Čísla a početní výkony

II. Racionální čísla

In: Eduard Čech (author): Čísla a početní výkony. (Czech). Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1954. pp. 56--91.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402582

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

II. RACIONÁLNÍ ČÍSLA

§ 1. Měření. Pojem racionálního čísla

Vraťme se nyní k pojmu přirozeného čísla. V § 1 jsme uvedli, že přirozená čísla slouží především k čítání počtu prvků souboru. Ale vedle čítání mají čísla ještě jinou základní funkci; užívá se jich při *měření*, o kterém bude vhodné říci si nyní několik slov. Vezměme konkretní příklad. Dejme tomu, že výška pomníku je 4 m; co to znamená? Pro náš účel není třeba blíže rozebírat definici metru; jestliže výška pomníku je 4 m, znamená to, že pomník je stejně vysoký jako svislá tyč, která vznikne spojením čtyř metrových tyčí. Ale u skutečného pomníku to sotva bude tak jednoduché: ukáže se třeba, že je nižší než 4 m, ale vyšší než 3 m. Chceme-li výšku pomníku vyjádřit „počtem" metrů, nebude to zpravidla možné, má-li být „počet" dán *přirozeným* číslem. Je třeba zavést obecnější čísla; čtenáři je známo, že to jsou *lomená čísla* neboli *zlomky*. Čtenář ví ze školy, že zlomek

$$\frac{a}{b} \tag{1,1}$$

se skládá ze dvou přirozených čísel a, b, napsaných pod sebe a oddělených *zlomkovou čarou*; číslo a nad zlomkovou čarou se jmenuje *čitatel* zlomku, číslo b pod zlomkovou čarou se jmenuje *jmenovatel* zlomku. Je-li $b = 1$, je

$$\frac{a}{1} = a\,, \tag{1,2}$$

t. j. zlomek se jmenovatelem rovným jedné je totéž jako jeho čitatel, je tedy přirozeným číslem; v této souvislosti se na škole přirozeným číslům říkává *nevlastní zlomky*.

Vraťme se k našemu pomníku. Jestliže jeho výška v metrech se jen ve zcela výjimečných případech dá vyjádřit přirozeným číslem, je naopak vždycky možné *s prakticky vyhovující přesností* vyjádřit tuto výšku zlomkem. Mluvili jsme před chvílí o pomníku vyšším než 3 m, ale nižším než 4 m; může se stát, že výška tohoto pomníku v metrech je dána zlomkem $\frac{17}{5}$. To znamená, že pomník je stejně vysoký jako svislá tyč, která vznikne spojením 17 stejně velkých tyčí, při čemž o velikosti těchto tyčí se předpokládá, že 5 z nich dohromady dává 1 m. Je-li tomu tak, potom, jak je čtenáři známo, dá se výška téhož pomníku v metrech vyjádřit kterýmkoli ze zlomků

$$\frac{17}{5}, \frac{34}{10}, \frac{68}{20}, \frac{340}{100} \quad \text{atd.} \tag{1,3}$$

Všechny tyto zlomky si jsou navzájem rovny.

Obecně výraz (1,1), kde a, b jsou přirozená čísla, je vlastně něco trochu jiného než zlomek; řekneme, že je to jeden *tvar zlomku*, při čemž každý zlomek má nekonečně mnoho různých tvarů. Přechod od jednoho tvaru ke druhému se děje, jak známo, *rozšiřováním* a *krácením*. Je-li mimo a, b také ještě k libovolné přirozené číslo, je vždy

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}. \tag{1,4}$$

Je-li $k = 1$, je $ak = a$, $bk = b$ a oba tvary jsou totožné. Je-li $k > 1$, nazývá se rozšiřováním přechod od tvaru nalevo ke tvaru napravo, krácením přechod od tvaru napravo ke tvaru nalevo.

Poznámka 1,1. Ve škole se vykládá, že každý zlomek má určitý *základní tvar*, který se už krátit nedá; od základního tvaru přejdeme k libovolnému jinému tvaru rozšiřováním a obráceně od kteréhokoli jiného tvaru přejdeme k základnímu tvaru krácením. To vše se vykládá ve škole obyčejně jenom na příkladech, bez obecného odůvodnění, které je dosti složité. V této knize podáme obecné odůvodnění až v kap. IV (viz větu IV 1,14), protože při výkladu vlastností zlomků a početních výkonů se zlomky budeme postupovat tak, že pojmu základního tvaru při tom nebude třeba. Při konkretním početním výcviku se zlomky s malými čitateli a jmenovateli, který je ve škole při vyučování zlomkům hlavním úkolem, je ovšem stěží možné a jistě není účelné vyhýbat se pojmu základního tvaru zlomku. Avšak pro účely této knihy není třeba se vracet k takovému početnímu výcviku, který je pro nás mnohem méně podstatný než poznání obecných zákonitostí, při kterém by užití základního tvaru věc jenom komplikovalo. V případě (1,3) je základním tvarem $\frac{17}{5}$.

Poznámka 1,2. Vraťme se ještě jednou k našemu pomníku. Předpokládali jsme, že je vyšší než 3 m a nižší než 4 m, že se však výška pomníku v metrech dá vyjádřit lomeným číslem $\frac{17}{5}$. Může se ovšem stát, že ani zlomkem $\frac{17}{5}$ není výška pomníku vyjádřena přesně, že třeba zlomek $\frac{17}{5}$ dává ještě výšku příliš malou, ale zlomek $\frac{18}{5}$ dává už výšku příliš velkou. V takovém případě, jestliže je žádoucí vyšší přesnost, přejdeme ke zlomkům s větším jmenovatelem, na př. se jmenovatelem 100. Všimli jsme si [viz (1,3)], že zlomek $\frac{17}{5}$ je roven zlomku $\frac{340}{100}$. Je-li výška pomníku v metrech dána zlomkem $\frac{340}{100}$, je táž výška v centimetrech dána přirozeným číslem 340; je-li toto číslo příliš malé, naměříme na př., že výška je rovna 343 cm, tedy že výška v metrech je dána zlomkem $\frac{343}{100}$. Otázka po větší přesnosti v daném konkretním případě nemá valného smyslu; ve skutečnosti výška pomníku se nedá ani *definovat* přesně na centimetry.

Poznámka 1,3. Jestliže obor přirozených čísel rozšíříme na širší obor lomených čísel, pak tento širší obor, jak jsme si právě na příkladě podrobně vysvětlili, plně vystačí pro účely měření (a to nejen měření délek, nýbrž všech různých geometrických a fysikálních veličin), ačli se smíříme s tím, *že měření* (na rozdíl od čítání) *nelze provádět zcela přesně, nýbrž pouze přibližně.* Naproti tomu, je-li naším cílem měření zcela přesné, t. j. bez jakékoli sebemenší chyby, které je ovšem *prakticky* nemožné a o kterém se dá mluvit jen v *theoretických* úvahách, tu se ukazuje, že obor lomených čísel je stále ještě příliš úzký. K tomu se vrátíme v § 8.

Jako jsme v předcházející kapitole rozšířili obor přirozených celých čísel připojením nuly a čísel opačných k přirozeným číslům na obor čísel celých, tak můžeme i obor čísel lomených připojením nuly a čísel opačných k číslům lomeným rozšířit na obor čísel, jejichž vědecký název je *čísla racionální.* Čísla racionální různá od nuly se dělí na kladná a záporná; *kladná racionální čísla* jsou totožná s *lomenými čísly,* záporná racionální čísla jsou čísla k nim opačná.

Naším cílem jsou nyní vědecky správné definice sčítání a násobení racionálních čísel a odvození platných pro ně početních zákonů. Je možný dvojí postup: mohli bychom začít lomenými čísly, k nim připojit číslo 0, v tomto číselném oboru definovat sčítání a násobení a odvodit početní zákony, potom rozšířit pojem čísla připojením čísel opačných k číslům lomeným, a v takto získaném oboru všech racionálních čísel definovat sčítání a násobení a rozšířit platnost početních zákonů na širší obor; podobným způsobem jsme postupovali v kap. I při přechodu od nezáporných celých čísel k libovolným celým číslům. Druhý možný postup je ten, že užívajíce toho, že množina všech celých čísel je nám už známa, rozšíříme ji hned na množinu všech racionálních čísel. Tuto druhou možnou cestu nastoupíme v této knize. Dříve než tak učiníme, bude vhodné si blíže všimnout toho, že jsme se v předcházejícím výkladu setkali s abstraktním pojmem *zlomku* a s konkretním pojmem určitého *tvaru zlomku*. To je příkladem stavu věcí, se kterým se setkáváme ve vyšší matematice tak často, že je účelné pozastavit se u jeho logického rozboru, který je předmětem § 2.

Poznámka 1,4. V poznámce 1,3 jsme se už dotkli toho, že praktický význam lomených čísel je v tom, že lze jimi vyjadřovat výsledek měření byť i ne theoreticky přesně, ale přece jenom tak, že chyba je prakticky zcela bezvýznamná. K tomu účelu však není nutné užívat *všech* zlomků, nýbrž stačí omezit se na *některé* zlomky, totiž na takové zlomky, jejichž jmenovateli jsou přirozená čísla určitého druhu D; aby takové zlomky stačily k vyjadřování výsledků měření s libovolně velkou přesností, je pouze třeba, aby mezi čísly druhu D byla čísla větší než jakkoli zvolené přirozené číslo. Takový druh D přirozených čísel tvoří mocniny deseti neboli čísla tvaru 10^k, kde k probíhá všecka nezáporná celá čísla, t. j. do D patří čísla 1, 10, 100, 1000 atd. Zlomky, které lze psát se jmenovatelem tohoto druhu D, se jmenují *desetinné zlomky* a je pro ně zaveden čtenářům známý způsob psaní bez zlomkové čáry, s použitím t. zv. desetinné čárky. Praktický význam desetinných zlomků je nesmírný; protože však konkretní počítání s desetinnými zlomky je všem čtenářům této knihy nepochybně dobře známo, nebudeme v této knize desetinné zlomky probírat.

§ 2. Tvoření nových pojmů abstrakcí

Jak jsme uvedli v § 1, jde nám nyní o obecný popis toho stavu věcí, jehož důležitým zvláštním případem je vztah mezi konkretním pojmem určitého *tvaru zlomku* a abstraktním pojmem *zlomku*.

Budiž dána nějaká neprázdná množina M, na př. množina všech obratlovců. Často je účelné nějakým způsobem roztřídit množinu M, t. j. podle nějakých znaků seskupit jednotlivé prvky množiny M v menší množiny, které nazveme *třídami*, jako je v daném případě množina ssavců, ptáků, plazů, obojživelníků a ryb. Takovýmto procesem dospějeme od množiny M, jejímiž prvky jsou všichni jednotliví obratlovci, k nové abstraktnější množině M^*, která v daném případě má už jen pět prvků, jimiž jsou abstraktní pojmy ssavce, ptáka, plaza, obojživelníka a ryby. Prvky množiny M^* nejsou ve své podstatě nic jiného než samy třídy, na které byla rozložena množina M; pravíme, že množina M^* vznikne *abstrakcí* z množiny M. Abstrakce záleží v tom, že považujeme za *podstatné* pouze některé znaky, kterými se mohou od sebe lišit jednotlivé prvky množiny M, a že nerozlišujeme mezi takovými dvěma prvky množiny M, které se shodují ve všech těch znacích, které považujeme za podstatné. Znamená-li α nějaký prvek množiny M, označme $\{\alpha\}$ příslušný prvek množiny M^* a nazvěme α *konkretním vyjádřením* prvku $\{\alpha\}$. Jsou-li tedy α, β dva různé prvky množiny M, bude $\{\alpha\} = \{\beta\}$ právě tehdy, jestliže oba prvky α, β se shodují ve všech svých „podstatných" znacích. Jestliže $\{\alpha\} = \{\beta\}$, řekneme, že α, β jsou dva *ekvivalentní* prvky množiny M.

