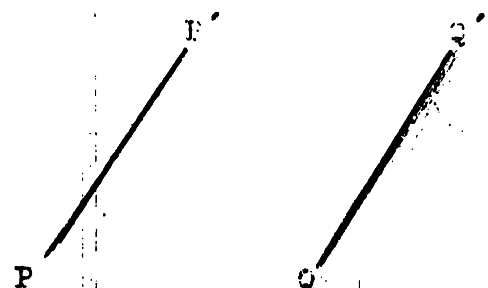
§ 1. N á z o r n ý p o j e m v e k t o r u .

Prostor / obyčejný / a jeho body pokládáme za známé pojmy. Body budeme zpravidla značiti velkými latinskými písmeny z konce abecedy P, Q, R, S, T, Z atd.

Transformace prostoru je pravidlo, které každému bodu prostoru přiřazuje bod téhož prostoru. Jedním typem transformace je translace čili posouvání. Popíšeme ji takto: Přejde-li translací bod P v bod P', pak přejde bod Q v bod Q' tak, že obě úsečky PP' a QQ' jsou stejně dlouhé, mají stejný směr a stejný smysl směru.



Body P, P' je určen vázaný vektor. Bod P sluje počátek, bod P' konec vázaného vektoru. Vzdálenost bodu P od bodu P' sluje délkou vázaného vektoru. Vázaný vektor má určitou délku, určitý směr a určitý smysl směru.

Translací je určeno nekonečně mnoho vázaných vektorů, neboť zvolíme-li v prostoru libovolný bod P , je translací jednoznačně určen bod P' , tedy vázaný vektor o počátku P a konci P'.

Zvolíme-li obráceně v prostoru vázaný vektor o počátku P a konci P', existuje jediná translace převádějící bod P v bod P'. Vázaným vektorem je určena translace.

Dva vázané vektory mohou určovati stejnou translaci. Tento případ nastanem když a jen když délky obou vektorů jsou stejné, oba vektory mají stejný směr a stejný smysl směru.

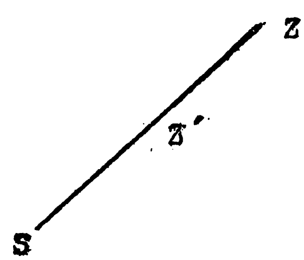
Mají-li dva vázané vektory stejnou délku, stejný směr a stejný smysl směru, řekneme, že jsou to dvě realisace téhož volného vektoru. Pro nás důležitý pojem jsou volné /nikoli vázané/ vektory; budeme jim často říkati prostě vektory. Volné vektory budeme značiti velkými latinskými písmeny z počátku abecedy

A, B, C, D atd. Proměnný vektor budeme označovati písmenem X nebo Y.

Jiným typem transformace je homothetická transformace čili středová podobnost. Tato je určena bodem, zvaným střed, a číslem, jemuž se říká určující poměr, /určující číslo/.

Je-li střed v bodě S a je-li určující číslo $\frac{2}{3}$, pak středová podobnost se dá popsati takto: Střed S zůstane v prostoru pevný. Každý jiný bod v prostoru změní své místo a to takto: Je-li Z libovolný bod prostoru různý od S , pak je určen vázaný vektor o počátku S a konci Z. Určíme pak bod Z′ ve dvou třetinách délky tohoto vázaného vektoru.

Je-li určující číslo záporné ku př. $-\frac{2}{3}$, pak bod Z je od středu S ve vzdálenosti $\frac{2}{3}$ délky vektoru S,Z, avšak v opačném směru.



Translace, při níž zůstenou body na místě, sluje nulová. Nulovou translací přejde počátek P v konec P, t.j. počátek i konec každého vektoru vázaného splývají. Nulová translace určuje jediný volný vektor, jejž nazveme nulový a budeme značiti O′.

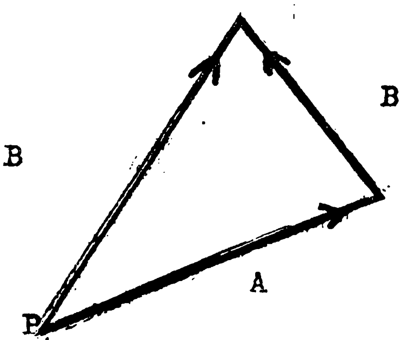
Není-li vektor A nulový, nazveme jej nenulovým vektorem.

Středová podobnost, jejíž určující číslo je 1 , je nulová translace, neboť všecky body prostoru zůstanou na místě. Je-li určující číslo středové podobnosti − 1, pak tato sluje středovou souměrností. Je-li určující číslo 0 , pak každý bod je transformován středovou podobností v bod S .

§ 2. Početní pravidla /axiomy/ pro vektory.

Definujme tyto operace s vektory : 1, sčítání dvou vektorů
2, násobení vektoru číslem.

Sčítání vektorů. Nechť jsou dány vektory A a B jimiž jsou definovány v prostoru dvě translace. Sečítat tyto dva vektory znamená určit vektor C - označíme jej A + B - jenž vznikne, provedeme-li prvou a pak druhou translaci, jak naznačeno v obrázku.



Pro sčítání dvou vektorů platí tato pravidla neboli axiomy: Nechť jsou dány vektory A, B, C. Pak

I. $(A + B) + C = A + (B + C)$. To je zákon asociativní.[x]
II. $A + B = B + A$. To je zákon komutativní.
III. $A + 0' = A$
IV. Je-li dán vektor A, pak existuje přesně jeden vektor - označme jej $- A$ - takový, že $A + (- A) = 0'$.

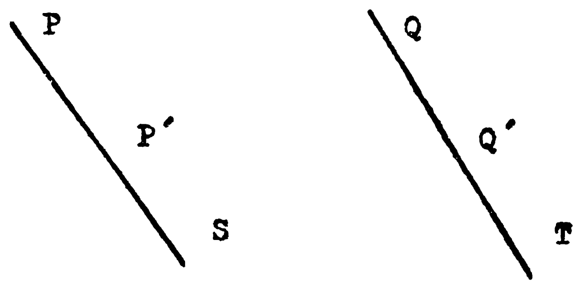
Násobení vektoru číslem. Každému číslu c a vektoru A přiřadíme vektor - označíme jej c A - takto: Nechť je dán v prostoru pevný bod S . Pak existuje středová podobnost o středu S a určujícím poměru c . Volný vektor A určuje vázaný vektor o počátku S . Konec tohoto vektoru označme P. Středovou podobností je pak přiřazen bodu P bod P'. Vázaným vektorem o počátku S a konci P' je pak určen volný vektor A'. Definujeme $A' = c A$.

Násobiti vektor A číslem c znamená tedy určiti vektor, jehož délka je rovna $|c|$ násobku délky vektoru A, jehož směr je stejný jako směr vektoru A a to smyslu stejného, když $c > 0$, smyslu opačného, když $c < 0$.

---

x $(A + B) + C$ znamená, že se nejprve sečítají vektory A a B a k výslednému vektoru A + B se přičte vektor C.

Snadno se přesvědčíme, že definice vektoru c.A není závislá na volbě středu S . Zvolíme-li jiný střed T různý od S, dostaneme sice jiný vázaný vektor, ale stejný volný vektor c.A.



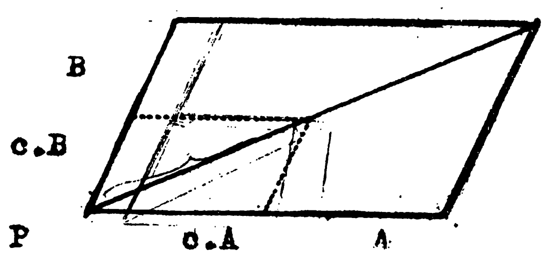
Pro násobení vektoru číslem platí tato pravidla:

V. $c.\left(d.A\right) = \left(c.d\right).A.$ c, d jsou libovolná reálná čísla

VI. $\left(c + d\right).A = c.A + d.A$

VII. Je-li dáno číslo c a dva vektory A, B, pak

$$c.\left(A + B\right) = c.A + c.B$$



VIII. $1.A = A$

Těchto osm pravidel je odvozeno z názoru /podobná pravidla platí v algebře pro čísla/. Ostatní pravidla můžeme odvoditi deduktivně z těchto osmi. Uveďme bez důkazu tyto věty :

$$-\left(-A\right) = A$$
$$\left(-1\right).A = -A$$
$$c.0' = 0'$$
$$0.A = 0'$$

Podle pravidla I je definován součet n vektorů

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n ,$$

pro nějž zavádíme zkratku : $\sum_{i=1}^{n} A_i$. Tento součet má vlastnost, že součet vektorů nezáleží na pořádku sčítanců. To je t.zv. obecný zákon komutativní pro sčítání vektorů. Vyplývá z pravidel I a II.

Uveďme obecnou formuli pro tento zákon. Nechť M je nějaká množina a nechť k je její prvek. To naznačíme symbolicky $k \in M$. Předpokládejme, že množina M má konečný počet prvků. Každému prvku té množiny přiřaďme vektor. Prvku $k \in M$ přiřaďme vektor A_k . Pak je definován vektor

$$\sum_{k \in M} A_k$$

Rozložme si množinu M na m množin M_i , $i = 1,2,\dots m$, takže

$$M = \sum_{i=1}^{m} M_i$$

Pak obecný zákon komutativní pro sčítání vektorů zní:

$$\sum_{k \in M} A_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k_i \in M_i} A_{k_i}$$

Skládá-li se ku př. množina M z párů čísel (i,k), $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq k \leqq n$ a rozdělíme-li $M = M_1 + M_2$ tak, že do M_1 dáme ty dvojice čísel, pro které prvá čísla i jsou stejná, do M ty dvojice čísel, pro které druhá čísla k jsou stejná, pak

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} A_{ik}$$

Věta:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i + 0' = \sum_{i=1}^{m} A_i,$$

t.j. přidáme-li k součtu nebo ubereme-li ze součtu nulový vektor, součet se nezmění.

Je-li $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, pak značíme $\sum_{i=1}^{n} A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = n.A.$

Platí obecný zákon distributivní: Nechť c_i $(1 \leq i \leq m)$ jsou čísla, nechť A_k $(1 \leq k \leq n)$ jsou vektory. Pak

$$\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} c_i \cdot A_k$$

§ 3.

Přechod k abstraktnímu stanovisku.

Mysleme si, že místo vektorů máme nějaké jiné věci určitého druhu. Definujme dva úkony: první úkon spočívá v tom, že ze dvou věcí toho určitého druhu odvodíme třetí věc téhož druhu, jíž nazveme součtem prvních dvou věcí; druhý úkon spočívá v tom, že z čísla a věci odvodíme věc téhož druhu. Předpokládáme při tom, že jsou splněna pravidla I - VIII. Souboru těchto věcí říkáme **modul.**

Příklad. Věci určitého druhu budou uspořádané skupiny čtyř čísel (c_1, c_2, c_3, c_4). Číslo c_i nazveme i - tou souřadnicí skupiny (c_1, c_2, c_3, c_4). Jsou-li dány dvě takové věci $A = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, $B = (d_1, d_2, d_3, d_4)$, pak definujeme

$$A + B = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, c_3 + d_3, c_4 + d_4)$$

Označme $O' = (0, 0, 0, 0)$ a definujeme $-A = (-c_1, -c_2, -c_3, -c_4)$. Snadno se pak přesvědčíme, že pravidla I - IV jsou splněna. Definujme dále součin čísla c a skupiny $A = (c_1, c_2, c_3, c_4)$:

$$c.A = \left(c.c_1, \; c.c_2, \; c.c_3, \; c.c_4 \right).$$

Snadno se opět přesvědčíme, že pravidla V - VIII jsou splněna. Soubor těchto skupin čtyř čísel je tedy modul, jejž značíme E_4.

Podobným způsobem sestrojíme navzájem různé moduly

$$E_1, \; E_2, \; \dots\dots, \; E_n \; .$$

§ 4.

Příklady na formální dedukce z axiomů.

<u>Modul</u> je soubor věcí, mezi nimiž jsou definovány dvě operace sčítání a násobení číslem, při čemž jsou splněna pravidla I - VIII. Prvky modulu nazýváme <u>vektory</u>.[x]

<u>Věta. Nechť A je vektor modulu. Pak $0 . A = 0'$.</u>

<u>Důkaz.</u> Užívajíce axiomů I - VIII, dostaneme tyto vztahy:

$$A = 1.A = (0 + 1) A = 0.A + 1.A = 0.A + A,$$

tedy $A = 0.A + A$.

Podle axiomu IV je

$$0' = A + (-A) = (0.A + A) + (-A) = 0.A + (A + (-A)) = 0.A + 0' = 0.A, \text{ tedy } 0.A = 0'.$$

<u>Věta- Je-li c libovolné číslo, pak $c.0' = 0'$.</u>

Důkaz. Označme $c.\,0' = A$. Máme dokázat, že $A = 0'$.

Z axiomů I - VIII vyplývají tyto vztahy:

$$A = c.\,0' = c.\,(0' + 0') = c.\,0' + c.\,0' = c.\,0' + A, \text{ tedy } A = c.0' + A.$$

---

x Nemusí to ovšem býti konkrétní názorné vektory, na něž jsme se odvolávali při odvozování pravidel I - VIII.

Podle axiomu IV. je

$$O' = A + (-A) = (c.O' + A) + (-A) = c.O' + (A + (-A)) = c.O' + O' = c.O' \quad \text{tedy} \quad c.O' = O'.$$

Věta. Jestliže součin čísla a vektoru $c.A = O'$, pak $c = 0$ nebo $A = O'$.

Důkaz. Rozeznávejme dva případy : 1/ buď $c = 0$, nebo 2/ $c \neq 0$. V případě prvém nemáme co dokazovati, v případě druhém jest třeba dokázati, že $A = O'$. Poněvadž $c \neq 0$, platí tyto vztahy:

$$A = 1.A = \left(\frac{1}{c} . c\right) . A = \frac{1}{c}\left(c.A\right) = \frac{1}{c}O' = O'.$$

§ 5.

Pojem isomorfie.

Nechť jsou dány dvě množiny M a M'. Zobrazení množiny M do množiny M' je pravidlo, jež každému prvku x prvé množiny přiřazuje nějaký prvek x' druhé množiny. Prvek x' sluje obrazem prvku x, prvek x sluje vzorem prvku x'. Zobrazení je prosté, když každý prvek množiny M' je obrazem nejvýš jednoho prvku z M. Zobrazení je plné, když každý prvek množiny M' má aspoň jeden vzor v M. V tomto případě pravíme, že je dáno zobrazení množiny M na množinu M'.

Nechť jsou dány dva moduly M a M'. Nechť existuje prosté a plné zobrazení modulu M na modul M' této vlastnosti: Jsou-li A, B dva vektory v M a A', B' dva odpovídající vektory v M' pak vektoru $A + B$ odpovídá vektor $A' + B'$; je-li dále c libovolné číslo, pak vektoru $c.A$ odpovídá vektor $c.A'$. Pravíme pak, že moduly M a M' jsou isomorfní.

Dva moduly jsou isomorfní, když existuje prosté a plné zobrazení modulu jednoho na druhý, při čemž obrazem součtu dvou vektorů je součet obrazů těchto vektorů a obrazem součinu čísla a vektoru je součin tohoto čísla a obrazu tohoto vektoru.

§ 6.

Pomocná věta z algebry.

Nechť je dán homogenní systém m rovnic o n neznámých.

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= 0 \\
c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= 0 \qquad /6.1/ \\
c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Řešení tohoto systému je skupina n čísel té vlastnosti, že rovnicím / 6.1 / je vyhověno, dosadí-li se tato čísla na místa neznámých. U homogenního systému rovnic existuje jedno triviální řešení 0, 0, ... , 0 . Každé jiné řešení se nazývá netriviální . Netriviální řešení nemusí existovati, ku př.

$$
\begin{aligned}
1.x_1 + 0.x_2 &= 0 \\
0.x_1 + 1.x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Uveďme bez důkazu větu, kterou budeme potřebovati:

Věta. Je-li počet rovnic menší než počet neznámých, pak existuje vždycky netriviální řešení.

§ 7.

Lineární závislost.

Nechť je dán modul. Nechť je dán vektor B a n vektorů[x]

$$A_1 , A_2 , \dots\dots , A_n .$$

---

x Nemusí býti navzájem různé. Takový předpoklad by byl výslovně uveden.

Pravíme, že vektor B je lineárně závislý nebo stručněji závislý na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$, když je možné udati n čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak, že

$$B = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n .$$

Nulový vektor $0'$ je lineárně závislý na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$, neboť

$$0' = 0.A_1 + 0.A_2 + \dots + 0.A_n .$$

Rovněž vektor A_i $i = 1,2, \dots, n$ je lineárně závislý na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$. neboť

$$A_i = 0.A_1 + 0.A_2 + \dots + 1.A_i + \dots + 0.A_n .$$

Je-li vektor B závislý na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$, pak také vektor $c.B$ je na nich závislý. Jsou-li vektory B a C závislé na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$, pak také vektor $B + C$ je na nich závislý.

Nechť je dáno n vektorů $A_1, A_2, \dots, A_n$. Pravíme, že tyto vektory jsou mezi sebou lineárně závislé nebo stručněji mezi sebou závislé, když vektorová rovnice

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = 0' \qquad /7.1/$$

má netriviální řešení, t. j. když aspoň jedno z čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ není 0.

Vektory $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé nebo stručněji mezi sebou nezávislé, když nejsou mezi sebou lineárně závislé, tedy, když vektorová rovnice /7.1/ má jenom triviální řešení.

Nulový vektor je mezi sebou lineárně závislý, nenulový vektor je mezi sebou lineárně nezávislý. To vyplývá z definice.

Věta. Nechť je dáno n mezi sebou lineárně závislých vektorů $A_1, A_2, \dots, A_n$ a vektor B. Pak vektory $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ jsou mezi sebou lineárně závislé.

<u>Důkaz.</u> Poněvadž $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = O'$, kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou čísla nikoli vesměs rovna 0, platí $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n + x_{n+1} . B = O'$, kde $x_{n+1} = 0$. Poněvadž čísla $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ nejsou vesměs rovna nule, je $n + 1$ daných vektorů mezi sebou lineárně závislých.

<u>Věta.</u> Nechť je dáno n mezi sebou lineárně nezávislých vektorů $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n > 1)$. Pak vektory $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé.

<u>Důkaz.</u> Jelikož vektorová rovnice $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = O'$ má jenom triviální řešení, tím spíše rovnice $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_{n-1} A_{n-1} = O'$ má jenom triviální řešení.

Z těchto dvou vět vyplývá, že závislost zůstane zachována, přidáme-li konečný počet libovolných vektorů, nezávislost zůstane zachována ubereme-li z daných n vektorů méně než n libovolných vektorů. Závislost se neporuší přidáním, nezávislost se neporuší odebráním vektorů.

