots + a_n| \,,$$

takže podle (2,10) a (2,11) je $|s_n| < \frac{1}{2}\varepsilon n + \frac{1}{2}\varepsilon n = \varepsilon n$, tedy $\left|\dfrac{s_n}{n}\right| < \varepsilon$ pro všecka $n > N$.

Příklad 2,5. Z věty 2,8 soudíme podle příkladu 2,1, že posloupnost

$$1, \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}), \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}), \ldots$$

je nulová.

Věta 2,9. *Budiž $\{a_n\}$ číselná posloupnost a budiž $\{b_n\}$ nulová posloupnost kladných čísel. Jestliže pro každé přirozené číslo k existuje takové přirozené číslo N* (závislé na k), *že nerovnost $|a_n| < b_k$ platí pro všecka $n > N$, je $\{a_n\}$ nulová posloupnost.*

Důkaz. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, existuje nekonečně mnoho takových indexů k, že $0 < b_k < \varepsilon$. Je-li k takový index a má-li číslo N tu vlastnost, že $|a_n| < b_k$ pro všecka $n > N$, je také $|a_n| < \varepsilon$ pro všecka $n > N$.

Poznámka 2,3. Smysl věty 2,9 je ten, že při zkoumání, zda daná posloupnost $\{a_n\}$ je nulová, nemusíme vyšetřovat, je-li podmínka

(2,5) splněna pro *všecka* $\varepsilon > 0$, nýbrž můžeme se omezit na taková ε, která jsou členy vhodně zvolené nulové posloupnosti kladných čísel, na př. na taková ε, která se rovnají některému členu posloupnosti (2,1).

Věta 2,10. *Jsou-li* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *nulové posloupnosti, je také* $\{a_n + b_n\}$ *nulová posloupnost.*

Důkaz. Je-li $\varepsilon > 0$, je také $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$. Tedy existují taková přirozená čísla N_1, N_2, že

$$|a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{pro} \quad n > N_1, \quad |b_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \textit{pro} \quad n > N_2 .$$

Podle věty I 9,7 je $|a_n + b_n| \leqq |a_n| + |b_n|$ pro všecka n a mimo to je $\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$, takže podle věty I 5,5 bude $|a_n + b_n| < \varepsilon$ pro všecka $n > N$, zvolíme-li $N > N_1$, $N > N_2$.

Věta 2,11. *Je-li* $\{a_n\}$ *nulová posloupnost,* $\{b_n\}$ *omezená posloupnost, je* $\{a_nb_n\}$ *nulová posloupnost.*

Důkaz. Existuje takové $M > 0$, že $|b_n| < M$ pro všecka n. Je-li $\varepsilon > 0$, je také $M^{-1}\varepsilon > 0$ podle věty II 6,2, takže existuje takové přirozené číslo N, že pro všecka $n > N$ je $|a_n| < M^{-1}\varepsilon$, tedy podle vět I 5,7 a I 8,1 také $|a_nb_n| < M^{-1}\varepsilon \,.\, M$, t. j. $|a_nb_n| < \varepsilon$ pro všecka $n > N$.

Příklad 2,6. Na základě vět 2,4 a 2,11 se z příkladu 2,1 odvodí indukcí, že

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{1}{n^3}\right\}, \ldots$$

jsou nulové posloupnosti; totéž vyplývá jednodušeji z věty 2,5, neboť pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ je $\dfrac{1}{n^k} \leqq \dfrac{1}{n}$ pro všecka n. Jsou-li $a_1, a_2, a_3, \ldots$ libovolně zvolená čísla, plyne z věty 2,7, že

$$\left\{\frac{a_1}{n}\right\}, \left\{\frac{a_2}{n^2}\right\}, \left\{\frac{a_3}{n^3}\right\}, \ldots$$

jsou nulové posloupnosti, z čehož se odvodí indukcí vzhledem ke k podle věty 2,10, že pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$\left\{\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}\right\}$$

nulová posloupnost.

Přistoupíme nyní ke studiu pojmu *konvergentní posloupnosti*, ohlášenému už na počátku tohoto paragrafu. Stručně, ale ne zcela přesně, můžeme říci, že posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *konvergentní*, jestliže pro všechna dosti velká n se hodnoty členů posloupnosti navzájem velmi málo liší. Přesná definice zní takto: Číselná posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *konvergentní*, jestliže pro každé číslo $\varepsilon > 0$ platí, že existuje takové přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$, že

$$|a_m - a_n| < \varepsilon ,$$

kdykoli oba indexy m, n jsou větší než N.

Příklad 2,7. Číselná posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, dá-li se určit číslo α a přirozené číslo N tak, že $a_n = \alpha$ pro všecka $n > N$. To je zřejmé.

Věta 2,12. *Každá nulová posloupnost je konvergentní.*

Nástin důkazu. Pro všecka dosti velká n se čísla a_n málo liší od nuly, takže se také málo liší mezi sebou.

Důkaz. Budiž $\{a_n\}$ nulová posloupnost a budiž $\varepsilon > 0$. Potom je také $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, takže existuje takové přirozené číslo N, že $|a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro všecka $n > N$. Podle I (9,2) a podle věty I 9,7 je $|a_m - a_n| \leqq |a_m| + |a_n|$ pro všecka m a všecka n; mimo to je $\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Tedy podle věty I 5,5 je $|a_m - a_n| < \varepsilon$, kdykoli $m > N$, $n > N$.

Věta 2,13. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Nástin důkazu. Pro velké indexy n se čísla a_n vzájemně liší o méně než 1, takže je-li k libovolně zvolený velký index, je $|a_n| < |a_k| + 1$ pro všecky velké indexy n. Ostatních indexů n je konečný počet, tak také k nim příslušná a_n mají absolutní velikost zase menší než určité číslo.

Důkaz. Je-li $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, existuje takové přirozené číslo N, že $|a_m - a_n| < 1$, kdykoli: $m > N$, $n > N$. Dosadíme-li $n = N + 1$, máme $|a_m - a_{N+1}| < 1$, takže podle vět I 5,4 a I 9,7 je

$$|a_m| = |(a_m - a_{N+1}) + a_{N+1}| \leqq |a_m - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < \\ < |a_{N+1}| + 1$$

pro všecka $m > N$. Je-li tedy číslo M větší než každé z čísel

$$|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1 ,$$

je $|a_n| < M$ pro všecka n.

Věta 2,14. *Jsou-li $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti, je také $\{a_n + b_n\}$ konvergentní posloupnost.*

Nástin důkazu. Pro velká n se vzájemně liší velmi málo jak čísla a_n, tak i čísla b_n, takže pro velká n se také čísla $a_n + b_n$ jen málo liší mezi sebou.

Důkaz. Je-li $\varepsilon > 0$, je také $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, takže existují taková přirozená čísla N_1, N_2, že

$$|a_m - a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{kdykoli} \quad m > N_1, \quad n > N_1,$$
$$|b_m - b_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{kdykoli} \quad m > N_2, \quad n > N_2.$$

Zvolme $N > N_1$, $N > N_2$. Je-li $m > N$, $n > N$, je

$$|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| = |(a_m - a_n) + (b_m - b_n)| \leqq$$
$$\leqq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Věta 2,15. *Je-li $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, je také $\{-a_n\}$ konvergentní.*

To plyne z I (9,2) a z poznámky I 7,14.

Věta 2,16. *Budiž $\{a_n\}$ neklesající posloupnost a budiž $\varepsilon > 0$. Nechť každému přirozenému číslu N lze přiřadit přirozená čísla $r > N$, $s > N$ tak, že $a_s - a_r \geqq \varepsilon$. Potom posloupnost $\{a_n\}$ je neomezená.*

Nástin důkazu. Znázorníme-li si čísla a_n na číselné ose, pak při zvětšení indexu n obraz čísla a_n na číselné ose se může posunout pouze doprava. U omezené posloupnosti je však $|a_n| < M$ pro všecka n, takže obrazy všech a_n u omezené posloupnosti jsou nalevo od obrazu čísla M, a proto takových posunutí doprava o délku ε nebo o délku ještě větší je u omezené posloupnosti jenom konečný počet.

Důkaz. Nechť naopak existuje takové M, že $|a_n| < M$ pro všecka n. Budeme definovat rekurentně posloupnost

$$\{[k(n), h(n)]\}_{n=1}^{\infty}$$

dvojic přirozených čísel. Nejprve zvolíme čísla $k(1)$, $h(1)$ tak, že $a_{h(1)} - a_{k(1)} \geqq \varepsilon$. Jestliže při určitém n čísla $k(n)$, $h(n)$ jsou už zvolena, pak podle předpokladu existují taková přirozená čísla r, s, že $r > k(n)$, $s > h(n)$, $a_s - a_r \geqq \varepsilon$; položme potom $k(n + 1) = r$, $h(n + 1) = s$. Máme nyní pro každé n nerovnost $a_{h(n)} - a_{k(n)} \geqq \varepsilon$; protože $\varepsilon > 0$, je $a_{h(n)} > a_{k(n)}$ a protože naše posloupnost je neklesající, je $h(n) > k(n)$. Mimo to je však také $k(n + 1) > h(n)$, takže $a_{k(n+1)} \geqq a_{h(n)}$, tedy

$$a_{k(n+1)} - a_{k(n)} \geqq a_{h(n)} - a_{k(n)} \geqq \varepsilon.$$

Z toho plyne indukcí, že

$$a_{k(n)} \geqq a_{k(1)} + (n - 1)\,\varepsilon. \tag{*}$$

Neboť nerovnost (*) je zřejmá pro $n = 1$, a platí-li (*) pro určité n, je také

$$a_{k(n+1)} = a_{k(n)} + [a_{k(n+1)} - a_{k(n)}] \geqq [a_{k(1)} + (n-1)\varepsilon] + \varepsilon =$$
$$= a_{k(1)} + n\varepsilon = a_{k(1)} + [(n+1) - 1]\varepsilon .$$

Tím je obecná platnost nerovnosti (*) dokázána. Na druhé straně je však $M > a_{k(n)}$ pro všecka n, tedy podle (*)

$$M - a_{k(1)} + \varepsilon > n\varepsilon ,$$

avšak to je pro $n > \varepsilon^{-1} . [M - a_{k(1)} + \varepsilon]$ nemožné.

Věta 2,17. *Každá omezená monotonní posloupnost je konvergentní.*

Důkaz. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, je $\{-a_n\}$ neklesající podle věty I 9,1, takže podle věty 2,15 stačí dokazovat za předpokladu, že $\{a_n\}$ je *neklesající* omezená posloupnost. Je-li $\varepsilon > 0$, potom podle věty 2,16 existuje takové přirozené číslo N, kterému nelze přiřadit $r > N$, $s > N$ tak, aby bylo $a_s - a_r \geqq \varepsilon$. Je-li tedy $m > N$, $n > N$, platí obě nerovnosti $a_m - a_n < \varepsilon$, $a_n - a_m < \varepsilon$, a tudíž i nerovnost $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Na základě pojmu konvergentní posloupnosti dospějeme nyní k pojmu iracionálního čísla. Jak jsme už nastínili ve II § 9 na příkladě $\alpha = \sqrt{2}$, nahradíme iracionální číslo α takovou posloupností $\{a_n\}$ racionálních čísel, jejíž členy a_n se pro velké indexy n málo liší od iracionálního čísla α [v případě $\alpha = \sqrt{2}$ je II (8,6) taková posloupnost]. Protože při velkých n se všecka čísla a_n málo liší od určitého čísla α, liší se málo také mezi sebou, t. j. posloupnost $\{a_n\}$ bude konvergentní. Při daném α není ovšem posloupnost $\{a_n\}$ jednoznačně stanovena; je-li $\{a'_n\}$ jiná taková posloupnost, potom při velkých n obě čísla a_n, a'_n se málo liší od téhož čísla α, proto se také málo liší jedno od druhého, a tedy rozdíl $a_n - a'_n$ se při velkých n málo liší od nuly. Abychom na základě takových úvah dospěli k vědecky přesné definici iracionálních čísel, je pak ještě třeba užít výsledků II § 2 o tvoření nových pojmů abstrakcí. Přistoupíme nyní k rozvedení takto nastíněného programu.