Abychom při dané množině M měli řádně definovánu množinu M^*, je pouze třeba znát *pravidlo ekvivalence* pro množinu M, t. j. pravidlo, které rozhodne, zda dva libovolně zvolené prvky α, β jsou či nejsou mezi sebou *ekvivalentní*, t. j. zda oba jsou či nejsou konkretním vyjádřením téhož prvku množiny M^*, neboli zda je či není $\{\alpha\} = \{\beta\}$. Pišme

$$\alpha \sim \beta \tag{2,1}$$

v případě, že α, β jsou ekvivalentní, takže (2,1) znamená totéž jako

$$\{\alpha\} = \{\beta\}\,. \tag{2,2}$$

Je-li skutečně dáno určité roztřídění množiny M, je pro každý prvek množiny M jasné, do které třídy patří, takže pro libovolné dva prvky α, β množiny M je jasné, zda platí či neplatí rovnost (2,2) neboli zda platí či neplatí vztah (2,1). Tak na př. v I § 4 (str. 28) jsme pomocí rekurentní definice rozložili množinu M všech celých nezáporných čísel na dvě třídy, na třídu čísel sudých a na třídu čísel lichých; množina M^* se v tomto případě skládá ze dvou prvků a vztah (2,1) znamená, že čísla α, β jsou buďto obě sudá, nebo obě lichá.

Často je však stav věcí takový, že je dána množina M, jejíž roztřídění není předem dáno; je dáno pouze pravidlo ekvivalence (2,1), t. j. je dán určitý předpis, podle kterého se pro každou dvojici $[\alpha, \beta]$, jejíž oba členy náležejí do množiny M, rozhodne, zda platí či neplatí vztah (2,1). Otázka je, jaké vlastnosti musí mít pravidlo (2,1), aby skutečně bylo pravidlem ekvivalence pro určité roztřídění množiny M.

Protože (2,1) má znamenat totéž jako (2,2), jsou na první pohled patrné dvě věci. Předně to, že pro každý prvek α množiny M musí být

$$\alpha \sim \alpha\,, \tag{2,3}$$

za druhé pak to, že pro každé dva prvky α, β množiny M musí být

$$\alpha \sim \beta \quad \text{právě tehdy, jestliže} \quad \beta \sim \alpha\,. \tag{2,4}$$

Je však snadné si uvědomit, že vlastnosti (2,3) a (2,4) samy o sobě ještě nestačí k tomu, aby (2,1) bylo pravidlo ekvivalence pro určité roztřídění množiny M. Je-li dáno pravidlo (2,1) s vlastnostmi (2,3) a (2,4), potom každý prvek α množiny M určuje část množiny M, kterou označíme $\{\alpha\}$ a která se skládá z těch prvků x množiny M, pro které platí $\alpha \sim x$, nebo což podle vlastnosti (2,4) je totéž, pro které platí $x \sim \alpha$. Nazveme-li takto vzniklé části množiny M *třídami*, potom každý prvek množiny M bude náležet do některé třídy, neboť podle vlastnosti (2,3) prvek α náleží do třídy $\{\alpha\}$. Z toho však ještě neplyne, že jsme dostali roztřídění množiny M, protože se nám může stát, že některý prvek α bude náležet do více než jedné třídy. Dejme tomu, že na př. M je množina složená ze čtyř čísel 1, 2, 3, 5 a že (2,1) znamená, že

$$\text{buďto } \alpha = \beta, \text{ nebo } \alpha = \beta + 1, \text{ nebo } \beta = \alpha + 1\,.$$

Vlastnosti (2,3) a (2,4) jsou potom splněny. Třída $\{1\}$ obsahuje čísla 1, 2; třída $\{2\}$ obsahuje čísla 1, 2, 3; třída $\{3\}$ obsahuje čísla 2, 3; třída $\{5\}$ obsahuje jen číslo 5. Tedy číslo 1 náleží do dvou různých tříd, stejně číslo 3, číslo 2 náleží do tří různých tříd, číslo 5 do jediné třídy. Je patrné, že jsme nedospěli k roztřídění naší množiny M. Je tedy třeba, aby mimo (2,3) a (2,4) platila ještě nějaká další vlastnost. Abychom tuto vlastnost našli, předpokládejme, že α, β, γ jsou takové prvky množiny M, že je $\alpha \sim \beta$ a zároveň $\beta \sim \gamma$, což zapíšeme stručně $\alpha \sim \beta \sim \gamma$. Jestliže (2,1) je pravidlo ekvivalence, potom náš předpoklad znamená, že je $\{\alpha\} = \{\beta\}$ a zároveň $\{\beta\} = \{\gamma\}$, tedy také $\{\alpha\} = \{\gamma\}$ neboli $\alpha \sim \gamma$. Tedy pravidlo ekvivalence musí vedle vlastností (2,3) a (2,4) mít ještě tu vlastnost, že pro libovolné tři prvky α, β, γ množiny M musí platit:

$$\text{je-li } \alpha \sim \beta \sim \gamma, \text{ je také } \alpha \sim \gamma\,. \tag{2,5}$$

Obráceně předpokládejme, že pravidlo (2,1) má vlastnosti (2,3), (2,4), (2,5). Dokážeme, že (2,1) je pravidlo ekvivalence. Podle předcházejícího je třeba pouze dokázat, že libovolný prvek x množiny M nenáleží do jiné třídy než do třídy $\{x\}$. Jinak řečeno: nechť x náleží do třídy $\{y\}$; máme dokázat, že $\{x\} = \{y\}$. Avšak $\{x\} = \{y\}$ znamená: jednak, že každý prvek u množiny $\{x\}$ náleží také do množiny $\{y\}$, jednak, že každý prvek v množiny $\{y\}$ náleží také do množiny $\{x\}$. Tedy máme dokázat dvoje:

$$\text{je-li } x \sim y \text{ a zároveň } u \sim x, \text{ je také } u \sim y\,; \tag{*}$$

$$\text{je-li } x \sim y \text{ a zároveň } y \sim v, \text{ je také } x \sim v\,. \tag{**}$$

Avšak (*) se dá psát: je-li $u \sim x \sim y$, je také $u \sim y$, což plyne ze (2,5) pro $\alpha = u$, $\beta = x$, $\gamma = u$. Podobně (**) plyne ze (2,5) pro $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = v$.

Poznámka 2,1. Vlastnosti (2,3), (2,4), (2,5) se mnohdy označují takto: vlastnost (2,3) se nazývá *reflexivita*, vlastnost (2,4) *symetrie*, vlastnost (2,5) *transitivnost* vztahu ekvivalence.

Poznámka 2,2. Krajní případ vztahu ekvivalence dostaneme, jestliže (2,1) znamená prostě rovnost $\alpha = \beta$. V tomto případě každá třída obsahuje jediný prvek množiny M a množina M^* je totožná s množinou M. Druhý krajní případ dostaneme, platí-li (2,1) pro libovolné dva prvky α, β množiny M. V tomto případě tvoří všecky prvky množiny M jedinou třídu, která je jediným prvkem množiny M^*.

Příklad 2,1. Vznik přirozených čísel čítáním je příkladem na tvoření pojmů abstrakcí. Od pojmu souboru dospíváme k pojmu přirozeného čísla pomocí pravidla ekvivalence $A \sim B$, které znamená, že soubory A, B mají týž počet prvků, t. j. že je možné každému prvku množiny A přiřadit určitý prvek množiny B tak, že každý prvek množiny B je přiřazen právě jednomu prvku množiny A. Je-li na př. A soubor lidí, z nichž každý sedí na židli, B soubor těch židlí, je $A \sim B$; každému z lidí přiřadíme židli, na které sedí.

Příklad 2,2. Budiž M množina všech zlomků. Jestliže pro libovolné dva zlomky α, β vztah $\alpha \sim \beta$ znamená, že číslo $\alpha - \beta$ je celé, jsou splněny vlastnosti (2,3), (2,4) a (2,5), t. j. dostáváme pravidlo ekvivalence v množině M.

§ 3. Elementární zlomky

Úvahy předchozího paragrafu vedou k vědecké definici pojmu racionálního čísla. Vyjdeme od množiny M, která se skládá z dvojic $[a, b]$, jejichž prvým členem a je libovolné *celé číslo* (kladné, záporné nebo rovné nule) a druhým členem b je libovolné *kladné celé číslo.* Takovou dvojici budeme psát ve tvaru

$$\frac{a}{b}, \tag{3,1}$$

celé číslo a nazveme jejím *čitatelem*, přirozené číslo b jejím *jmenovatelem*, dvojici (3,1) samu *elementárním zlomkem*. Je-li (3,1) elementární zlomek a je-li k přirozené číslo, je také

$$\frac{ak}{bk} \tag{3,2}$$

elementární zlomek, který nazveme *rozšířením* elementárního zlomku (3,1). Protože 1 je přirozené číslo, plyne z věty I 2,6, že každý elementární zlomek je svým vlastním rozšířením.

Věta 3,1. *Je-li* $c \neq 0$ *a je-li* $cu = cv$ (neboli $uc = vc$), *je také* $u = v$.

Důkaz. Jest

$$c(u - v) = cu - cv = cu - cu = 0\,,$$

takže podle věty I 2,8 je $u - v = 0$ neboli $u = v$.

Protože jmenovatel elementárního zlomku je různý od nuly, plyne z věty 3,1, že každý elementární zlomek má nekonečně mnoho různých rozšíření.

Zaveďme nyní v množině M elementárních zlomků pravidlo ekvivalence

$$\frac{a_1}{b_1} \sim \frac{a_2}{b_2} \tag{3,3}$$

takto: (3,3) znamená, že *oba elementární zlomky mají společné rozšíření*, jinak řečeno, že existují taková přirozená čísla k_1, k_2, že

$$a_1k_1 = a_2k_2\,, \quad b_1k_1 = b_2k_2\,. \tag{3,4}$$

Protože každý elementární zlomek je svým vlastním rozšířením, má naše pravidlo (3,3) vlastnost (2,3). Vlastnost (2,4) pravidla (3,3) je zřejmá. Jestliže nyní vedle (3,3) máme ještě

$$\frac{a_2}{b_2} \sim \frac{a_3}{b_3}\,, \tag{3,5}$$

kde napravo je zase elementární zlomek, pak mimo (3,4) je také

$$a_2h_1 = a_3h_2\,, \quad b_2h_1 = b_3h_2\,, \tag{3,6}$$

kde h_1, h_2 jsou přirozená čísla. Podle (3,4), (3,6) a podle vět I 2,4 a I 2,5 je

$$a_1 \,.\, k_1h_1 = a_1k_1 \,.\, h_1 = a_2k_2 \,.\, h_1 = a_2h_1 \,.\, k_2 = a_3h_2 \,.\, k_2 = a_3 \,.\, h_2k_2$$

a podobně též $b_1 \,.\, k_1h_1 = b_3 \,.\, h_2k_2$. Protože k_1h_1, h_2k_2 jsou přirozená čísla, je tedy

$$\frac{a_1}{b_1} \sim \frac{a_3}{b_3}\,.$$

Tím je pro pravidlo (3,3) dokázána i vlastnost (2,5), takže (3,3) je pravidlo ekvivalence v množině M, které abstrakcí definuje novou množinu M^*, jejíž prvky nazveme *racionální čísla*, při čemž učiníme určitou dohodu, podle které budou celá čísla zvláštním případem racionálních čísel. Tato dohoda je založena na větě:

Věta 3,2. *Jsou-li* $\frac{a_1}{b}$, $\frac{a_2}{b}$ *elementární zlomky se společným jmenovatelem* b *a je-li* $\frac{a_1}{b} \sim \frac{a_2}{b}$, *je* $a_1 = a_2$, t. j. oba elementární zlomky splynou.

Důkaz. Podle předpokladu existují taková přirozená čísla k_1, k_2, že

$$a_1k_1 = a_2k_2\,, \quad bk_1 = bk_2\,. \tag{3,7}$$

Protože $b \neq 0$, plyne z druhé rovnosti (3,7) podle věty 3,1, že $k_1 = k_2$, takže první rovnost (3,7) zní $a_1k_1 = a_2k_1$; protože $k_1 \neq 0$, dává věta 3,1 žádanou rovnost $a_1 = a_2$.

Každý elementární zlomek (3,1) určuje racionální číslo

$$\left\{\frac{a}{b}\right\}; \tag{3,8}$$

(3,1) je *vyjádření racionálního čísla* (3,8) *elementárním zlomkem*. Každému celému číslu a můžeme přiřadit racionální číslo $\left\{\frac{a}{1}\right\}$; z věty 3,2 vyplývá, že různým celým číslům odpovídají takto různá racionální čísla, a to nás opravňuje k důležité dohodě:

$$\left\{\frac{a}{1}\right\} = a \tag{3,9}$$

pro každé celé číslo a. Vzhledem k této dohodě jsou celá čísla zvláštním případem racionálních čísel, jak jsme už ohlásili.