<u>Věta.</u> Nechť vektor B je závislý na n vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$. Pak vektory $A_1, A_2, \dots A_n, B$ jsou mezi sebou závislé.

<u>Důkaz.</u> Jelikož $B = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$, lze rovnici $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n + y . B = O'$ kde $y = -1$, vyhověti netriviálně.

<u>Věta.</u> Nechť $n + 1$ vektorů $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ jsou mezi sebou závislé a nechť vektory $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou mezi sebou nezávislé. Pak vektor B je závislý na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$.

<u>Důkaz.</u> Jelikož vektory $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ jsou mezi sebou závislé, lze vektorové rovnici $x_1 A_1 + x_2 A_2 +$

$+ \dots + x_n A_n + y B = O'$ vyhověti netriviálním způsobem. Vztahu $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = O'$ lze naproti tomu vyhověti jen triviálním způsobem, neboť vektory $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou podle předpokladu mezi sebou nezávislé. Proto jest $y \neq 0$.

Násobíme-li prvou vektorovou rovnici číslem $-\frac{1}{y}$, dostaneme vztah

$$-\frac{x_1}{y} \cdot A_1 - \frac{x_2}{y} \cdot A_2 - \dots - \frac{x_2}{y} \cdot A_n - B = O'$$

čili

$$B = -\frac{x_1}{y} \cdot A_1 - \frac{x_2}{y} \cdot A_2 - \dots - \frac{x_n}{y} \cdot A_n ;$$

tedy vektor B je závislý na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$.

§ 8.

Dimense modulu.

Každý modul má aspoň jeden prvek, totiž nulový vektor O'. Nulový vektor O' sám o sobě tvoří modul. Každý jiný modul má nekonečně mnoho prvků. Obsahuje-li totiž nějaký modul vektor $A \neq O'$, pak vztah $x.A = y.A$ je ekvivalentní se vztahem $(x-y).A = O'$, což je splněno, když a jen když $x - y = 0$, t.j. $x = y$. Jsou-li čísla x a y různá, pak jsou také vektory $x.A$, $y.A$ různé. Různých vektorů v tomto modulu je tedy aspoň tolik, kolik je všech čísel.

Předpokládejme, že modul obsahuje více než jeden prvek, zvolme v něm vektor $A_1 \neq O'$. Tento je mezi sebou lineárně nezávislý. Buďto je každý vektor modulu na A_1 závislý, nebo nikoli. V tomto opačném případě existuje vektor A_2 té vlastnosti, že vektory A_1, A_2 jsou lineárně nezávislé. Buďto je každý vektor modulu závislý na vektorech A_1, A_2, nebo nikoli. V tomto druhém případě zvolme vektor A_3, jenž není na vektorech A_1, a A_2 závislý. Vektory A_1, A_2, A_3 jsou pak mezi sebou nezávislé. Tak můžeme pokračovati dále. Buďto dojdeme po konečném počtu kroků k n mezi sebou nezávislým vektorům $A_1, A_2, \dots, A_n$, na nichž je každý vektor modulu lineárně závislý, nebo vybírání vektorů $A_1, A_2, \ldots$ jde do nekonečna.

Věta. Nechť je dán modul, jenž obsahuje více než jeden prvek. Podle konstrukce právě vyložené zvolme v tomto modulu mezi sebou nezávislé vektory

$$/1/ \qquad A_1, A_2, A_3, \ldots$$

Stejným způsobem zvolme nyní v tomto modulu mezi sebou nezávislé vektory

$$/2/ \qquad B_1, B_2, B_3, \ldots.$$

Je-li počet vektorů /1/ n, pak počet vektorů /2/ je také n; není-li vektorů /1/ konečný počet, pak také vektorů /2/ není konečný počet.

Důkaz nepřímý. Předpokládejme, že jsme podle naší konstrukce zvolili n mezi sebou nezávislých vektorů.

$$/1/ \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n$$

a aspoň m mezi sebou nezávislých vektorů

$$/2/ \qquad B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots, B_m$$

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že $m > n$. Poněvadž každý vektor modulu je na vektorech /1/ závislý, tedy zejména vektor B_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ je na nich závislý, takže

$$B_1 = c_{11} A_1 + c_{21} A_2 + \ldots + c_{n1} A_n$$

$$B_2 = c_{12} A_1 + c_{22} A_2 + \ldots + c_{n2} A_n$$

$$B_m = c_{1m} A_1 + c_{2m} A_2 + \ldots + c_{n,m} A_n$$

Násobme první rovnici x_1, druhou x_2, ..., m - tou x_m. Dostaneme pak $x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_m B_m = c_{11} x_1 A_1 + c_{21} x_1 A_2 + \ldots + c_{n1} x_1 A_n + c_{12} x_2 A_1 + c_{22} x_2 A_2 + \ldots + c_{n,m} x_m A_n = (c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1m} x_m) . A_1 + (c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \ldots + c_{2m} x_m) . A_2 + \ldots + (c_{n1} x_1 + c_{n2} x_2 + \ldots + c_{n,m} x_m) . A_n$. Systém rovnic

$$\begin{aligned} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \dots + c_{1m} x_m &= 0 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \dots + c_{2m} x_m &= 0 \\ c_{n1} x_1 + c_{n2} x_2 + \dots + c_{n,m} x_m &= 0 \end{aligned}$$

je systémem n lineárních homogenních rovnic o m neznámých, při čemž $m > n$. Podle věty v § 6 / str. 9 / existuje netriviální řešení. Označíme-li toto řešení $x_1, x_2, \dots, x_m$ pak $x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_m B_m = 0'$. Poněvadž vektory /2/ jsou mezi sebou nezávislé, jest $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$, což jest spor.

Obsahuje-li modul jediný prvek nulový vektor a jen v tomto případě pravíme, že modul má <u>dimensi 0</u>. Obsahuje - li modul více než jeden prvek a zastaví-li se konstrukce dříve popsaná po n krocích, pak řekneme, že modul má <u>dimensi n</u>, nezastaví-li se po konečném počtu kroků, pravíme, že <u>dimense</u> modulu je <u>nekonečná</u>.

Nechť je dán modul. Pravíme, že tento modul má dimensi 0, když obsahuje jenom nulový vektor. Pravíme, že tento modul má dimensi n $(n > 0)$, když je možné vybrati přesně n mezi sebou lineárně nezávislých vektorů :

$$A_1, A_2, \dots\dots, A_n,$$

na nichž je každý vektor modulu lineárně závislý. Pravíme, že tento modul má dimensi nekonečnou, když nemá dimensi konečnou, t.j. ani 0 ani n. Je-li dimense modulu konečná, říkáme, že <u>modul</u> je <u>konečný</u>, je-li dimense nekonečná, říkáme, že <u>modul</u> je <u>nekonečný</u>.

Nechť je dán konečný modul dimense n. Pak lze udat n, ale nikoliv více lineárně nezávislých vektorů $A_1, A_2, \dots A_n$, na nichž je každý vektor modulu závislý. Pravíme, že vektory $A_1, A_2, \dots, A_n$ tvoří <u>basi</u> modulu. Každý konečný modul má basi / i modul obsahující jen nulový vektor, rozumíme-li basí tohoto modulu prázdnou množinu/.

Je-li X libovolný prvek modulu, pak se dá pomocí base takto vyjádřiti :

$$X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n .$$

Je-li
$$X = y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_n A_n$$

druhé takové vyjádření téhož prvku, pak

$$O' = X - X = (x_1 - y_1) \cdot A_1 + (x_2 - y_2) \cdot A_2 + \dots + (x_n - y_n) \cdot A_n ,$$ takže $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$. Odtud vyplývá, je-li dána base modulu, pak můžeme každému vektoru X daného modulu přiřaditi jednoznačně skupinu n čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, jež nazýváme[x] " souřadnicemi vektoru vzhledem ke zvolené basi " a to tak, že

$$X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n .$$

§ 9.

Kriterium pro isomorfii.

Věta. Dva isomorfní moduly mají stejnou dimensi.
To vyplývá odtud, že vektory, jež jsou mezi sebou závislé resp. nezávislé, přejdou isomorfním zobrazením na vektory, jež jsou mezi sebou závislé resp. nezávislé.

Obrácení této věty obecně neplatí. Nekonečné moduly nemusí býti mezi sebou isomorfní. Platí však tato věta:

Věta.. Dva konečné moduly stejné dimense jsou isomorfní.

---

x Souřadnice vektoru X jsou závislé na tom, jak jsme zvolili basi. Tuto závislost na basi vyznačujeme tím, že mluvíme o souřadnicích vektoru " vzhledem ke zvolené basi " .

<u>Důkaz.</u> Ukažme nejprve, že dimense modulu E_n, o němž jsme se zmínili na konci § 3 / str. 7 / je n. Vektory

$$A_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$
$$A_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$A_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

tvoří basi modulu E_n. Snadno se pozná, že tyto vektory jsou mezi sebou nezávislé a že každý vektor $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ dá se psáti ve tvaru

$$B = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots b_n A_n ,$$

t.j. vektor B je na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$ závislý.

Obsahuje-li modul jenom nulový vektor, pak tvrzení věty je správné. K důkazu naší věty stačí ukázat, že modul dimense n je isomorfní s modulem E_n ($n \geq$), neboť jsou-li dva moduly isomorfní s řetím, pak jsou oba navzájem isomorfní. Isomorfní zobrazení f modulu na E_n je dáno vztahem:

$$f(X) = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou souřadnice vektoru X vzhledem k dané basi modulu. Vskutku toto zobrazení je prosté a plné zobrazení modulu na E_n, neboť každému prvku X z daného modulu odpovídá přesně jedna skupina n čísel z E_n, totiž skupina jeho souřadnic.

Obrazem součtu $X + Y$ dvou vektorů je součet obrazů $f(X) + f(Y)$, neboť je-li $f(X) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(Y) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, pak $f(X + Y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(X) + f(Y)$. Dále je $f(c.X) = (c.x_1, c.x_2, \dots, c.x_n) = c.f(X)$ pro každé reálné c.

Daný modul je tedy isomorfní s E_n.

§ 10.

P o d m o d u l y.

Nechť je dán modul M. Nechť je dána část M' modulu M. / To naznačuje symbolicky $M' \subset M$./ Aby M' byl modul musí býti splněny tyto postuláty:

1/ $M' \neq \emptyset$ / t.j. M' obsahuje aspoň jeden prvek/.

2/ Když $A \in M'$, $B \in M'$, pak $A + B \in M'$

3/ Když c je číslo a $A \in M'$, pak $c.A \in M'$

Snadno se přesvědčíme, že část M' splňující tyto tři požadavky, splňuje také axiomy I - VIII. Říkáme, pak, že M' je podmodul modulu M.

Věta. Má-li modul dimensi m, pak podmodul jeho má dimensi $m' \leqq m$; není-li podmodul roven modulu, pak $m' < m$. Dimense části je nejvýš rovna dimensi celku.

Důkaz této věty se provede stejně jako důkaz věty uvedené v § 8 / na str. 13 /.

Je-li M' podmodul modulu M, pak basi modulu M' můžeme rozšířiti o další nezávislé vektory z M tak, že dostaneme basi modulu M.

§ 11.

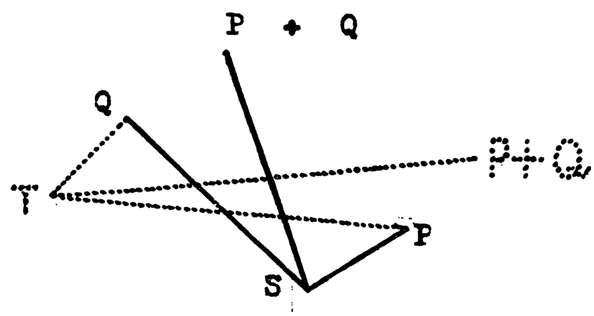
P o č e t n í p r a v i d l a p r o b o d y.

Zvolme v / obyčejném / prostoru určitý bod S, jejž nazveme počátek prostoru. Každému bodu P toho prostoru přiřadíme vektor o počátku S a konci P. Obráceně určuje vektor A jednoznačně bod P, jejž dostaneme jako koncový bod, umístíme-li vektor A tak, aby S byl jeho počátek. Máme tu prosté a plné zobrazení bodů na vektory. S body budeme počítati tak jako s vektory, čímž dostaneme isomorfní zobrazení bodů na vektory.

Bodu přiřadíme vektor $P \rightarrow A$

vektoru přiřadíme vektor $B \rightarrow B$

Nová početní pravidla jsou závislá na volbě počátku S . Uveďme příklad toho v tomto obrázku, z něhož je patrno, že $P + Q \neq P + Q$



<u>Věta</u> . Nechť jsou dána nějaká čísla x_r, y_s, body P_r a vektory B_s a to v konečném počtu. Symbol

$$\sum x_r \cdot P_r + \sum y_s \cdot B_s \qquad /11.1/$$

Má určitý význam závislý na volbě počátku S . Jsou dva případy, kdy tento symbol není závislý na počátku S .

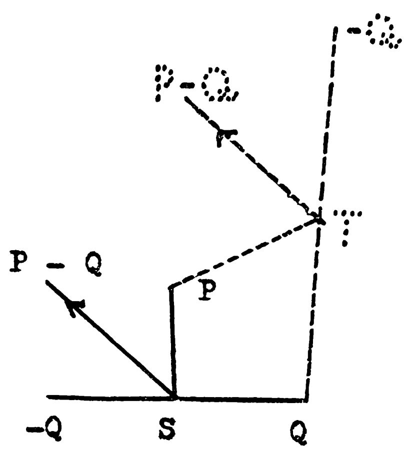
1/ Když $\sum x_r = 0$, pak — považujeme-li součet /11.1/ za vektor — je tento nezávislý na počátku S .

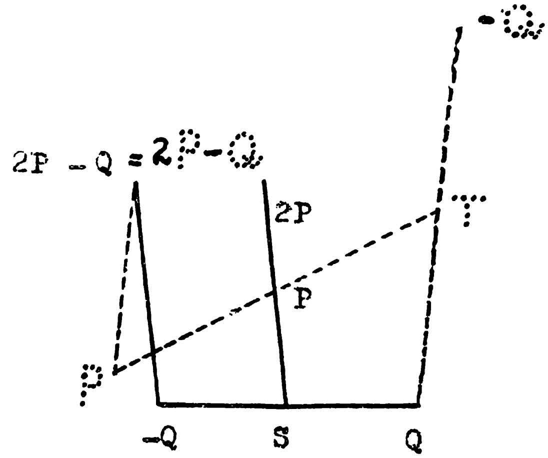
2/ Když $\sum x_r = 1$ a — považujeme-li součet /11.1/ za bod — pak jeho poloha je nezávislá na S .

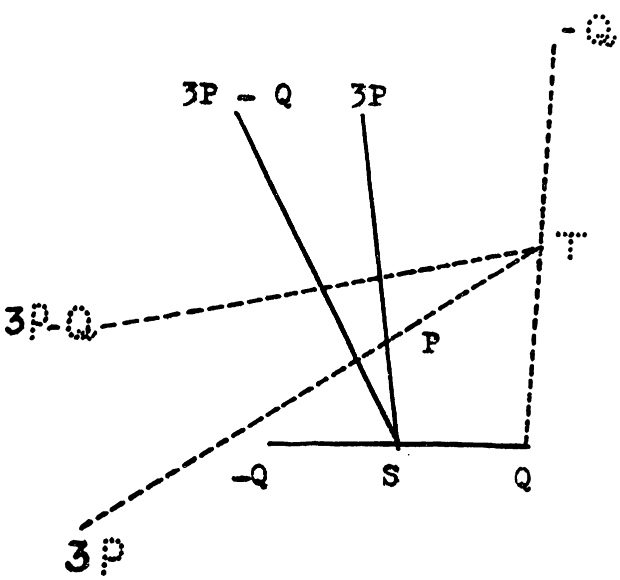
Uveďme tu <u>tři příklady</u> v obyčejném prostoru: $P - Q$, $2.P - Q$, $3.P - Q$.

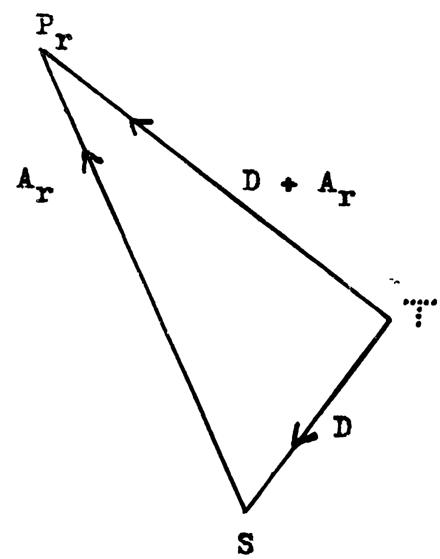
V případě prvém jest $\sum x_r = 1 - 1 = 0$, v druhém $\sum x_r = 2 - 1 = 1$, ve třetím $\sum x_r = 3 - 1 = 2$.

V případě prvém považujeme-li $P - Q$ za vektor, jest tento nezávislý na počátku S ; v druhém případě, považujeme-li $2.P - Q$ za bod, je tento nezávislým na počátku S a konečně v případě třetím, považujeme-li $3.P - Q$ za bod nebo za vektor, je tento závislý na počátku S .









<u>Obecný důkaz věty.</u> Vzhledem k počátku S odpovídá bodu P_r vektor A_r , vzhledem k počátku T odpovídá bodu P_r vektor $D + A_r$, kde D je volný vektor realisovaný vázaným vektorem o počátku T a konci S .

V případě prvém je $\sum x_r = 0$, takže $\sum x_r \cdot D = 0.D = 0$. Proto $\sum x_r \cdot A_r = \sum x_r \cdot D + \sum x_r \cdot A_r = \sum x_r \cdot (D + A_r)$ tedy $\sum x_r \cdot A_r + \sum y_s \cdot B_s = \sum x_r \cdot (D + A_r) + \sum y_s B_s$. Oba tyto vektory jsou totožné.

V případě druhém je $\sum x_r = 1$, takže $\sum x_r . D = 1.D = D$; platí tedy vztah : $\sum x_r . \left(D + A_r \right) = D + \sum x_r A_r$. Umístíme-li vektor $C_1 = \sum x_r . A_r + \sum y_s . B_s$ tak, aby počátek jeho byl v bodě S a umístíme-li vektor $C_2 = \sum x_r . \left(D + A_r \right) + \sum y_s . B_s$ tak, aby počátek jeho byl v bodě T , pak konce těchto vektorů splynou, neboť $C_2 = D + C_1$.

§ 12.