Jsou-li $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti, píšeme

$$\{a_n\} \sim \{a'_n\} , \tag{2,12}$$

jestliže $\{a_n - a'_n\}$ je nulová posloupnost. Dokážeme, že (2,12) je pravidlo ekvivalence v množině všech konvergentních posloupností ve smyslu II § 2, t. j. že platí zákony II (2,3); II (2,4); II (2,5). Že platí II (2,3), t. j. že $\{a_n\} \sim \{a_n\}$, plyne z věty 2,1. K důkazu II (2,4) zřejmě stačí zjistit, že platí-li (2,12), platí také $\{a'_n\} \sim \{a_n\}$.

To plyne z věty 2,6, neboť $a'_n - a_n = -(a_n - a'_n)$ podle poznámky I 7,14. Zbývá dokázat II (2,5). Nechť tedy $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$, $\{a''_n\}$ jsou tři takové konvergentní posloupnosti, že platí (2,12) a $\{a'_n\} \sim \{a''_n\}$ neboli že $\{a_n - a'_n\}$ a $\{a'_n - a''_n\}$ jsou nulové posloupnosti. Máme dokázat, že $\{a_n\} \sim \{a''_n\}$ neboli že $\{a_n - a''_n\}$ je nulová posloupnost. To plyne z věty 2,10, neboť $a_n - a''_n = (a_n - a'_n) + (a'_n - a''_n)$.

Věta 2,18. *Jsou-li α, α' racionální čísla a je-li $a_n = \alpha$, $a'_n = \alpha'$ pro každé přirozené číslo n* (takže $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti podle příkladu 2,7), *potom platí* (2,12) *právě tehdy, jestliže $\alpha = \alpha'$.*

Důkaz. Je-li $\alpha = \alpha'$, platí (2,12) podle věty 2,1. Je-li $\alpha \neq \alpha'$ a položíme-li $\varepsilon = |\alpha - \alpha'|$, je $\varepsilon > 0$ a pro žádné n není $|a_n - a'_n| < \varepsilon$; tudíž $\{a_n - a'_n\}$ není nulová posloupnost, t. j. (2,12) neplatí.

Pravidlo ekvivalence (2,12) v množině M všech konvergentních posloupností (jejichž členy jsou racionální čísla) podle II § 2 definuje roztřídění množiny M, při němž dva prvky $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ množiny M náležejí do téže třídy právě tehdy, jestliže platí (2,12). Každý prvek $\{a_n\}$ množiny M je konkretním vyjádřením určitého prvku nové množiny M^*, která vznikne abstrakcí z množiny M. Prvky množiny M^* nazveme *reálná čísla*, takže reálné číslo v podstatě není nic jiného nežli třída mezi sebou ekvivalentních konvergentních posloupností s racionálními členy. Učiníme však určitou dohodu, podle které budou racionální čísla zvláštními případy reálných čísel, podobně jako jsme v II § 3 učinili dohodu, podle které se celá čísla stala zvláštními případy racionálních čísel. Je-li α libovolné racionální číslo, je podle příkladu 2,7 konvergentní ta posloupnost, jejíž všechny členy jsou rovny α, a reálné číslo, jehož konkretním vyjádřením je tato posloupnost, ztotožníme s racionálním číslem α. Že jsme k této definici oprávněni, plyne z věty 2,18, jejíž smysl je ten, že není možné, aby jedno a totéž reálné číslo bylo podle naší dohody ztotožněno se dvěma různými racionálními čísly. Pojem reálných čísel je skutečně novým pojmem proto, že se ukazuje, že jsou reálná čísla, která nejsou racionální (t. j. která podle naší dohody nejsou ztotožněna s žádným racionálním číslem) a která se jmenují *iracionální čísla*. Existence iracionálních čísel byla v podstatě prokázána už v II § 8, ale ještě se k tomu vrátíme (v § 7), protože tehdy jsme ještě neměli přesnou vědeckou definici tohoto pojmu.

Každá konvergentní posloupnost $\{a_n\}$ je konkretním vyjádřením určitého reálného čísla, které označíme

$$\lim_{n \to \infty} a_n \tag{2,13}$$

a nazveme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$.

Poznámka 2,4. Místo písmena n můžeme ovšem užít kteréhokoli jiného písmena, tedy můžeme místo (2,13) psát

$$\lim_{k\to\infty} a_k \quad \text{nebo} \quad \lim_{r\to\infty} a_r \quad \text{a pod.}$$

Nejčastěji užíváme písmena n. Není-li obavy z nedorozumění, můžeme psát stručně $\lim a_n$ místo (2,13), t. j. „$n \to \infty$" vynechat. Značku $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ čteme: limita a_n pro n k nekonečnu (viz poznámku 1,3).

Poznámka 2,5. Význam označení (2,13) je definován pouze v tom případě, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní.

Příklad 2,8. V příkladě 1,4 bylo ukázáno, že $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí posloupnost a v případě 1,5, že $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ je klesající posloupnost. Jestliže zřejmou nerovnost

$$1 < 1 + \frac{1}{n}$$

znásobíme kladným číslem $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, dostaneme

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Protože všecky členy klesající posloupnosti $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ jsou kladné, plyne z věty 1,13, že posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ je omezená; podle věty 1,7 také posloupnost $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je omezená. Podle věty 2,17 jsou obě posloupnosti konvergentní. Mimo to je však

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

a jelikož $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nulová posloupnost, plyne z věty 2,11, že

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \sim \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}.$$

Společná limita obou posloupností se značí e a je ve vyšší matematice velmi důležitá. Dá se dokázat, že e je iracionální číslo.

Je-li α iracionální číslo, potom vztah

$$\lim a_n = \alpha \tag{2,14}$$

neznamená nic jiného, nežli že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a že α je to reálné číslo, jehož konkretním vyjádřením je tato posloupnost. Jestliže však α je racionální číslo a jestliže $\alpha'_n = \alpha$ pro každé přirozené číslo n, znamená (2,14), že platí (2,12), t. j. že $\{a_n - \alpha\}$ je nulová posloupnost. Uvidíme, že pojem rozdílu $a_n - \alpha$ a pojem nulové posloupnosti se dá rozšířit tak, že pro libovolné reálné číslo α a pro libovolné racionální a_n vztah (2,14) bude znamenat, že $\{a_n - \alpha\}$ je nulová posloupnost.

Poznámka 2,6. Neškodí výslovně zaznamenat, že $\lim a_n = 0$ právě tehdy, jestliže $\{a_n\}$ je nulová posloupnost.

Věta 2,19. *Je-li posloupnost $\{b_n\}$ vybrána z konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, je také $\{b_n\}$ konvergentní a je*

$$\lim b_n = \lim a_n .$$

Důkaz. Máme dokázat, že $\{b_n - a_n\}$ je nulová posloupnost, že tedy každému $\varepsilon > 0$ lze přiřadit takové přirozené číslo N, že $|b_n - a_n| < \varepsilon$ pro všecka $n > N$. Podle definice konvergentní posloupnosti však existuje takové N (závislé na ε), že $|a_m - a_n| < \varepsilon$, kdykoli: $n > N$, $m > N$. Je-li nyní $n > N$, je podle definice vybrané posloupnosti a podle věty 1,2 $b_n = a_m$, kde $m \geqq n > N$, takže $|b_n - a_n| = |a_m - a_n| < \varepsilon$.

§ 3. Sčítání a násobení reálných čísel

Věta 3,1. *Jsou-li $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti, je také $\{a_n + b_n\}$ konvergentní posloupnost.*

Důkaz (srov. s důkazem věty 2,10). Je-li $\varepsilon > 0$, je také $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$. Tedy existují taková přirozená čísla N_1, N_2, že

$$|a_m - a_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \quad \text{kdykoli} \quad m > N_1,\ n > N_1\,;$$

$$|b_m - b_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \quad \text{kdykoli} \quad m > N_1,\ n > N_1\,.$$

Pro všecka m, n je

$$(a_m + b_m) - (a_n + b_n) = (a_m - a_n) + (b_m - b_n)\,,$$

a tedy
$$|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| \leqq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| .$$
Zvolíme-li přirozené číslo $N > N_1$, $N > N_2$, je tedy $|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| < \varepsilon$, kdykoli $m > N$, $n > N$.

Jsou-li
$$\alpha = \lim a_n , \quad \beta = \lim b_n \tag{3,1}$$
libovolná dvě reálná čísla, definujeme jejich součet $\alpha + \beta$ na základě věty 3,1 rovnicí
$$\alpha + \beta = \lim (a_n + b_n) . \tag{3,2}$$

Poznámka 3,1. Je třeba ukázat, že definice (3,2) je nezávislá na volbě posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Jestliže však mimo 3,1 je také
$$\alpha = \lim a'_n , \quad \beta = \lim b'_n , \tag{3,3}$$
jsou $\{a_n - a'_n\}$, $\{b_n - b'_n\}$ nulové posloupnosti, a protože
$$(a_n + b_n) - (a'_n + b'_n) = (a_n - a'_n) + (b_n - b'_n) ,$$
plyne z věty 2,10, že také $\{(a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)\}$ je nulová posloupnost, takže
$$\lim (a_n + b_n) = \lim (a'_n + b'_n) .$$

Poznámka 3,2. Dále je třeba ukázat, že jsou-li α, β racionální čísla, splyne definice (3,2) s původní definicí součtu $\alpha + \beta$. To však plyne přímo z toho, že v daném případě můžeme volit $a_n = \alpha$, $b_n = \beta$ pro všecka n.

Věta 3,2. *Jsou-li $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergentní posloupnosti, je také $\{a_n b_n\}$ konvergentní posloupnost.*

Důkaz (srov. s důkazem věty 2,11). Podle věty 2,13 existují taková čísla $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, že $|a_n| < M_1$, $|b_n| < M_2$ pro všecka n. Je-li $\varepsilon > 0$, je také $\frac{1}{2}M_1^{-1}\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2}M_2^{-1}\varepsilon > 0$, takže existují taková přirozená čísla N_1, N_2, že za prvé $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}M_2^{-1}\varepsilon$, kdykoli: $m > N_1$, $n > N_1$, za druhé $|b_m - b_n| < \frac{1}{2}M_1^{-1}\varepsilon$, kdykoli: $m > N_2$, $n > N_2$. Zvolme přirozené číslo $N > N_1$, $N > N_2$. Protože pro všecka m, n je
$$a_m b_m - a_n b_n = a_m(b_m - b_n) + b_n(a_m - a_n) ,$$
tedy
$$|a_m b_m - a_n b_n| \leqq |a_m| \,.\, |b_m - b_n| + |b_n| \,.\, |a_m - a_n| ,$$
je pro $m > N$, $n > N$
$$|a_m b_m - a_n b_n| < M_1 \,.\, \tfrac{1}{2}M_1^{-1}\varepsilon + M_2 \,.\, \tfrac{1}{2}M_2^{-1}\varepsilon = \varepsilon .$$

Jsou-li (3,1) libovolná dvě reálná čísla, definujeme jejich součin $\alpha\beta$ na základě věty 3,2 rovnicí

$$\alpha\beta = \lim (a_n b_n) . \tag{3,4}$$

Poznámka 3,3. Je třeba ukázat, že definice (3,4) je nezávislá na volbě posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Jestliže však mimo (3,1) platí také (3,3), jsou $\{a_n - a'_n\}$, $\{b_n - b'_n\}$ nulové posloupnosti. Podle věty 2,13 jsou $\{a_n\}$, $\{b'_n\}$ omezené posloupnosti, takže podle věty 2,11 jsou $\{a_n(b_n - b'_n)\}$, $\{b'_n(a_n - a'_n\})$ nulové posloupnosti, a protože

$$a_n b_n - a'_n b'_n = a_n(b_n - b'_n) + b'_n(a_n - a'_n) ,$$

je podle věty 2,10 také $\{a_n b_n - a'_n b'_n\}$ nulová posloupnost, takže

$$\lim (a_n b_n) = \lim (a'_n b'_n) .$$

Poznámka 3,4. Jsou-li α, β racionální čísla, můžeme ve (3,1) volit $a_n = \alpha$, $b_n = \beta$ pro všecka n. Z toho přímo plyne, že v daném případě definice (3,4) splyne s původní definicí součinu $\alpha\beta$.