Poznámka 3,1. Kdyby čtenář skutečně nevěděl nic o racionálních číslech nežli to, co nyní vykládáme, mohl by mít pochybnost, zda snad každé racionální číslo není celým číslem. Čtenář ovšem ví, že racionální číslo $\{\frac{1}{2}\}$ není celým číslem; přesto si to dokážeme. Kdyby bylo $\{\frac{1}{2}\} = a$, kde a je celé číslo, bylo by podle našich definic

$$\frac{1}{2} \sim \frac{a}{1},$$

t. j. existovala by taková přirozená čísla k_1, k_2, že

$$1 \,.\, k_1 = a \,.\, k_2\,, \quad 2 \,.\, k_1 = 1 \,.\, k_2\,.$$

Podle věty I 2,6 by bylo $k_1 = ak_2$, $k_2 = 2k_1$, a tedy podle vět I 2,4; I 2,5; I 2,6: $1 \,.\, k_1 = 2a \,.\, k_1$; protože $k_1 \neq 0$, soudíme z věty 3,1, že $2a = 1$, takže číslo $2a$ je kladné a z věty I 8,2 plyne, že a je přirozené číslo. Potom však $2a = 1$ je nemožné na př. proto, že 1 je číslo liché, 2 číslo sudé, tedy také $2a$ číslo sudé podle věty I 4,4. (Viz též poznámku 6,5, str. 78.)

Věta 3,3. *Je-li* (3,1) *elementární zlomek a je-li k přirozené číslo, je*

$$\frac{a}{b} \sim \frac{ak}{bk}.$$

Důkaz. (3,2) je rozšířením elementárního zlomku (3,1), ale také svým vlastním rozšířením.

Věta 3,4. *Konečný počet $n \geq 1$ racionálních čísel můžeme vyjádřit elementárními zlomky*

$$\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}, \ldots, \frac{a_n}{b} \tag{3,10}$$

se společným jmenovatelem.

Důkaz indukcí vzhledem k n. Pro $n = 1$ je věta zřejmá. Předpokládejme tedy, že je správná pro určité n. Je-li nyní dáno $n + 1$ racionálních čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, potom podle předpokladu můžeme vyjádřit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ elementárními zlomky (3,10) se společným jmenovatelem b; zvolme libovolně vyjádření $\frac{c}{d}$ racionálního čísla α_{n+1} elementárním zlomkem. Potom podle věty 3,3 jsou

$$\frac{a_1 d}{bd}, \frac{a_2 d}{bd}, \ldots, \frac{a_n d}{bd}, \frac{bc}{bd}$$

vyjádření všech $n + 1$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ elementárními zlomky se společným jmenovatelem bd.

Věta 3,5. *Jestliže racionální čísla*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{3,11}$$

mají jednak vyjádření elementárními zlomky (3,10) *se společným jmenovatelem b a jednak vyjádření elementárními zlomky*

$$\frac{a_1'}{c}, \frac{a_2'}{c}, \ldots, \frac{a_n'}{c} \tag{3,12}$$

se společným jmenovatelem c, potom existují taková přirozená čísla k, h, že čísla (3,11) *mají vyjádření elementárními zlomky*

$$\frac{a_1k}{bk}, \frac{a_2k}{bk}, \ldots, \frac{a_nk}{bk} \tag{3,13}$$

totožnými (i co do pořadí) *s elementárními zlomky*

$$\frac{a_1'h}{ch}, \frac{a_2'h}{ch}, \ldots, \frac{a_n'h}{ch}. \tag{3,14}$$

Důkaz. Pro $1 \leqq r \leqq n$ máme pro racionální číslo α_r dvě vyjádření elementárními zlomky

$$\frac{a_r}{b}, \quad \frac{a_r'}{c},$$

ze kterých podle věty 3,3 dostáváme další dvě vyjádření

$$\frac{a_rc}{bc}, \quad \frac{a_r'b}{bc},$$

a z věty 3,2 soudíme, že $a_rc = a_r'b$ (pro $1 \leqq r \leqq n$).

Z toho plyne, že volíme-li $k = c$, $h = b$, jsou elementární zlomky (3,13) totožné (i co do pořadí) s elementárními zlomky (3,14).

Věta 3,6. *Je-li a celé číslo, b přirozené číslo, je $\left\{\frac{a}{b}\right\} = 0$ právě tehdy, jestliže $a = 0$, $\left\{\frac{a}{b}\right\} = 1$ právě tehdy, jestliže $a = b$.*

Důkaz. Podle (3,9) a podle věty 3,3 je $\left\{\frac{0}{b}\right\} = 0$, $\left\{\frac{b}{b}\right\} = 1$, a pak už je jen třeba užít věty 3,2.

§ 4. Sčítání, násobení a odčítání racionálních čísel

Jsou-li

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{4,1}$$

racionální čísla, definujeme jejich součet

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \tag{4,2}$$

takto: Podle věty 3,4 vyjádříme čísla (4,1) elementárními zlomky (3,10) se společným jmenovatelem b. Součtem (4,2) je potom racionální číslo

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b}\right\}. \tag{4,3}$$

Poznámka 4,1. Je třeba ukázat, že číslo (4,3) je nezávislé na volbě vyjádření (3,10). Podle věty 3,5 stačí ukázat, že číslo (4,3) se nezmění při přechodu k vyjádření tvaru (3,13), že tedy

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b} \sim \frac{a_1k + a_2k + \ldots + a_nk}{bk},$$

je-li k přirozené číslo. To plyne z věty 3,3, neboť

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, k = a_1k + a_2k + \ldots + a_nk$$

podle věty I 3,14.

Poznámka 4,2. Jsou-li (4,1) čísla celá, můžeme podle (3,9) volit $a_1 = \alpha_1, a_2 = \alpha_2, \ldots, a_n = \alpha_n, b = 1$; pak je zřejmé [opět podle (3,9)], že v tomto případě nová definice součtu (4,2) je v souladu s původní definicí tohoto součtu.

Věta 4,1. *Věty* I 2,1; I 2, 2; I 2,3; I 3,1; I 3,3; I 3,4; I 3,5; I 3,12 *a* I 3,16 *jsou správné pro libovolná racionální čísla.*

Důkaz. Správnost těchto vět v oboru všech celých čísel je dána větou I 7,8. Správnost v oboru všech racionálních čísel plyne pak přímo z definice (4,3), jen je třeba užít toho, že podle věty 3,6 je $0 = \left\{\frac{0}{b}\right\}$ pro každé přirozené číslo b.

Poznámka 4,3. Pro racionální čísla je nyní možné opakovat poznámku I 7,11.

Přistupme k násobení racionálních čísel. Součin

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{4,4}$$

racionálních čísel (4,1) definujeme takto. Vyjádříme libovolným způsobem čísla (4,1) elementárními zlomky

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}. \tag{4,5}$$

Součinem (4,4) je potom racionální číslo

$$\left\{\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n}\right\}. \tag{4,6}$$

Poznámka 4,4. Protože $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou přirozená čísla, platí podle věty I 3,10 totéž o čísle $b_1 b_2 \ldots b_n$.

Poznámka 4,5. Je třeba ukázat, že číslo (4,6) je nezávislé na volbě vyjádření (4,5). Přejdeme-li k jiným vyjádřením

$$\frac{a_1'}{b_1'}, \frac{a_2'}{b_2'}, \ldots, \frac{a_n'}{b_n'}, \tag{4,5'}$$

existují podle definice vztahu (3,3) taková přirozená čísla

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \quad h_1, h_2, \ldots, h_n,$$

že

$$\begin{aligned} a_1 k_1 &= a_1' h, & a_2 k_2 &= a_2' h_2, \ldots, a_n k_n = a_n' h_n, \\ b_1 k_1 &= b_1' h_1, & b_2 k_2 &= b_2' h_2, \ldots, b_n k_n = b_n' h_n. \end{aligned}$$

Podle vět I 3,6 a I 3,7 je pak

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_n \,.\, k_1 k_2 \ldots k_n &= a_1' a_2' \ldots a_n' \,.\, h_1 h_2 \ldots h_n, \\ b_1 b_2 \ldots b_n \,.\, k_1 k_2 \ldots k_n &= b_1' b_2' \ldots b_n' \,.\, h_1 h_2 \ldots h_n \end{aligned}$$

a podle věty I 3,10 jsou $k_1 k_2 \ldots k_n$, $h_1 h_2 \ldots h_n$ přirozená čísla, takže

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} \sim \frac{a_1' a_2' \ldots a_n'}{b_1' b_2' \ldots b_n'},$$

a jsme hotovi. Jsou-li (4,1) čísla celá, můžeme podle (3,9) volit $a_1 = \alpha_1$, $a_2 = \alpha_2, \ldots, a_n = \alpha_n$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1, \ldots, b_n = 1$ (tedy $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$ podle věty I 3,8), načež je zřejmé [opět podle (3,9)], že v tomto případě nová definice součinu (4,4) je v souladu s původní definicí tohoto součinu.

Věta 4,2. *Věty* I 2,4; I 2,5; I 2,6; I 2,7; I 2,8; I 2,9; I 3,2; I 3,6; I 3,7; I 3,8; I 3,9; I 3,10; I 3,11; I 3,13; I 3,14 *a* I 3,17 jsou správné *pro libovolná racionální čísla.*

Důkaz. Správnost těchto vět v oboru všech celých čísel je dána větami I 8,3 a I 8,6. Rozšíření na racionální čísla u většiny našich vět je ihned jasné z definice (4,6) a z věty 3,6. Zbývá dokázat v oboru racionálních čísel pouze větu I 3,11, jejímiž zvláštními případy jsou věty I 2,9 a I 3,14.

Buďtež tedy vedle racionálních čísel (4,1) dána další racionální čísla

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m ; \tag{4,7}$$

buďtež opět (3,10) vyjádření čísel (4,1) elementárními zlomky se společným jmenovatelem b a podobně buďtež

$$\frac{c_1}{d}, \frac{c_2}{d}, \ldots, \frac{c_m}{d}$$

vyjádření čísel (4,7) elementárními zlomky se společným jmenovatelem d. Podle naší definice sčítání a násobení racionálních čísel má součin

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m) \tag{4,8}$$

vyjádření elementárním zlomkem

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(c_1 + c_2 + \ldots + c_m)}{bd}. \tag{4,9}$$

Jestliže index r probíhá čísla $1, 2, \ldots, n$ a index s čísla $1, 2, \ldots, m$, je čitatel ve (4,9) roven součtu nm celých čísel $a_r \,.\, c_s$, takže podle naší definice sčítání a násobení racionálních čísel součin (4,8) je roven součtu nm racionálních čísel

$$\left\{\frac{a_r c_s}{bd}\right\} = \left\{\frac{a_r}{b}\right\} \cdot \left\{\frac{c_s}{d}\right\} = \alpha_r \,.\, \beta_s ,$$

a to právě jsme chtěli dokázat.

Poznámka 4,6. Je nyní jasné, že poznámky I 8,1 a I 8,2 platí i pro racionální čísla.

K racionálnímu číslu α nazveme *opačným* a označíme $-\alpha$ součin $(-1) \,.\, \alpha$; z poznámky I 8,3 je jasné, že je to pro celé α v souladu s původní definicí opačného čísla.

Věta 4,3. *Je-li* $\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\}$, *je* $-\alpha = \left\{\frac{-a}{b}\right\}$.

Důkaz. Jest

$$-\alpha = \left\{\frac{-1}{1}\right\} \cdot \left\{\frac{a}{b}\right\} = \left\{\frac{(-1) \,.\, a}{1 \,.\, b}\right\} = \left\{\frac{-a}{b}\right\}.$$

Věta 4,4. *Věty* I 7,4; I 7,5; I 7,9 *a* I 8,4 *jsou správné pro libovolná racionální čísla.*

Důkaz. Podle známých nám početních pravidel je

$$- \alpha + \alpha = (-1) . \alpha + 1 . \alpha = (-1 + 1) . \alpha = 0 . \alpha = 0 ;$$
$$- \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = (-1) . \alpha_1 + (-1) . \alpha_2 + \ldots + (-1) . \alpha_n =$$
$$= (-1) . (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) .$$

Jsou-li α, β racionální čísla a je-li $x = -\alpha + \beta$, je

$$\alpha + x = \beta , \tag{4,10}$$

neboť

$$\alpha + x = \alpha + (-\alpha + \beta) = (\alpha - \alpha) + \beta = 0 + \beta = \beta .$$

Obráceně, platí-li (4,10), je

$$x = 0 + x = (-\alpha + \alpha) + x = -\alpha + (\alpha + x) = -\alpha + \beta .$$

Věta I 8,4 se přenese na racionální čísla pomocí věty 4,3.