S p e c i á l n í p ř í p a d y .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Zvláštním případem je součet bodu P a vektoru A

$$P + A$$

Vektor A se umístí tak, aby začátek jeho byl v bodě P ; P + A je pak bod, v němž tento vektor končí. Druhým zvláštním případem je rozdíl dvou bodů

$$Q - P$$

To je vektor jenž je realisován vázaným vektorem o počátku P a konci Q . Podle dokázané věty nezáleží v obou těchto případech na volbě počátku prostoru. Na tyto dva specielní případy se dají přenést obecné úkony. Je-li na příklad $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, pak $x_1.P_1 + x_2.P_2 + x_3.P_3 = x_1.\left(P_1 - S \right) + x_2 . \left(P_2 - S \right) + x_3.\left(P_3 - S \right)$. Je-li $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, pak $x_1 . P_1 + x_2 . P_2 + x_3 . P_3 = S + x_1 .\left(P_1 - S \right) + x_2 . \left(P_2 - S \right) + x_3 . \left(P_3 - S \right)$.

Stačí tedy omeziti se na uvedené dvě speciální operace: Součet bodu a vektoru : P + A a rozdíl bodů Q - P .

§ 13 .

Abstraktní lineární prostor.

Nechť jsou dány dvě kategorie, z nichž každá obsahuje aspoň jednu věc. Věci prvé kategorie nazveme vektory , věci druhé kategorie nazveme body. Nechť jsou definovány v prvé kategorii dvě operace : součet dvou vektorů je vektor a součin čísla a vektoru je rovněž vektor. Nechť tyto operace splňují I - VIII známých axiomů. Pak prvá kategorie je modul. Nechť jsou definovány další dvě operace: součet bodu P a vektoru A je bod $P + A$, rozdíl dvou bodů P a Q je vektor $Q - P$, při čemž buďtež splněny tyto tři další axiomy:

IX když $P + A = P$ pak $A = O'$

X $P + (Q - P) = Q$

XI $(P + A) + B = P + (A + B)$

Snadno se verifikuje, že názorné vektory a názorné body obyčejného prostoru splňují tyto axiomy.

Příklad . Sestrojíme čtyřrozměrný prostor, jenž se bude skládati z vektorů a bodů. Vektory budou mnohočleny nejvýš třetího stupně, tedy tvaru

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 .$$

Nulový vektor je polynom, jenž je identicky roven 0 . Součet dvou vektorů je obyčejný součet dvou polynomů a součin čísla a vektoru je obyčejné násobení polynomu číslem. Snadno se verifikuje, že jsou splněny axiomy I - VIII , takže tyto vektory tvoří modul. Body čtyřrozměrného prostoru jsou polynomy tvaru

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + x^4 .$$

Součet bodu a vektoru je bod :

$$c_o + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^4 +$$
$$d_o + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 = c_o + d_o + (c_1 +$$
$$+ d_1) . x + (c_2 + d_2) .x^2 + (c_3 + d_3) . x^3 +$$
$$+ x^4 .$$

Rozdíl dvou bodů je vektor:

$$c_o + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^4 -$$
$$- (d_o + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + x^4) = c_o - d_o +$$
$$+ (c_1 - d_1) .x + (c_2 + d_2) .x^2 + (c_3 - d_3) . x^3$$

Lehce se pozná, že jsou splněny axiomy IX, X, XI.

Podobným způsobem můžeme z mnohočlenů sestrojiti 1, 2, 3, ... , n rozměrný prostor.

Je-li dána prvá a druhá kategorie splňující uvedené axiomy, pravíme, že je dán lienární prostor . Dimensí lineárního prostoru nazýváme dimensi modulu. n - rozměrným lineárním prostorem rozumíme lineární prostor, jehož dimense je n .

§ 14 .

B o d ; p ř í m k a .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Lineární prostor dimense 0 obsahuje jediný bod P a jediný vektor, jímž je nulový vektor. Abychom dokázali toto tvrzení, ukážeme nejprve, že platí vztah

$$P + O' = P$$

Poněvadž podle axiomů X jest $P + (P - P) = P$, jest podle axiomu IX $P - P = O'$, takže $P + O' = P$.

Je-li nyní $Q - P = O'$, tedy podle axiomu X jest $P + (Q - P) = Q$ t.j. $P = Q$. Tím je dokázáno, že lineární prostor dimense 0 má nejvýš jeden bod. Podle předpokladu obsahuje však lineární prostor aspoň jeden bod, obsahuje tedy přesně jeden bod a také jediný vektor O'.

Lineární prostor dimense 1 nazývá se <u>přímka.</u> Podle předpokladu obsahuje tato aspoň jeden bod. Můžeme tedy zvoliti na přímce bod S. Každému vektoru X přímky, můžeme pak přiřaditi bod $S + X$, jenž je na přímce. Tak dostaneme zobrazení vektorů přímky na body přímky. Zobrazení toto je plné, neboť bod Q má za vzor vektor $Q - S$: vskutku $S + (Q - S) = Q$. Zobrazení je také prosté, neboť $S + A = S + B$, když a jen když $A = B$.

To vyplývá z těchto vztahů :

$$S = S + O' = S + (A - A) = (S + A) - A = (S + B) - A = S + (B - A), \text{ t.j. } S + (B - A) = S.$$

Podle axiomu IX jest $B - A = O'$, tedy $B = A$.

Tím je dokázáno, že přímka má právě tolik bodů jako vektorů, t.j. nekonečně mnoho.

Zvolme na přímce vektor $A \neq O'$. Tento je mezi sebou lineárně nezávislý a každý jiný vektor přímky je na něm závislý. Probíhá-li x reálná čísla, probíhá $x.A$ všecky vektory přímky. Zvolíme-li v přímce bod S pak

$$S + x . A$$

proběhne všecky body přímky. Každý bod přímky se dá v tomto tvaru psáti přesně jedním způsobem. Výraz $S + x . A$ sluje parametrické vyjádření přímky.

§ 15 .

R o v i n a ; t r o j r o z m ě r n ý p r o s t o r .
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Lineární prostor dimense 2 sluje rovina. Zvolme v rovině vektor $A \neq O'$. Pak existuje nenulový vektor B tak, že oba tyto vektory tvoří basi modulu. Každý vektor se dá pak psáti přesně jedním způsobem ve tvaru $x.A + y.B$, kde x a y jsou reálná čísla. Zvolíme-li v rovině bod S, pak se každý bod roviny dá přesně jedním způsobem vyjádřiti ve tvaru

$$S + x.A + y.B .$$

V lineárním prostoru dimense 3 existují tři mezi sebou nezávislé vektory A, B, C, jež tvoří basi modulu. Při této zvolené basi se dá každý vektor psáti přesně jedním způsobem ve tvaru $xA + yB + zC$. Každý bod trojrozměrného lineárního prostoru dá se pak přesně jedním způsobem vyjádřiti ve tvaru

$$S + x.A + y.B + z\,C ,$$

kde S je pevně zvolený bod prostoru.

§ 16 .

L i n e á r n í p o d p r o s t o r y .
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Nechť L jest lineární prostor. Zvolme v něm bod S. V příslušném modulu M zvolme podmodul $M' \subset M$ a definujeme část L' prostoru L takto : Bod Z zařadíme do množiny L' tehdy a jen tehdy, když se dá psáti ve tvaru

$$Z = S + X ,$$

kde X je vektor podmodulu M'.

Snadno se pozná, že podmodul M' a část L' splňují axiomy I – XI. Je-li dále $P \in L'$, $A \in M'$, pak $P + A \in L'$, neboť bod P se dá psáti ve tvaru $P = S + X$, kde $X \in M'$. Proto $P + A = (S + X) + A = S + (X + A)$, kde $X + A$ je vektor podmodulu M'. Bod $S + (X + A)$ náleží tudíž do L', t.j. $P + A \in L'$.

Je-li konečně $P \in L'$, $Q \in L'$, pak $Q - P \in M'$, neboť bod P se dá vyjádřiti ve tvaru $P = S + X$, bod Q se dá vyjádřiti ve tvaru $Q = S + Y$, kde $X \in M'$, $Y \in M'$. Užívajíce základních pravidel dostaneme vztah $Q - P = (S + Y) - (S + X) = Y - X \in M'$.

Z této úvahy vyplývá, že mezi vektory podmodulu M' a mezi body části L', platí tytéž vztahy, jako v celém prostoru L, t.j. část L' je lineárním prostorem. Tento nazveme podprostor daného prostoru L, nebo <u>prostor vnořený do prostoru</u> L.

<u>Příklad.</u> Obyčejný prostor obsahuje tyto různé lineární podprostory: lineární prostor dimense 0, lineární prostor dimense 1 /přímku/, lineární prostor dimense 2 / rovinu/ a sebe sama.

Zvolíme-li v obyčejném prostoru bod S, pak podmodulem všech vodorovných vektorů a bodem S je určen lineární podprostor. Je to vodorovná rovina procházející bodem S.

Vnořený podprostor L' je určen bodem S a modulem M'. Bod S náleží do toho podprostoru, neboť $S = S + O'$, kde $O' \in M'$.

<u>Věta.</u> <u>Podprostor L' lineárního prostoru L je určen jakýmkoliv svým bodem T a týmž podmodulem M'.</u>

<u>Důkaz.</u> Máme dokázati, že každý bod podprostoru určeného bodem S a modulem M' je bodem podprostoru určeného bodem T a modulem M' a naopak. Máme tedy ukázati, že každý bod tvaru $S + X$, $X \in M'$, dá se psáti ve tvaru $T + Y$, $Y \in M'$ a naopak. To je však zřejmé, neboť T je bodem podprostoru, takže $T = S + A$, $A \in M'$. Proto $S + X = S + (A + (X - A)) = S + A + (X - A) =$

$= T + (X - A)$, $X - A \in M'$ a také $T + Y = (S + A) + Y = S + (A + Y)$, $A + Y \in M'$.

Tím je dokázáno, že na volbě bodu S při konstrukci podprostoru nezáleží, že tento bod může býti nahrazen jakýmkoliv jiným bodem podprostoru.

§ 17.

Směr přímky ; rovnoběžky.

Obyčejný trojrozměrný prostor je lineární prostor dimense 3. Budeme nyní studovat tento prostor a jeho podprostory : bod, přímku a rovinu.

Lineární prostor dimense 0 obsahuje jediný bod P a jediný vektor $A = P - P = O'$.

Přímka je lineární prostor dimense 1. Tato se skládá z bodů a vektorů. Její vektory jsou realisovány ve tvaru $P - Q$. Zvolíme-li si pevně bod S, pak vektor $X = Z - S$ probíhá všechny vektory, probíhá-li Z všechny body přímky a naopak bod $Z = S + X$ probíhá všechny body, probíhá-li X všecky vektory přímky.

Směrem přímky nazveme množinu všech vektorů, jež leží v dané přímce. Směr přímky je modul dimense 1. Zvolíme-li ve směru nenulový vektor A, pak každý vektor té přímky můžeme psáti ve tvaru $x.A$, kde x je reálné číslo. Vektor A je base směru přímky.

Věta. Přímka je jednoznačně určena bodem a směrem.

Věta. Dvěma různými body prochází přesně jedna přímka.

Důkaz. Poněvadž body P a Q, jimiž přímky procházejí, jsou různé, jest vektor $Q - P$ nenulový. Označme jej $A = Q - P$. Tento vektor je basí směru každé přímky, procházející body P a Q. Prochází-li nějaká přímka body P a Q, pak všecky vektory této přímky jsou ve tvaru $x.A$, kde x probíhá všecka reálná čísla. Všechny body této přímky jsou pak tvaru $Z = P + x.A = P + x.(Q - P)$. Odtud je patrno, že existuje přesně jedna přímka procházející body P a Q.

Dvě přímky, jež mají stejný směr, slují <u>rovnoběžné</u>. Dvě splývající přímky jsou podle této definice také rovnoběžné.

<u>Věta.</u> <u>K dané přímce lze daným bodem vésti přesně jednu rovnoběžku.</u>

<u>Důkaz.</u> Tato rovnoběžka je určena daným bodem a směrem dané přímky; podle předešlého je tedy tato rovnoběžka jednoznačně určena.

§ 18.

S m ě r r o v i n y ; r o v n o b ě ž n é r o v i n y.

Rovina je lineární podprostor dimense 2. Množinu všech vektorů roviny nazveme <u>směrem roviny.</u> Směr roviny je modul dimense 2. Zvolíme-li v tomto modulu dva mezi sebou nezávislé vektory A, B, tvoří tyto basi směru, takže každý vektor roviny se dá psáti ve tvaru $x.A + y.B$, kde x a y jsou reálná čísla.

<u>Věta. Rovina je jednoznačně určena bodem a směrem.</u>

Dvě roviny jež mají stejný směr, slují <u>rovnoběžné.</u> Dvě splývající roviny jsou podle této definice také rovnoběžné. Dvě roviny, jež nejsou rovnoběžné, slují <u>různoběžné.</u>

§ 19.

P ř í m k a   a   r o v i n a .

Nechť je dána přímka a rovina. Je-li směr přímky obsažen ve směru roviny, pak každý vektor přímky je obsažen ve směru roviny. Tento případ nastane, když nenulový vektor A dané přímky je obsažen ve směru roviny. Pak je totiž každý vektor $x . A$ obsažen ve směru roviny, tedy každý vektor přímky je ve směru roviny.

Přímka a rovina slují <u>rovnoběžné</u>, když směr přímky je obsažen ve směru roviny. Leží-li přímka v rovině, pak je podle naší definice tato přímka rovnoběžná s rovinou.

Existují přímky rovnoběžné s danou rovinou, jež neleží v této rovině. Tuto existenci zaručuje

<u>Věta.</u> <u>Jsou-li přímka a rovina rovnoběžné a neleží-li bod, jímž přímka prochází v té rovině, pak nemá přímka s rovinou společného bodu.</u>

<u>Důkaz.</u> Nechť P je bod, jímž daná přímka prochází a jenž neleží v dané rovině. Zvolme basi směru přímky A. Každý vektor přímky dá se pak vyjádřiti ve tvaru $z . A$, kde z je reálné číslo. Každý bod přímky můžeme pak psáti ve tvaru $P + z.A$. Ve směru roviny existují dva mezi sebou nezávislé vektory A a B, jež tvoří basi směru roviny. Nechť Q je bod roviny. Každý bod roviny dá se pak psáti ve tvaru $Q + x.A + y.B$, kde x a y jsou reálná čísla. Kdyby některý bod $P + z_0 . A$ dané přímky, byl bodem roviny, existovala by reálná čísla x_0, y_0 té vlastnosti, že

$$P + z_0 . A = Q + x_0 . A + y_0 . B \quad \text{tedy}$$

$$P = Q + (x_0 - z_0) . A + y_0 . B$$

Bod P by byl tudíž bodem roviny. To ovšem není možné. Proto žádný bod přímky není v rovině.

<u>Věta. Nechť dva různé body P a Q leží v rovině. Pak přímka, jež prochází těmito body, je obsažena v rovině.</u>

<u>Důkaz.</u> Nenulový vektor Q - P leží v přímce i v dané rovině. Proto každý vektor x . (Q - P), kde x je reálné číslo, je vektorem dané roviny, Směr přímky je tudíž částí směru roviny. Podle definice je přímka rovnoběžná s rovinou. Každý bod přímky, jenž se dá psáti ve tvaru P + + x. (Q - P), je tudíž v rovině, takže tato obsahuje celou přímku.

<u>Věta.</u> <u>Dvě přímky v rovině jsou buď rovnoběžné, nebo mají společný přesně jeden bod.</u>

<u>Důkaz.</u> Nechť prvá přímka je určena bodem P a směrem, jehož basi tvoří vektor A . Každý bod přímky dá se pak psáti ve tvaru P + x.A , kde x je reálné číslo. Nechť druhá přímka je určena bodem Q a směrem o basi B , takže každý bod této přímky můžeme psáti ve tvaru Q + y.B , kde y je reálné číslo. Jsou-li obě přímky rovnoběžné, nemáme co dokazovati. Předpokládejme tedy, že přímky nejsou rovnoběžné. Pak vektory A a B jsou mezi sebou nezávislé, takže tvoří basi směru roviny. Každý vektor roviny, a tedy i vektor Q - P , je lineárně závislý na vektorech A a B . Existují tudíž reálná čísla x , y té vlastnosti, že Q - P = x.A + y.B. Odtud vyplývá

$$Q - y.B = P + x.A$$

Symbol na pravé straně této rovnice značí bod na prvé přímce, symbol na levé straně bod na druhé přímce. Oba tyto body jsou stejné. Jsou tedy společné oběma přímkám. Tím je určen průsečík dvou přímek. Jiného společného bodu tyto přímky neobsahují, neboť by splynuly a byly by rovnoběžné.

<u>Příklad.</u> Zvolme v rovině počátek S a basi roviny A , B . Každý vektor roviny se dá psáti přesně jedním způsobem ve tvaru x.A + y.B a každý bod roviny se dá psáti přesně jedním způsobem ve tvaru S + x.A + y.B, kde

x, y jsou reálná čísla.

Soustava S, A, B sluje <u>soustava souřadná</u>, bod S sluje <u>počátek souřadnic</u>, čísla x, y slují <u>souřadnice bodu</u> $S + x.A + y.B$. Součet dvou vektorů $x_1.A + y_1.B$, $x_2.A + y_2.B$ je vektor

$$(x_1.A + y_1 B) + (x_2.A + y_2.B) = (x_1 + x_2).A + (y_1 + y_2).B$$

Součin čísla c a vektoru $x.A + y.B$ je vektor

$$c.(x.A + y.B) = cx.A + cy.B .$$

Poněvadž zobrazení vektorů na jejich souřadnice je prosté a plné, je tu isomorfní zobrazení vektorů roviny na jejich souřadnice.

Je-li dána soustava souřadná S, A, B, pak můžeme vektory a body znázorňovati souřadnicemi a místo vektory $x.A + y.B$, resp. body $S + x.A + y.B$ můžeme počítati jejich souřadnicemi (x, y).

<u>Příklad numerický</u>. Nalézti v rovině průsečík dvou přímek.

Nechť S, A, B je souřadná soustava. Prvá přímka je dána[X] body $P_1 = (3, 2)$, $Q_1 = (4, 7)$, druhá přímka body $P_2 = (8, -3)$, $Q_2 = (1, -5)$. Směr prvé přímky je určen vektorem $Q_1 - P_1 = (1, 5)$, směr druhé přímky vektorem $Q_2 - P_2 = (-7, -2)$. Jelikož tyto vektory jsou mezi sebou nezávislé, existuje přesně jeden společný bod. Tento najdeme takto:

Vektory $Q_1 - P_1$, $Q_2 - P_2$ jsou basí směru roviny, takže vektor $P_2 - P_1 = (5, -5)$ je na těchto lineárně závislý. Proto existují čísla x, y té vlastnosti, že $P_2 - P_1 = x.(Q_1 - P_1) + y.(Q_2 - P_2)$. Odtud vyplývá, že $P_2 - y.(Q_2 - P_2) = P_1 + x.(Q_1 - P_1)$ je společný průsečík obou přímek.