Poznámka 3,5. Je-li

$$\alpha = \lim a_n \tag{3,5}$$

libovolné reálné číslo a je-li c racionální číslo, je $c = \lim c_n$, jestliže $c_n = c$ pro všecka n, takže z našich definic plyne, že

$$\alpha + c = \lim (a_n + c) , \quad c\alpha = \lim (c a_n) .$$

Součet

$$s_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$$

a součin

$$p_k = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$$

libovolného počtu k (k přirozené číslo) sčítanců nebo činitelů můžeme nyní i v případě libovolných reálných sčítanců nebo činitelů definovat rekurentními vzorci

$$s_1 = \alpha_1 , \quad s_{k+1} = s_k + \alpha_{k+1} ;$$

$$p_1 = \alpha_1 , \quad p_{k+1} = p_k \cdot \alpha_{k+1} .$$

Věta 3,3. *Je-li*

$$\lim a_1(n) = \alpha_1, \ \lim a_2(n) = \alpha_2, \ldots, \lim a_k(n) = \alpha_k$$

(k přirozené číslo), *je také*

$$\lim_{n\to\infty} [a_1(n) + a_2(n) + \ldots a_k(n)] = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k ,$$

$$\lim_{n\to\infty} [a_1(n) \, . \, a_2(n) \ldots a_k(n)] = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k .$$

Důkaz indukcí vzhledem ke k čtenář snadno provede sám.

Věta 3,4. *Věty* I 2,1; I 2,2; I 2,3; I 2,4; I 2,5; I 2,6; I 2,7; I 2,9; I 3,1; I 3,2; I 3,3; I 3,4; I 3,5; I 3,6; I 3,7; I 3,8; I 3,9; I 3,11; I 3,16; I 3,17 *jsou správné pro libovolná reálná čísla.*

To plyne z vět II 4,1, II 4,2 a 3,3.

Je-li α libovolné reálné číslo, definujeme opačné číslo $-\alpha$ rovností

$$-\alpha = (-1) \cdot \alpha \,,$$

což je v případě racionálního α v souladu s původní definicí.

Poznámka 3,6. Je-li $\alpha = \lim a_n$, je $-\alpha = \lim(-a_n)$ podle poznámky 3,5.

Věta 3,5. *Věty* I 7,4; I 7,5; I 7,9 *a* I 8,4; *jsou správné pro libovolná reálná čísla.*

Důkaz. U vět I 7,4; I 7,5 a I 8,4 to plyne z věty II 4,4 podle věty 3,3 a poznámky 3,6. U věty I 7,9 stačí podle věty 3,3 a poznámky 3,6 provést znovu důkaz udaný na str. 47.

Věta 3,6. *Je-li α reálné číslo různé od nuly, je možné volit $\{a_n\}$ tak, že $\alpha = \lim a_n$ a že $a_n \neq 0$ pro všecka n.*

Důkaz. Zvolme $\{c_n\}$ tak, že $\alpha = \lim c_n$. Je-li možné z $\{c_n\}$ vybrat $\{a_n\}$ tak, že $a_n \neq 0$ pro všecka n, plyne naše věta z věty 2,19. To je však možné vždycky, neboť jinak by bylo možno z $\{c_n\}$ vybrat $\{b_n\}$ tak, že by bylo $b_n = 0$ pro všecka n; potom by bylo $\lim b_n = 0$, ale to odporuje větě 2,19.

Věta 3,7. *Je-li α reálné číslo různé od nuly a je-li $\alpha = \lim a_n$, existuje takové kladné racionální číslo c, že počet těch indexů r, pro které je snad $|a_r| \leqq c$, je konečný.*

Důkaz. Předpokládejme, že tomu tak není. Potom každé kladné racionální číslo c má tu vlastnost (nazveme ji vlastnost V), že je $|a_r| \leqq c$ pro nekonečně mnoho indexů r. Definujme nyní rekurentně posloupnost $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel takto: Protože číslo 1 má vlastnost V, můžeme zvolit $k(1)$ tak, že $|a_{k(1)}| \leqq 1$. Jestliže pro určité n bylo už číslo $k(n)$ zvoleno, uvážíme, že číslo $(n+1)^{-1}$ má vlastnost V; můžeme tedy zvolit číslo $k(n+1)$ tak, že za prvé bude $k(n+1) > k(n)$ a že za druhé bude $|a_{k(n+1)}| < (n+1)^{-1}$. Podle věty 1,1 je $\{k(n)\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, takže posloupnost $\{b_n\} = \{a_{k(n)}\}$ je vybrána z $\{a_n\}$. Je však $|b_n| \leqq n^{-1} = \dfrac{1}{n}$ pro všecka n, takže z věty 2,5 a z příkladu 2,1 plyne $\lim b_n = 0$; to je však nemožné, neboť podle věty 2,19 je $\lim b_n = \alpha$.

Věta 3,8. *Je-li $\{a_n\}$ konvergentní posloupnost, je-li $a_n \neq 0$ pro všecka n a je-li* $\lim a_n \neq 0$, *existuje takové kladné číslo p, že $|a_n| > p$ pro všecka n.*

To je snadný důsledek věty 3,7.

Věta 3,9. *Za předpokladu věty* 3,8 *je $\{a_n^{-1}\}$ konvergentní posloupnost.*

Důkaz. Podle věty 3,8 existuje takové racionální číslo $p > 0$, že $|a_n| > p$ pro všecka n. Podle vět II 6,2 a II 6,3 je $p^{-1} > 0$, $|a_n|^{-1} < p^{-1}$ pro všecka n. Je-li nyní $\varepsilon > 0$, je $p^2\varepsilon > 0$, takže existuje takové přirozené číslo N, že $|a_m - a_n| < p^2\varepsilon$, kdykoli: $m > N$, $n > N$. Avšak pro všecka m, n je

$$a_m^{-1} - a_n^{-1} = \frac{a_n}{a_m a_n} - \frac{a_m}{a_m a_n} = -\frac{a_m - a_n}{a_m a_n},$$

takže pro $m > N$, $n > N$ je

$$|a_m^{-1} - a_n^{-1}| = |a_m|^{-1} \,.\, |a_n|^{-1} \,.\, |a_m - a_n| < p^{-1} \,.\, p^{-1} \,.\, p^2\varepsilon\,,$$

t. j. $|a_m^{-1} - a_n^{-1}| < \varepsilon$.

Je-li α reálné číslo různé od nuly, zvolíme podle věty 3,6 $\{a_n\}$ tak, že $\lim a_n = \alpha$ a že $a_n \neq 0$ pro všecka n. Podle věty 3,9 existuje reálné číslo $\lim a_n^{-1}$, které označíme α^{-1} a nazveme *převráceným číslem* k číslu α. Z definice násobení plyne $\alpha^{-1} \,.\, \alpha = 1$, takže $\alpha^{-1} \neq 0$ a číslo α^{-1} je kořenem rovnice $\alpha x = 1$. Obráceně, je-li x takové reálné číslo, že $\alpha x = 1$, je

$$x = 1 \,.\, x = (\alpha^{-1}\alpha) \,.\, x = \alpha^{-1} \,.\, (\alpha x) = \alpha^{-1} \,.\, 1 = \alpha^{-1}\,,$$

takže číslo α^{-1} je *jediným* kořenem rovnice $\alpha x = 1$. Z toho plyne, že číslo α^{-1} je jednoznačně určeno číslem α (ačkoli posloupnost $\{a_n\}$ nebyla jednoznačně určena) a že v případě racionálního α nová definice symbolu α^{-1} je v souladu s definicí původní.

Věta 3,10. *Věty* I 2,8; I 3,10 *a* II 5,3 *jsou správné pro libovolná reálná čísla.*

Důkaz. Je jasné, že důkaz věty II 5,3 zůstane v platnosti, i když místo čísel racionálních uvažujeme reálná, t. j. jsou-li α, β reálná čísla a je-li $\alpha \neq 0$, má rovnice $\alpha \,.\, x = \beta$ právě jeden kořen $x = \alpha^{-1} \,.\, \beta$. Volíme-li $\beta = 0$, vychází, že je-li součin dvou reálných čísel roven nule a je-li jeden činitel od nuly různý, musí druhý činitel být roven nule, t. j. věta I 2,8 je správná pro reálná čísla. Indukcí vzhledem k počtu činitelů se z toho snadno odvodí totéž i o větě I 3,10.

§ 4. Nerovnosti mezi reálnými čísly

Než přejdeme k vlastnímu obsahu tohoto paragrafu, zaveďme jedno rčení, které nám pomůže vyjadřovat se stručně a přesně. Je-li V_n nějaká vlastnost, která má smysl pro každé přirozené číslo n (pro každé n vlastnost V_n buďto je, nebo není splněna), řekneme, že vlastnost V_n je splněna pro *skoro všecka n*, jestliže těch n, pro která vlastnost V_n snad splněna není, je jenom konečný počet. (Při tom není vyloučeno, že vlastnost V_n je splněna pro všecka n vůbec.) Je-li na př.

$$a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ a_5 = 2 \quad \text{atd.}, \tag{4,1}$$

je $a_n > 0$ pro skoro všecka n. Tedy výrok, že vlastnost V_n je splněna pro skoro všecka n, znamená, že lze určit přirozené číslo N tak, že vlastnost V_n je jistě splněna pro všecka $n > N$ (ať již pro ta n, která nejsou větší než N a kterých je jen konečný počet, je splněna či není).

Poznámka 4,1. Máme-li *konečný počet* takových vlastností přirozených čísel, z nichž každá jednotlivá je splněna pro skoro všecka n, je první vlastnost splněna pro všecka $n > N_1$, druhá pro všecka $n > N_2$ atd. Mezi konečně mnoha čísly N_1, N_2 atd. je jedno největší, které označíme N; pro všecka $n > N$ je potom splněna *každá* z našich vlastností, t. j. výrok, že *každá* z těch vlastností je splněna, je správný pro skoro všecka n.

Poznámka 4,2. Podle poznámky 2,2 můžeme definici nulové posloupnosti vyslovit takto: Posloupnost $\{a_n\}$ se jmenuje nulová, jestliže, ať jakkoli zvolíme racionální číslo $\varepsilon > 0$, je $|a_n| < \varepsilon$ pro skoro všecka n.

Na počátku tohoto paragrafu zavedené rčení „pro skoro všecka n" je užitečné v mnohých úvahách vyšší matematiky. Naproti tomu rčení, které nyní zavedeme, má pouze přechodný význam a nebudeme ho v pozdějším textu knihy dále užívat. Posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}$ nazveme *výrazně kladnou*, lze-li udat takové kladné racionální číslo v, že nerovnost $a_n > v$ je splněna pro skoro všecka n. Z poznámky 4,2 plyne, že nulová posloupnost nemůže být výrazně kladná, neboť je-li $\{a_n\}$ nulová posloupnost a je-li v jakékoli kladné racionální číslo, je $a_n < v$ pro skoro všecka n, takže nemůže být $a_n > v$ pro skoro všecka n. Tedy (viz větu 2,7) posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ není výrazně kladná, ačkoli každý její člen je číslo kladné. Naproti tomu posloupnost (4,1) je výrazně kladná, ačkoli má tři členy, které nejsou kladné.

Všimněme si nyní tří vlastností výrazně kladných posloupností.

[1] *Nulová posloupnost nemůže být výrazně kladná.* Toho jsme si už povšimli.

[2] *Je-li c racionální číslo a je-li $a_n = c$ pro všecka* (nebo i jen skoro všecka) n, *je právě tehdy $\{a_n\}$ výrazně kladná, jestliže $c > 0$.* To je zřejmé.

[3] *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ výrazně kladná a je-li posloupnost $\{c_n\}$ nulová, je posloupnost $\{a_n + c_n\}$ výrazně kladná.* Neboť jelikož $\{a_n\}$ je výrazně kladná, existuje takové racionální $v > 0$, že

$$a_n > v \tag{4,2}$$

pro skoro všecka n. Podle věty II 6,11 můžeme určit racionální u tak, že $0 < u < v$. Potom je $v - u > 0$, a jelikož $\{c_n\}$ je nulová, platí pro skoro všecka n nerovnost $|c_n| < v - u$, tedy také $- c_n < v - u$, tedy podle věty I 9,1

$$c_n > u - v\,. \tag{4,3}$$

Podle poznámky 4,1 jsou pro skoro všecka n splněny obě nerovnosti (4,2), (4,3), tedy podle zákona monotonie sčítání také nerovnost $a_n + c_n > u$. Protože $u > 0$, je důkaz skončen.