Poznámka 4, 7. Věta 3,1 platí i v oboru racionálních čísel, jak je nyní patrné z jejího důkazu.

§ 5. Převrácená čísla. Mocniny s celým exponentem. Dělení racionálních čísel

Budiž α racionální číslo. Zkoumejme, zda existuje takové racionální číslo x, že

$$\alpha . x = 1 . \tag{5,1}$$

Protože nula je agresivní při násobení, x neexistuje, je-li $\alpha = 0$. Je-li však $\alpha \neq 0$, budiž $\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\}$, takže $a \neq 0$ podle věty 3,6. Budiž

$$x = \left\{\frac{b}{a}\right\}, \text{ je-li } a > 0 ,$$

$$x = \left\{\frac{-b}{|a|}\right\}, \text{ je-li } a < 0 .$$

Na základě definice násobení lehko spočteme, že potom platí (5,1). Je-li $x_1 \neq x_2$, nemůže (protože $\alpha \neq 0$) být zároveň $\alpha x_1 = 1$, $\alpha x_2 = 1$. To plyne z věty 3,1 (viz poznámku 4,7).

Je-li α racionální číslo, označíme α^{-1} a nazveme *číslem převráceným* k číslu α to racionální číslo x, pro které platí (5,1). Z předcházejícího výkladu je patrné, že k libovolnému racionálnímu číslu $\alpha \neq 0$ existuje právě jedno převrácené číslo. Naproti tomu je 0^{-1} *bezvýznamný symbol*, t. j. *k číslu nula neexistuje převrácené číslo.*

Poznámka 5,1. Obvyklejší je název převrácená *hodnota*, ale výraz převrácené *číslo* je podle autorova soudu vhodnější. Srov. poznámku I 7,4.

Poznámka 5,2. Protože $1 . 1 = 1$, je podle naší definice $1^{-1} = 1$.

Věta 5,1. *Je-li* $\alpha \neq 0$, *je také* $\alpha^{-1} \neq 0$.

To plyne z (5,1) podle věty I 2,7.

Věta 5,2. *Jsou-li* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *racionální čísla různá od nuly, je*

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)^{-1} = \alpha_1^{-1} . \alpha_2^{-1} \ldots \alpha_n^{-1} .$$

Důkaz. Podle obecného komutativního a asociativního zákona násobení je

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) . (\alpha_1^{-1} . \alpha_2^{-1} \ldots \alpha_n^{-1}) = (\alpha_1 \alpha_1^{-1}) . (\alpha_2 \alpha_2^{-1}) \ldots (\alpha_n \alpha_n^{-1}) = 1.$$

Buďtež nyní α, β racionální čísla. Budeme zkoumat, zda existuje takové racionální číslo x, že

$$\alpha x = \beta . \tag{5,2}$$

Je-li předně $\alpha = 0$, je patrné, že pro $\beta = 0$ vyhovuje rovnici (5,2) *každé* racionální číslo x a pro $\beta \neq 0$ nevyhovuje *žádné* racionální x. Zcela jinak tomu je pro $\alpha \neq 0$.

Věta 5,3. *Jsou-li* α, β *racionální čísla a je-li* $\alpha \neq 0$, *má rovnice* (5,2) *právě jeden racionální kořen, totiž*

$$x = \alpha^{-1} . \beta . \tag{5,3}$$

Důkaz. Platí-li (5,3), je podle známých nám početních zákonů

$$\alpha x = \alpha . (\alpha^{-1} \beta) = (\alpha \alpha^{-1}) . \beta = 1 . \beta = \beta .$$

Obráceně, platí-li (5,2), je

$$x = 1 . x = (\alpha \alpha^{-1}) . x = (\alpha^{-1} \alpha) . x = \alpha^{-1} . (\alpha x) = \alpha^{-1} \beta .$$

Poznámka 5,3. V důsledku věty 5,3 v oboru racionálních čísel je dělení ve smyslu určení neznámého činitele ze známého součinu a známého činitele *různého od nuly* výkon vždy jednoznačně proveditelný; dělení v oboru racionálních čísel však není *základní* výkon, protože je převeden na určení převráceného čísla a na násobení. *Nulou dělit nelze.*

Je-li n nezáporné číslo celé, ponecháme v platnosti dřívější definici mocniny s exponentem n [I (6,2) pro $n = 0$, I (6,1) pro $n \neq 0$] i v případě libovolného racionálního základu. Věty I 6,1; I 6,4; I 6,5; I 6,6 zůstanou v platnosti, neboť jejich důkazy jsou založeny na vlastnostech násobení, jejichž platnost v oboru racionálních čísel je nám známa.

Je-li nyní α racionální číslo různé od nuly a je-li n přirozené číslo, plyne z věty 5,2, že

$$(\alpha^n)^{-1} = (\alpha^{-1})^n . \tag{5,4}$$

Společnou hodnotu obou čísel (5,4) označíme α^{-n}, což pro $n = 1$ je v souladu s dřívějším označením. Symbol 0^{-n} je *bezvýznamný* pro každé přirozené číslo n. Označení *mocnina, základ, exponent* přeneseme i na nově definovaný případ záporného celého exponentu (a racionálního základu $\alpha \neq 0$).

Věta 5,4. *Je-li* $\alpha \neq 0$ *racionální číslo a jsou-li* m, n *celá čísla, je*

$$\alpha^{m+n} = \alpha^m . \alpha^n .$$

Víme, že tomu tak je pro $m \geqq 0$, $n \geqq 0$. Je-li $m < 0$, $n < 0$, položme $m = -h$, $n = -k$; podle definice a podle věty 5,2 je

$$\alpha^{m+n} = \alpha^{-(h+k)} = (\alpha^{h+k})^{-1} = (\alpha^h . \alpha^k)^{-1} = (\alpha^h)^{-1} . (\alpha^k)^{-1} = \alpha^m . \alpha^n .$$

Protože

$$m + n = n + m , \quad \alpha^m . \alpha^n = \alpha^n . \alpha^m ,$$

stačí vyšetřit ještě jen případ

$$m = -h < 0 , \quad n \geqq 0 .$$

Rozdělme jej na dva podle toho, zda $m + n \geqq 0$ či $m + n < 0$. Je-li $m + n = s \geqq 0$, je $n = h + s$ s nezápornými celými sčítanci, takže $\alpha^h . \alpha^s = \alpha^n$, t. j. rovnice $\alpha^h . x = \alpha^n$ má kořen $x = \alpha^s$; podle věty 5,3 je tedy

$$\alpha^{m+n} = \alpha^s = x = (\alpha^h)^{-1} . \alpha^n = \alpha^m . \alpha^n .$$

Je-li však $m + n = -r < 0$, je $h = r + n$ s nezápornými celými sčítanci, takže $\alpha^r . \alpha^n = \alpha^h$, t. j. rovnice $\alpha^r . y = \alpha^h$ má kořen $y = \alpha^n$; podle věty 5,3 je tedy

$$\alpha^n = y = (\alpha^r)^{-1} . \alpha^h = \alpha^{m+n} . \alpha^h = \alpha^h . \alpha^{m+n} ,$$

t. j. rovnice $\alpha^h . z = \alpha^n$ má kořen $z = \alpha^{m+n}$; podle věty 5,3 je tedy

$$\alpha^{m+n} = z = (\alpha^h)^{-1} . \alpha^n = \alpha^m . \alpha^n .$$

Věta 5,5. *Je-li $\alpha \neq 0$ racionální číslo a jsou-li m, n celá čísla, je*

$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn} . \tag{5,5}$$

Důkaz. Je-li $m \geqq 0$, $n \geqq 0$, je nám to známo. Je-li $m \geqq 0$, $n = - k < 0$, je

$$(\alpha^m)^n = (\alpha^m)^{-k} = [(\alpha^m)^k]^{-1} = (\alpha^{mk})^{-1} = \alpha^{-mk} = \alpha^{mn} .$$

Tedy (5,5) platí pro nezáporné celé m a libovolné celé n, takže pro $m = - h < 0$, $\beta \neq 0$ je

$$(\beta^h)^n = \beta^{hn} .$$

Volíme-li $\beta = \alpha^{-1}$ (viz větu 5,1), dostaneme

$$(\alpha^m)^n = [(\alpha^{-1})^h]^n = (\alpha^{-1})^{hn} = \alpha^{-hn} = \alpha^{mn} .$$

Poznámka 5,4. V případě $m = - 1$, $n = - 1$ praví věta 5,5, že jestliže k racionálnímu číslu $\alpha \neq 0$ je převráceným číslem β, je také obráceně α převráceným číslem k číslu β. To se dá ovšem snadno dokázat přímo.

Věta 5,6. *Jsou-li $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ racionální čísla a je-li n celé číslo, je*

$$\alpha^n . \beta^n = (\alpha\beta)^n .$$

Důkaz. Pro $n \geqq 0$ je nám to známo. Je-li $n = - h < 0$, uvažme, že podle věty 5,2 je $\alpha^{-1} . \beta^{-1} = (\alpha\beta)^{-1}$, takže

$$\alpha^n . \beta^n = (\alpha^{-1})^h . (\beta^{-1})^h = (\alpha^{-1} . \beta^{-1})^h = [(\alpha\beta)^{-1}]^h = (\alpha\beta)^{-h} = (\alpha\beta)^n .$$

Je-li a celé číslo, b přirozené číslo, je $\left\{\dfrac{a}{b}\right\}$ racionální číslo a podle (3,9) plyne z naší definice násobení, že toto racionální číslo je kořenem rovnice $b . x = a$, takže podle věty 5,3 je

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} = b^{-1} . a . \tag{5,6}$$

Vraťme se k rovnici (5,2), kde α, β jsou racionální čísla, $\alpha \neq 0$. Čtenářům je známo, že řešení takové rovnice se nazývá *dělení*, že číslo β se jmenuje *dělenec*, číslo α *dělitel*, kořen x rovnice (5,2) se jmenuje *podíl* a značí se $\beta : \alpha$. Připomeňme, že $\beta : 0$ je bezvýznamný symbol (viz poznámku 5,3). Je-li $\alpha = b$ přirozené číslo, $\beta = a$ celé číslo, je podle (5,6)

$$a : b = \left\{\frac{a}{b}\right\} . \tag{5,6'}$$

Místo toho se obyčejně píše bez závorky

$$a : b = \frac{a}{b} \tag{5,6''}$$

a také v obecném případě, když α, β jsou racionální čísla podrobená pouze podmínce $\alpha \neq 0$, píše se ve vědecké literatuře mnohem častěji $\frac{\beta}{\alpha}$ místo $\beta : \alpha$. Důvodem je mimo jiné ta okolnost, že v matematickém textu často užíváme dvojtečky v gramatickém smyslu a nezřídka by mohlo dojít k nedorozumění. Podle definice je

$$\frac{\beta}{\alpha} = \alpha^{-1}\beta \quad (\text{pro } \alpha \neq 0)\,. \tag{5,7}$$

V důsledku označení (5,7) se místo výrazů dělenec, dělitel, podíl užívá výrazů čitatel, jmenovatel, zlomek. *Jmenovatel zlomku je vždy různý od nuly.* Označení (5,7) je zobecněním označení (5,6″). Slovo zlomek má ve vědecké literatuře zpravidla význam definovaný vzorcem (5,7). (V tom smyslu, v jakém jsme užívali slova zlomek v § 1, užívá se ve vědecké literatuře zpravidla výrazu kladné racionální číslo.) Připomeňme ještě, co jsme vlastně už vyjádřili přechodem od (5,6′) k (5,6″). Je-li a celé číslo, b přirozené číslo, potom zlomek $\frac{a}{b}$ v nynějším smyslu není přesně totožný s elementárním zlomkem $\frac{a}{b}$ ve smyslu § 3, nýbrž s racionálním číslem $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, takže přechod k nynějšímu smyslu znamená vynechávání závorek {}, které po zavedení početních výkonů a odvození platných pro ně pravidel už nemůže vést k nedorozumění. Závorek {} budeme však pro jasnost výkladu ještě užívat v § 6, později už jen zcela výjimečně.