X Bez obavy z nedorozumění píšeme $P_1 = (3,2)$, jsouce si vědomi, že bod P_1 je representován souřadnicemi $(3,2)$.

Čísla x a y vypočteme ze vztahu : $\left(5\,,\,-5\right) = x.\left(1,\,5\right) + y.\left(-7,\,-2\right)$, jenž představuje dvě rovnice

$$5 = x - 7y$$
$$-5 = 5x - 2y \ .$$

Řešení těchto rovnic je $x = -\frac{15}{11}$, $y = -\frac{10}{11}$.
Společný průsečík je tudíž

$$P_0 = P_1 + x.\left(Q_1 - P_1\right) = \left(3,\,2\right) - \frac{15}{11}.\left(1,\,5\right) = \left(\frac{18}{11},\ -\frac{53}{11}\right).$$

§ 20 .

D v ě p ř í m k y .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Dvě přímky v prostoru mají trojí možnou polohu: 1/ buď jsou rovnoběžné nebo 2/ nejsou rovnoběžné a mají společný jeden bod, nebo konečně 3/ nejsou rovnoběžné a nemají společný žádný bod. V prvém případě nazýváme přímky <u>rovnoběžné</u> , v případě druhém <u>různoběžné</u> a v případě třetím <u>mimoběžné</u> .

<u>Věta.</u> <u>Dvěma různými rovnoběžnými přímkami prochází přesně jedna rovina.</u>

<u>Důkaz.</u> Nechť prvá přímka je dána bodem P a vektorem A, druhá pak bodem Q a týmž vektorem A . Vektory A a $Q - P$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Vskutku kdyby existovalo reálné číslo x tak, že $Q - P = x.A$, byl by bod $Q = P + x.A$ na prvé přímce, takže obě rovnoběžky by splynuly, což není možné.

Vektory A a $Q - P$ jsou basí směru roviny. Bodem P a touto basí je jednoznačně určena rovina. Její body se dají psáti ve tvaru $P + x\,A + y\,.\left(Q - P\right)$. Rovina tato obsahuje bod $P = P + 0\,.\,A + 0\,.\left(Q - P\right)$ i bod $Q = P + 0\,.\,A + 1\,.\left(Q - P\right)$ a také vektor A . Obsahuje tudíž obě přímky.

Věta. Dvěma různoběžnými přímkami prochází přesně jedna rovina.

Důkaz. Označme společný bod dvou různoběžných přímek písmenem P. Nechť směr prvé přímky je určen vektorem A, směr druhé přímky vektorem B. Jelikož tyto přímky nejsou rovnoběžné, jsou oba vektory mezi sebou nezávislé, takže tvoří basi směru roviny. Bodem P a basí A, B je rovina jednoznačně určena. Směr prvé přímky je částí směru roviny. Jelikož bod P této přímky je v rovině, obsahuje tato rovina celou prvou přímku. Jelikož směr druhé přímky je částí směru roviny, je i druhá přímka celá obsažena v rovině.

Věta. Dvěma mimoběžnými přímkami nelze vésti rovinu.

Důkaz vyplývá z věty v § 19 / str. 29/.

Věta. Třemi body, jež neleží na přímce, prochází přesně jedna rovina.

Důkaz. Poněvadž dané tři body P, Q, R neleží na přímce, jsou přímky určené body P, Q resp. P, R různoběžné. Jimi prochází přesně jedna rovina.

Věta. Přímkou a bodem mimo ni ležícím prochází přesně jedna rovina.

Důkaz. Podle předešlé věty prochází daným bodem a dvěma různými body na přímce přesně jedna rovina, jež obsahuje danou přímku.

Příklad. Nalézti v prostoru průsečík dvou různoběžek.

Zvolme v prostoru souřadnou soustavu S, A, B, C. Každý vektor prostoru se dá psáti ve tvaru $x.A + y.B + z.C$, každý bod prostoru se dá psáti ve tvaru $S + x.A + y.B + z.C$. Místo vektory a body budeme počítati trojicemi čísel (x, y, z). Prvá přímka je dána body $P_1 = (2, 4, 7)$, $Q = (5, -2, -2)$, druhá přímka body $P_2 = (9, -2, 6)$, $Q_2 = (-6, 8, 1)$. Směr prvé přímky je určen vektorem $Q_1 - P_1 = (3, -6, -9)$, směr druhé přímky pak vektorem $Q_2 - P_2 = (-15, 10, -5)$. Snadno se přesvědčíme, že vektory tyto jsou mezi sebou **nezávislé**, takže dané přímky nejsou rovnoběžné. Jsou tedy různoběžné nebo mimoběžné.

Dokažme si, že vektor $P_2 - P_1 = (7, -6, -1)$ je lineárně závislý na vektorech $Q_1 - P_1$ a $Q_2 - P_2$.

Vektorová rovnice $P_2 - P_1 = x.(Q_1 - P_1) + y.(Q_2 - P_2)$ čili

$$(7, -6, -1) = x.(3, -6, -9) + y.(-15, 10, -5)$$

je ekvivalentní se systemém tří lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 7 &= 3x - 15y \\ -6 &= 6x + 10y \\ -1 &= 9x - 5y \end{aligned}$$

Řešení tohoto systému je $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{5}$. Proto $P_2 - P_1 = \frac{1}{3}.(Q_1 - P_1) - \frac{2}{5}.(Q_2 - P_2)$, t.j. bod $P_0 = P_2 + \frac{2}{5}.(Q_2 - P_2) = (9, -2, 6) + \frac{2}{5}.(-15, 10, -5) = (3, 2, 4)$ je společným bodem obou přímek.

§ 21.

Průsečík přímky s rovinou.

Věta. Není-li přímka rovnoběžná s rovinou, má s ní společný přesně jeden bod.

Důkaz. Rovina je určena bodem P a basí směru A, B; přímka je určena bodem Q a vektorem C; jelikož přímka není rovnoběžná s rovinou, není vektor C závislý na vektorech A, B. Vektory A, B, C jsou mezi sebou nezávislé a tvoří basi všech vektorů v prostoru.

Existují tudíž čísla x, y, z té vlastnosti, že

$$Q - P = x.A + y.B + z.C \text{ , tedy}$$

$$Q - z.C = P + x.A + y.B \text{ .}$$

Tím je nalezen průsečík přímky s rovinou, neboť symbol na levé straně této rovnice znamená bod na přímce, symbol na pravé straně bod v rovině.

<u>Příklad.</u> Nalézti průsečík přímky s rovinou.

Zvolme v prostoru pevnou soustavu souřadnou. Rovina je určena body $P = (1, 2, 3)$, $Q = (4, 5, 2)$, $R = (3, -4, -5)$. Přímka je určena body $S = (2, 2, 4)$, $T = (6, 7, 3)$. Base směru roviny je $A = Q - P = (3, 3, -1)$, $B = R - P = (2, -6, -8)$. Směr přímky je určen vektorem $C = T - S = (4, 5, -1)$. Snadno se pozná, že vektory A, B , C nejsou mezi sebou závislé, takže tyto tvoří basi všech vektorů prostoru. Existují tudíž čísla x, y, z té vlastnosti, že $S - P = x. A + y. B + z.C$, takže společný bod je $S - z.C. = P + x.A + y. B$.

Čísla x, y z vypočteme z rovnice

$$(1, 0, 1) = x. (3,3 - 1) + y.(2, -6, -8) + z(4,5,-1) ,$$

jež určuje systém tří lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= 3x + 2y + 4z \\ 0 &= 3x - 6y + 5z \\ 1 &= -x - 8y - z \end{aligned}$$

Násobíme-li prvou rovnici -30, druhou 22, třetí -24 a sečteme-li pak všechny rovnice, dostaneme pro neznámou z hodnotu $z = -\frac{27}{7}$. Proto společný průsečík je

$$P_0 = S - z.C = (2, 2, 4) + \frac{27}{7} .(4,5,-1) = \left(\frac{122}{7} , \frac{149}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

§ 22.

Přímka, rovina a prostor vedené danými body.

Věta. Body P a Q splynou, když a jen když rovnici

$x_1 . P + x_2 . Q = 0$, kde $x_1 + x_2 = 0$,

lze vyhověti netriviálním způsobem.

Důkaz. Jest-li že oba body splynou, položme $x_2 = - x_1$, kde $x_2 \neq 0$.

Lze-li naopak dané rovnici vyhověti netriviálním způsobem, pak ji můžeme psáti ve tvaru: $x_1 . (P-Q) = 0'$, neboť $x_2 = - x_1$. Poněvadž je $x_1 \neq 0$ jest podle věty v § 4 / na str. 8 / $P - Q = 0'$, t.j. $P = Q$.

Věta. Jsou-li P a Q různé body, pak lze každý bod přímky těmito body určené psáti přesně jedním způsobem ve tvaru

$x_1 . P + x_2 . Q$, kde $x_1 + x_2 = 1$.

Důkaz. Je-li především R bodem přímky, pak existuje reálné číslo x té vlastnosti, že $R = P + x.(Q - P) = (1 - x) . P + x.Q = x_1 . P + x_2 . Q$, kde $x_1 = 1 - x$; $x_2 = x$; $x_1 + x_2 = 1$. Každý bod přímky se dá tedy vyjádřiti v uvedeném tvaru. Jsou-li nyní dána dvě taková vyjádření $R = x_1 . P + x_2 . Q$, $R = y_1 . P + y_2 Q$, kde $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1$, pak odečtením vyplývá: $(x_1 - y_1) . P + (x_2 - y_2) . Q = 0'$, kde $(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0$.

Jelikož body P a Q jsou různé, lze podle předešlé věty vyhověti poslednímu vztahu jen triviálním způsobem. Proto

$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0$, t.j. $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$.

Tím je dokázána jednoznačnost vyjádření.

Věta. Tři body P, Q, R leží na přímce když a jen když rovnici

$$x_1 . P + x_2 . Q + x_3 . R = 0', \text{kde}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

je vyhověno netriviálním způsobem.

Důkaz. Jelikož $x_1 = -x_2 - x_3$, dá se rovnice psáti ve tvaru

$$x_2 . (Q - P) + x_3 (R - P) = 0'.$$

Tomuto vztahu lze vyhověti netriviálním způsobem, když a jen když oba vektory $Q - P$ a $R - P$ jsou mezi sebou lineárně závislé. Mohou nastati dva případy: 1/ buďto $Q - P = 0'$ nebo $R - P = 0'$, t.j. $P = Q$ nebo $P = R$ anebo

2/ $P \neq Q$, $P \neq R$.

V prvém případě dva body splynou, takže existují nejvýš dva různé body a tyto leží na přímce. V druhém případě existují dvě přímky, prvá je určena bodem P a vektorem $Q - P$, druhá bodem P a vektorem $R - P$. Jelikož oba tyto vektory jsou mezi sebou závislé, jsou obě přímky rovnoběžné. Jelikož pak mají společný bod P, jsou identické. Všechny tři body P, Q, R leží na této přímce.

Nechť nyní tři body P, Q, R, leží na přímce. Vektory $Q - P$ a $R - P$ jsou mezi sebou lineárně závislé. Proto existují čísla x_2, x_3, z nichž aspoň jedno není 0, té vlastnosti, že $x_2 . (Q - P) + x_3 . (R - P) = 0'$. Položíme-li $x_1 = -x_2 - x_3$, pak $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ a uvedené rovnici lze vyhověti netriviálním způsobem, j.b.d.

Věta Neleží-li tři body P, Q, R na přímce, pak lze každý bod roviny, těmito body určené, psáti přesně jedním způsobem ve tvaru

$$x_1 . P + x_2 . Q + x_3 . R \text{ , kde } x_1 + x_2 + x_3 = 1 .$$

Důkaz. Rovina je určena bodem P a vektory Q − P, R − P. Je-li Z libovolný bod této roviny, pak existují čísla x a y té vlastnosti, že $Z = P + x.(Q - P) + y.(R-P) = (1 - x - y).P + x.Q + y.R$. Položíme-li $x_1 = 1 - x - y$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, pak $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ a bod Z se dá vyjádřiti takto, $Z = x_1 . P + x_2 . Q + x_3 . R$.

Je-li $Z = y_1 . P + y_2 . Q + y_3 . R$, kde $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, pak $0' = (x_1 - y_1).P + (x_2 - y_2).Q + (x_3 - y_3).R$, kde $(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) = 0$. Vzhledem k předešlé větě musí býti $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = x_3 - y_3 = 0$, tedy $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$. Tím je dokázána jednoznačnost vyjádření.

Věta. Čtyři body P, Q, R, S leží v rovině, když a jen když rovnici

$$x_1 . P + x_2 . Q + x_3 . R + x_4 . S = 0' \text{ kde}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad / 22,1 /$$

lze vyhověti netriviálním způsobem.

Důkaz. Jsou-li body P, Q, R na přímce, položme $x_4 = 0$. Pak je vztah / 22,1/ splněn netriviálním způsobem. Nejsou-li body P, Q, R na přímce, lze jimi položiti přesně jednu rovinu. Poněvadž bod S je v této rovině, existují podle předešlé věty reálná čísla x_1, x_2, x_3 té vlastnosti, že

$$S = x_1 . P + x_2 . P + x_3 . R \text{ ,kde } x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Položíme-li $x_4 = -1$, je rovnici /22,1/ vyhověno netriviálním způsobem.

Předpokládejme nyní, že je splněna podmínka /22,1/. Leží-li body P, Q, R na přímce, pak zřejmě těmito body a bodem S lze vésti rovinu. Neleží-li na přímce, pak $x_4 \neq 0$. Násobme rovnici /22,1/ číslem $-\frac{1}{x_4}$. Dostaneme pak vztah:

$$- \frac{x_1}{x_4} \cdot P - \frac{x_2}{x_4} \cdot Q - \frac{x_3}{x_4} \cdot R - S = C \text{ , t.j.}$$

$$S = - \frac{x_1}{x_4} \cdot P - \frac{x_2}{x_4} \cdot Q - \frac{x_3}{x_4} \cdot R$$

Jelikož $- \frac{x_1}{x_4} - \frac{x_2}{x_4} - \frac{x_3}{x_4} = 1$, leží bod S podle předešlé věty v rovině určené body P, Q, R .

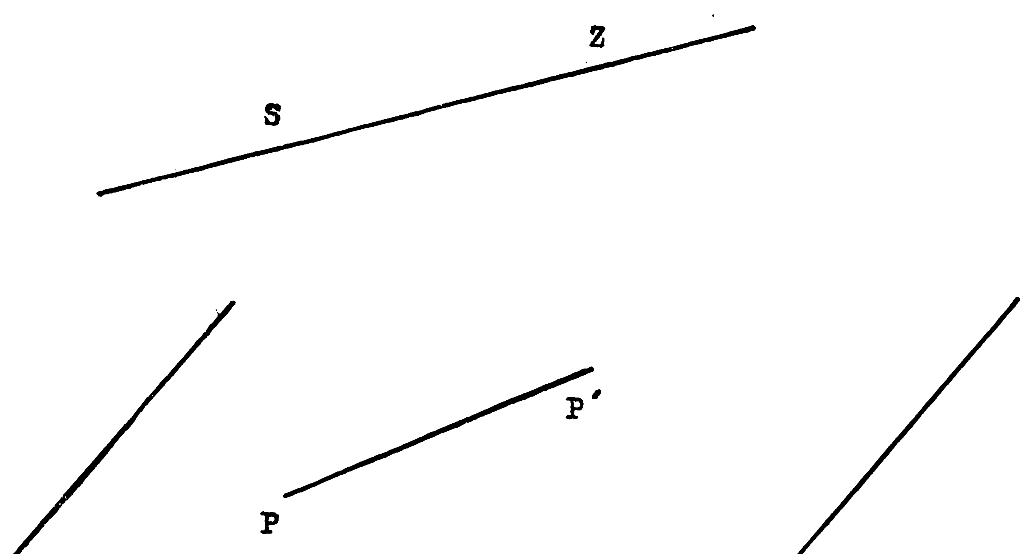
Věta. Neleží-li body P, Q, R, S v rovině, pak lze každý bod prostoru psáti přesně jedním způsobem ve tvaru

$x_1 . P + x_2 . Q + x_3 . R + x_4 . S$,kde $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. /22.2/.

Důkaz. Dokažme, že každý bod Z prostoru dá se psáti ve tvaru /22.2/. Body P, Q, R neleží na přímce, neboť by jinak body P, Q, R, S byly v rovině. Každý bod roviny určené body P, Q, R dá se vyjádřiti ve tvaru

$y_1 . P + y_2 . Q + y_3 . R$, kde $y_1 + y_2 + y_3 = 1$.

Je-li $Z = S$, pak bod $Z = 0 . P + 0 . Q + 0 . R + 1 . S$ dá se vyjádřiti ve tvaru /22.2/. Nechť je nyní bod Z různý od bodu S. Body Z a S je určena přímka. Je-li tato rovnoběžná s rovinou P Q R , existuje v rovině bod P' té vlastnosti, že $Z - S = P' - P$.



Odtud vyplývá $Z = S + P' - P$. Jelikož bod P' je v rovině $P\,Q\,R$ existují čísla y_1, y_2, y_3 té vlastnosti, že $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ a že $P' = y_1.P + y_2.Q + y_3.R$. Proto

$$Z = (y_1 - 1).P + y_2.Q + y_3.R + S = x_1.P + x_2.Q + x_3.R + x_4.S \text{ , kde}$$

$$x_1 = y_1 - 1,\quad x_2 = y_2,\quad x_3 = y_3,\quad x_4 = 1 \text{ , takže}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \text{ . To je tvar / 22.2 /.}$$

Není-li přímka $S\,Z$ rovnoběžná s rovinou PQR, pak má s ní společný přesně jeden bod. Označme jej opět $P' = y_1.P + y_2.Q + y_3.R$, kde $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Jelikož bod Z leží na přímce určené body P' a S, existují reálná čísla z_1, z_2 té vlastnosti, že $z_1 + z_2 = 1$ a že

$$Z = z_1.P' + z_2.S = z_1.(y_1.P + y_2.Q + y_3.R) + z_2.S = z_1y_1.P + z_1y_2.Q + z_1y_3.R + z_2.S = x_1.P + x_2.Q + x_3.R + x_4.S \text{ , kde}$$

$$x_1 = z_1y_1,\quad x_2 = z_1y_2,\quad x_3 = z_1y_3,\quad x_4 = z_2 \quad \text{takže}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = z_1.(y_1 + y_2 + y_3) + z_2 = z_1 + z_2 = 1 \text{ .}$$

Bod Z dá se tedy vyjádřiti ve tvaru /22.2/.