Pojmu výrazně kladné posloupnosti užijeme k přesné definici kladného reálného čísla. Na číselné ose je reálné číslo α znázorněno určitým bodem, který leží napravo od počátku, je-li číslo α kladné; potom můžeme na číselné ose zvolit mezi počátkem a mezi obrazem čísla α takový bod, který je obrazem *racionálního* kladného čísla v. Jestliže $\alpha = \lim a_n$, pak pro velké indexy n leží obrazy čísel a_n v blízkosti obrazu čísla α, tedy napravo od obrazu čísla v, takže $a_n > v$ pro všecka velká n. Tím jsme vedeni k následující definici.

Reálné číslo $\alpha = \lim a_n$ nazveme *kladné*, je-li $\{a_n\}$ výrazně kladná posloupnost. Je-li také $\alpha = \lim a'_n$, je $\{a'_n - a_n\}$ nulová posloupnost a je $a'_n = a_n + (a'_n - a_n)$ pro všecka n. Tedy ze [3] plyne, že pro každé reálné α je jednoznačně určeno, zdali je či není kladné (ačkoli posloupnost $\{a_n\}$ není jednoznačně určena). Je-li α racionální, můžeme volit $a_n = \alpha$ pro všecka n, takže ze [2] plyne, že racionální číslo je kladné podle nové definice právě tehdy, je-li kladné podle původní definice. Zejména tedy číslo 0 není kladné ani ve smyslu nové definice, což je vyjádřeno vlastností [1].

Příklad 4,1. Budiž $\{a_n\}$ omezená neklesající posloupnost kladných racionálních čísel. Podle věty 2,17 posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní; budiž $\alpha = \lim a_n$. Zvolíme-li kladné racionální číslo v menší než a_1, je $a_n > v$ pro všecka n, takže posloupnost $\{a_n\}$ je výrazně kladná a číslo α je kladné. Na př. číslo (viz příklad 2,8)

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je kladné, protože $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí posloupnost kladných racionálních čísel. Dokážeme, že

$$\frac{1}{e} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n . \tag{*}$$

Podle příkladu 2,8 je totiž

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

a všecka čísla $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ jsou kladná, takže

$$\frac{1}{e} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \lim \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n+1} .$$

Avšak

$$\left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} ,$$

takže $\left\{\left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ splyne s $\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=2}^{\infty}$.

Věta 4,1. *Součet a součin dvou kladných reálných čísel jsou kladná reálná čísla.*

Důkaz. Buďtež $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$ dvě kladná reálná čísla. Podle definice (viz též poznámku 4,1) existují taková racionální čísla $u > 0$, $v > 0$, že pro skoro všecka n je $0 < u < a_n$, $0 < v < b_n$, tedy podle zákona monotonie sčítání a násobení také $0 < u + v < a_n + b_n$, $0 < uv < a_n b_n$ pro skoro všecka n, t. j. posloupnosti $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ jsou výrazně kladné, a jelikož $\alpha + \beta = \lim (a_n + b_n)$, $\alpha\beta = \lim (a_n b_n)$, jsou $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ kladná reálná čísla.

Věta 4,2. *Je-li α reálné číslo různé od nuly, je z obou čísel α, $-\alpha$ právě jedno kladné.*

Důkaz. Protože číslo $\alpha + (-\alpha) = 0$ není kladné, nemohou podle věty 4,1 být obě čísla α, $-\alpha$ kladná, takže stačí dokázat, že aspoň jedno z nich je kladné. Podle věty 3,6 můžeme položit $\alpha = \lim a_n$, kde $a_n \neq 0$ pro všecka n. Protože $a_n \neq 0$ pro všecka n, můžeme z posloupnosti $\{a_n\}$ vybrat posloupnost $\{b_n\}$ tak, že buďto

$$b_n > 0 \quad \text{pro všecka } n, \tag{*}$$

nebo

$$-b_n > 0 \quad \text{pro všecka } n\,. \tag{**}$$

Podle věty 2,19 je $\alpha = \lim b_n$, tedy podle poznámky 3,6 je $-\alpha = \lim(-b_n)$. Podle věty 3,7 existuje takové kladné racionální číslo c, že $|b_n| > c$ pro skoro všecka n. V případě (*) je $b_n > c > 0$ pro skoro všecka n, posloupnost $\{b_n\}$ je výrazně kladná a číslo α je kladné; v případě (**) je $-b_n > c > 0$ pro skoro všecka n, posloupnost $\{-b_n\}$ je výrazně kladná a číslo $-\alpha$ je kladné.

Pravíme, že reálné číslo α je *záporné*, jestliže reálné číslo $-\alpha$ je kladné, což pro racionální α souhlasí s původní definicí. Číslo 0 není ani kladné, ani záporné, takže podle věty 4,2 pro každé reálné číslo α nastane právě jeden ze tří případů: $\alpha = 0$, α je kladné, α je záporné.

Reálné číslo nazveme *nezáporné*, je-li buďto kladné, nebo rovné nule.

Nyní máme vše připraveno k tomu, abychom zavedli *přirozené uspořádání* množiny všech reálných čísel, t. j. abychom pro reálná čísla α, β definovali, kdy je $\alpha < \beta$ neboli $\beta > \alpha$. Definujeme, že $\alpha < \beta$ znamená, že číslo $\beta - \alpha$ je kladné. Pro racionální α, β je naše definice podle věty I 9,4 v souladu s původní definicí. Protože $\beta - \alpha = 0$ znamená totéž jako $\alpha = \beta$ a protože $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$, plyne z věty 4,2, že pro reálná čísla platí zákon trichotomie I 5,1. Protože $\gamma - \alpha = (\beta - \alpha) + (\gamma - \beta)$, plyne z věty 4,1, že pro reálná čísla platí transitivní zákon I 5,2. Protože $\alpha - 0 = \alpha$, $0 - \alpha = -\alpha$, znamená i v oboru všech reálných čísel nerovnost $\alpha > 0$, že číslo α je kladné, nerovnost $\alpha < 0$, že číslo α je záporné.

Věta 4,3. *Věty* I 5,4; I 5,5; I 5,6; I 5,7; I 5,8; I 5,9; I 9,1 *a* I 9,4 *jsou správné pro libovolná reálná čísla.*

Důkaz. Protože $(\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) = \beta - \alpha$, plyne věta I 5,4 z věty 4,1. Protože $(\beta - \alpha)\gamma = \beta\gamma - \alpha\gamma$, plyne věta I 5,6 z věty 4,1. Z věty I 5,4 plyne věta I 5,5 a z věty I 5,6 věta I 5,7 opakováním dřívějších důkazů. U vět I 5,8 a I 5,9 zůstanou v platnosti jejich důkazy indukcí podané na str. 38 a 39. Správnost vět I 9,1 a I 9,4 je zřejmá.

Pro libovolné reálné číslo α položíme: $|\alpha| = \alpha$, je-li $\alpha \geqq 0$; $|\alpha| = -\alpha$, je-li $\alpha < 0$. Tím je pojem absolutní velikosti rozšířen na libovolná čísla tak, že platí:

Věta 4,4. *Vzorce* I (7,2); I (7,3); I (7,4); I (8,1) (i s pravidlem pro znaménko $\pm$); I (9,1); I (9,2); I (9,3) *a věty* I 8,1; I 8,2; I 9,3 *a* I 9,6 *jsou správné pro libovolná reálná čísla.*

Důkaz. Správnost vzorců, s výjimkou vzorce I (8,1), je jasná. Protože $(-\alpha) \,.\, \beta = \alpha \,.\, (-\beta) = -(\alpha\beta)$, $(-\alpha) \,.\, (-\beta) = \alpha\beta$, soudíme z věty 4,1 jednak, že platí věta I 8,2, jednak že je $|\alpha\beta| = |\alpha| \,.\, |\beta|$. Z toho plyne, že vzorec I (8,1) (i s pravidlem pro znaménko $\pm$) platí pro $n = 2$ a jeho obecná platnost se dokáže indukcí. Věta I 8,1 je důsledkem vzorce I (8,1). U vět I 9,3 a I 9,6 stačí opakovat dřívější důkaz.

Věta 4,5. *Jsou-li α, β reálná čísla a je-li $\alpha < \beta$, existuje takové racionální číslo z, že $\alpha < z < \beta$.*

Důkaz. Budiž

$$\alpha = \lim a_n \,, \quad \beta = \lim b_n \,, \tag{4,4}$$

takže také $\beta - \alpha = \lim (b_n - a_n)$. Protože $\alpha < \beta$, je $\beta - \alpha$ kladné reálné číslo, takže posloupnost $\{b_n - a_n\}$ je výrazně kladná, t. j. existuje takové racionální $v > 0$, že $b_n - a_n > v$ pro skoro všecka n. Položme $u = \frac{1}{4}v$, takže také u je kladné racionální číslo a zaznamenejme si, že existuje takové přirozené číslo N_1, že

$$b_n - a_n > 4u \quad \text{pro všecka } n > N_1 \,. \tag{4,5}$$

Posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní, takže (protože $u > 0$) existují taková přirozená čísla N_2, N_3, že

$$\begin{gathered} |a_m - a_n| < u, \text{ kdykoli: } m > N_2,\ n > N_2 \,; \\ |b_m - b_n| < u, \text{ kdykoli: } m > N_3,\ n > N_3 \,. \end{gathered} \tag{4,6}$$

Zvolme nyní určité přirozené číslo k tak, že

$$k > N_1,\ k > N_2,\ k > N_3 \,.$$

Podle (4,5) je $b_k - a_k > 4u$; přičteme-li na obou stranách číslo $a_k - 2u$, dostaneme $b_k - 2u > a_k + 2u$, takže podle věty II 6,11 existuje takové racionální číslo z, že

$$a_k + 2u < z < b_k - 2u \,. \tag{4,7}$$

Pro všecka $n > k$ máme podle (4,6) nerovnosti

$$|a_k - a_n| < u \,, \quad |b_k - b_n| < u \,,$$

tedy také nerovnosti

$$a_n - a_k < u \,, \quad b_k - b_n < u \,;$$

k první z nich přičteme na obou stranách číslo $a_k + u$, ke druhé číslo $b_n - 2u$ a dostaneme

$$a_n + u < a_k + 2u \quad \text{pro všecka } n > k\ ,$$

$$b_k - 2u < b_n - u \quad \text{pro všecka } n > k\ ,$$

takže podle (4,7) je

$$a_n + u < z < b_n - u \quad \text{pro všecka } n > k\ . \tag{4,8}$$

Podle (4,4) plyne nyní z poznámek 3,5 a 3,6, že

$$z - \alpha = \lim (z - a_n)\ , \quad \beta - z = \lim (b_n - z)\ .$$

Podle (4,8) je však pro skoro všecka n jednak $z - a_n > u > 0$, jednak $b_n - z > u > 0$. Tedy posloupnosti $\{z - a_n\}$, $\{b_n - z\}$ jsou výrazně kladné, takže reálná čísla $z - \alpha$, $\beta - z$ jsou kladná, t. j. $\alpha < z < \beta$; tím je důkaz skončen.

Věta 4,6. *Jsou-li α, β reálná čísla a je-li $\alpha < \beta$, existuje nekonečně mnoho takových racionálních čísel z, že $\alpha < z < \beta$.*

To plyne z věty 4,5 stejně jako věta II 6,12 z věty II 6,11.

Věta 4,7. *Je-li α libovolné reálné číslo, existuje takové přirozené číslo n, že $-n < \alpha < n$.*

Důkaz. Protože $-1 < 0 < 1$, plyne ze zákona monotonie sčítání, že $\alpha - 1 < \alpha < \alpha + 1$. Tedy podle věty 4,5 existují taková racionální čísla u, v, že $\alpha - 1 < u < \alpha$, $\alpha < v < \alpha + 1$, tedy $u < \alpha < v$. Podle věty II 6,9 existují taková přirozená čísla h, k, že $-h < u$, $v < k$. Je-li n přirozené číslo větší než h i než k, je $-n < -h < u < \alpha$, $n > k > v > \alpha$, tedy $-n < \alpha < n$.

Nyní se snadno přenese důkaz věty II 6,13 na případ libovolného reálného čísla α. Celé číslo n z věty II 6,13 se jmenuje *celá část* reálného čísla α a značí se často $[\alpha]$ nebo také $E(\alpha)$.

Věta 4,8. *Je-li $\alpha = \lim a_n$ a je-li $\varepsilon > 0$, je $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ pro skoro všecka n.*

Poznámka 4,3. Pro racionální α je nám to známo z § 2; pro iracionální α jsme tehdy ještě neměli definováno, co znamená $|a_n - \alpha|$.