Zlomek v nynějším významu (5,7) je pojem odvozený z pojmů násobení a převráceného čísla a pravidla pro počítání se zlomky jsou snadné důsledky odvozených už pravidel. Ponechávajíce podrobné odůvodnění čtenáři, uveďme vzorce:

$$\frac{\beta}{1} = \beta\,, \tag{5,8}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1} \quad (\text{pro } \alpha \neq 0)\,, \tag{5,9}$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha} + \ldots + \frac{\beta_n}{\alpha} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0)\,, \tag{5,10}$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_2} \cdots \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n}{\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n} \quad (\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0, \ldots, \alpha_n \neq 0)\,, \tag{5,11}$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)\,, \tag{5,12}$$

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0,\ \gamma \neq 0)\,, \tag{5,13}$$

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{-\alpha} \quad (\alpha \neq 0)\,, \tag{5,14}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma = \gamma \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0)\,, \tag{5,15}$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = \frac{\beta^n}{\alpha^n} \quad (\alpha \neq 0,\ n \text{ celé číslo, pro } n < 0 \text{ též } \beta \neq 0)\,. \tag{5,16}$$

Jako příklad odvoďme (5,13). Podle věty 5,2 (nebo podle věty 5,6) je $(\alpha\gamma)^{-1} = \alpha^{-1}\gamma^{-1}$, takže podle komutativního a asociativního zákona násobení a podle definice převráceného čísla je

$$(\alpha\gamma)^{-1} \cdot (\beta\gamma) = (\alpha^{-1}\gamma^{-1}) \cdot (\beta\gamma) = (\alpha^{-1}\beta) \cdot (\gamma\gamma^{-1}) = (\alpha^{-1}\beta) \cdot 1 = \alpha^{-1}\beta,$$

z čehož plyne (5,13) podle (5,7).

Věta 5,7. *Je-li* $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, *je*

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \tag{5,17}$$

právě tehdy, jestliže

$$\alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2\,. \tag{5,18}$$

Důkaz. Jest

$$(\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}) \cdot (\alpha_2\beta_1) = (\alpha_1^{-1}\beta_1) \cdot (\alpha_2^{-1}\alpha_2) = (\alpha_1^{-1}\beta_1) \cdot 1 = \alpha_1^{-1}\beta_1$$

a podobně

$$(\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}) \cdot (\alpha_1\beta_2) = \alpha_2^{-1}\beta_2\,,$$

takže podle (5,7) z (5,18) plyne (5,17). Dále je

$$(\alpha_1\alpha_2) \cdot (\alpha_1^{-1}\beta_1) = (\alpha_2\beta_1) \cdot (\alpha_1\alpha_1^{-1}) = (\alpha_2\beta_1) \cdot 1 = \alpha_2\beta_1$$

a podobně

$$(\alpha_1\alpha_2) \,.\, (\alpha_2^{-1}\beta_2) = \alpha_1\beta_2 \,,$$

takže podle (5,7) z (5,17) plyne (5,18).

Věta 5,8. *Je-li* $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$, *je také*

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \,.$$

Důkaz. Podle věty 5,7 platí (5,18), takže

$$\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_1 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_1\beta_1$$

neboli

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\,\beta_1 = \alpha_1(\beta_2 - \beta_1) \,,$$

z čehož plyne žádaný výsledek podle věty 5,7.

Poznámka 5,5. Přechod od levé strany k pravé ve vzorci (5,13) se nazývá *krácení*, přechod od pravé strany k levé *rozšiřování*. Ale v obecném případě libovolného racionálního $\gamma \neq 0$ je rozdíl mezi krácením a rozšiřováním jenom formální, neboť

$$(\alpha\gamma) \,.\, \gamma^{-1} = \alpha \,.\, (\gamma\gamma^{-1}) = \alpha \,.\, 1 = \alpha \,, \quad (\beta\gamma) \,.\, \gamma^{-1} = \beta \,,$$

takže krácení číslem γ je totožné s rozšiřováním číslem γ^{-1}.

Poznámka 5,6. Slova *krácení* se užívá ještě v jiném významu. Jestliže z rovnosti $\alpha\gamma = \beta\gamma$ pro $\gamma \neq 0$ soudíme (viz větu 3,1 a poznámku 4,7) na správnost rovnosti $\alpha = \beta$, mluvíme také o krácení číslem γ.

Věta 5,9. *Je-li* $t \neq 1$, *je pro každé přirozené číslo* n

$$1 + t + \ldots + t^{n-1} = \frac{t^n - 1}{t - 1} = \frac{1 - t^n}{1 - t} \,. \tag{5,19}$$

(Levá strana znamená součet o n sčítancích, pro $n = 1$ rovný prvnímu sčítanci, t. j. jedné.)

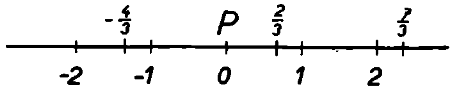
Důkaz indukcí. Pro $n = 1$ je (5,19) zřejmé. Platí-li však (5,19) pro určité n, je

$$1 + t + \ldots + t^n = (1 + t + \ldots + t^{n-1}) + t^n = \frac{t^n - 1}{t - 1} +$$

$$+ \frac{t^n(t - 1)}{t - 1} = \frac{t^n - 1 + t^{n+1} - t^n}{t - 1} = \frac{t^{n+1} - 1}{t - 1} \,.$$

§ 6. Nerovnosti mezi racionálními čísly

O znázornění *celých* čísel na číselné ose jsme mluvili již v I § 9. Racionální číslo $\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\}$ znázorníme na číselné ose, v souhlase se vznikem takových čísel měřením (viz § 1), tímto způsobem. Určíme pomocnou délku tak, aby b pomocných délek dohromady dávalo zvolenou jednotku délky; potom číslo α je znázorněno bodem, jehož vzdálenost od počátku je rovna $|a|$ pomocným délkám a který pro $a > 0$ leží od počátku napravo, pro $a < 0$ nalevo (pro $a = 0$ je $\alpha = 0$ a jeho znázorněním je sám počátek). Viz obr. 2, ve kterém mimo čísla $0 = \frac{0}{3}$, $1 = \frac{3}{3}$, $2 = \frac{6}{3}$, $-1 = \frac{-3}{3}$, $-2 = \frac{-6}{3}$ jsou znázorněna čísla $\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}$. Je patrné, že toto znázornění je nezávislé na přechodu od vyjádření (3,1) k vyjádření (3,2) a že pro celá α je v souhlase se znázorněním celých čísel na číselné ose, popsaným v I § 9.



Obr. 2.

Pomocí číselné osy můžeme rozšířit pojem *přirozeného uspořádání* na množinu všech racionálních čísel. V souhlase s tím, co jsme řekli o celých číslech v I § 9, nazveme přirozeným uspořádáním množiny všech racionálních čísel takové uspořádání, které odpovídá uspořádání bodů na číselné ose od levé strany k pravé. Tedy nerovnost

$$\alpha_1 < \alpha_2 \quad \text{neboli} \quad \alpha_2 > \alpha_1 \tag{6,1}$$

mezi racionálními čísly znamená, že na číselné ose leží obraz čísla α_1 nalevo od obrazu čísla α_2.

Bez pomoci číselné osy definujeme nerovnost (6,1) pro racionální čísla α_1, α_2 takto: Podle věty 3,4 vyjádříme α_1, α_2 elementárními zlomky

$$\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b} \tag{6,2}$$

se společným jmenovatelem b (b je tedy přirozené číslo; a_1, a_2 jsou celá čísla). Potom definujeme: nerovnost (6,1) znamená, že je $a_1 < a_2$ ve smyslu popsaném v I § 9.

Poznámka 6,1. Je třeba dokázat, že význam nerovnosti (6,1) je nezávislý na volbě vyjádření (6,2). Podle věty 3,5 stačí to dokázat pro přechod od vyjádření (6,2) k vyjádření

$$\frac{a_1k}{bk}, \frac{a_2k}{bk},$$

kde k je přirozené číslo. To však plyne ze zákona monotonie násobení (platného pro celá čísla podle věty I 9,9). Neboť platí-li $a_1 < a_2$, je $a_1k < a_2k$; neplatí-li $a_1 < a_2$, platí $a_2 \leqq a_1$, takže je $a_2k \leqq a_1k$, t. j. neplatí ani $a_1k < a_2k$.

Poznámka 6,2. Jsou-li α_1, α_2 čísla celá, plyne z (3,9), že nový význam nerovnosti (6,1) je týž jako její význam původní.

Poznámka 6,3. Že zákon trichotomie (věta I 5,1) podrží svou platnost v oboru racionálních čísel, plyne z věty 3,2.

Poznámka 6,4. Že transitivní zákon (věta I 5,2) podrží svou platnost v oboru racionálních čísel, plyne z toho, že tři racionální čísla α_1, α_2, α_3 můžeme podle věty 3,4 vyjádřit elementárními zlomky se společným jmenovatelem.

Poznámka 6,5. Podle věty 3,5 je $\left\{\frac{0}{2}\right\} = 0, \left\{\frac{2}{2}\right\} = 1$, tedy $0 < \left\{\frac{1}{2}\right\} < 1$, takže $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ není celé číslo. Viz poznámku 3,1.

Racionální čísla různá od nuly dělíme na *kladná* a *záporná*; i v oboru racionálních čísel $\alpha > 0$ znamená, že α je kladné, $\alpha < 0$ znamená, že α je záporné; je-li $\alpha \geqq 0$, pravíme, že α je *nezáporné*. I pro racionální čísla platí, že pro $\alpha \neq 0$ jedno z čísel α, $-\alpha$ je kladné a druhé záporné (viz větu 4,3). I v oboru racionálních čísel definujeme pojem absolutní velikosti $|\alpha|$ čísla α tak, že pro $\alpha \geqq 0$ je $|\alpha| = \alpha$, pro $\alpha < 0$ pak $|\alpha| = -\alpha$. Je-li

$$\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\}, \tag{6,3}$$

je zřejmě

$$|\alpha| = \left\{\frac{|a|}{b}\right\}.$$

Věta 6,1. *Vzorce* I (7,2); I (7,3); I (7,4); I (8,1) (i s pravidlem pro znaménka $\pm$); I (9,1); I (9,2); I (9,3) *a věty* I 5,4; I 5,5; I 5,6; I 5,7; I 5,8; I 5,9; I 8,1; I 8,2; I 9,1; I 9,3; I 9,4 *a* I 9,6 *jsou správné pro libovolná racionální čísla.*

To vyplývá přímo z našich definic a z věty 3,4.

Věta 6,2. *Je-li* $\alpha > 0$, *je také* $\alpha^{-1} > 0$; *je-li* $\alpha < 0$, *je také* $\alpha^{-1} < 0$.
To plyne z věty I 8,2.

Věta 6,3. *Je-li* $0 < \alpha < \beta$, *je* $\beta^{-1} < \alpha^{-1}$; *je-li* $0 < \alpha \leqq \beta$, *je* $\beta^{-1} \leqq \alpha^{-1}$.

Důkaz. Nerovnost $\alpha < \beta$ (nebo $\alpha \leqq \beta$) znásobíme na obou stranách kladným (viz věty 6,2; I 8,2) číslem $\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Věta 6,4. *Je-li* $\alpha > 0$, *je* $\alpha^n > 0$ *pro každé celé* n.

Důkaz. Podle definice je součin (4,4) kladný, jsou-li činitelé čísla kladná. Tedy případ $n > 0$ plyne z definice I (6,1). Případ $n = 0$ plyne z definice I (6,2). Protože $\alpha^{-k} = (\alpha^k)^{-1}$, plyne případ $n < 0$ z věty 6,2.

Věta 6,5. *Je-li* $0 < \alpha < \beta$ *a je-li* n *přirozené číslo, je* $\alpha^n < \beta^n$.

Důkaz. Podle definice I (6,1) je naše věta zvláštním případem věty I 5,9.

Poznámka 6,6. Je-li $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha^n < \beta^n$, kde n je přirozené číslo, je $\alpha < \beta$. Neboť jinak by bylo $\beta \leqq \alpha$, a tedy podle věty 6,5 také $\beta^n \leqq \alpha^n$, což odporuje předpokladu.