Dokažme nyní, že pro každý bod existuje přesně jeden způsob uvedeného vyjádření. Nechť

$$Z = x_1.P + x_2.Q + x_3.R + x_4.S = y_1.P + y_2.Q + y_3.R + y_4.S \text{ , kde } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \text{ .}$$

Pak

$$O' = (x_1 - y_1).P + (x_2 - y_2).Q + (x_3 - y_3).R + (x_4 - y_4).S \text{ , kde}$$

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) + (x_4 - y_4) = 0 \text{ ,}$$

takže vzhledem k předešlé větě jest $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$. Tím je dokázána jednoznačnost vyjádření.

§ 23 .

P r ů s e č n i c e d v o u r o v i n .
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Věta. Dvě různoběžné roviny se protínají v přímce.

Důkaz. Basi směru prvé roviny označme A_1, A_2 ; basi směru druhé roviny označme B_1 , B_2 . Jelikož prostor má dimensi 3, jsou tyto čtyři vektory mezi sebou lineárně závislé. Vektorové rovnici

$$x_1 . A_1 + x_2 . A_2 + y_1 . B_1 + \cancel{y_1} + y_2 . B_2 = 0'$$

lze tedy vyhověti netriviálním způsobem. Nechť x_1, x_2, y_1, y_2 je netriviální řešení. Nemůže býti $y_1 = y_2 = 0$, neboť vztahu $x_1 . A_1 + x_2 . A_2 = 0$ lze vyhověti jen triviálně. Proto $y_1 . B_1 + y_2 . B_2$ je nenulový vektor. Označme jej C . Vektor C je obsažen ve směru druhé roviny a jelikož $C = - x_1 . A_1 - x_2 . A_2$, také ve směru prvé roviny. Proto vektor C je ve směru obou rovin.

Obráceně. Každý vektor C' jenž je ve směru obou rovin je závislý na vektoru C, neboť jinak by vektory C a C' byly mezi sebou nezávislé, takže by určovaly směr prvé i směr druhé roviny a tyto by byly rovnoběžné, což není. Určeme basi prvé roviny C, A a basi druhé roviny C, B. Vektory A,B,C jsou mezi sebou nezávislé, neboť kdyby byly mezi sebou závislé, byly by vektory A a B mezi sebou závislé a roviny by byly opět rovnoběžné.

Zvolme v prvé rovině bod P a v druhé bod Q . Každý bod prvé roviny dá se psáti ve tvaru $P + x . A + z_1 . C$, každý bod druhé roviny ve tvaru $Q + y.B + z_2.C$ .K vektoru $Q - P$ dají se udati reálná čísla u, v, w té vlastnosti, že

$$Q - P = u.A + v.B + w.C$$

Odtud vyplývá

$$P + u.A. = Q - v.B - w.C \ .$$

Tím je určen bod P_o , jenž leží v obou rovinách, neboť symbol na levé straně poslední rovnice znamená bod v první rovině, symbol na pravé straně bod v druhé rovině.

Bodem P_o a vektorem C je určena přímka, jež je průsečnicí obou rovin.

Příklad. Nalézti průsečnici dvou rovin.

Zvolme v prostoru pevnou soustavu souřadnou. První rovina je dána body : $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 2)$, $(6, -1, -1)$; druhá rovina je dána body $(2, 4, 1)$, $(4, 2, -1)$, $(-5, -3, -1)$.

Určeme basi směru prvé roviny /jako rozdíl druhého a prvého resp. třetího a prvého bodu /; $A_1 = (3, 3, -1)$, $A_2 = (5, -3, -4)$. Podobně určíme basi směru druhé roviny $B_1 = (2, -2, -2)$, $B_2 = (-7, -7, -2)$. Vektorová rovnice

$$x_1.A_1 + x_2.A_2 + y_1.B_1 + y_2.B_2 = 0' \quad \text{čili}$$

$$x_1.(3, 3, -1) + x_2.(5, -3, -4) + y_1.(2, -2, -2) + $$
$$+ y_2.(-7, -7, -2) = (0, 0, 0)$$

zastupuje systém tří lineárních homogenních rovnic o čtyřech neznámých :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2y_1 - 7y_2 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2y_1 - 7y_2 &= 0 \\ - x_1 - 4x_2 - 2y_1 - 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení tohoto systému rovnic je

$$x_1 : x_2 : y_1 : y_2 = \begin{vmatrix} 5, & 2, & -7 \\ -3, & -2, & -7 \\ -4, & -2, & -2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 3, & 2, & -7, \\ 3, & -2, & -7 \\ -1, & -2, & -2 \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 3, & 5, & -7 \\ 3, & -3, & -7 \\ -1, & -4, & -2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 3, & 5, & 2 \\ 3, & -3, & -2 \\ -1, & -4, & -2 \end{vmatrix} = 8 : -52 : 104 : -4$$

$x_1 = 8$, $x_2 = -52$, $y_1 = 104$, $y_2 = -4$

Každé jiné řešení tohoto systému rovnic dostaneme, když násobíme všecka čísla tohoto řešení libovolným číslem. / Násobíme-li číslem $\frac{1}{4}$, dostaneme jednodušší řešení: $x_1 = 2, x_2 = -13$, $y_1 = 26$, $y_2 = -1$ /.

Tím jsme vypočítali vektor C, jenž je ve směrech obou rovin:

$$C = -x_1.A_1 - x_2.A_2 = y_1.B_1 + y_2.B_2 =$$
$$= -2.(3, 3, -1) + 13.(5, -3, -4) = (59, -45, -50) .$$

Jest třeba ještě vypočítati bod na průsečnici. Za vektory A,B můžeme zvoliti vektory $A_1 = (3, 3, -1)$, $\frac{1}{2} . B_1 = (1, -1, -1)$, jež jsou s vektorem C mezi sebou nezávislé. Volíme-li $P = (1, 2, 3)$, $Q = (2, 4, 1)$ dostaneme vektorovou rovnici:

$$Q - P = u.A + v.B + w.C \text{ , čili}$$
$$(1, 2, -2) = u.(3, 3, -1) + v.(1, -1, -1) +$$
$$+ w.(59, -45, -50) \text{ , jež je systémem těchto tří line-}$$

árních rovnic:

$$3u + v + 59w = 1$$
$$3u - v - 45w = 2$$
$$-u - v - 50w = -2$$

Násobíme-li prvou rovnici číslem $\begin{vmatrix} 3, & -1 \\ -1, & -1 \end{vmatrix} = -4$, druhou $-\begin{vmatrix} 3, & 1 \\ -1, & -1 \end{vmatrix} = 2$ a třetí číslem $\begin{vmatrix} 3, & 1, \\ 3, & -1 \end{vmatrix} = -6$ a sečteme, dostaneme $w = -\frac{6}{13}$; dále vypočítáme $u = \frac{41}{26}$, $v = \frac{611}{26}$.

Společný bod je tudíž:

$$P + u.A = Q - v.B - w.C = \left(-\frac{149}{26}, -\frac{175}{26}, -\frac{37}{26}\right).$$

Průsečnice je množina bodů tvaru

$$\left(-\frac{149}{26}, -\frac{175}{26}, -\frac{37}{26}\right) + t.\left(59, -45, -50\right),$$

kde t probíhá všecka reálná čísla.

§ 24.

P ř í č k y d v o u m i m o b ě ž e k .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Definice. Příčka dvou mimoběžek je přímka jež protíná obě mimoběžky.

1. Úloha. Nalézti příčku dvou mimoběžek, jež má předepsaný směr.

Řešení. Nechť je prvá mimoběžka dána bodem P a vektorem A, druhá bodem Q a vektorem B. Směr příčky nechť je dán vektorem $C \neq O$. Jelikož dané dvě přímky jsou mimoběžné, jsou tři vektory A, B, $Q - P$ mezi sebou nezávislé. Tyto vektory tvoří basi všech vektorů prostoru. Existují tudíž reálná čísla x, y, z té vlastnosti, že

$$C = x.A + y.B + z.(Q - P)$$

Označme P' resp. Q' průsečík příčky s prvou resp. s druhou mimoběžkou. Pak existují čísla u, v té vlastnosti, že

$$P' = P + u.A$$

$$Q' = Q + v.B$$

Naší úlohou jest nalézti oba průsečíky, tedy určiti čísla u a v. Jelikož vektor $P' - Q'$ je ve směru příčky, jest $t.(Q' - P') = C$, kde t je vhodné reálné číslo $\neq 0$. Dosazením vyplývá :

$$t.(Q - P - u.A + v.B) = x.A + y.B + z.(Q - P), \text{ tedy } -(x + t.u).A + (-y + t.v).B + (t - z).(Q - P) = 0'.$$

Jelikož vektory v této rovnici jsou mezi sebou nezávislé, lze této rovnici vyhověti jen triviálně. Proto

$$u = -\frac{x}{t}, \quad v = \frac{y}{t}, \quad z = t, \quad \text{t.j.}$$

$$u = -\frac{x}{z}; \quad v = \frac{y}{z}$$

Rozeznávejme dva případy :

1/ $z \neq 0$. Úloha má v tomto případě přesně jedno řešení.
2/ $z = 0$. Pak $t = 0$, takže $C = 0'$. To není možné. Úloha v tomto případě je neřešitelná.

Geometrický význam případu 2/ je tento: Zvolme v prostoru bod S a veďme jím dvě přímky, z nichž jedna je rovnoběžná s prvou, druhá s druhou mimoběžkou. Bodem S a basí A, B je určena pomocná rovina, jež těmito různoběžkami prochází. Když $z = 0$, pak vektor C je ve směru pomocné roviny a naopak, je-li vektor C ve směru pomocné roviny, jest $z = 0$. V tomto případě je naše úloha neřešitelná. / Ku příkladu: ke dvěma vodorovným mimoběžkám vésti vodorovnou příčku/.

2. __Úloha.__ Nalézti příčku dvou mimoběžek, jež prochází daným bodem.

__Řešení.__ Označme daný bod písmenem R. Nechť

P, Q, A, B, P', Q' mají týž význam jako v předešlé úloze. Dají se určiti reálná čísla x, y, z, u, v té vlastnosti, že

$$R - P = x.A + y.B + z.(Q - P)$$

$$P' = P + u.A \,, \quad Q' = Q + v.B$$

Naší úlohou jest určiti čísla u a v. Směr příčky je dán vektorem $Q' - P'$. Jelikož vektor $R - P'$ je ve směru příčky, existuje takové reálné číslo t, že $R - P' = t.(Q' - P')$. Po dosazení dostaneme tyto vztahy:

$$R - P' = -u.A + x.A + y.B + z.(Q - P) =$$

$$= t.(Q - P - u.A + v.B) \,, \text{ tedy } (x - u.(1 - t)).A +$$

$$+ (y - t.v).B + (z - t).(Q - P) = O'.$$

Poněvadž vektory v této rovnici jsou mezi sebou nezávislé, lze této rovnici vyhověti jen triviálně. Proto $x - u.(1 - t) =$ $= y - t.v = z - t = 0$. Odtud vyplývá:

$$u = \frac{x}{1-z} \,, \quad v = \frac{y}{z} \,.$$

Rozeznávejme tři případy:

1/ $0 \neq z \neq 1$. V tomto případě má úloha přesně jedno řešení, neboť $1 - z \neq 0 \neq z$.

2/ $z = 0$. Rozeznávejme dvě možnosti:

2a/ $z = 0 = y$.

2b/ $z = 0 \neq y$.

V případě 2a/ je úloha neurčitá, neboť v je neurčitý výraz. V případě 2b/ je úloha neřešitelná, neboť $v = \frac{y}{z} = \frac{y}{0}$ je bezvýznamný symbol.

3/ $z = 1$. Rozeznávejme opět dvě možnosti:

3a/ $z = 1$, $x = 0$.

3b/ $z = 1$, $x \neq 0$.

V případě 3a/ je úloha neurčitá, neboť $x = 0 = 1 - z$, tedy u je neurčitý výraz. V případě 3b/ je úloha neřešitelná, neboť $x \neq 0$, $1 - z = 0$, takže $u = \frac{x}{0}$ je bezvýznamný symbol.

Proveďme podrobnou diskusi o geometrickém významu zvláštních případů.

V případě 2a/ jest $z = 0 = y$, takže $R = P + x.A$. To znamená, že daný bod R je na prvé mimoběžce. Bodem R lze pak vésti nekonečně mnoho přímek protínajících obě mimoběžky. Průsečík Q' na druhé mimoběžce je libovolný.

V případě 3a/ jest $z = 1$, $x = 0$, takže $R - P = y.B + Q - P$, tedy $R = Q + y.B$. To znamená, že daný bod R je na druhé mimoběžce, takže úloha je opět neurčitá. Bodem R lze vésti nekonečně mnoho příček.

V případě 2b/ jest $z = 0 \neq y$, takže $R - P = x.A + y.B$, t.j. $R - (P + x.A) = y.B$.

Poněvadž v tomto případě $x = u$, jest $P + x.A = P + u.A = P'$, takže $R - P' = y.B$. Poněvadž $y \neq 0$, jest příčka rovnoběžná s druhou mimoběžkou. Když naopak příčka protíná první mimoběžku a s druhou je rovnoběžná, pak $R - P' = y.B$, kde $y \neq 0$ a $R - P = x.A + y.B$, takže $z = 0$.

V případě 3b/ jest $z = 1$, $x \neq 0$, takže $R - P = x.A + y.B + Q - P$, tedy $R = Q + y.B + x.A = Q' + x.A$, neboť v tomto případě jest $y = v$. Z poslední rovnice vyplývá: $R - Q' = x.A$. Poněvadž $x \neq 0$, jest příčka rovnoběžná s prvou mimoběžkou. Je-li naopak příčka rovnoběžná s prvou mimoběžkou, jest $z = 1$, $x \neq 0$.

Případy 2b/ a 3b/ jsou neřešitelné. To je ve sporu s běžnými učebnicemi. Spor ten vyplývá z definice příčky. Příčkou rozumíme přímku jež obě mimoběžky skutečně protne v našem smyslu, t.j. v konečnu. V učebnicích se obvykle připouští možnost, že příčka je s jednou mimoběžkou rovnoběžná. Rozšíříme-li definici příčky v tomto smyslu, pak úloha je řešitelná také v případech 2b/ a 3b/.

§ 25 .

K o n s t r u k c e   a   p o č e t .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

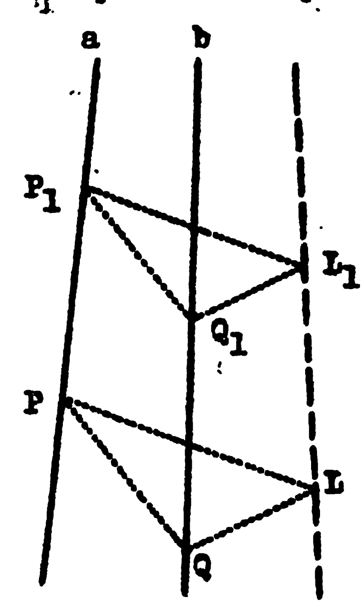
Početní metody, které jsou předmětem našich úvah, mají proti metodě ryze geometrické tu výhodu, že mnohem snáze můžeme verifikovati správnost nějakého výsledku i když neznáme cestu, jíž se k němu došlo. To budeme ilustrovati na tomto příkladě:

Prof. J. Sobotka uvádí ve své knize,, Deskriptivní geometrie promítání parallelního " řadu pomocných konstrukcí pro spojení dvou bodů, z nichž jeden je dán jako nepřístupný průsečík dvou přímek. Uvedeme dvě z těchto konstrukcí a budeme verifikovati naší početní metodou jejich správnost.

1. <u>Konstrukce</u> / Sobotka , l.c.str.548,obr. 398/.

Zvolíme trojúhelník P Q L , jehož dva vrcholy P, Q leží na daných přímkách a , b a třetím vrcholem jest daný bod. Dále protneme vhodně zvolenou rovnoběžku k $P\,Q$ přímkami a, b v bodech P_1 , Q_1 ; prvním z nich vedeme rovnoběžku k $P\,L$, druhým ke $Q\,L$ a stanovíme jejich průsečík L_1.

Přímka $L\,L_1$ prochází nepřístupným průsečíkem S přímek a, b ,



<u>Důkaz.</u> Jelikož bod P_1 leží na přímce a určené bodem P a nenulovým vektorem $S - P$, existuje reálné číslo x té vlastnosti, že

$$P_1 = P + x \cdot (S - P) .$$

Podobně se dokáže existence čísla y té vlastnosti, že

$$Q_1 = Q + y \cdot (S - Q) .$$

Vzhledem k tomu, že $S - Q = (S - P) + (P - Q)$, platí odečtením obou rovnic tento vztah:

$$Q_1 - P_1 = (1 - y) \cdot (Q - P) + (y - x) \cdot (S - P) .$$

Poněvadž vektory na pravé straně této rovnice jsou mezi sebou nezávislé, kdežto vektor $Q_1 - P_1$ je závislý na vektoru $Q - P$, jest $(y - x) \cdot (S - P) = O'$. Podle věty v § 4. /str.8/ jest $y = x$.