Důkaz věty 4,8. Podle věty 4,5 existuje takové racionální číslo v, že $0 < v < \varepsilon$. Položme $u = \frac{1}{2}v$, takže také u je kladné racionální číslo. Protože posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, existuje takové přirozené číslo N, že $|a_m - a_n| < u$, kdykoli: $m > N$, $n > N$. Zvolme nyní určitý index $m > N$. Podle poznámek 3,5 a 3,6 je

$$\alpha - a_m + 2u = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_m + 2u)\ ,$$

$$a_m - \alpha + 2u = \lim_{n\to\infty} (a_m - a_n + 2u)\ .$$

Pro $n > N$ platí nerovnost $|a_m - a_n| < u$, tedy také nerovnosti $u > a_m - a_n$, $u > a_n - a_m$. Přičteme-li v první nerovnosti na obou stranách číslo $a_n - a_m + u$, ve druhé číslo $a_m - a_n + u$, dostaneme, že pro všecka $n > N$ je jednak $a_n - a_m + 2u > u$, jednak $a_m - a_n + 2u > u$. To znamená, že obě posloupnosti $\{a_n - a_m + 2u\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_m - a_n + 2u\}_{n=1}^{\infty}$ jsou výrazně kladné, takže reálná čísla $\alpha - a_m + 2u = 2u - (a_m - \alpha)$, $a_m - \alpha + 2u = 2u - (\alpha - a_m)$ jsou kladná, a tedy $2u > a_m - \alpha$, $2u > \alpha - a_m$, tudíž také $2u > |a_m - \alpha|$. Protože $\varepsilon > v = 2u$, je $|a_m - \alpha| < \varepsilon$ pro každé $m > N$; tím je důkaz skončen.

§ 5. Posloupnosti reálných čísel

Jsou-li nyní členy posloupnosti $\{a_n\}$ libovolná reálná čísla, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *nulová*, jestliže pro každé číslo $\varepsilon > 0$ platí, že existuje takové přirozené číslo N (závislé na ε), že $|a_n| < \varepsilon$ pro všecka $n > N$; dále pravíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *konvergentní*, jestliže pro každé číslo $\varepsilon > 0$ platí, že existuje takové přirozené číslo N (závislé na ε), že $|a_m - a_n| < \varepsilon$, kdykoli oba indexy m, n jsou větší než N.

Poznámka 5,1. Jsou-li všecka a_n racionální čísla, je mezi nynější definicí a definicí z § 2 ten rozdíl, že nyní je ε libovolné kladné reálné číslo, kdežto v § 2 jsme uvažovali jen *racionální* čísla; na tom však nezáleží, neboť ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ podle věty 4,5 existuje takové racionální ε', že $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Poznámka 5,2. Podobně říkáme i v případě libovolných reálných a_n, že posloupnost $\{a_n\}$ je *omezená*, existuje-li takové reálné číslo M, že $|a_n| < M$. Podle věty 4,7 můžeme předpokládat, že M je přirozené číslo, takže se nedostáváme do rozporu s § 1, kde jsme měli na mysli jen racionální M.

Je jasné, že platí:

Věta 5,1. *Věty* 1,1; 1,4 *až* 1,14; 2,1 *až* 2,6; 2,8 *až* 2,18 *jsou správné pro posloupnosti s libovolnými reálnými členy.*

Jsou-li $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha'_n\}$ dvě konvergentní posloupnosti reálných čísel, definujeme vztah

$$\{\alpha_n\} \sim \{\alpha'_n\} \tag{5,1}$$

stejně, jako jsme to učinili v § 2 pro posloupnosti s racionálními členy: (5,1) znamená, že $\{\alpha_n - \alpha'_n\}$ je nulová posloupnost. Jako v § 2 platí i nyní, že (5,1) je pravidlo ekvivalence, a je patrné, že věta 2,18 zůstane v platnosti, nahradíme-li slovo racionální slovem reálný.

Je-li $\{\alpha_n\}$ posloupnost reálných čísel a je-li α reálné číslo, nazveme číslo α limitou posloupnosti $\{\alpha_n\}$ a označíme je

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \tag{5,2}$$

nebo prostě $\lim \alpha_n$, je-li posloupnost $\{\alpha_n\}$ konvergentní a je-li $\{\alpha_n\} \sim \sim \{\alpha\}_1^\infty$, kde $\{\alpha\}_1^\infty$ znamená posloupnost (konvergentní podle příkladu 2,7), jejíž všecky členy jsou rovny číslu α. Jsou-li α, β dvě reálná čísla a je-li $\lim \alpha_n = \alpha$, $\lim \alpha_n = \beta$, je $\{\alpha_n\} \sim \{\alpha\}_1^\infty$, $\{\alpha_n\} \sim \sim \{\beta\}_1^\infty$, a tedy $\{\alpha\}_1^\infty \sim \{\beta\}_1^\infty$, takže podle věty 2,18 (se změnou slova racionální na slovo reálný) je $\alpha = \beta$.

Je-li $\{\alpha_n\}$ konvergentní posloupnost *racionálních* čísel, existuje takové reálné číslo α, že $\lim a_n = \alpha$ ve smyslu definice z § 2; je třeba dokázat, že $\lim a_n = \alpha$ také ve smyslu nynější definice. To plyne z věty 4,8, která neříká nic jiného, než že $\{a_n - \alpha\}$ je nulová posloupnost neboli že $\{a_n\} \sim \{\alpha\}_1^\infty$.

Můžeme také říci, že je-li $\{\alpha_n\}$ posloupnost reálných čísel a je-li α reálné číslo, pak $\lim \alpha_n = \alpha$ znamená, že každému $\varepsilon > 0$ lze přiřadit přirozené číslo N tak, že $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ pro všecka $n > N$. Neboť to je totéž jako říci, že $\lim \alpha_n = \alpha$ znamená, že $\{\alpha_n - \alpha\}$ je nulová posloupnost; přitom není třeba výslovně předpokládat, že $\{\alpha_n\}$ je konvergentní; neboť $\{\alpha_n - \alpha\}$ je konvergentní podle věty 2,12, $\{\alpha\}_1^\infty$ je konvergentní podle příkladu 2,7, a jelikož $\alpha_n = (\alpha_n - \alpha) + \alpha$, je $\{\alpha_n\}$ konvergentní podle věty 2,14.

Věta 5,2. *Posloupnost $\{\alpha_n\}$ reálných čísel je konvergentní právě tehdy, jestliže má limitu.*

Důkaz. Je jasné, že posloupnost, která má limitu, je konvergentní. Obráceně předpokládejme, že posloupnost $\{\alpha_n\}$ je konvergentní. Pro každé n můžeme podle věty 4,5 zvolit racionální číslo a_n tak, že $\alpha_n < a_n < \alpha_n + \frac{1}{n}$. Je tedy $0 < a_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$ pro všecka n, takže posloupnost $\{a_n - \alpha_n\}$ je nulová podle věty 2,5. Protože $a_n = (a_n - \alpha_n) + \alpha_n$, je $\{a_n\}$ konvergentní podle vět 2,12 a 2,14. Protože $\{a_n - \alpha_n\}$ je nulová, je $\{\alpha_n\} \sim \{a_n\}$. Protože $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel, existuje takové reálné číslo α, že $\{a_n\} \sim \{\alpha\}_1^\infty$. Tedy $\{\alpha_n\} \sim \{\alpha\}_1^\infty$, t. j. $\lim \alpha_n = \alpha$.

Věta 5,3. *Je-li $\alpha_n = \alpha$ pro skoro všecka n, je* $\lim \alpha_n = \alpha$, neboť posloupnost $\{\alpha_n - \alpha\}$ je nulová podle věty 2,1.

Věta 5,4. *Je-li $\alpha_n = \beta_n$ pro skoro všecka n a je-li* $\lim \alpha_n = \alpha$, *je také* $\lim \beta_n = \alpha$, neboť je zřejmé, že je-li $\{\alpha_n - \alpha\}$ nulová posloupnost, platí totéž o $\{\beta_n - \alpha\}$.

Věta 5,5. *Je-li* $\lim \alpha_n = \alpha$ *a je-li posloupnost* $\{\beta_n\}$ *vybrána z posloupnosti* $\{\alpha_n\}$, *je také* $\lim \beta_n = \alpha$.

To je totéž jako věta 2,19; tehdy jsme měli na mysli pouze posloupnosti s racionálními členy, ale pro případ libovolných reálných členů platí týž důkaz. Je však nyní možné dokazovat jednodušeji: jelikož $\lim \alpha_n = \alpha$, je $\{\alpha_n - \alpha\}$ nulová posloupnost, takže podle věty 2,3 také $\{\beta_n - \alpha\}$ je nulová posloupnost, tedy $\lim \beta_n = \alpha$.

Věta 5,6. *Monotonní posloupnost má limitu právě tehdy, jestliže je omezená.*

To plyne z vět 2,13; 2,17 a 5,2.

Věta 5,7. *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat posloupnost, která má limitu.*

To plyne z vět 1,5; 1,9 a 5,6.

Věta 5,8. *Je-li* $\lim \alpha_n = \alpha$, $\lim \beta_n = \beta$, *je také*

$$\lim (\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \beta, \qquad \lim (\alpha_n\beta_n) = \alpha\beta.$$

Důkaz. Posloupnosti $\{\alpha_n - \alpha\}$, $\{\beta_n - \beta\}$ jsou nulové; protože $(\alpha_n + \beta_n) - (\alpha + \beta) = (\alpha_n - \alpha) + (\beta_n - \beta)$, je také $\{(\alpha_n + \beta_n) - - (\alpha + \beta)\}$ nulová posloupnost podle věty 2,10. Posloupnost $\{\alpha_n\}$ je omezená podle věty 2,13; tedy posloupnosti $\{\alpha_n(\beta_n - \beta)\}$ a $\{\beta(\alpha_n - \alpha)\}$ jsou nulové podle vět 2,7 a 2,11. Protože

$$\alpha_n\beta_n - \alpha\beta = \alpha_n(\beta_n - \beta) + \beta(\alpha_n - \alpha)\,,$$

je také $\{\alpha_n\beta_n - \alpha\beta\}$ nulová posloupnost podle věty 2,10.

Poznámka 5,3. Z věty 5,8 se odvodí indukcí, že věta 3,3 platí pro posloupnosti s libovolnými reálnými členy.

Věta 5,9. *Je-li* $\lim \alpha_n = \alpha$, *je také* $\lim (-\alpha_n) = -\alpha$.

To plyne z věty 2,6, neboť $-\alpha_n - (-\alpha) = -(\alpha_n - \alpha)$.

Věta 5,10. *Je-li* $\lim \alpha_n = \alpha$ *a je-li* γ *reálné číslo, je také* $\lim (\alpha_n + \gamma) = = \alpha + \gamma$, $\lim (\gamma\alpha_n) = \gamma\alpha$.

To plyne z vět 5,3 a 5,8.

Věta 5,11. *Budiž* $\lim \alpha_n = \alpha$. *Je-li* $\alpha < \beta$, je $\alpha_n < \beta$ *pro skoro všecka n. Je-li* $\alpha > \gamma$, *je* $\alpha_n > \gamma$ *pro skoro všecka n.*

Důkaz. Protože $\alpha < \beta$, je $\beta - \alpha > 0$, takže pro skoro všecka n je $|\alpha_n - \alpha| < \beta - \alpha$, tedy $\alpha_n - \alpha < \beta - \alpha$, tedy $\alpha_n < \beta$. Protože $\alpha > \gamma$, je $\alpha - \gamma > 0$, takže pro skoro všecka n je $|\alpha_n - \alpha| < \alpha - \gamma$, tedy $\alpha - \alpha_n < \alpha - \gamma$, tedy $-\alpha_n < -\gamma$, a tedy $\alpha_n > \gamma$.

Věta 5,12. *Budiž* $\lim \alpha_n = \alpha$. *Je-li* $\alpha_n \geqq \beta$ *pro skoro všecka n, je* $\alpha \geqq \beta$. *Je-li* $\alpha_n \leqq \gamma$ *pro skoro všecka n, je* $\alpha \leqq \gamma$.

Důkaz. Kdyby nebylo $\alpha \geqq \beta$ nebo kdyby nebylo $\alpha \leqq \gamma$, bylo by $\alpha < \beta$ nebo $\alpha > \gamma$. Podle věty 5,11 by pak bylo $\alpha_n < \beta$ nebo $\alpha_n > \gamma$ pro skoro všecka n a to je nemožné.