Věta 6,6. *Budiž* n *přirozené číslo. Je-li* $\alpha > 1$, *je* $\alpha^n > 1$; *je-li* $0 < \alpha < 1$, *je* $0 < \alpha^n < 1$.
To plyne z vět 6,4; 6,5 a I 6,2.

Věta 6,7. *Buďtež* m, n *celá čísla*, $m < n$. *Je-li* $\alpha > 1$, *je* $\alpha^m < \alpha^n$; *je-li* $0 < \alpha < 1$, *je* $\alpha^m > \alpha^n$.

Důkaz. Podle věty 6,6 v případě $\alpha > 1$ máme nerovnost $\alpha^{n-m} > 1$, v případě $0 < \alpha < 1$ nerovnost $\alpha^{n-m} < 1$. V obou případech smíme tuto nerovnost na obou stranách znásobit číslem α^m, neboť toto číslo je kladné podle věty 6,4. Podle věty 5,4 je $\alpha^{n-m} . \alpha^m = \alpha^n$, takže vyjde žádaný výsledek.

Věta 6,8. *Pro každé racionální* α *a každé celé* n *je*

$$|\alpha|^n = |\alpha^n| .$$

Důkaz. Případ $n = 0$ je zřejmý z definice I (6,2), případ $n > 0$ plyne z věty I 8,1, případ $n = -1$ plyne z definice převráceného čísla podle věty I 8,2, případ $n < 0$ se převede na případy $n > 0$ a $n = -1$ podle věty 5,5.

Věta 6,9. *Ke každému racionálnímu číslu* α *existuje takové přirozené číslo* n, *že*

$$-n < \alpha < n . \tag{6,4}$$

(Pro celé α je to věta I 9,2.)

Důkaz. Pro $\alpha = 0$ můžeme n volit libovolně. Platí-li (6,4) pro určité α, je podle věty I 9,1 také $-n < -\alpha < n$. Můžeme tedy předpokládat, že $\alpha > 0$. Platí-li (6,3), jsou potom a, b přirozená čísla, tedy $a \geqq 1$. Podle (5,6′) je $a\alpha = b$. Proto znásobíme-li nerovnost $a \geqq 1$ kladným číslem α, dostaneme $b \geqq \alpha$, a položíme-li $n = b + 1$, je n přirozené číslo a je $\alpha < n$. Mimo to ovšem $-n < 0 < \alpha$, takže platí (6,4).

Věta 6,10. *Ke každému kladnému racionálnímu číslu α existuje takové přirozené číslo n, že $0 < n^{-1} < \alpha$.*

Důkaz. Podle věty 6,2 je $\alpha^{-1} > 0$. Podle věty 6,9 existuje takové přirozené číslo n, že $\alpha^{-1} < n$. Podle věty 6,3 (viz i poznámku 5,4) je $n^{-1} < \alpha$. Přitom je $0 < n^{-1}$ podle věty 6,2.

Věta 6,11. *Jsou-li u, v racionální čísla a je-li $u < v$, existuje takové racionální číslo α, že $u < \alpha < v$.*

Důkaz. Podle věty 3,4 mohu položit

$$u = \left\{\frac{a_1}{b}\right\}, \quad v = \left\{\frac{a_2}{b}\right\}.$$

Protože $u < v$, je $a_1 < a_2$, takže podle věty I 9,8 je $a_2 \geqq a_1 + 1$, a tedy $2a_2 \geqq 2(a_1 + 1) = 2a_1 + 2 > 2a_1 + 1 > 2a_1$. Podle věty 3,3 je

$$u = \left\{\frac{2a_1}{2b}\right\}, \quad v = \left\{\frac{2a_2}{2b}\right\},$$

a protože $2a_1 < 2a_1 + 1 < 2a_2$, stačí položit

$$\alpha = \frac{2a_1 + 1}{2b}.$$

Věta 6,12. *Jsou-li u, v racionální čísla a je-li $u < v$, existuje nekonečně mnoho takových racionálních čísel α, že $u < \alpha < v$.*

Důkaz. Aspoň jedno takové α existuje podle věty 6,11. Kdyby existovalo jen konečně mnoho takových α, bylo by jedno z nich nejmenší; označme je β. Potom je $u < \beta < v$ a podle věty 6,11 existuje takové racionální α, že $u < \alpha < \beta$, tedy $u < \alpha < v$, $\alpha < \beta$, a to odporuje definici čísla β.

Věta 6,13. *Je-li α racionální číslo, existuje právě jedno takové celé číslo n, že*

$$n \leqq \alpha < n + 1. \tag{6,5}$$

Důkaz. Kdyby existovala dvě různá celá čísla m, n taková, že by platilo (6,5) a zároveň

$$m \leqq \alpha < m + 1 , \tag{6,5'}$$

bylo by na př. $n < m$, a tedy $n + 1 \leqq m$ podle věty I 9,8. To je však nemožné, neboť pak by bylo podle (6,5) a (6,5')

$$\alpha < n + 1 \leqq m \leqq \alpha ,$$

tedy $\alpha < \alpha$, což je nemožné. Zbývá ukázat, že existuje celé n s vlastností (6,5). Podle věty 6,7 existuje takové přirozené číslo k, že $-k < \alpha < k$. Jestliže r probíhá celá čísla $0, 1, 2, \ldots, 2k$ od prvního k poslednímu, potom celé číslo $-k + r$ nejprve (pro $r = 0$) není a nakonec (pro $r = 2k$) je větší než α. Z toho plyne, že mezi našimi r existuje takové, že celé číslo $n = -k + r$ není a celé číslo $n + 1 = (-k + r) + 1 = -k + (r + 1)$ je větší než α, t. j. že platí (6,5).

Věta 6,14. *Budiž n přirozené číslo. Je-li z racionální číslo větší než jedna, existují taková racionální čísla $t_1, t_2, \ldots, t_n$ větší než jedna, že*

$$t_1 t_2 \ldots t_n = z . \tag{6,6}$$

Důkaz indukcí vzhledem k n. Pro $n = 1$ je věta zřejmá. Nechť tedy platí pro určité n a nechť je dáno racionální číslo x větší než jedna. Podle věty 6,11 existuje takové racionální číslo z, že $1 < z < x$. Podle induktivního předpokladu existují taková racionální čísla $t_1, t_2, \ldots, t_n$ větší než jedna, že platí (6,6). Budiž ještě $t_{n+1} = x : z$. Potom je t_{n+1} racionální číslo a $z \,.\, t_{n+1} = x$, tedy

$$t_1 t_2 \ldots t_{n+1} = x .$$

Zbývá ukázat, že $t_{n+1} > 1$. Kdyby však bylo $t_{n+1} \leqq 1$, bylo by také (protože z je kladné) $z \,.\, t_{n+1} \leqq z$ neboli $x \leqq z$, což odporuje předpokladu.

Věta 6,15. *Budiž n přirozené číslo a budiž $\alpha > 1$. Potom existuje takové racionální číslo t větší než jedna, že $t^n < \alpha$.*

Důkaz. Podle věty 6,11 existuje takové racionální číslo z, že $1 < z < \alpha$. Podle věty 6,14 existují taková racionální čísla $t_1, t_2, \ldots, t_n$ větší než jedna, že platí (6,6). Je-li t *nejmenší* z těchto n čísel, je t racionální číslo větší než jedna a podle věty I 5,9 je

$$t^n \leqq t_1 t_2 \ldots t_n = z < \alpha .$$

Věta 6,16. *Je-li $t > 0$, je pro každé přirozené číslo n*

$$t^n \geqq 1 + n(t - 1) , \tag{6,7}$$

při čemž rovnost nastane pouze tehdy, je-li buďto $t = 1$, nebo $n = 1$.

Důkaz. Případy $t = 1$, $n = 1$ jsou zřejmé. Budiž tedy $t \neq 1$, $n > 1$. Je-li nejprve $t > 1$, potom v součtu nalevo v (5,19) každý sčítanec je podle věty 6,6 větší než 1 až na prvého, který je roven 1, takže zmíněný součet je podle obecného zákona monotonie sčítání větší než n; jeli však $0 < t < 1$, je (opět podle věty 6,6) součet nalevo v (5,19) menší než n. Tedy podle věty 5,9

$$n < \frac{t^n - 1}{t - 1} \quad \text{pro} \quad t > 1\,,$$

$$n > \frac{1 - t^n}{1 - t} \quad \text{pro} \quad 0 < t < 1\,.$$

V prvém případě je $t - 1 > 0$, tedy

$$n(t - 1) < t^n - 1\,, \quad 1 + n(t - 1) < t^n\,;$$

ve druhém případě je $1 - t > 0$, tedy

$$n(1 - t) < 1 - t^n\,, \quad n(t - 1) < t^n - 1\,, \quad 1 + n(t - 1) < t^n.$$

Věta 6,17. *Budiž n přirozené číslo a budiž $0 \leqq u < v$. Potom existuje takové kladné racionální číslo α, že $u < \alpha^n < v$.*

Důkaz. Podle věty 6,11 existují taková racionální čísla p, q, že

$$0 \leqq u < p < q < v\,.$$

Podle věty 6,3 platí nerovnost $q^{-1} < p^{-1}$; znásobíme-li obě strany kladným číslem q, dostaneme $p^{-1}q > 1$, takže podle věty 6,15 existuje takové racionální číslo t větší než jedna, že

$$t^n < p^{-1}q\,. \tag{6,8}$$

Podle vět 6,2 a 6,9 existuje takové přirozené číslo m, že $0 < q^{-1} < m$; zřejmě je $m^n \geqq m$, takže $0 < q^{-1} < m^n$ a podle věty 6,3 také $q > a^n$, kde a znamená kladné racionální číslo $a = m^{-1}$. Uvažujme nyní kladná racionální čísla

$$a, at, at^2, \ldots$$

Číslo a bylo určeno tak, že $a^n < q$. Nyní pro každé přirozené číslo k je podle vět 5,5; 5,6 a 6,16

$$(at^k)^n = a^n \,.\, t^{kn} \geqq a^n \,.\, [1 + kn(t - 1)] > k \,.\, na^n(t - 1)\,,$$

a volíme-li k (podle věty 6,9) větší než $q \,.\, [na^n(t - 1)]^{-1}$, bude

$$a^n < q\,, \quad (at^k)^n > q\,.$$

Z toho plyne, že existuje takové nezáporné celé číslo r, že

$$(at^r)^n \leqq q\,, \quad (at^{r+1})^n > q\,.$$

Budiž nyní $\alpha = at^r$, takže α je kladné racionální číslo a máme

$$\alpha^n \leqq q < \alpha^n \,.\, t^n\,. \tag{6,9}$$

Protože $q < v$, je $\alpha^n < v$. Na druhé straně plyne z (6,8), že $\alpha^n \,.\, t^n < \alpha^n q \,.\, p^{-1}$, takže podle (6,9) je $q < \alpha^n q \,.\, p^{-1}$; znásobíme-li obě strany kladným číslem $p \,.\, q^{-1}$, vyjde $p < \alpha^n$, takže $u < \alpha^n$, neboť $u < p$.

§ 7. Pojem uspořádání

V I § 5 jsme pro množinu nezáporných celých čísel zavedli pojem přirozeného uspořádání, který jsme v I § 9 rozšířili na množinu všech celých čísel a v § 6 této kapitoly na množinu všech čísel racionálních. Poznali jsme, že náš pojem přirozeného uspořádání odpovídá uspořádání číselné osy od levé strany k pravé. V tomto paragrafu si nyní stručně promluvíme o obecném pojmu uspořádání libovolné neprázdné množiny M.

Počněme případem *konečného* souboru. Uspořádat konečný soubor $n > 0$ prvků znamená v denní praxi to, že jednotlivé prvky souboru určitým způsobem rozlišíme jako první, druhý, ..., n-tý prvek souboru, což můžeme matematicky vyjádřit tak, že prvky souboru rozlišíme pomocí *indexů* 1, 2, ..., n, že je tedy označíme třeba

$$a_1, a_2, \ldots, a_n\,. \tag{7,1}$$

Poznámka 7,1. V tomto smyslu můžeme mluvit i o uspořádání souboru složeného jen z *jednoho* prvku, jehož indexem musí být číslo 1, takže soubor složený z jednoho prvku se dá uspořádat právě jedním způsobem.