Poněvadž přímky $P L$ a $P_1 L_1$ jsou rovnoběžné, existuje takové číslo u, že

$$L_1 = P_1 + u \cdot (L - P) .$$

Podobně se dokáže existence takového čísla v, že

$$L_1 = Q_1 + v \cdot (L - Q) .$$

Vzhledem k rovnosti vektorů $L - Q = (L - P) + (P - Q)$, vyplývá odečtením těchto výrazů:

$$Q_1 - P_1 = (u - v) \cdot (L - P) + v \cdot (Q - P) .$$

Podobně jako nahoře vidíme, že $u = v$, takže

$$Q_1 - P_1 = v \cdot (Q - P) = (1-y) \cdot (Q - P) \neq O' .$$

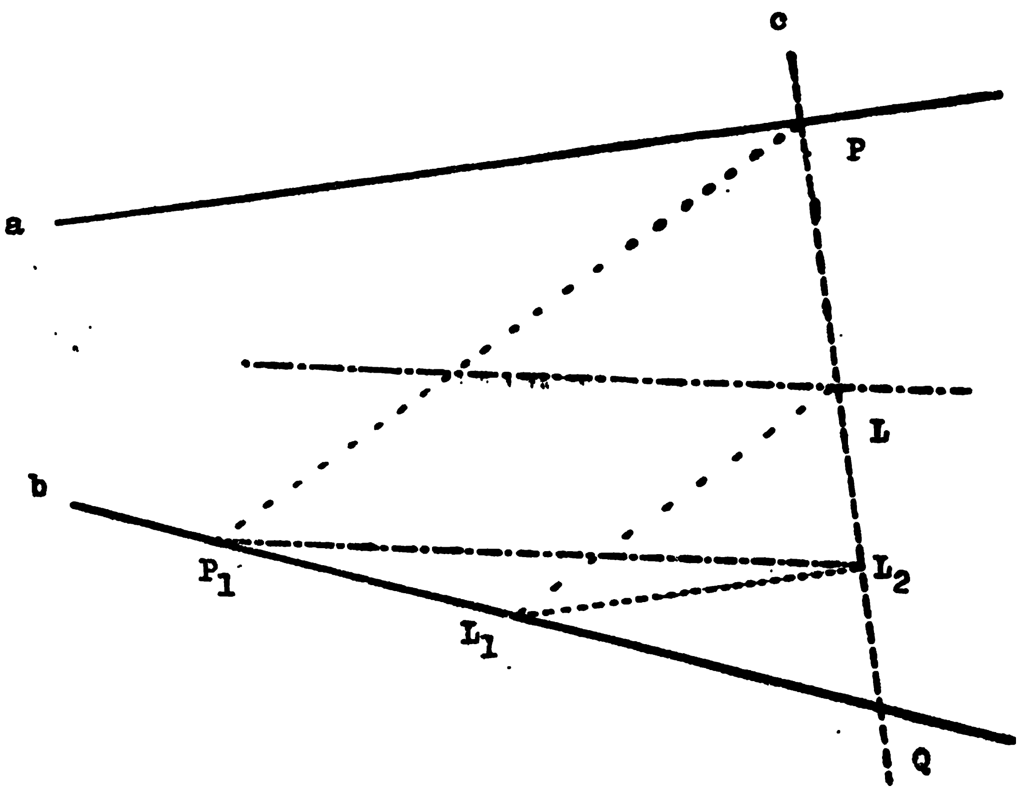
Odtud vyplývá : $u = v = 1 - y = 1 - x$. Proto

$$L_1 = P_1 + (1 - x) \cdot (L - P) = P + x \cdot (S - P) +$$
$$+ (L - P) - x \cdot (L - P) = L + x \cdot (S - L) .$$

Bod L_1 leží tudíž na přímce $L S$, j.b.d.

2. Konstrukce / Sobotka, l.c. str. 550, obr. 402/.

Protneme přímky a, b libovolnou přímkou c, daný bod L obsahující, v bodech P, Q. Libovolná rovnoběžka s a seče b v bodě L_1, c v bodě L_2; vedeme-li bodem P rovnoběžku ku přímce L_1 L, protínající b v bodě P_1, jest hledaná přímka rovnoběžná k přímce P_1 L_2.



Důkaz: Jelikož bod L_1 leží na přímce S Q a bod L_2 na přímce P Q, platí vztahy:

$$L_1 = Q + x . (S - Q)$$

$$L_2 = Q + y . (P - Q),$$

kde x, y jsou vhodná čísla. Vzhledem k tomu, že P − Q = (P − S) + (S − Q), [illegible] odečtení

$$L_2 - L_1 = y . (P - S) + (y - x) . (S - Q)$$

Poněvadž vektory na pravé straně této rovnice jsou mezi sebou nezávislé a protože vektor $L_2 - L_1$ je závislý na vektoru $P - S$, jest $(x - y).(S - Q) = 0'$, takže $\underline{x = y}$.

Jelikož bod P_1 leží na přímce $Q\ L_1$ i na přímce $P\ P_1$ rovnoběžně s přímkou $L\ L_1$, jest

$$P_1 = Q + u.(L_1 - Q)$$

$$P_1 = P + v.(L_1 - L),$$

kde u, v jsou vhodná čísla. Poněvadž $L_1 - L = (L_1 - Q) + (Q - L)$, vyplývá odečtením

$$Q - P = v.(Q - L) + (v - u).(L_1 - Q);$$

stejným způsobem jako dříve dá se z této rovnice souditi, že

$u = v$. Proto jest $Q - P = u.(Q - L)$.

Dosaďme nyní za P_1 a L_2 příslušné výrazy.

$$P_1 - L_2 = P + u.(L_1 - L) - Q - x.(P - Q) =$$

$$= (1 - x).(P - Q) + u.(L_1 - L) =$$

$$= u.\Big(-(1 - x).(Q - L) + (L_1 - L)\Big).$$

Poněvadž $L_1 - L = Q - L + x.(S - Q)$,

jest $P_1 - L_2 = u.\Big(x.(Q - L) + x.(S - Q)\Big) =$

$$= ux.(S - L).$$

Tím je dokázáno, že přímka $P_1\ L_2$ je rovnoběžná s přímkou $S\ L$.

§ 26 .

P r v n í   s k u p i n a   c v i č e n í .

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

/1/ Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $p_1 = PQ$, $p_2 = RS$, $p_3 = TZ$. Body P, Q, R, S, T, Z jsou
$P\,(11,\ 1,\ 7)$, $Q\,(-10,\ 15,\ 0)$, $R\,(-3,\ 67,\ 64)$,
$S\,(10,\ -89,\ -92)$, $T\,(13,\ -20,\ -28)$,
$Z\,(-5,\ 7,\ 8)$.

(Řešení : p_1 a p_2 se protnou v bodě $(2,\ 7,\ 4)$;
p a p se protnou v bodě (3, -5, [illegible]) ;
p a p_3 jsou mimoběžné.)

/2/ Určete průsečnici rovin $P_1\,P_2\,P_3$ a $Q_1\,Q_2\,Q_3$.
Souřadnice daných bodů jsou
$P_1\,(-19,\ 40,\ -15)$, $P_2\,(-15,\ -37,\ -30)$,
$P_3\,(11,\ 21,\ 16)$, $Q_1\,(-7,\ -2,\ 26)$,
$Q_2\,(8,\ 22,\ 32)$, $Q_3\,(13,\ 22,\ 14)$

(Řešení je spojnice bodů $(3,4,5)$, $(-2,\ -8,\ -7)$.)

/3/ Bodem R veďte přímku protínající přímky

$p_1 = P_1 Q_1$ a $p_2 = P_2 Q_2$.

$P_1 \left(17, -3, -2\right)$, $Q_1 \left(-18, 11, 5\right)$

$P_2 \left(-4, 11, -15\right)$, $Q_2 \left(23, -25, 3\right)$

$R \left(-10, 19, 17\right)$.

(Řešení: Žádaná přímka protne p_1 v bodě $\left(2, 3, 1\right)$ a p_2 v bodě $\left(8, -5, -7\right)$.)

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

/4/ Spojení bodu P s nepřístupným průsečíkem přímek p, q / v rovině/ se dá provésti takto: Bodem P veďme dvě přímky h, k ; spojme průsečík přímek h, p a průsečík přímek k, q přímkou b ; veďme dvě přímky b_1 , b_2 rovnoběžně s přímkou b ; spojme průsečík přímek b_1 , p a průsečík přímek b_2 , h přímkou c_1 ; spojme průsečík přímek b_1 , q a průsečík přímek b_2, k přímkou c_2 . Žádaná spojnice prochází průsečíkem přímek c_1 , c_2 .

Odůvodněte tuto konstrukci počtem.

§ 27 .

Elementární změny base modulu.

Nechť je dán modul dimense $n > 0$. Každá base tohoto modulu obsahuje n mezi sebou nezávislých vektorů a každý vektor modulu je na těchto n vektorech závislý. Basi modulu budeme značiti písmenem W . Pořádek vektorů v basi pokládáme za podstatný.

Budeme studovati přechody od jedné base ke druhé basi téhož modulu. Důležité jsou elementární přechody prvého a druhého druhu.

Přechod od base $W_1 = / A_1, \dots, A_r, \dots, A_n /$ k basi $W_2 = / A_1, \dots A_r + C, \dots, A_n /$, kde C je vektor závislý na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, A_{r+1}, \dots, A_n$, sluje <u>elementárním přechodem prvého druhu.</u>

Systém $W_2 = /A_1, \dots, A_r + C, \dots, A_n /$ je vskutku basí modulu, neboť vektor $A_r + C$ není na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, A_{r+1}, \dots, A_n$ závislý. V opačném případě by byly na těchto vektorech závislé oba vektory $A_r + C$ a $-C$, tedy podle poznámky na str. 10, také jejich součet $A_r + C + (-C) = 0$, což není možné. Vektory v systému W_2 jsou mezi sebou nezávislé a poněvadž jejich počet je n , tvoří basi modulu.

Přechod od base $W_1 = / A_1, \dots, A_r, \dots A_n /$ k basi $W_3 = / A_1, \dots, c.A_r, \dots, A_n /$, kde $c \neq 0$, sluje <u>elementárním přechodem druhého druhu.</u>

Systém W_3 je basí modulu, neboť vektor $c.A_r \neq 0$ není na ostatních vektorech $A_1, A_2, \dots A_{r-1}, A_{r+1}, \dots, A_n$ závislý.

<u>Věta</u> /pomocná/ Nechť jsou dány dvě base

$\ldots, A, \ldots, B, \ldots$

$\ldots, B, \ldots, A, \ldots,$

z nichž jedna povstala z druhé záměnou vektorů A a B, kdežto ostatní vektory zůstaly na svém místě. Pak přechod od prvé base ke druhé dá se provésti čtyřmi elementárními přechody.

Tyto elementární přechody jsou vyznačeny takto

$\ldots, A, \ldots\ldots\ldots, B, \ldots$

$\ldots, A + B, \ldots\ldots, B, \ldots$ el. přechod prvého druhu

$\ldots, A + B, \ldots\ldots, B - (A + B), \ldots$ el. přechod prvého druhu

čili $\ldots, A + B, \ldots\ldots, -A, \ldots$

$\ldots, A + B - A, \ldots, -A, \ldots$ el. přechod prvého druhu

čili $\ldots, B, \ldots\ldots\ldots, -A, \ldots$

$\ldots, B, \ldots\ldots\ldots, A, \ldots$ el. přechod druhého druhu $(c = -1)$.

<u>Věta.</u> Každý přechod od jedné base ke druhé basi téhož modulu dá se rozložiti na konečný počet elementárních přechodů.

<u>Důkaz indukcí.</u> Je-li dimense modulu $n = 1$, pak každá změna base je elementárním přechodem druhého druhu. Tvoří-li totiž vektor A basi a vektor B změněnou basi modulu, pak oba vektory jsou nenulové, takže existuje číslo $c \neq 0$ té vlastnosti, že $B = c.A$.

Předpokládejme nyní, že věta je správná pro každý modul dimense $n - 1$ a dokažme, že jest správná také pro každý modul dimense $n\ (n > 1)$. Nechť jsou dány dvě base modulu M dimense n

$W_1 = /A_1, \ldots, A_n/, \quad W_2 = /B_1, \ldots, B_r, \ldots$
$\ldots B_n/.$

Vektory $A_2, \ldots, A_n$ vytvoří podmodul M^* modulu M a jsou jeho basí. Dimense tohoto podmodulu je $n - 1$, takže v basi W_2 existuje vektor B_r, který nepatří do M^*. Není-li $r = 1$, můžeme podle pomocné věty přejíti čtyřmi elementárními přechody k basi $W_2' = /B_r, \ldots, B_1, \ldots, B_n/$, kterou označíme takto: $W_2' = /B_r, B_2', \ldots, B_n'/.$

Jelikož $B_r \in M$, existují reálná čísla $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ té vlastnosti, že $B_r = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots + x_n.A_n$. Jest $x_1 \neq o$, neboť jinak $B_r = x_2.A_2 + \ldots + x_n.A_n$, t.j. $B_r \in M^x$ což není možné. Basi W_1 můžeme tedy změniti elementárním přechodem druhého druhu v basi $W_1' = / x_1.A_1, A_2, \ldots, A_n /$ a tuto elementárním přechodem prvého druhu v basi $W''_1 = / x_1.A_1 + (x_2.A_2 + \ldots + x_n.A_n), A_2, \ldots, A_n / = / B_r, A_2, \ldots A_n /$.

Poněvadž W''_1 je base modulu a protože $B_i' \in M$, $(i = 2, 3, \ldots, n)$, existují reálná čísla y_i a z_{ij} tak, že

$$B_i' = y_i.B_r + z_{i2}.A_2 + \ldots + z_{in}.A_n$$

pro $i, j = 2, 3, \ldots n$. Od base W_2' přejdeme k basi W''_2 těmito elementárními operacemi prvého druhu:

$$W_2' = / B_r, B_2', \ldots, B_n' /$$

$$/ B_r, B_2' - y_2.B_r, B_3', \ldots, B_n' /$$

$$/ B_r, B_2' - y_2.B_r, B_3' - y_3.B_r, \ldots, B_n' /$$

$$W''_2 = / B_r, B_2' - y_2.B_r, B_3' - y_3.B_r, \ldots, B_n' - y_n.B_r /.$$

Jelikož systém W''_2 je base modulu M, jsou vektory v systému W''_2 a tedy podle věty na str. 11. také $n - 1$ vektorů $B_2' - y_2.B_r, B_3' - y_3.B_r, \ldots, B_n' - y_n.B_r$ mezi sebou nezávislé.

Jelikož $B_i' - y_i.B_r = z_{i2}.A_2 + \ldots + z_{in}.A_n$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, náležejí všecky tyto vektory do modulu M^x a tvoří jeho basi. Poněvadž modul M^x má dimensi $n - 1$, platí v něm podle indukčního předpokladu naše věta, takže přechod od base $A_2, \ldots, A_n$ k basi $B_2' - y_2.B_r, B_3' - y_3.B_r, \ldots, B_n' - y_n.B_r$ dá se provésti konečným počtem elementárních přechodů. Lze tedy také od base $W''_1 = / B_r, A_2, \ldots, A_n /$ k basi $W''_2 = / B_r, B_2' - y_2.B_r, B_3' - y_3.B_r, \ldots B_n' - y_n.B_r /$ přejíti těmito elementárními přechody.

Použijeme-li věty: Je-li přechod od jedné base ke druhé elementární, pak je také přechod od druhé base k první elementární, máme celkem dokázáno, že od předcházející base k následující basi v tomto pořadí:

$$W_1, W_1', W_2', W''_2, W_1', W_2$$

a tedy také od base W_1 k basi W_2 - lze dojíti konečným počtem elementárních přechodů prvého a druhého druhu, j.b.d.

§ 28.

Determinant přechodu.

Nechť jsou dány dvé base $W_1 = /A_1,\dots,A_n/$ a $W_2 = /B_1,\dots,B_n/$ modulu M. Každý vektor B_i je na vektorech base W_1 závislý; existují tudíž čísla $x_{i1}, x_{i2},\dots$ $\dots, x_{in}$ té vlastnosti, že $B_i = x_{i1}.A_1 + x_{i2}.A_2 + \dots + x_{in}.A_n \ (i = 1,2,\dots,n)$. Těchto n^2 čísel můžeme uspořádati do <u>čtvercové matice</u>

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{12}, & \dots, & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22}, & \dots, & x_{2n} \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \dots, & x_{nn} \end{matrix}$$

a přiřaditi jí číslo zvané <u>determinantem matice</u> a označovati takto:

$$\begin{vmatrix} x_{11}, x_{12}, \dots\dots, & x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \dots\dots, & x_{2n} \\ x_{n1}, x_{n2}, \dots\dots, & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Tento determinant nazveme <u>determinantem přechodu base</u> W_1 k basi W_2 a označíme jej $D\,(W_1, W_2)$.

Každému přechodu jedné base ke druhé můžeme naznačeným způsobem přiřaditi determinant. V i - tém řádku tohoto determinantu jsou souřadnice i-tého vektoru druhé base vzhledem k prvé basi / v. § 8, str. 15 /. Ku př. **determinant elementárního přechodu prvého druhu** je

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & \dots\dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & & \\ z_1, & z_2, & \dots, 1, \dots, & z_n \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \dots\dots & 1 \end{vmatrix}$$

kde $C = z_1 . A_1 + \dots + z_{r-1} . A_{r-1} + z_{r+1} . A_{r+1} + \dots + z_n . A_n$;
tento determinant je roven 1 .

Determinant elementárního přechodu druhého druhu je

$$\begin{vmatrix} 1, & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0, & 1 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, \dots, & c, \dots, & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \dots\dots & 1 \end{vmatrix} = c$$

Determinant identického přechodu je

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & \dots\dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots\dots & 0 \\ 0, & 0, & \dots\dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nechť je dána vedle basí W_1 a W_2 ještě třetí base $W_3 = / C_1, \dots, C_n /$ modulu M.
Existuje pak matice

$$\begin{matrix} y_{11}, & y_{12}, & \dots\dots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \dots\dots, & y_{2n} \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \dots\dots, & y_{nn} \end{matrix}$$

čísel y_{ij} té vlastnosti, že $C_r = y_{r1} . B_1 + y_{r2} . B_2 + \dots + y_{rn} . B_n$, $(r = 1, 2, \dots, n)$.

Determinant

$$D(W_2, W_3) = \begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}, \dots\dots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, \dots\dots, & y_{2n} \\ y_{n1}, & y_{n2}, \dots\dots, & y_{nn} \end{vmatrix}$$

je determinentem přechodu base W_2 k basi W_3. Poněvadž

$$C_r = \sum_i y_{ri} \cdot B_i \quad \text{a} \quad B_i = \sum_s x_{is} \cdot A_s \text{ , jest}$$

$$C_r = \sum_i y_{ri} \cdot \left(\sum_i x_{is} \cdot A_s \right) = \sum_{i,s} y_{ri} \cdot x_{is} \cdot A_s = \sum_s z_{rs} \cdot A_s ,$$

kde $z_{rs} = \sum_i y_{ri} \cdot x_{is}$ ./Sumaci jest třeba vždy provésti od 1 do n /.

Proto jest

$$D(W_1, W_3) = \begin{vmatrix} z_{11}, z_{12}, \dots, & z_{1n} \\ z_{21}, z_{22}, \dots, & z_{2n} \\ z_{n1}, z_{n2}, \dots, & z_{nn} \end{vmatrix}$$

V r-tém řádku a s-tém sloupci je $z_{rs} = \sum_i y_{ri} \cdot x_{is}$, což je součet součinů stejnolehlých členů r-tého řádku determinantu $D(W_2, W_3)$ a s-tého sloupce determinantu $D(W_1, W_2)$. Podle zánmé věty o násobení determinantů je tedy

$$D(W_1, W_3) = D(W_1, W_2) \cdot D(W_2, W_3) ,$$

to jest: determinant přechodu base W_1 k basi W_3 je roven součinu determinantu přechodu base W_1 k basi W_2 a determinantu přechodu base W_2 k basi W_3.

Podle této věty je determinant přechodu base ..., A, ..., B, ... k basi ...., B, ..., A, ... roven -1, neboť tento determinant je roven součinu tří determinantů elementárního přechodu prvého druhu a jednoho determinantu elementárního přechodu druhého druhu, tedy $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot -1 = -1$. / v.pomocná věta v § 27 na str.53/.