Věta 5,13. *Budiž* $\lim \alpha_n = \alpha$, $\lim \beta_n = \beta$, $\alpha < \beta$. *Pak je* $\alpha_n < \beta_n$ *pro skoro všecka* n.

Důkaz. Podle vět 5,8 a 5,9 je $\lim (\beta_n - \alpha_n) = \beta - \alpha > 0$, takže podle věty 5,11 pro skoro všecka n je $\beta_n - \alpha_n > 0$ neboli $\alpha_n < \beta_n$.

Věta 5,14. *Budiž* $\lim \alpha_n = \alpha$, $\lim \beta_n = \beta$. Je-li $\alpha_n \leqq \beta_n$ *pro skoro všecka* n, *je* $\alpha \leqq \beta$.

Důkaz. Podle vět 5,8 a 5,9 je $\lim (\beta_n - \alpha_n) = \beta - \alpha$; avšak pro skoro všecka n máme $\beta_n - \alpha_n \geqq 0$, takže podle věty 5,12 je $\beta - \alpha \geqq$ $\geqq 0$ neboli $\alpha \leqq \beta$.

Věta 5,15. *Je-li* $\lim \alpha_n = \alpha$, *je také* $\lim |\alpha_n| = |\alpha|$.

Důkaz. Pro $\alpha = 0$ to platí podle věty 2,2. Je-li $\alpha > 0$, je podle věty 5,11 $\alpha_n > 0$ pro skoro všecka n, tedy $|\alpha_n| = \alpha_n$ pro skoro všecka n, takže podle věty 5,4 je $\lim |\alpha_n| = \alpha = |\alpha|$. Je-li $\alpha < 0$, je podle věty 5,11 $\alpha_n < 0$ pro skoro všecka n, tedy $|\alpha_n| = -\alpha_n$ pro skoro všecka n, takže podle vět 5,4 a 5,9 je $\lim |\alpha_n| = -\alpha =$ $= |\alpha|$.

Věta 5,16. *Budiž* $\lim \alpha_n = \alpha$, $\alpha \neq 0$, *a pro všecka n budiž* $\alpha_n \neq 0$. *Pak je* $\lim \dfrac{1}{\alpha_n} = \dfrac{1}{\alpha}$.

Důkaz. Budiž nejprve $\alpha > 0$. Pak je $\dfrac{\alpha}{2} < \alpha$, takže podle věty 5,11 pro skoro všecka n máme $\alpha_n > \dfrac{\alpha}{2} > 0$, tedy také $\alpha\alpha_n > \dfrac{\alpha^2}{2} >$ > 0. Podle vět II 6,2 a II 6,3 je tedy

$$0 < \frac{1}{\alpha\alpha_n} < \frac{2}{\alpha^2} \text{ pro skoro všecka } n.$$

Z toho soudíme snadno, že posloupnost $\left\{-\dfrac{1}{\alpha\alpha_n}\right\}$ je omezená. Avšak $\{\alpha_n - \alpha\}$ je nulová a pro všecka n je

$$\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha\alpha_n}(\alpha_n - \alpha),$$

takže podle věty 2,11 posloupnost $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n} - \dfrac{1}{\alpha}\right\}$ je nulová; tím je pro

$\alpha > 0$ důkaz skončen. Pro $\alpha < 0$ je $-\alpha > 0$, a podle věty 5,9 je $\lim(-\alpha_n) = -\alpha$, při čemž $-\alpha_n \neq 0$ pro všecka n. Tedy podle dokončené části důkazu máme $\lim\left(\frac{1}{-\alpha_n}\right) = \frac{1}{-\alpha}$, a protože $\frac{1}{\alpha_n} = -\frac{1}{-\alpha_n}$, $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{-\alpha}$, je podle věty 5,9 také $\lim \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha}$.

§ 6. Odmocniny

Definici I (6,1) mocniny, jejímž exponentem je přirozené číslo, jakož i definici I (6,2) mocniny s exponentem 0 ponecháváme beze změny i pro případ, že základ a je libovolné reálné číslo. Věty I 6,1; I 6,4; I 6,5; I 6,6, které jsou důsledky obecně platných zákonů násobení, zůstanou v platnosti. Je-li $a \neq 0$, je $a^n \neq 0$ pro každé přirozené číslo n v důsledku definice I (6,1) a věty I 3,10, která je správná pro libovolné reálné činitele. V důsledku věty II 5,2, která zůstává správnou pro *reálná* čísla, je pro libovolné reálné $a \neq 0$ (a libovolné přirozené číslo n)

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$$

[viz II (5,4), kde jsme měli na mysli *racionální* základ a] a toto číslo definujeme jako mocninu a^{-n} se záporným celým exponentem $-n$. Věty II 5,4; II 5,5 a II 5,6 zůstanou v platnosti, jestliže slovo racionální nahradíme slovem reálný, jak je patrné z jejich důkazů; totéž platí o vzorci II (5,16). Rovněž je jasné, že v oboru reálných čísel zůstanou správné i věty II 6,4; II 6,5 (i s poznámkou II 6,6); II 6,6 a II 6,7; je to opět patrné z jejich důkazů.

Věta 6,1. *Budiž* $\lim a_n = \alpha$. *Potom pro každé nezáporné celé k je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = \alpha^k$.

Důkaz. Je-li $k = 0$, je $a_n^k = 1$ pro všecka n, $\alpha^k = 1$, takže pro $k = 0$ naše věta plyne z věty 5,3. Je-li k přirozené číslo, je naše věta podle definice I (6,1) zvláštním případem věty 3,3 (viz poznámku 5,3).

Věta 6,2. *Budiž* $\lim a_n = \alpha \neq 0$, $a_n \neq 0$ *pro všecka* n. *Potom pro každé celé k je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = \alpha^k$.

Důkaz. Pro $k \geqq 0$ je to obsaženo ve větě 6,1; případ $k < 0$ plyne z vět 5,16 a 6,1.

Věta 6,3. *Je-li c kladné reálné číslo, k přirozené číslo, existuje právě jedno takové kladné reálné číslo α, že $\alpha^k = c$.*

Poznámka 6,1. Je-li $0 < \alpha < \beta$, je $\alpha^k < \beta^k$ podle věty II 6,5, takže nemůže být zároveň $\alpha^k = c$, $\beta^k = c$. Stačí tedy dokázat, že existuje aspoň jedno takové $\alpha > 0$, že $\alpha^k = c$.

První důkaz. Podle věty II 6,17 najdeme nejprve kladné racionální číslo b tak, že $b^k < c$, a potom ke každému přirozenému číslu n kladné racionální číslo a_n tak, že $c < a_n^k < c + \dfrac{1}{n}$. Pro všecka n je $0 < a_n^k - c < \dfrac{1}{n}$, takže podle věty 2,5 je $\{a_n^k - c\}_{n=1}^{\infty}$ nulová posloupnost, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = c\,. \tag{6,1}$$

Dokážeme, že posloupnost a_n je konvergentní. Budiž $\varepsilon > 0$; máme dokázat, že existuje takové přirozené číslo N, že

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad \text{kdykoli: } m > N,\ n > N\,. \tag{6,2}$$

Podle věty 4,7 najdeme N tak, aby bylo $(\varepsilon k\,.\,b^{k-1})^{-1} < N$, takže $\varepsilon k\,.\,b^{k-1} > N^{-1}$ podle věty II 6,3, a tedy

$$\varepsilon > N^{-1}\,.\,(kb^{k-1})^{-1}\,. \tag{6,3}$$

Budiž $m > N$, $n > N$; protože $|a_m - a_n| = |a_n - a_m|$ a protože pro $a_m = a_n$ nerovnost (6,2) je zřejmá, můžeme předpokládat, že $a_m > a_n$, takže můžeme položit $a_m = ta_n$, kde $t > 1$. Podle věty II 5,6 je $a_m^k = t^k a_n^k$, tedy

$$a_m^k - a_n^k = a_n^k(t^k - 1)\,. \tag{6,4}$$

Podle věty II 6,16 je $t^k - 1 \geqq k(t-1)$, tedy (jelikož $a_n^k > 0$) podle (6,4) $a_m^k - a_n^k \geqq k\,.\,a_n^k(t-1)$.

Avšak $a_n^k = a_n^{k-1}\,.\,a_n$, $a_n(t-1) = a_m - a_n$, takže

$$a_m^k - a_n^k \geqq k\,.\,a_n^{k-1}(a_m - a_n)\,. \tag{6,5}$$

Protože $a_m^k < c + \dfrac{1}{m} < c + \dfrac{1}{N}$ (viz větu II 6,3)

a protože $a_n^k > c$ (tedy $-a_n^k < -c$), je $a_m^k - a_n^k < \dfrac{1}{N}$. Mimo to je $0 < b^k < c < a_n^k$, takže $0 < b < a_n$ podle poznámky II 6,6, tedy $0 < b^{k-1} \leqq a_n^{k-1}$ podle věty II 6,5 (rovnost nastane pouze pro

$k = 1$), a tedy též $b^{k-1}(a_m - a_n) \leqq a_n^{k-1}(a_m - a_n)$, neboť $a_m - a_n > 0$ (protože $a_m > a_n$). Tedy z (6,5) plyne

$$\frac{1}{N} > k \cdot b^{k-1}(a_m - a_n) > 0 \ ,$$

a protože $k \cdot b^{k-1} > 0$, dostaneme z (6,3) $0 < a_m - a_n < \varepsilon$; tím je důkaz (6,2) dokončen.

Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní, takže existuje reálné číslo $\alpha = \lim a_n$, při čemž $\alpha \geqq b > 0$ podle věty 5,12, neboť $a_n > b$ pro všecka n. Tedy α je kladné číslo a $\lim a_n = \alpha$; podle věty 6,1 je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = \alpha^k$ a porovnáme-li s (6,1), dostaneme $\alpha^k = c$.

Druhý důkaz. Podle věty 4,7 existuje takové přirozené číslo M, že $c < M$. Potom je M^{k-1} přirozené číslo, tedy $M^{k-1} \geqq 1$, takže $M^k = M \cdot M^{k-1} \geqq M$, tedy $c < M^k$. Je-li n libovolné přirozené číslo, uvažujeme posloupnost

$$\left(\frac{0}{n}\right)^k, \ \left(\frac{1}{n}\right)^k, \ \left(\frac{2}{n}\right)^k, \ \ldots \qquad (*)$$

První člen posloupnosti (*) je roven nule, je tedy menší než c. V posloupnosti (*) je však také člen

$$\left(\frac{nM}{n}\right)^k = M^k \ ,$$

který je větší než c. Z toho plyne, že existuje takové nezáporné celé číslo r (závislé na n), že

$$\left(\frac{r}{n}\right)^k \leqq c < \left(\frac{r+1}{n}\right)^k .$$

Položme $a_n = \dfrac{r}{n}$, takže

$$a_n^k \leqq c < \left(a_n + \frac{1}{n}\right)^k . \qquad (6,6)$$

Mimo to je z naší úvahy patrné, že $0 \leqq a_n < M$ pro všecka n, takže posloupnost $\{a_n\}$ je omezená a lze z ní tudíž podle věty 5,7 vybrat konvergentní posloupnost $\{b_n\} = \{a_{h(n)}\}$, kde $h(n) \geqq n$ pro všecka n podle věty 1,2, takže (viz větu II 6,3) $b_n + \dfrac{1}{n} \geqq a_{h(n)} + \dfrac{1}{h(n)}$, a tedy podle věty II 6,5 také

$$\left(b_n + \frac{1}{n}\right)^k \geqq \left(a_{h(n)} + \frac{1}{h(n)}\right)^k .$$

Podle (6,6) je tedy

$$b_n^k \leqq c < \left(b_n + \frac{1}{n}\right)^k . \tag{6,7}$$

Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní; budiž $\lim b_n = \alpha$, [illegible]e $\alpha \geqq 0$ podle věty 5,12. Podle věty 5,8 (viz též poznámku 2[illegible], je také $\lim \left(b_n + \frac{1}{n}\right) = \alpha$. Podle věty 6,1 je nyní $\lim b_n^k = \lim \left(b_n + \frac{1}{n}\right)^k =$ $= \alpha^k$, takže z nerovností (6,7) plyne podle věty 5,12, že $\alpha^k \leqq c \leqq \alpha^k$, tedy $\alpha^k = c$. Protože $\alpha \geqq 0$, $0^k = 0 < c$, je $\alpha > 0$.