Jsou-li a, b dva prvky uspořádaného souboru M, řekneme, že prvek a je *před* prvkem b, jestliže v označení (7,1) index prvku a je menší než index prvku b. Platí potom zákony, které vzniknou z vět I 5,1; I 5,2, jestliže v nich symbol „$a < b$“ čteme slovy „a je před b“.

Zákon trichotomie. *Jsou-li a, b kterékoli dva prvky uspořádané množiny M, platí právě jeden ze tří vztahů:* [1] $a = b$, [2] *a je před b*, [3] *b je před a.*

Poznámka 7,2. Rovnost $a = b$ znamená zde i na jiných místech, že oba prvky a, b splynou.

Zákon transitivní. *Jsou-li* a, b, c *takové tři prvky uspořádané množiny* M, *že je* a *před* b *a zároveň* b *před* c, *je také* a *před* c.

Poznámka 7,3. Při formulaci obou zákonů jsme užili slova množina (ne soubor), abychom naznačili, že ačkoli prozatím jsme mluvili jen o případu, že M obsahuje konečný počet prvků, obrátíme se vbrzku i k pojmu uspořádání nekonečné množiny.

Poznámka 7,4. Jestliže M obsahuje jediný prvek, je zákon trichotomie správný v tom smyslu, že ze tří případů [1], [2], [3] musí nastat vždy jen případ [1]. Jestliže však M obsahuje více než jeden prvek, můžeme vždy zvolit a, b tak, aby nastal kterýkoli z případů [1], [2], [3].

Poznámka 7,5. Jestliže M obsahuje jenom jeden nebo dva prvky, je zákon transitivní správný v tom smyslu, že předpokladu „Jsou-li a, b, c atd." nelze vyhovět, takže je lhostejné, jaký závěr činíme ze splnění tohoto předpokladu. Jestliže však konečný soubor M obsahuje aspoň tři prvky, je v (7,1) $n \geqq 3$ a předpoklad v uvozovkách je splněn, volíme-li $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$.

Budiž nyní dán neprázdný konečný soubor M skládající se z n prvků a budiž dáno pravidlo, které pro každou dvojici $[x, y]$, jejíž oba členy náleží do M, určitým způsobem rozhodne, zda pro tuto dvojici vztah „x je před y" je správný či nesprávný, při čemž je splněn jak zákon trichotomie, tak i zákon transitivní. Dokážeme, že je tím určeno právě jedno uspořádání souboru M, čímž míníme to, že je právě jedním způsobem možné zavést pro jednotlivé prvky souboru M označení (7,1) tak, aby správnost vztahu „a_r je před a_s" znamenala totéž jako nerovnost $r < s$.

Důkaz provedeme indukcí vzhledem k n. Pro $n = 1$ je věta zřejmá. Předpokládejme tedy, že při určitém n věta je správná a že je dán soubor M o $n + 1$ prvcích a pro dvojice $[x, y]$ jeho prvků vztah „x je před y" splňující zákon trichotomie i zákon transitivní. Zvolme v souboru M libovolně prvek b a označme $N(b)$ soubor, který vznikne z M odstraněním prvku b. Tedy při každé volbě prvku b souboru M je $N(b)$ soubor o n prvcích, které podle induktivního předpokladu můžeme označit (7,1) tak, že pro $1 \leqq r \leqq n$ a $1 \leqq s \leqq n$ vztah „a_r je před a_s" znamená totéž jako nerovnost $r < s$. Jsou nyní dvě možnosti: buďto vztah „x je před b" je správný pro každý prvek x souboru $N(b)$, nebo tomu tak není; první možnost nazveme *příznivou*, druhou *nepříznivou*. Nastane-li příznivá možnost, stačí označení (7,1) doplnit označením $b = a_{n+1}$ a důkaz je hotov. Zbývá tedy jen dokázat, že při vhodné volbě prvku b množiny M nastane pro soubor $N(b)$ příznivá možnost. Jestliže při určité volbě prvku b nastane nepříznivá možnost, existuje takový index r ($1 \leqq$

$\leq r \leq n$), že pro $a = a_r$ a pro náš prvek b v zákonu trichotomie nenastane případ [2]; protože nenastane ani případ [1], musí nastat případ [3], t. j. musí platit, že „b je před a_r". Dokážeme však určitěji, že musí platit

$$b \text{ je před } a_n\,, \tag{7,2}$$

neboť kdyby neplatilo (7,2), existoval by takový index $r < n$, že by platilo „b je před a_r"; ale jelikož $r < n$, platilo by též „a_r je před a_n"; z obou těchto vztahů bychom pak podle transitivního zákona usoudili, že platí vztah (7,2), ačkoli jsme předpokládali jeho nesprávnost. Tedy vztah (7,2) je správný; mimo to však také platí

$$a_r \text{ je před } a_n \quad \text{pro } 1 \leq r < n \tag{7,3}$$

a z (7,2) a (7,3) dohromady plyne, že vztah „x je před a_n" je správný pro každý prvek x množiny M různý od a_n neboli *pro každý prvek množiny* $N(a_n)$. Jestliže tedy místo od prvku b vyjdeme od prvku a_n, a to je dovoleno, nastane příznivý případ, čímž je důkaz skončen.

Z dokázané věty plyne, že uspořádání souboru M se dá definovat také jinak než možností zavést pro prvky souboru M označení (7,1) tak, že vztah „a_r je před a_s" znamená totéž jako nerovnost $r < s$. Podle nové definice *uspořádat množinu M znamená: udat pravidlo, jež rozhodne, pro které dvojice* $[x, y]$ *s oběma členy vzatými z M vztah „x je před y" má být správný; při tom toto pravidlo je libovolné až na to, že pro ně musí platit zákon trichotomie a zákon transitivní.*

Nová definice uspořádání má tu výhodu, že platí pro libovolnou neprázdnou množinu M, i když tato množina je *nekonečná*, kdežto první definice platí pouze pro *konečné* množiny. Proto se ve vědecké matematice pojem uspořádání zavádí druhou definicí.

V následujícím pro jednoduchost budeme psát $a < b$ nebo $b > a$ ve smyslu „a je před b" pro libovolné uspořádání libovolné množiny M. (Jestliže M je množina čísel a uvažované uspořádání je přirozené, potom $a < b$ znamená, že a je menší než b.) Jestliže (neprázdná) množina N je částí uspořádané množiny M, je vztah $x < y$ definován pro všechny dvojice $[x, y]$, jejichž členy náležejí do množiny M, tedy tím spíše pro všechny takové dvojice, jejichž členy náležejí do množiny N; mimo to je patrné, že jestliže zákon trichotomie a transitivní zákon jsou splněny v množině M, jsou splněny i v množině N. Tedy uspořádáním celé množiny M je určeno uspořádání její části N a mluvíce o části N uspořádané množiny M, můžeme také N považovat za uspořádanou množinu.

Prvek a uspořádané množiny M se jmenuje *první*, jestliže není $x < a$ pro žádný prvek x množiny M; a se jmenuje *poslední*, jestliže není $x > a$ pro žádný prvek x množiny M. (V případě přirozeného uspořádání množiny čísel místo slova první užíváme slova *nejmenší*, místo slova poslední slova *největší*.) Jsou-li a, b dva různé prvky uspořádané množiny M, je buďto $a < b$, nebo $b < a$; je-li na př. $a < b$, nemůže prvek b být prvním ani a posledním. Tedy v M existuje *nejvýš jeden první* a *nejvýš jeden poslední* prvek. Jestliže (neprázdná) množina M je konečná, existuje jak prvek první, tak i prvek poslední. Je-li však M nekonečná, nemusí existovat ani první, ani poslední prvek. V případě přirozeného uspořádání v množině všech celých čísel neexistuje ani první, ani poslední prvek; v množině všech kladných celých čísel je číslo 1 prvkem prvním (neboli nejmenším) a poslední prvek neexistuje; v množině všech záporných celých čísel je číslo -1 prvkem posledním (neboli největším) a první prvek neexistuje. Jestliže množina M obsahuje jediný prvek, je tento prvek zároveň prvním i posledním. Jestliže však uspořádaná množina M obsahuje více než jeden prvek a existuje-li v ní jak první prvek a, tak i poslední prvek b, je zřejmě $a < b$.

O dvojici $[a, b]$ složené z prvků uspořádané množiny M říkáme, že tvoří *skok* v množině M, jestliže je $a < b$, avšak v M neexistuje žádný prvek x, pro který by bylo $a < x < b$. V případě přirozeného uspořádání množiny všech celých čísel je každé číslo n prvním členem skoku $[n, n + 1]$: naproti tomu v přirozeně uspořádané množině všech racionálních čísel podle věty 6,11 neexistují skoky. Jestliže množina M obsahuje jediný prvek, je skok v M nemožný; jestliže však v uspořádané množině M, která obsahuje více než jeden prvek, neexistují skoky, je množina M nekonečná. V tomto případě pravíme, že M je *hustě uspořádána* nebo že dané uspořádání množiny M je *husté*. Tedy větu 6,11 můžeme vyslovit: přirozené uspořádání množiny všech racionálních čísel je husté.

Jsou-li a, b prvky hustě uspořádané množiny M a je-li $a < b$, potom musí v množině M existovat *aspoň jeden* takový prvek x, že $a < x < b$. (Jinak by totiž $[a, b]$ byl skok, a hustě uspořádaná množina skoky nemá.) Ve skutečnosti je však v množině M *nekonečně mnoho* takových prvků x, že $a < x < b$. To se dokáže týmž úsudkem, kterým jsme z věty 6,11 odvodili větu 6,12.

Je-li M hustě uspořádaná množina a je-li N její část, pravíme, že *N leží hustě v množině M*, jestliže pro každé dva takové prvky a, b *celé množiny M*, pro které je $a < b$, existuje v *její části N* aspoň jeden takový prvek x, že $a < x < b$. Čtenář sám snadno dokáže, že potom také N je hustě uspořádaná množina.

Budiž nyní M hustě uspořádaná množina, ve které není ani první, ani poslední prvek. (Důležitým příkladem je přirozeně uspořádaná množina všech racionálních čísel.) Budiž α nějaká věc různá od všech prvků množiny M a označme $M + \alpha$ množinu, která vznikne z množiny M připojením jediného nového prvku α. (Označení $M + \alpha$ v tomto smyslu je zcela přechodné; později ho nebudeme používat.) Předpokládejme nejprve, že množina $M + \alpha$ je uspořádána tak, že je tím *vytvořeno* dané uspořádání množiny M, t. j. že odstraněním prvku α z množiny $M + \alpha$ vznikne původní množina M *ve svém daném uspořádání*. Označme A množinu těch prvků x množiny M, pro které v množině $M + \alpha$ platí $x < \alpha$; označme dále B množinu těch prvků y množiny M, pro které v množině $M + \alpha$ platí $y > \alpha$. (Může se stát, že množina A nebo B je prázdná.) Protože v $M + \alpha$ platí zákon trichotomie, jsou množiny A, B disjunktní a jejich sjednocením je celá množina M. Protože v $M + \alpha$ platí zákon transitivní, mají množiny A, B tuto vlastnost:

je-li x prvkem množiny A a je-li y prvkem množiny B, je $x < y$. (*)

Obráceně předpokládejme, že $[A, B]$ je taková dvojice částí množiny M, že sjednocení obou částí je celá množina M a že je splněna vlastnost (*). Čtenář snadno zjistí, že množiny A, B jsou nutně disjunktní. Zaveďme potom uspořádání množiny $M + \alpha$ tím předpisem, že v množině $M + \alpha$ platí vztah $x < y$ právě tehdy, nastane-li jeden ze tří případů:

[1] x, y jsou prvky množiny M a vztah $x < y$ je správný v množině M;
[2] x je prvkem množiny A a mimo to $y = \alpha$;
[3] y je prvkem množiny B a mimo to $x = \alpha$.

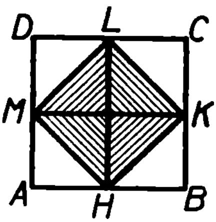
Čtenář snadno zjistí, že je potom v $M + \alpha$ splněn jak zákon trichotomie, tak i zákon transitivní, takže jsme definovali uspořádání množiny $M + \alpha$, o kterém je jasné, že je jím vytvořeno dané uspořádání množiny M. Nazveme nyní dvojici $[A, B]$ *mezerou* v množině M, jestliže toto uspořádání množiny $M + \alpha$ má tytéž vlastnosti, které jsme předpokládali o množině M, tedy jestliže množina $M + \alpha$ je hustě uspořádána a nemá ani první, ani poslední prvek. Potom jsou správné tyto tři výroky:

[a] ani množina A, ani množina B není prázdná;
[b] v množině A neexistuje poslední prvek;
[c] v množině B neexistuje první prvek.