Provedeme-li v určité basi permutaci vektorů, pak determinant tohoto přechodu je buď $+1$ nebo -1 podle toho zda tato permutace je sudá či lichá / t.j. podle toho zda se dá rozložiti na sudý nebo na lichý počet transposic/.

Věta. Jest $D(W_1, W_2) \neq 0$.

Důkaz. Poněvadž $D(W_1, W_1) = 1$, jest

$$1 = D(W_1, W_1) = D(W_1, W_2) \cdot D(W_2, W_1),$$

t.j. $D(W_1, W_2) \neq 0$.

§ 29.

Rozdělení basí ve dvě třídy.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Nechť je dán modul M dimense $n > 0$. Zvolme určitou jeho basi W_1. Nechť W probíhá všecky base modulu M. Podle poslední věty předešlého § jest $D(W_1, W) \neq 0$. Determinant přechodu $D(W_1, W)$ je buďto kladné nebo záporné číslo. Tato okolnost nás vede k rozdělení basí W do dvou tříd a to podle tohoto pravidla: Do prvé třídy zařadíme všecky ty base W, pro něž $D(W_1, W) > 0$, do druhé třídy všecky ostatní base t.j. ty base W, pro něž $D(W_1, W) < 0$.

Base W_1 je v prvé třídě, neboť $D(W_1, W_1) = 1$. Snadno se pozná, že toto rozdělení ve dvě třídy je jednoznačné a že není zavislé na volbě base W_1. Jsou-li totiž W a W' dvě base modulu M, pak tyto jsou v téže nebo v různých třídách podle toho zda $D(W, W')$ je kladné nebo záporné číslo. Jest totiž $D(W_1, W') = D(W_1, W) \cdot D(W, W')$, tedy

$$D(W, W') = \frac{D(W_1, W')}{D(W_1, W)}$$

Orientovati modul M znamená jednu třídu basí označiti jako positivní a druhou negativní. Base jež je v positivní třídě, sluje positivní a base, jež je v negativní třídě sluje negativní.

Orientace modulu dimense $n > 0$ je vždy možná.

Každý modul dimense $n > o$ lze orientovati přesně dvěma způsoby. Obě orientace jsou <u>opačné</u> nebo-li <u>navzájem inversní</u>.

<u>Otientací lineárního prostoru</u> rozumíme orientaci příslušného modulu.

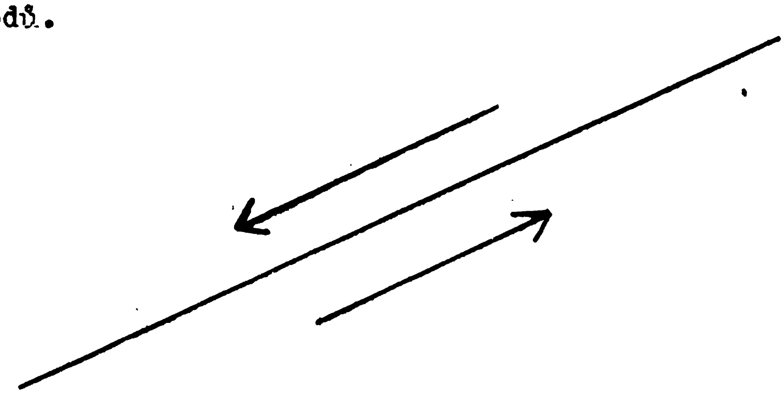
§ 30.

Orientace přímky ; úsečka ; polopřímka.

<u>Orientovati přímku</u> / lineární prostor dimense 1 / znamená: Base příslušného modulu dimense 1 , tedy všecky nenulové vektory rozděliti na positivní a negativní podle výše uvedeného pravidla.

Jsou-li A , B dva nenulové vektory orientované přímky, pak existuje číslo $c \neq o$ té vlastnosti, že $B = c.A$. Je-li $c > o$, A positivní, pak také B je positivní, je-li A negativní, pak také B je negativní; je-li $c < o$, A positivní, pak je B negativní, je-li A negativní, pak je B positivní.

Přímku lze orientovati přesně dvěma způsoby. Orientace přímky je v úzké souvislosti s názorným uspořádáním jejich bodů.



Abstraktně dojdeme od orientace přímky k jejímu uspořádání x) takto: Jsou-li Z_1, Z_2 dva body přímky, pak výrok „Z_1 před Z_2" znamená, že vektor $Z_2 - Z_1$ je positivní.

Dokažme, že je tu vskutku definováno uspořádání.

Jsou-li Z_1, Z_2 dva body přímky, pak vektor $Z_2 - Z_1$ je buďto positivní nebo nikoli. Je tedy vždy rozhodnuto, zda je bod Z_1 před Z_2. Při tom jsou splněny tři axiomy uspořádání:

1/ Je-li Z_1 před Z_2, pak není Z_2 před Z_1, neboť vektor $Z_2 - Z_1$ je positivní, takže vektor $Z_1 - Z_2 = -1 \cdot (Z_2 - Z_1)$ je negativní.

2/ Není-li ani Z_1 před Z_2 ani Z_2 před Z_1, není vektor $Z_2 - Z_1$ ani positivní ani negativní. Je tedy $Z_2 - Z_1 = O'$, takže $Z_2 = Z_1$.

3/ Je-li Z_1 před Z_2 a Z_2 před Z_3, pak vektory $Z_2 - Z_1$ a $Z_3 - Z_2$ jsou positivní. Jelikož součet dvou positivních vektorů je positivní vektor (je-li $A = c.B$, kde $c > 0$, pak $A + B = (c + 1).B$, kde $c + 1 > c$), je také $(Z_2 - Z_1) + (Z_3 - Z_2) = Z_3 - Z_1$ positivní vektor, takže je Z_1 před Z_3.

Uspořádání bodů na přímce dá se aritmeticky znázorniti pomocí souřadnic, jak ukazuje tato úvaha: Nechť je dán bod P na přímce a vektor $A \neq O'$. Každý bod Z té přímky dá se pak přesně jedním způsobem vyjádřiti ve tvaru $Z = P + z.A$, kde z je souřadnice bodu Z / v.str.23./. Nechť jsou dány dva body na přímce $Z_1 = P + z_1.A$, $Z_2 = P + z_2.A$. Pak jest $Z_2 - Z_1 = (z_2 - z_1).A$. Orientujeme-li přímku tak, že vektor A prohlásíme za positivní, pak je Z_1 před Z_2, když a jen když jest číslo $z_2 - z_1$ kladné, t.j. když a jen když $z_1 < z_2$. Při opačné orientaci je Z_1 před Z_2, když a jen když $z_1 > z_2$.

---

x/ Definice a základní vlastnosti uspořádání najde čtenář v knize "Bodové množiny" od prof. Čecha v § 4 na str. 15.

Tím je převedeno uspořádání bodů přímky na uspořádání souřadnic bodů, tedy na přirozené uspořádání reálných čísel.

Výrok ,, Z_2 je za Z_1 " znamená, že je Z_1 před Z_2; výrok ,, Z_3 <u>je mezi</u> Z_1 a Z_2 " znamená, že je současně buďto Z_1 před Z_3 a Z_3 před Z_2 nebo současně Z_1 za Z_3 a Z_3 za Z_2.

<u>Věta.</u> <u>Přímka nemá prvního ani posledního prvku.</u>

<u>Důkaz.</u> Nechť P je libovolný bod přímky. Je-li A positivní vektor, pak bod P + A je za bodem P , neboť $(P + A) - P = A$, a bod P - A je před bodem P , neboť $P - (P-A) = A$.

<u>Věta. Uspořádání bodů na přímce je husté.</u>

<u>Důkaz.</u> Nechť jsou dány dva různé body P, Q na přímce. Snadno se pozná, že bod $P + \frac{1}{2} . (Q - P)$ je mezi P a Q .

Nechť P a Q jsou dva různé body přímky. Množinu těch bodů přímky, které jsou mezi P a Q nazveme <u>úsečkou s krajními body</u> P, Q a určitěji: <u>otevřenou úsečkou</u> — označíme ji u / P , Q /. Množinu bodů, jež vznikne připočteme-li k otevřené úsečce její krajní body, nazveme <u>uzavřenou úsečkou</u> .

Podle poslední věty obsahuje úsečka u /P, Q / nekonečně mnoho bodů. <u>Krajní body</u> P a Q jsou <u>otevřenou i uzavřenou úsečkou jednoznačně určeny.</u> Je-li P před Q , pak je P poslední ze všech bodů, jež jsou před každým bodem otevřené úsečky u /P, Q / , resp. první ze všech bodů uzavřené úsečky; bod Q je první ze všech bodů, jež jsou za každým bodem otevřené úsečky, resp. poslední ze všech bodů uzavřené úsečky.

Nechť jsou P a Q různé body; přímka určená těmito body je množina bodů tvaru x.P + y.Q , kde $x + y = 1$ /v. § 22, str. 35/. Orientujme přímku tím, že prohlásíme vektor Q - P za positivní. Jelikož $x = 1 - y$, jest $x.P + y.Q = P + y.(Q - P)$, takže bod $x_1.P + y_1.Q$ je před bodem $x_2.P + y_2.Q$, když a jen když $y_1 < y_2$. Odtud vyplývá, že bod x.A + y.B je mezi body $P = 1.P + 0.Q$ a $Q = 0.P + 1.Q$, když a jen když $0 < y < 1$, tedy $y > 0$ a $x = 1 - y > 0$. Platí tudíž

Věta. Jsou-li P a Q různé body přímky, pak lze každý bod otevřené / uzavřené/ úsečky u / P, Q / psáti přesně jedním způsobem ve tvaru

$$x.P + y.Q \text{ , kde } x + y = 1 \text{ , } x > 0 \text{ , } y > 0$$
$$/ \geqq \quad \geqq /.$$

Bod na přímce určuje dvě polopřímky. Při určité orientaci přímky je jednou polopřímkou množina všech bodů, jež jsou před bodem P, druhou polopřímkou je množina všech bodů, jež jsou za bodem P. Změníme-li orientaci přímky, přejde prvá polopřímka ve druhou a druhá v prvou.

Takto definovanou polopřímku nazveme určitěji otevřenou polopřímkou. Přidáme-li k otevřené polopřímce určující bod P, mluvíme o uzavřené polopřímce.

Bod P je otevřenou i uzavřenou polopřímkou jednoznačně určen. P je první ze všech bodů, jež jsou za každým bodem prvé otevřené polopřímky, resp. posledním bodem prvé uzavřené polopřímky; P je také poslední ze všech bodů, jež jsou před každým bodem druhé otevřené polopřímky, resp. prvním bodem druhé uzavřené polopřímky.

Analytické vyjádření otevřené polopřímky je toto:

$$Z = P + z.A \text{ , kde } z > 0 \text{ , resp. } z < 0 \text{ .}$$

Analytické vyjádření uzavřené polopřímky je totéž, avšak $z \geqq 0$, resp. $z \leqq 0$.

Pojem polopřímky dá se převésti na pojem úsečky touto větou.

Věta. Dva různé body Z_1, Z_2 přímky náleží do různých polopřímek určených bodem P $(Z_1 \neq P \neq Z_2)$, když a jen když úsečka u /Z_1, Z_2/ obsahuje bod P.

Důkaz. Nechť vektor A tvoří basi přímky. Pak existují čísla z_1, z_2 té vlastnosti, že $Z_1 = P + z_1.A$, $Z_2 = P + z_2.A$.

Nechť především bod P náleží do úsečky $u\ /Z_1, Z_2/$. Podle předešlé věty existují čísla x, y té vlastnosti, že

$$x.Z_1 + y.Z_2 = P \text{ , kde } x + y = 1,$$
$$x > 0 \text{ , } y > 0 \text{ .}$$

Platí tedy vztah

$$P = x.Z_1 + (1 - x).Z_2 = x.(P + z_1.A) + (1 - x).(P + z_2.A) = P + (xz_1 + (1 - x)\ z_2).\ A \text{ .}$$

Jelikož $A \neq 0$, vyplývá odtud, že $xz_1 + (1 - x)\ z_2 = 0$, t.j. $x = \frac{z_2}{z_2 - z_1}$, $1 - x = \frac{z_1}{z_1 - z_2}$; jelikož $x > 0$, $y > 0$, jest jedno z čísel z_1, z_2 kladné, druhé záporné, takže ať jakkoliv orientujeme přímku, jeden z bodů Z_1, Z_2 je <u>před</u>, druhý pak <u>za</u> bodem P. Body Z_1, Z_2 náleží tudíž do různých polopřímek.

Nechť nyní body Z_1, Z_2 náležejí do různých polopřímek určených bodem P. Pak $Z_1 = P + z_1.A$, $Z_2 = P + z_2.A$, kde jedno z čísel z_1, z_2 je kladné, druhé záporné. Proto

$$\frac{z_2}{z_2 - z_1} > 0 \text{ , } \frac{z_1}{z_1 - z_2} > 0 \text{ , } \frac{z_2}{z_2 - z_1} + \frac{z_1}{z_1 - z_2} = 1 \quad \text{a}$$

$$\frac{z_2}{z_2 - z_1} . Z_1 + \frac{z_1}{z_1 - z_2} . Z_2 = \frac{z_2}{z_2 - z_1} . (P + z_1.A) + \frac{z_1}{z_1 - z_2} . (P + z_2.A) = P \text{ .}$$

Bod P náleží tudíž do úsečky $u\ / Z_1 , Z_2 /$.

Z této věty vyplývá kriterium, kdy dva body náleží do téže polopřímky: <u>Dva body</u> Z_1 , Z_2 <u>[illegible]</u> <u>přímky určené bodem</u> P , <u>[illegible]</u> $u\ / Z_1 , Z_2 /$ <u>neobsahuje bod</u> P .

§ 31.

O r i e n t a c e r o v i n y ; p o l o r o v i n a .

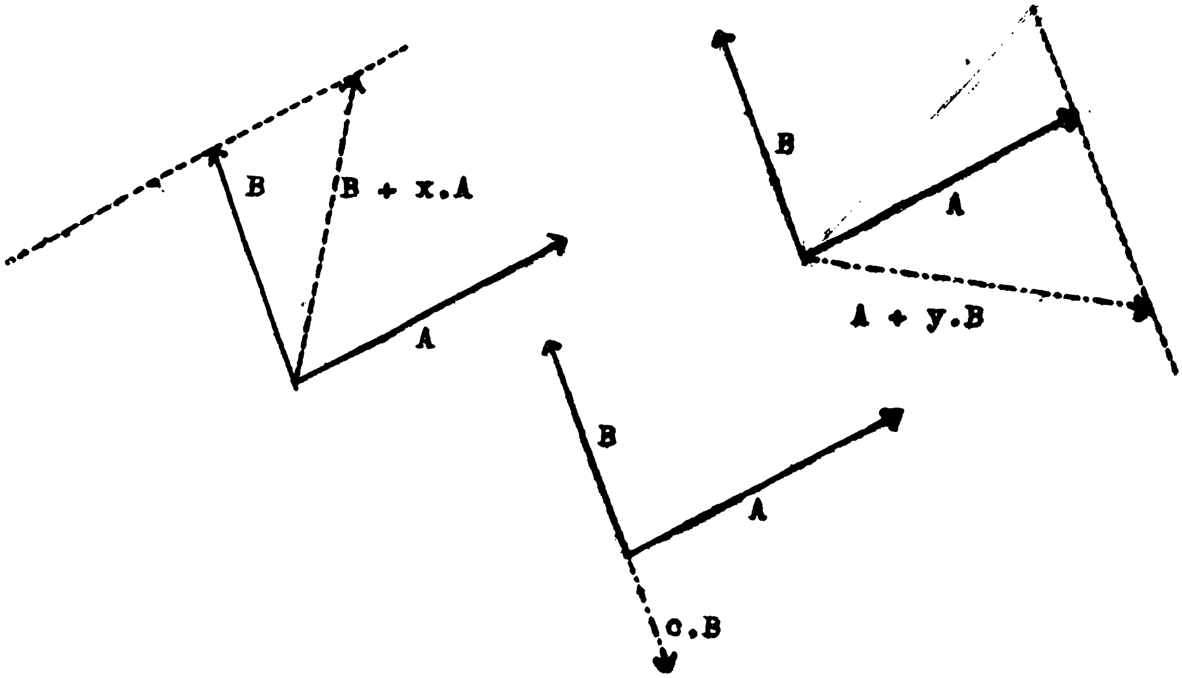
Orientovati rovinu zanmená orientovati její směr, tedy rozděliti všecky páry mezi sebou nezávislých vektorů do dvou tříd podle pravidla uvedeného na počátku § 29 a jednu třídu nazvati positivní, druhou negativní.

Názorný význam orientace roviny souvisí s pojmem " levý" a "pravý" . Názornou rovinu orientujeme tak,že její dva mezi sebou nezávislé vektory A, B prohlásíme za positivní basi. Na tuto názornou rovinu se můžeme dívati se dvou stran. Postavme se na určitou stranu a to tak, aby vektor B byl nalevo od vektoru A , čili - což je totéž - vektor A napravo od vektoru B .

Všecky base roviny jsou názorně rozděleny do dvou tříd, neboť je-li C, D libovolná base roviny, pak je buďto D nalevo od C a base je positivní, nebo je D napravo od C a base je negativní. Jest se třeba přesvědčiti, že determinant přechodu od dané base A, B ke druhé basi A', B' je kladný či záporný podle toho, zda vektor B' je nalevo či napravo od vektoru A'.

O tom se snadno přesvědčíme, používajíce věty v § 27, str. 54. Vskutku přejdeme-li elementárním přechodem prvého druhu od dané base A, B ke druhé basi - tedy k basi tvaru A, $B + x.A$ nebo $A + y.B$, B - zůstane v této druhé basi druhý vektor nalevo od prvého /v.obrázek/.

Přejdeme-li elementárním přechodem druhého druhu k jiné basi - tedy k basi tvaru A, $c.B$ nebo $c.A$, B kde $c \neq 0$ - zůstane druhý vektor nalevo od prvého, když $c > 0$ a přejde napravo, když $c < 0$ /v.obrázek/.



Orientaci roviny je zvykem označovat

čímž je naznačeno otáčení roviny.

Přímka v rovině určuje dvě poloroviny. Nechť je přímka v rovině určena bodem P a nenulovým vektorem A . Nechť bod Z roviny není na této přímce. Vektory A, Z - P jsou mezi sebou nezávislé a tvoří basi roviny. Jednou polorovinou je množina všech bodů Z té vlastnosti, že base A, Z - P je positivní při určité orientaci přímky a roviny, druhá polorovina se skládá ze všech bodů Z té vlastnosti, že base A, Z - P je negativní při téže orientaci.