Věta 6,3 vede k definici *n-té odmocniny*. Je-li $a \geqq 0$ a je-li n přirozené číslo, nazveme n-tou odmocninou čísla a a označíme $\sqrt[n]{a}$ to číslo $\alpha \geqq 0$, pro které je $\alpha^n = a$. Jelikož $0^n = 0$, je $\sqrt[n]{0} = 0$, kdežto pro $a > 0$ je $\sqrt[n]{a}$ to kladné číslo α, pro které je $\alpha^n = a$. Číslo a se jmenuje *základ* neboli *odmocněnec*, přirozené číslo n *odmocnitel* n-té odmocniny $\sqrt[n]{a}$ nezáporného reálného čísla a. Symbol $\sqrt[n]{a}$ jsme tedy definovali pouze pro $a \geqq 0$; je-li $a \geqq 0$, potom rovnost $\sqrt[n]{a} = \alpha$ znamená, že platí rovnost $\alpha^n = a$ a že *mimo to* je $\alpha \geqq 0$. Zřejmě $\sqrt[1]{a} = a$ pro každé $a \geqq 0$; místo $\sqrt[2]{a}$ se obyčejně píše kratčeji $\sqrt{a}$.

Poznámka 6,2. Je-li přirozené číslo n sudé, potom pro $a > 0$ existují dvě různá reálná čísla, jejichž n-tá mocnina je rovna a; jedním z nich je kladné číslo $\sqrt[n]{a}$, druhým pak záporné číslo $-\sqrt[n]{a}$; ačkoli je $(-2)^2 = 4$, přece není $\sqrt{4} = -2$. Je-li přirozené číslo n liché, potom pro každé reálné a existuje právě jedno takové reálné α, že $\alpha^n = a$; pro $a \geqq 0$ je $\alpha = \sqrt[n]{a}$, pro $a < 0$ však v této knize neužíváme symbolu $\sqrt[n]{a}$, nýbrž píšeme $\alpha = -\sqrt[n]{|a|}$.

Věta 6,4. *Pro každé přirozené číslo n je $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$.*

Důkaz. Čísla 0 a 1 jsou nezáporná a jest $0^n = 0$, $1^n = 1$.

Důkazy následujících tří vět se opírají o věty II 5,5; II 5,6 a o vzorce $0^n = 0$, $\sqrt[n]{0} = 0$ (n přirozené číslo).

Věta 6,5. *Jsou-li n, k přirozená čísla a je-li $a \geqq 0$, je $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.*

Důkaz. Budiž $\sqrt[n]{a} = \alpha$, tedy $\alpha \geqq 0$, $\alpha^n = a$. Potom je $\alpha^k \geqq 0$, $(\alpha^k)^n = \alpha^{kn} = \alpha^{nk} = (\alpha^n)^k = a^k$, tedy $\sqrt[n]{a^k} = \alpha^k$.

Věta 6,6. *Jsou-li n, k přirozená čísla a je-li $a \geqq 0$, je* $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$.

Důkaz. Budiž $\sqrt[kn]{a} = \alpha$, tedy $\alpha \geqq 0$, $\alpha^{kn} = a$. Potom je $\alpha^k \geqq 0$, $(\alpha^k)^n = a$, tedy $\sqrt[n]{a} = \alpha^k$, takže $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \alpha$.

Věta 6,7. *Je-li n přirozené číslo a je-li $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, je* $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Důkaz. Budiž $\sqrt[n]{a} = \alpha$, $\sqrt[n]{b} = \beta$, tedy $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha^n = a$, $\beta^n = b$. Potom je $\alpha\beta \geqq 0$, $(\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n = ab$, tedy $\sqrt[n]{ab} = \alpha\beta$.

Věta 6,8. *Je-li n přirozené číslo a je-li $a > 0$, je* $\sqrt[n]{a^{-1}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-1}$.

Důkaz. Budiž $\sqrt[n]{a} = \alpha$, tedy $\alpha > 0$, $\alpha^n = a$. Potom je $\alpha^{-1} > 0$, $(\alpha^{-1})^n = (\alpha^n)^{-1} = a^{-1}$, a tedy $\sqrt[n]{a^{-1}} = \alpha^{-1}$.

Věta 6,9. *Je-li n přirozené číslo a je-li $0 \leqq a < b$, je* $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Důkaz. Pro $a = 0$ je nám to známo. Budiž $0 < a < b$, $\alpha = \sqrt[n]{a}$, $\beta = \sqrt[n]{b}$. Potom je $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha^n = a$, $\beta^n = b$, tedy $\alpha^n < \beta^n$, takže $\alpha < \beta$ podle poznámky II 6,6.

Věta 6,10. *Jsou-li m, n přirozená čísla a je-li $a > 1$, $m < n$, je* $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$; *je-li však $0 < a < 1$, $m < n$, je* $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$.

Důkaz. Budiž $\sqrt[m]{a} = \alpha$, $\sqrt[n]{a} = \beta$, tedy $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha^m = a$, $\beta^n = a$. Podle věty II 5,5 je $\alpha^{mn} = a^n$, $\beta^{mn} = a^m$. Protože $m < n$, plyne z věty II 6,7 v případě $a > 1$, že $a^m < a^n$ neboli $\beta^{mn} < \alpha^{mn}$, a v případě $0 < a < 1$, že $a^m > a^n$ neboli $\beta^{mn} > \alpha^{mn}$. Tedy podle poznámky II 6,6 je v prvním případě $\beta < \alpha$, ve druhém $\beta > \alpha$.

Věta 6,11. *Je-li k přirozené číslo a je-li* $\lim a_n = \alpha$, $a_n \geqq 0$ *pro všecka n, je* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}$.

Poznámka 6,3. Podle věty 5,12 je $\alpha \geqq 0$, takže číslo $\sqrt[k]{\alpha}$ máme definováno.

Důkaz. Položme $\sqrt[k]{a_n} = b_n$, $\sqrt[k]{\alpha} = \beta$, takže: $b_n \geqq 0$ (pro všecka n), $\beta \geqq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^k = \beta^k$. Budiž ε libovolně dané kladné číslo. Máme dokázat, že pro skoro všecka n je jednak

$$b_n < \beta + \varepsilon\,, \tag{6,8}$$

jednak

$$b_n > \beta - \varepsilon\,. \tag{6,9}$$

Protože $0 \leqq \beta < \beta + \varepsilon$, je $\beta^k < (\beta + \varepsilon)^k$ podle vět II 6,4 a II 6,5; avšak $\beta^k = \lim\limits_{n\to\infty} b_n^k$, takže podle věty 5,11 existuje takové přirozené číslo N_1, že pro všecka $n > N_1$ je $b_n^k < (\beta + \varepsilon)^k$; tedy podle poznámky II 6,6 také (6,8) platí pro všecka $n > N_1$. [Je-li $b_n = 0$, je nerovnost (6,8) zřejmá.] Je-li $\beta - \varepsilon < 0$, je nerovnost (6,9) zřejmá. Je-li $\beta - \varepsilon \geqq 0$, je $(\beta - \varepsilon)^k < \beta^k$ podle vět II 6,4 a II 6,5, a protože $\beta^k = \lim\limits_{n\to\infty} b_n^k$, existuje podle věty 5,11 takové přirozené číslo N_2, že pro všecka $n > N_2$ je $b_n^k > (\beta - \varepsilon)^k$; tedy podle poznámky II 6,6 také (6,9) platí pro všecka $n > N_2$.

§ 7. Existence iracionálních čísel

Iracionální číslo α jsme definovali v § 2 pomocí posloupnosti $\{a_n\}$ racionálních čísel, která je konvergentní, ale v oboru racionálních čísel nemá limitu. [Při tom dvě takové posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ definovaly totéž iracionální číslo právě tehdy, jestliže bylo $\lim (a_n - b_n) = 0$.] Existence iracionálních čísel není přímým důsledkem zvolené definice, plyne však z toho, že jsme dokázali v II § 8, že v oboru racionálních čísel žádné kladné číslo α nemá vlastnost $\alpha^2 = 2$, kdežto po připojení iracionálních čísel podle věty 6,3 takové α existuje. Existenci iracionálních čísel lze prokázat mnoha jinými způsoby; jeden zajímavý důkaz uvedeme v tomto paragrafu.

Zaveďme nejprve jedno označení, kterého užijeme pouze na tomto místě. Je-li $\frac{a}{b}$ elementární zlomek, takže a, b jsou celá čísla, $b > 0$, nazveme jeho *výškou* číslo $|a|$ (je-li $|a| > b$), číslo b (je-li $b > |a|$), a jsou-li si rovna obě čísla $|a|$, b, je jim rovna i výška. Výška každého elementárního zlomku je tedy přirozené číslo. Je-li k dané přirozené číslo, potom elementární zlomek $\frac{a}{b}$ má výšku $\leqq k$ právě tehdy, je-li čitatel a roven jednomu z $2k + 1$ čísel $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$ a zároveň jmenovatel roven jednomu z k čísel $1, 2, \dots, k$; počet takových elementárních zlomků je $(2k + 1)\,k$. Některé z těchto elementárních zlomků mohou mít výšku menší než k; jejich počet je roven $[2(k - 1) + 1](k - 1) = (2k - 1)(k - 1)$ [i pro $k = 1$, neboť $(2k - 1)(k - 1) = 0$ pro $k = 1$]. Zbývá

$$(2k + 1)\,k - (2k - 1)(k - 1) = 4k - 1$$

elementárních zlomků, jejichž výška je rovna k. Jsou tedy 3 elementární zlomky výšky 1, totiž $\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$, dále 7 elementárních zlomků výšky 2, totiž $-\frac{2}{1}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}$, potom 11 elementárních zlomků výšky 3 atd. Snadným důsledkem této úvahy je:

Věta 7,1. *Existuje taková posloupnost, že každé racionální číslo je rovné některému členu této posloupnosti.*

Neboť podle předcházejících úvah existuje posloupnost, jejíž první tři členy dávají všechny elementární zlomky výšky 1, dalších 7 členů dává všecky elementární zlomky výšky 2, potom přijde 11 elementárních zlomků výšky 3, 15 elementárních zlomků výšky 4 atd. Je pak třeba pouze každý elementární zlomek $\frac{a}{b}$ nahradit racionálním číslem $\left\{\frac{a}{b}\right\}$; přitom můžeme předpokládat, že pro danou výšku k příslušná racionální čísla jdou jedno po druhém v přirozeném uspořádání. Tím dostaneme zcela určitou posloupnost $\{\alpha_n\}$, ve které je každý člen racionálním číslem, při čemž obráceně každé racionální číslo je rovno nekonečně mnoha členům posloupnosti $\{\alpha_n\}$, neboť k libovolně danému racionálnímu číslu α existuje nekonečně mnoho takových elementárních zlomků $\frac{a}{b}$, že $\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\}$. Je zřejmé, že z posloupnosti $\{\alpha_n\}$ lze vybrat posloupnost $\{\beta_n\}$ tak, že každé racionální číslo je rovné právě jednomu členu posloupnosti $\{\beta_n\}$. Snadno se zjistí, že prvních 50 členů posloupnosti $\{\beta_n\}$ je

$$-1, 0, 1, -2, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 2, -3, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{2}{3},$$
$$-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, 3, -4, -\tfrac{4}{3}, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4},$$

$$\tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{3},\ 4,\ -5,\ -\tfrac{5}{2},\ -\tfrac{5}{3},\ -\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{4}{5},\ -\tfrac{3}{5},\ -\tfrac{2}{5},$$
$$-\tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{5}{2};\ 5,\ -6,$$
$$-\tfrac{6}{5},\ -\tfrac{5}{6},\ -\tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{6}{5},\ 6,\ -7,\ -\tfrac{7}{2},\ -\tfrac{7}{3}.$$

Nyní je vše připraveno k tomu, abychom mohli vyložit slíbený nový důkaz existence iracionálních čísel. Podle věty 7,1 můžeme zvolit číselnou posloupnost $\{\alpha_n\}$ tak, aby každé racionální číslo bylo rovné aspoň jednomu členu této posloupnosti. Zvolme nyní dvě taková racionální čísla t, τ, že $t < \tau$; dokážeme, že existuje takové iracionální číslo α, že $t < \alpha < \tau$. Zavedeme rekurentně dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ racionálních čísel takto: Nejprve zvolíme $a_1 = t$, $b_1 = \tau$, takže $a_1 < b_1$. Jestliže při určitém n už byla zvolena racionální čísla a_n, b_n tak, že $a_n < b_n$, pak zvolíme nejprve racionální číslo a_{n+1} tak, aby bylo $a_n < a_{n+1} < b_n$, potom racionální číslo b_{n+1} tak, aby bylo $a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. Z věty II 6,11 je patrné, že je to proveditelné; je dokonce možné to provést rozmanitými způsoby; podrobíme volbu čísla a_{n+1} ještě jedné podmínce. Jestliže totiž při uvažovaném n je snad

$$a_n < \alpha_n < b_n\,, \tag{7,1}$$

kde $\{\alpha_n\}$ je výše zvolená posloupnost, pak volíme $a_{n+1} = \alpha_n$, což za předpokladu (7,1) je v souladu s tím, co dosud bylo řečeno. Jestliže při uvažovaném n neplatí (7,1), pak neklademe žádnou další podmínku na volbu čísla a_{n+1}.