Kdyby totiž *za prvé* množina A byla prázdná, bylo by α prvním a kdyby B byla prázdná, bylo by α posledním prvkem množiny $M + \alpha$. *Za druhé* kdyby x byl poslední prvek množiny A, tvořila by dvojice $[x, \alpha]$ skok v množině $M + \alpha$. *Za třetí* kdyby y byl první prvek množiny B, tvořila by dvojice $[\alpha, y]$ skok v množině $M + \alpha$. Obráceně, jsou-li vlastnosti [a], [b], [c] splněny, je $[A, B]$ mezera v množině M. Neboť pro každý prvek x množiny A platí $x < \alpha$, takže podle vlastnosti [a] není α prvním prvkem množiny $M + \alpha$; kdyby nějaký jiný prvek množiny $M + \alpha$ byl v této množině prvním, byl by také prvním v M, a to je nemožné. Tedy v množině $M + \alpha$ neexistuje první prvek a podobně se dokáže, že neexistuje ani poslední. Dále buďtež x, y takové dva prvky množiny $M + \alpha$, že $x < y$; máme zjistit, že v $M + \alpha$ existuje takový prvek z, že $x < z < y$. Je-li nyní $x \neq \alpha$, $y \neq \alpha$, existuje takový prvek z už v množině M. Je-li $y = \alpha$, je $x < \alpha$, tedy x náleží do A, a podle vlastnosti [b] existuje v A takový prvek z, že $x < z$; je tedy $x < z < \alpha$ neboli $x < z < y$. Je-li konečně $x = \alpha$, je $\alpha < y$, tedy y náleží do B, a podle vlastnosti [c] existuje v B takový prvek z, že $z < y$; je tedy $\alpha < z < y$ neboli $x < z < y$.

§ 8. Pojem iracionálního čísla

Už v poznámce 1,3 jsme se zmínili o tom, že při určitých theoretických úvahách, jejichž cílem je měření zcela přesné, bez jakékoli sebenepatrnější chyby, nevystačíme s lomenými čísly. To si nyní potvrdíme na jednoduchém příkladě, známém už ve starověku. V obr. 3 vidíme čtverec $ABCD$ se stranou 2 cm, rozdělený na čtyři menší čtverce se stranou 1 cm. Každý z těchto menších čtverců je rozdělen na dvě stejně velké části, z nichž jedna je vyšrafována. Vyšrafované části dohromady tvoří čtverec $HKLM$, jehož plošná velikost je rovna polovině plošné velikosti čtverce $ABCD$. Zvolme nyní za jednotku délky 1 cm, za jednotku plošnou 1 cm² a předpokládejme, že délka strany čtverce $HKLM$ je přesně vyjádřena lomeným číslem



Obr. 3.

$$x = \frac{a}{b}\,. \tag{8,1}$$

Potom, jak známo, bude plošná velikost čtverce $HKLM$ přesně vyjádřena číslem x^2, a protože plošná velikost čtverce $ABCD$, dvojnásobného proti čtverci $HKLM$, je přesně vyjádřena číslem 4, je zřejmě

$$x^2 = 2\,. \tag{8,2}$$

Dokážeme však, že žádné lomené číslo x není kořenem rovnice (8,2). Důkaz je zcela jednoduchý. Můžeme předpokládat, že napravo v (8,1) máme základní tvar zlomku x, t. j. takový tvar, jehož jmenovatel je co nejmenší, takže aspoň jedno z přirozených čísel a, b je liché (neboť jinak bychom mohli krátit dvěma a jmenovatele zmenšit). Jestliže nyní předpokládáme, že platí rovnice (8,2), a dosadíme do ní z (8,1), dostaneme vztah

$$b^2 = 2a^2 \,, \tag{8,3}$$

který ukazuje (viz větu I 4,4), že číslo $b^2 = b \,.\, b$ je sudé, takže (opět podle věty I 4,4) také číslo b je sudé, a tedy

$$b = 2c \,, \tag{8,4}$$

kde c je opět přirozené číslo. Jelikož b je sudé, musí a být liché a nemožnost učiněného předpokladu, že zlomek x je kořenem rovnice (8,2), bude prokázána, zjistíme-li naopak, že číslo a je sudé. Za tím účelem dosaďme do (8,3) za b hodnotu (8,4). Vyjde $4c^2 = 2a^2$ a po krácení dvěma $2c^2 = a^2$, což skutečně ukazuje, že číslo a je sudé.

Náš příklad ukazuje, že už při zcela jednoduchých theoretických úvahách, klademe-li požadavek naprosté přesnosti při výpočtech, nevystačíme s lomenými čísly, nýbrž musíme pojem čísla dále rozšířit o nová čísla, která nazýváme *kladná iracionální čísla* a která nejsou přesně rovna žádnému zlomku, dají se však při každém praktickém úkolu nahradit zlomkem tak, že theoretická chyba, které se tím dopustíme, je prakticky bezvýznamná. Na první pohled se zdá, že zavedení takových nových čísel má význam jenom pro theoretického matematika a nikoli na př. pro technika, který u čísel, jež ho zajímají, se takřka nikdy neptá po přesné hodnotě (dokonce se zpravidla jejich „přesná hodnota" nedá ani definovat), nýbrž jen po hodnotě přibližné, při čemž mnohdy na míru *přesnosti výsledku* klade jen nevelké požadavky. Zbytečnost pojmu iracionálního čísla pro technika by byla jasná, kdyby se měření fysikálních veličin dala provádět přímo, bez pomocných výpočtů, ale pak by vlastně byla pro technika bezcenná celá matematika. Ve skutečnosti je tomu zcela naopak, neboť přímá měření se dají provádět jen ve výjimečných případech a k získání čísel, která technika zajímají, je vedle přímých měření (která nejsou věcí matematika) třeba matematických výpočtů, často velmi složitých. Tu se však ukazuje, že k tomu, abychom vypočetli byť i jen hrubé přiblížení veličiny, kterou nemůžeme přímo měřit, je často třeba mnohem přesnější znalosti pomocných veličin, než by se zdálo na první pohled. Abychom se o tom přesvědčili, uveďme prostý geometrický příklad. Budiž dána krychle s hranou velikosti 97 cm. Jaký je objem krychle? Jak známo, je tento objem v jednotce 1 cm^3 vyjádřen číslem

$$97^3 = 912\,673 \,.$$

Jakou praktickou cenu má tento výsledek, jestliže hrana naší krychle byla změřena přesně na centimetry? Skutečná velikost hrany mohla být třeba o 4 mm větší nebo menší než 97 cm. Snadný výpočet ukazuje, že objem naší krychle v jednotce 1 cm^3 by byl dán v prvém případě číslem o málo větším než 924 000, ve druhém případě číslem poněkud menším než 902 000; z našeho čísla 912 673 je tedy naprosto spolehlivá pouze první číslice, i druhá číslice má určitý význam, ale ostatní čtyři číslice jsou prakticky naprosto bezcenné a uvádět je ve výsledku je nutno považovat za nesprávné.

Tato jednoduchá úvaha ukazuje, že jestliže při provádění výpočtů neuvažujeme přesné hodnoty čísel, se kterými počítáme, nýbrž nahrazujeme je hodnotami přibližnými, je nutné u každého jednotlivého čísla si všímat toho, jak dalece je spolehlivá jeho přibližná hodnota, a soustavně zkoumat, jak se chyby obsažené v číslech, se kterými provádíme nějaký početní výkon, přenesou na výsledek tohoto výkonu. Při důsledném dodržování takové zásady skutečně nás existence iracionálních čísel může nechat lhostejnými. Avšak za dnešního stavu vědy je důsledné dodržování uvedené zásady možné jen tehdy, jestliže prováděné výpočty jsou zcela elementární, a je vůbec nemožné v těch velmi četných případech, ve kterých se nelze obejít bez vyšší matematiky. Za dnešního stavu vědy nedovedeme potřebné výpočty provádět jinak, než že vyjdeme od *idealisované obecné theorie*, ve které předpokládáme, že *všecka vyšetřovaná čísla mají přesné, byť i jen přibližně známé hodnoty*; při tom je ovšem nutné zkoumat, jaké jsou asi chyby výsledku, které pramení jednak z toho, že idealisovaná obecná theorie neodpovídá zcela skutečnosti, jednak z nepřesností obsažených ve veličinách, jejichž hodnoty získáváme přímým měřením.

O prvém z obou zmíněných pramenů chyb poznamenejme tolik, že i v těch případech, kdy dovedeme formulovat potřebné fysikální zákony matematicky tak, že vyjadřují skutečnost s uspokojivou přesností, je mnohdy situace taková, že vzniklé matematické problémy buďto za dnešního stavu matematiky ani theoreticky nedovedeme rozřešit, nebo to sice theoreticky dovedeme, ale skutečné provedení výpočtů by bylo tak nesmírně pracné, že je prakticky neproveditelné. V takových případech je nutné původní obecnou formulaci problému matematicky zjednodušit; zkoumání chyb vzniklých takovým zjednodušením je otázka velkého praktického dosahu, bohužel však často velmi složitá, takže ne vždy matematikové dovedou dát na ni uspokojivou odpověď.

Co se týče otázky odhadu, jaká chyba vznikne při výpočtu čísla theoreticky stanoveného tím, že je výsledkem provedení známých matematických početních výkonů (nejen základních početních výkonů) s čísly, která na základě přímých měření nám jsou známa pouze až na určité chyby, které dovedeme odhadnout, tu běží o otázku mnohem jednodušší, na kterou lze s pomocí vyšší matematiky ve velké řadě případů dát zcela uspokojivou odpověď.

Vraťme se k naší rovnici (8,2). Má jediný kladný kořen, který je iracionálním číslem a označuje se $\sqrt{2}$. Jak se počítá s takovým číslem? Při provádění početních výkonů vždycky nahradíme číslo $\sqrt{2}$ nějakým kladným *racionálním* číslem, které ovšem nebude rovnici (8,2) splňovat přesně, nýbrž pouze přibližně. Jak volit takové racionální číslo, to záleží na tom, jaké početní výkony máme provádět a jak přesně je třeba znát jejich výsledek. Někdy stačí nahradit číslo $\sqrt{2}$ takovým kladným racionálním číslem b, pro které se číslo b^2 liší od dvou o méně než jednu setinu; taková malá přesnost jindy naprosto nestačí, ale na př. stačí nahradit číslo $\sqrt{2}$ takovým kladným racionálním číslem c, pro které se číslo c^2 liší od dvou o méně než jednu miliontinu. Ale žádné racionální číslo nemůže stačit k tomu, aby se jimi *při všech možných výpočtech* mohlo číslo $\sqrt{2}$ nahradit. Jestliže však není možné pro všecky možné účely nahradit iracionální číslo $\sqrt{2}$ *jedním* racionálním číslem, je naopak, jak si o tom podrobně promluvíme v příští kapitole, vždycky možné číslo $\sqrt{2}$ plně nahradit *nekonečně mnoha* racionálními čísly. Pomůckou k tomu je věta 6,17. Je-li n jakékoli přirozené číslo, existuje podle této věty takové kladné racionální číslo a_n, že

$$2 - \frac{1}{n} < a_n^2 < 2 + \frac{1}{n}. \tag{8,5}$$

Je-li n malé, bude a_n zpravidla nepostačující náhradou za číslo $\sqrt{2}$; je-li však n velmi veliké, na př. $n = 10^{12}$, dá se čekat, že už při velmi mnoha úkolech budeme moci číslo $\sqrt{2}$ nahradit číslem a_n s přesností více než postačitelnou; konečně známe-li kladná racionální čísla

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{8,6}$$

taková, že pro *každé* přirozené číslo n platí nerovnosti (8,5), tu znalost *všech* nekonečně mnoha čísel (8,6) plně nahradí číslo $\sqrt{2}$.

Soustavy nekonečně mnoha čísel tvaru (8,6) se jmenují *posloupnosti*. Na základě posloupností dospějeme v kapitole III k vědeckému zdůvodnění nauky o iracionálních číslech.