Jelikož $a_n < a_{n+1}$, $b_{n+1} < b_n$ pro všecka n, plyne z věty 1,1, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí a posloupnost $\{b_n\}$ je klesájící. Mimo to pro všecka n je $a_n < b_n$, tedy také $a_n < b_1$, t. j. posloupnost $\{a_n\}$ je omezená. Tedy podle věty 5,6 existuje reálné číslo

$$\alpha = \lim a_n\,. \tag{7,2}$$

Je-li n libovolně zvolené přirozené číslo, potom pro skoro všecka přirozená k máme $a_n < a_k < b_n$, takže podle věty 5,12 pro každé n je $a_n \leqq \alpha \leqq b_n$. Protože n je libovolné, je také $a_{n+1} \leqq \alpha \leqq b_{n+1}$, a ježto $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$, je

$$a_n < \alpha < b_n \tag{7,3}$$

pro všecka n. Zejména je $a_1 < \alpha < b_1$ neboli $t < \alpha < \tau$, takže zbývá jenom dokázat, že číslo α je iracionální. Předpokládejme naopak, že α je racionální. Podle definice posloupnosti $\{\alpha_n\}$ existuje takový index n, že $\alpha = \alpha_n$. Pro tento index n pak ze (7,3) dostaneme (7,1), takže podle výše vyslovené podmínky na volbu čísla a_{n+1} máme pro uvažovaný index n: $a_{n+1} = \alpha$. To je však nemožné, neboť (7,3) platí pro libovolný index, takže je také $a_{n+1} < \alpha$.

Právě dokončený důkaz existence iracionálních čísel dokazuje ve skutečnosti mnohem víc. Nekonečnou množinu M (složenou z jakýchkoli prvků) nazveme *spočetnou*, existuje-li taková posloupnost $\{\alpha_n\}$, že každý prvek množiny M je roven některému členu této posloupnosti; nekonečnou množinu M nazveme *nespočetnou*, jestliže není spočetná. Na základě této definice můžeme větu 7,1 znovu vyslovit takto:

Věta 7,2. *Množina všech racionálních čísel je spočetná.*

Náš důkaz existence iracionálních čísel můžeme nyní doslova opakovat s tím rozdílem, že místo množiny všech racionálních čísel vezmeme *libovolnou spočetnou množinu* reálných čísel. Vyjde

Věta 7,3. *Množina všech reálných čísel je nespočetná.*

Kdyby množina všech iracionálních čísel byla spočetná, existovaly by takové dvě posloupnosti

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots,$$

že by každé racionální číslo bylo rovno některému členu první a každé iracionální číslo některému členu druhé posloupnosti. Potom by však bylo každé reálné číslo rovno některému členu posloupnosti

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \ldots$$

a to je nemožné. Tedy platí:

Věta 7,4. *Množina všech iracionálních čísel je nespočetná.*

§ 8. Dedekindovy řezy

Množinu všech reálných čísel budeme v tomto paragrafu značit R.

Nazveme *Dedekindovým řezem* dvojici množin $[A, B]$ takovou, že A, B jsou dvě neprázdné disjunktní množiny, jejichž sjednocením je množina R, při čemž se předpokládá, že platí tyto tři vlastnosti:

$[V_1]$ *Je-li x prvkem množiny A, y prvkem množiny B, je $x < y$.*

$[V_2]$ *Jsou-li x_1, x_2 racionální čísla taková, že $x_1 < x_2$, pak jestliže x_2 náleží do A, také x_1 náleží do A.*

$[V_3]$ *Jsou-li y_1, y_2 racionální čísla taková, že $y_1 < y_2$, pak jestliže y_1 náleží do B, náleží do B také y_2.*

Dokážeme, že všechny tři vlastnosti $[V_1]$, $[V_2]$, $[V_3]$ jsou navzájem ekvivalentní, t. j. je-li splněna jedna z nich, jsou splněny všechny tři. Stačí dokázat za prvé, že z vlastnosti $[V_1]$ plyne vlastnost $[V_2]$, za druhé, že z vlastnosti $[V_2]$ plyne vlastnost $[V_3]$, za třetí, že z vlastnosti $[V_3]$ plyne vlastnost $[V_1]$.

Nechť platí $[V_1]$; máme dokázat $[V_2]$. Jsou-li x_1, x_2 taková racionální čísla, že $x_1 < x_2$ a že x_2 náleží do A, máme dokázat, že také x_1 náleží do A. Kdyby však naopak x_1 náleželo do B, pak by podle předpokládané vlastnosti $[V_1]$ bylo $x_2 < x_1$, a to je nemožné.

Nechť platí $[V_2]$; máme dokázat $[V_3]$. Jsou-li y_1, y_2 taková racionální čísla, že $y_1 < y_2$ a že y_1 náleží do B, máme dokázat, že také y_2 náleží do B. Kdyby však naopak y_2 náleželo do A, pak by podle předpokládané vlastnosti $[V_2]$ do A náleželo také číslo y_1, které je menší než y_2, a to je nemožné.

Nechť platí $[V_3]$, máme dokázat $[V_1]$. Jsou-li x, y taková racionální čísla, že x náleží do A, y do B, máme dokázat, že $x < y$. Kdyby tomu tak nebylo, pak protože množiny A, B jsou disjunktní, bylo by $y < x$. Ježto y náleží do B, náleželo by podle předpokládané vlastnosti $[V_3]$ do B také číslo x, které je větší než y; to však nemožné.

Zvolme racionální číslo α a označme [1] A_1 množinu všech racionálních čísel $x \leqq \alpha$, [2] B_1 množinu všech racionálních čísel $y > \alpha$. Je patrné, že $[A_1, B_1]$ je Dedekindův řez a že α je největším číslem množiny A_1; z věty II 6,11 plyne, že v množině B_1 není žádné číslo nejmenší. Obráceně, je-li $[A_1, B_1]$ takový Dedekindův řez, že v množině A_1 existuje největší číslo α, je jasné, že A_1 je množina všech těch racionálních čísel x, pro která platí $x \leqq \alpha$, B_1 množina všech těch racionálních čísel y, pro která platí $y > \alpha$.

Zvolme opět racionální číslo α a označme: [1] A_2 množinu všech racionálních čísel $x < \alpha$, [2] B_2 množinu všech racionálních čísel $y \geqq \alpha$. Je patrné, že $[A_2, B_2]$ je Dedekindův řez a že α je nejmenším číslem množiny B_2; z věty II 6,11 plyne, že v množině A_2 není žádné číslo největším. Obráceně, je-li $[A_2, B_2]$ takový Dedekindův řez, že v množině B_2 existuje nejmenší číslo α, je jasné, že A_2 je množina všech těch racionálních čísel x, pro která platí $x < \alpha$, B_2 množina všech těch racionálních čísel y, pro která platí $y \geqq \alpha$.

Spojíme-li oba dosud dosažené výsledky, vidíme, že pro žádný Dedekindův řez $[A, B]$ není možné, aby v množině A existovalo největší číslo α a zároveň v množině B nejmenší číslo β. Totéž je přímo patrné z věty II 6,11, neboť je-li $[A, B]$ takový Dedekindův řez, je $\alpha < \beta$ podle vlastnosti $[V_1]$ a z věty II 6,11 plyne existence takového racionálního čísla γ, že $\alpha < \gamma < \beta$. Protože γ je větší než největší číslo α množiny A a zároveň menší než nejmenší číslo β

množiny B, nenáleží racionální číslo γ ani do A, ani do B; to je však nemožné, protože sjednocením množin A, B je celá množina R.

Nazveme *mezerou v množině* R takový Dedekindův řez $[A, B]$, že neexistuje ani největší číslo množiny A, ani nejmenší číslo množiny B; tato definice mezery v množině R je v souladu s obecnou definicí mezery v libovolné hustě uspořádané množině, vyloženou v II § 7. Zvolme iracionální číslo α a označme: [1] A množinu všech racionálních čísel $x < \alpha$, [2] B množinu všech racionálních čísel $y > \alpha$. Je patrné, že $[A, B]$ je Dedekindův řez; z věty 4,5 plyne, že $[A, B]$ je mezera v množině R.

Dokážeme nyní, že mimo ty Dedekindovy řezy, jejichž složení jsme už popsali, neexistují žádné další Dedekindovy řezy. Budiž tedy $[A, B]$ libovolně daný Dedekindův řez; máme dokázat, že existuje takové reálné číslo α, že všecka racionální čísla $x < \alpha$ náležejí do A, všecka racionální $y > \alpha$ náležejí do B. (Číslo α samo, je-li racionální, může náležet buď do A, nebo do B; je-li α iracionální, nenáleží ani do A, ani do B.)

Jelikož množiny A, B nejsou prázdné, existují taková racionální čísla a, b, že a náleží do množiny A, b do množiny B. Podle věty II 6,9 plyne z vlastností $[V_2]$ a $[V_3]$, že existují taková celá čísla h, k, že h náleží do A, k náleží do B. Podle vlastnosti $[V_1]$ je $h < k$. Je-li nyní n libovolné přirozené číslo, uvažujme racionální čísla

$$h = \frac{hn}{n}, \quad \frac{hn+1}{n}, \quad \frac{hn+2}{n}, \ldots, \frac{kn}{n} = k\,;$$

první z nich náleží do A, poslední do B. Z toho plyne, že existují taková racionální čísla a_n, b_n, že

$$b_n - a_n = \frac{1}{n} \tag{8,1}$$

a že a_n náleží do množiny A, b_n do množiny B.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle věty 4,7 existuje takové přirozené číslo N, že

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{N} < \varepsilon\,.$$

Jsou-li oba indexy m, n větší než N, pak $b_m = a_m + \dfrac{1}{m}$ náleží do B, a_n náleží do A, takže podle vlastnosti $[V_1]$ je $a_n < a_m + \dfrac{1}{m}$ neboli $a_n - a_m < \dfrac{1}{m}$; podobně je $a_m - a_n < \dfrac{1}{n}$, a protože obě čísla $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ jsou menší než $\frac{1}{N}$, tedy menší než ε, je $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro $m > N$, $n > N$. Tedy posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní; podle (8,1) však posloupnost $\{b_n - a_n\}$ je nulová. Z toho plyne, že existuje takové reálné číslo α, že

$$\lim a_n = \alpha\,, \quad \lim b_n = \alpha\,. \tag{8,2}$$

Máme dokázat, že množina A obsahuje všecka racionální čísla $x < \alpha$, množina B všecka racionální čísla $y > \alpha$. Je-li však $x < \alpha$, pak podle (8,2) plyne z věty 5,11, že $x < a_n$ pro skoro všecka n. Protože čísla a_n náležejí do A, náleží také x do A podle vlastnosti $[V_2]$. Je-li $y > \alpha$, pak podle (8,2) plyne z věty 5,11, že $y > b_n$ pro skoro všecka n. Protože čísla b_n náležejí do B, náleží také y do B podle vlastnosti $[V_3]$.

Dokázali jsme, že iracionální čísla α a mezery $[A, B]$ v množině R si vzájemně odpovídají tak, že každé iracionální číslo vytvoří mezeru $[A, B]$, ve které A je množina všech racionálních $x < \alpha$ a B je množina všech racionálních $y > \alpha$, a že obráceně každá mezera $[A, B]$ je takto vytvořena určitým iracionálním číslem. Je tedy možné ztotožnit iracionální čísla s mezerami v množině všech racionálních čísel, a to se právě děje v Dedekindově theorii reálných čísel, kterou však v této knize nebudeme probírat.