Takto definovanou polorovinu nazveme určitěji otevřenou polorovinou. Přidáme-li k této polorovině určující přímku, mluvíme o <u>uzavřené polorovině.</u>

Změnou orientace přímky nebo změnou orientace roviny vymění se obě poloroviny; současná změna obou orientací nemá na poloroviny vlivu. Také volba bodu P na přímce nemá vlivu na obě poloroviny. Vskutku, zvolíme-li místo bodu P jiný

bod Q na přímce, pak existuje číslo x té vlastnosti, že $Q = P + x.A$, takže $Z - Q = (Z - P) - x.A$.
Přechod od base A, $Z - P$ k basi A, $Z - Q$ je tudíž elementárním přechodem prvého druhu.

Determinant tohoto přechodu je

$$\begin{vmatrix} 1, & 0 \\ -x, & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Proto base A, $Z - Q$ je positivní či negativní podle toho, zda původní base A, $Z - P$ je positivní či negativní.

Určující přímka je otevřenou i uzavřenou polorovinou jednoznačně určena / v. druhá skupina cvičení/.

Pojem poloroviny dá se v rovině převésti na pojem úsečky touto větou:

Věta. Dva různé body Z_1, Z_2 roviny náleží do různých polorovin určených přímkou p / body Z_1, Z_2 nejsou na přímce p /, když a jen když úsečka u / Z_1, Z_2 / má společný bod s přímkou p.

Důkaz. Na přímce p zvolme bod P a nenulový vektor A. Ve směru roviny existuje pak vektor B, jenž je na vektoru A nezávislý, takže vektory A, B tvoří basi roviny. Existují tudíž reálná čísla x_1, y_1, x_2, y_2 té vlastnosti, že

$$Z_1 = P + x_1.A + y_1.B, \quad Z_2 = P + x_2.A + y_2.B.$$

Jest $y_1 \neq 0 \neq y_2$, neboť body Z_1, Z_2 neleží na přímce p.

Orientujme přímku p a rovinu tak, aby base A, B byla positivní. Pak base A, $Z_1 - P$ je positivní, když a jen když $y_1 > 0$ a base A, $Z_2 - P$ je positivní, když a jen když $y_2 > 0$.

Vskutku, determinant přechodu base A, B k basi $A, Z_1 - P$, resp. k basi $A, Z_2 - P$ je [x]

$$\begin{vmatrix} 1, & 0 \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix} = y_1 \qquad \text{resp.} \qquad \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} = y_2$$

Nechť úsečka $u\ /Z_1, Z_2/$ obsahuje bod Q přímky p. Pak existuje reálné číslo x té vlastnosti, že

$$Q = x.Z_1 + (1 - x).\,Z_2\,,\ \text{kde}\ x > 0\,,\ 1 - x > 0\,.$$

Dosazením vyplývá

$$Q = P + (xx_1 + (1-x)\,x_2)\,.A + (xy_1 + (1-x)\,y_2)\,.B\,.$$

Poněvadž bod Q leží na přímce, musí býti $xy_1 + (1-x)\,y_2 = 0$, t.j. $x = \frac{y_2}{y_2 - y_1}$, $1 - x = \frac{y_1}{y_1 - y_2}$; jelikož $x > 0$, $1 - x > 0$, snadno se přesvědčíme, že jedno z čísel y_1, y_2 je kladné, druhé záporné. Podle předcházejícího odstavce je tedy jedna z basí $A, Z_1 - P$ a $A, Z_2 - P$ positivní, druhá negativní. Jeden z bodů Z_1, Z_2 je proto v prvé, druhý ve druhé polorovině / podle definice poloroviny/.

Nechť je nyní jeden z bodů Z_1, Z_2 v jedné, druhý ve druhé polorovině. Pak jest jedno z čísel y_1, y_2 kladné, druhé záporné. Snadno se přesvědčíme, že pak bod

$$\frac{y_2}{y_2 - y_1}\,.\,Z_1 + \frac{y_1}{y_1 - y_2}\,.\,Z_2$$

je v úsečce $u\ /Z_1, Z_2/$ i na přímce p.

Z této věty vyplývá kriterium, kdy dva body Z_1, Z_2 náleží do téže poloroviny; tehdy a jen tehdy, když úsečka uzavřená $u\ /Z_1, Z_2/$ nemá s určující přímkou žádného společného bodu.

---

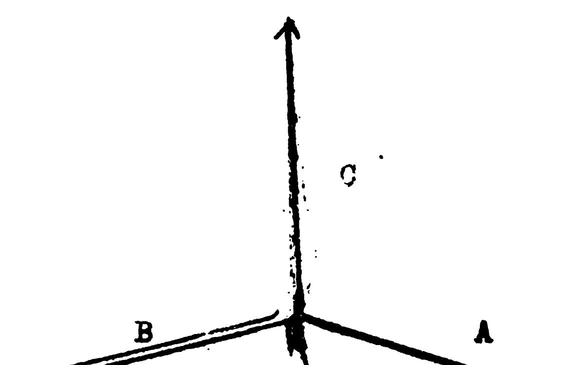
x/ Souřadnice vektoru A vzhledem k basi A, B jsou $1, 0$; souřadnice vektoru $Z_1 - P$, resp. $Z_2 - P$ vzhledem k téže basi jsou x_1, y_1, resp. x_2, y_2.

§ 32.

N a d r o v i n y ; p o l o p r o s t o r y .

V předešlém § jsme pojednali o názorném významu orientace roviny, o polorovinách a o tom, jak se dají poloroviny definovati pomocí pojmu úsečky

Názorný význam orientace trojrozměrného prostoru je tento: Pozorovatel se postaví do směru vektoru C tak, aby tento směr byl souhlasný se směrem od paty k hlavě, a dívá se ve směru vektoru A . Base A, B , C je pak positivní, když pozorovatel může ukázati vektor B svou pravou rukou.



Rovina rozděluje trojrozměrný prostor na dva poloprostory. To nebudeme přímo dokazovati, nýbrž provedeme důkaz obecně v lineárním prostoru libovolné kladné dimense n .

Pomocná věta. Nechť je dán modul M dimense n a jeho podmodul M' . Pak dimense podmodulu M' je rovna $n - 1$, když a jen když existuje[x/] v $M - M'$ vektor A této vlastnosti:
ke každému vektoru X z M lze najíti číslo x tak, že vektor $X - x.A$ je v podmodulu M'.

---

x/ Jsou-li M a N dvě množiny, pak $M - N$ značí množinu těch prvků z M, jež nenáležejí do N .

<u>Důkaz.</u> Předpokládejme nejprve, že vlastnost je splněna. Označme A_1 , A_2, ... , A_m basi podmodulu M'. Vektor A nenáleží do M', takže není na této basi závislý. Jelikož tedy vektory A_1 , A_2, ..., A_m , A jsou mezi sebou nezávislé, stačí dokázati, že každý vektor X modulu M je na těchto $m + 1$ vektorech závislý. Zvolme v M libovolný vektor X . Podle předpokládané vlastnosti existuje číslo x tak, že vektor $X - x.A$ je v M'. Proto

$$X - x.A = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \dots + x_m.A_m ,$$

kde x_1 , x_2 , ..., x_m jsou vhodně volená čísla. Je tudíž

$$X = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \dots + x_m.A_m + x.A .$$

Odtud vyplývá, že vektory A_1 , A_2, ..., A_m, A tvoří basi modulu M . Proto dimense modulu je $m + 1 = n$, t.j. $m = n - 1$.

Předpokládejme nyní, že dimense podmodulu M' je $n - 1$. Nechť A_1, A_2, ... , A_{n-1} je base tohoto podmodulu. Zvolme v množině $M - M'$ vektor A. Snadno se pozná, že vektory A_1, A_2, ... , A_{n-1}, A tvoří basi modulu M. Je-li X libovolný vektor modulu M , existují čísla x_1, x_2, ... , x_{n-1}, x tak, že

$$X = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \dots + x_{n-1}.A_{n-1} + x.A ,$$

tedy

$$X - x.A = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \dots + x_{n-1}.A_{n-1}$$

Vektor $X - x.A$ je tudíž v podmodulu M' , j.b.d.

Lineární podprostor dimense $n - 1$, který je vnořen do lineárního prostoru dimense n / $n > 0$ / , sluje <u>nadrovinou</u> tohoto prostoru.

Nadrovina určuje v prostoru kladné dimense dva poloprostory. Definice jejich je tato;

Orientujme prostor dimense n a jeho nadrovinu. Nechť $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ je positivní base nadroviny. Zvolme v nadrovině bod P. Nechť bod Z není v této nadrovině. Pak vektor $Z - P$ není zřejmě ve směru nadroviny, takže vektory A_1, $A_2, \dots A_{n-1}$, $Z - P$ tvoří basi celého prostoru. Ty body Z pro něž je tato base positivní, tvoří jeden poloprostor, ty body Z, pro něž je tato base negativní, vyplní druhý poloprostor.

Takto definovaný poloprostor nazveme určitěji otevřený poloprostor. O uzavřeném poloprostoru mluvíme, když k poloprostoru přidáme určující nadrovinu.

Jsou celkem čtyři způsoby orientace prostoru a nadroviny. Změníme-li orientaci prostoru nebo orientaci nadroviny, vymění se oba poloprostory. Současná změna obou orientací nemá vlivu na poloprostory. Také tu nezáleží na volbě bodu P. Vskutku, zvolíme-li jiný bod Q v nadrovině, pak je $Q = P + A$, kde A je vektor ve směru nadroviny. Je tudíž $Z - Q = (Z - P) - A$; proto přechod od base $A_1, A_2, \dots$ $\dots, Z - Q$ je elementárním přechodem prvého druhu s determinantem rovným 1 / v § 28 str. 57/. Je-li Z libovolný bod prostoru, jenž nenáleží do nadroviny, pak obě base tyto jsou buď positivní nebo negativní.

Pojem poloprostoru dá se převésti na pojem úsečky; to je patrné z tohoto kriteria:

Věta. Dva různé body Z_1, Z_2 poloprostoru náleží do téhož poloprostoru určeného nadrovinou / body Z_1, Z_2 nejsou v této nadrovině /, když a jen když úsečka u $/Z_1, Z_2/$ nemá společného bodu s touto nadrovinou.

Důkaz. Zvolme v určující nadrovině bod P. Jelikož body Z_1 a Z_2 nejsou v této nadrovině, tvoří vektory

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, Z_1 - P \quad \text{a} \quad A_1, A_2, \dots, A_{n-1} Z_2 - P \qquad (*)$$

dvě base prostoru. Vzhledem k definici poloprostoru stačí dokázati, že determinant přechodu od jedné této base ke druhé je kladný, když a jen když úsečka $u\ /\ Z_1,\ Z_2\ /$ nemá s nadrovinou společného bodu.

Veďme body Z_1, Z_2 přímku p. Tato má vzhledem k nadrovině dvojí možnou polohu. Buďto směr přímky je částí směru nadroviny a pak je přímka p rovnoběžná s nadrovinou, anebo tomu tak není a přímka má s nadrovinou společný přesně jeden bod.

1/ V případě prvém je vektor $Z_2 - Z_1$ ve směru určující nadroviny. Poněvadž $Z_2 - P = (Z_1 - P) + (Z_2 - Z_1)$, jest přechod prvé base ke druhé v (*) elementárním přechodem prvého druhu a jeho determinant je tudíž roven 1.

2/ V případě druhém nenáleží vektor $Z_2 - Z_1$ do směru nadroviny. Takže vektory $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, Z_2 - Z_1$ tvoří basi celého prostoru; existují tudíž čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, y té vlastnosti, že

$$Z_1 - P = x_1 . A_1 + x_2 . A_2 + \ldots + x_{n-1} . A_{n-1} + y . (Z_2 - Z_1)$$

takže

$$Z_1 - y . (Z_2 - Z_1) = P + x_1 . A_1 + x_2 . A_2 + \ldots + x_{n-1} . A_{n-1}$$

V této rovnici znamená levá strana bod na přímce p, pravá strana bod v nadrovině. Tím je nalezen průsečík přímky s nadrovinou. Poněvadž rozdělení bodů v poloprostory je neodvislé od volby bodu P v nadrovině, můžeme bez újmy obecnosti předpokládati, že tento průsečík je identický s bodem P. Přímka p je tudíž určena bodem P a vektorem $Z_1 - P$. Každý její bod dá se psáti ve tvaru $P + z . (Z_1 - P)$, kde z je reálné číslo. Jelikož bod Z_2 leží na p, existuje reálné číslo z_0 té vlastnosti, že
$Z_2 = P + z_0 . (Z_1 - P)$. Zřejmě je $0 \neq z_0 \neq 1$.
Orientujme přímku p tak, že vektor $Z_1 - P$ prohlásíme za positivní. Podle věty na str. 61 souhlasí uspořádání bodů na přímce s uspořádáním reálných čísel z.
Bod $P = P + 0 . (Z_1 - P)$ je před bodem $Z_1 = P + 1 . (Z_1 - P)$

Do úsečky u / Z_1, Z_2 / náleží všecky ty body $P + z.(Z_1-P)$ jež jsou mezi body Z_1 a Z_2, tedy přesně ty body, pro než $z_0 < z < 1$, resp. $1 < z < z_0$. Rozeznávejme tři případy:

a/ $0 < z_0 < 1$. V tomto případě nenáleží bod P do úsečky u /Z_1, Z_2 /, takže tato nemá společného bodu s nadrovinou. Jelikož $Z_2 - P = z_0 . (Z_1 - P)$, je přechod od jedné base ke druhé v (*)elementárním přechodem druhého druhu; determinant tohoto přechodu je z_0, tedy kladný.

b/ $1 < z_0$. Také v tomto případě nemá úsečka u / Z_1, Z_2 / společného bodu s nadrovinou. Determinant přechodu je tu zase z_0, tedy číslo kladné.

c/ $z_0 < 0$. V tomto případě jest $z_0 < 0 < 1$, takže bod P je mezi body Z_1 a Z_2. Úsečka u /Z_1, Z_2 / protíná nadrovinu v bodě P. Determinant přechodu je z_0, t.j. záporný.

Tím jsou probrány všechny možné případy. Z nich vyplývá, že determinant přechodu od jedné base ke druhé je kladný/záporný/, když úsečka u /Z_1, Z_2/ nemá /má/ s nadrovinou společný bod, j.t.d.

Kriterium, kdy dva body náleží do různých poloprostorů, můžeme vysloviti takto:

<u>Věta. Dva různé body</u> Z_1, Z_2 <u>náleží do různých polo - prostorů určených nadrovinou</u> / bod Z_1 ani Z_2 neleží v této nadrovině/, <u>když a jen když úsečka</u> u /$Z_1 Z_2$/ <u>má s nadrovinou společný bod.</u>

<u>Poznámka</u>. Z důkazů této věty je patrné, že při rozdělení bodů do dvou poloprostorů podle kriteria úsečkového nezáleží na volbě base prostoru. Proto není třeba v předešlé větě explicite dokazovati, že rozdělení bodů do dvou poloprostorů podle orientace nezávisí na volbe base.

§ 33.

Druhá skupina cvičení.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

/ 1/ Base trojrozměrného modulu je A_1, A_2, A_3 ; jiná base téhož modulu je B_1, B_2, B_3, kde

$$B_1 = 5.A_1 + 7.A_2 - 3.A_3$$
$$B_2 = 2.A_1 + 4.A_2 - 5.A_3$$
$$B_3 = 3.A_1 + A_2 + 8.A_3$$

Rozložte přechod od prvé base ke druhé basi na elementární přechody a přesvědčte se, že determinant přechodu od base A_1, A_2, A_3 k basi B_1, B_2, B_3 je roven součinu determinantů elementárních přechodů.

/ 2 / Dokažte, že otevřenou i uzavřenou polorovinou je jednoznačně stanovena přímka, jež tyto poloroviny určuje.

/ 3 / V § 13 na str. 21 jsme uvedli příklad abstraktního lineárního prostoru. Jeho body byly mnohočleny tvaru

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^4$$

Dokažte, že množina všech polynomů $f(x)$ uvedeného tvaru, jež splňují rovnici $f(x) = 7$ je nadrovinou tohoto prostoru a že jedním poloprostorem je množina polynomů $f(x)$ takových, že $f(3) < 7$ a druhým poloprostorem je množina polynomů $f(x)$, pro než $f(3) > 7$.

§ 34.

L i n e á r n í h o m o g e n n í f o r m a.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Nechť je dán modul M konečné kladné dimense. Lineární homogenní forma f je pravidlo / funkce/ , jež každému vektoru X modulu M přiřazuje číslo $f(X)$ a to tak, že jsou splněny tyto dva axiomy linearity:

1/ Když $A \in M$, $B \in M$, pak $f(A+B) = f(A) + f(B)$

2/ Je-li $A \in M$ a c reálné číslo, pak $f(c.A) = c.f(A)$

Indukcí dá se vlastnost 1/ rozšířiti na n sčítanců: Je-li $A_i \in M$, $i = 1,2,\dots, n$, pak

$f(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = f(A_1) + f(A_2) + \dots + f(A_n)$.

Existuje vždycky lineární homogenní forma ?

Odpověď na tuto otázku je dána touto definicí speciální lineární homogenní formy : Nechť $A_1, A_2, \dots, A_n$ je base modulu M a nechť $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou reálná čísla. Je-li X libovolný vektor, definujeme

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n ,$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou souřadnice vektoru X vzhledem k basi $A_1, A_2, \dots, A_n$ / v. § 8, str.15 / takže jest $f(A_i) = c_i$ / $i = 1,2,\dots, n$ /.

Tato funkce splňuje oba axiomy linearity. Vskutku, jsou-li

$X = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \dots + x_n.A_n$, $Y = y_1.A_1 + y_2.A_2 + \dots + y_n.A_n$ dva libovolné vektory modulu M, pak

$f(X + Y) =$
$= f(x_1 . A_1 + x_2 . A_2 + \dots + x_n . A_n + y_1 . A_1 + y_2 . A_2 +$
$+ \dots . y_n . A_n) = f((x_1 + y_1) . A_1 + (x_2 + y_2) . A_2 + \dots$
$\dots + (x_n + y_n) . A_n) = (x_1 + y_1) . f(A_1) + (x_2 + y_2) .$
$. f(A_2) + \dots + (x_n + y_n) . f(A_n) = (x_1 + y_1) . c_1 +$
$+ (x_2 + y_2) . c_2 + \dots + (x_n + y_n) . c_n = x_1 c_1 + x_2 c_2 +$
$+ x_n c_n + y_1 c_1 + y_2 c_2 + \dots + y_n c_n = f(X) + f(Y).$

Je-li dále c libovolné číslo, pak

$$
\begin{aligned}
f(c.X) &= f(c.(x_1 . A_1 + x_2 . A_2 + \dots + x_n . A_n)) = \\
&= f(cx_1 . A_1 + cx_2 . A_2 + \dots + cx_n . A_n) = \\
&= cx_1 . f(A_1) + cx_2 . f(A_2) + \dots + cx_n f(A_n) = \\
&= cx_1 c_1 + cx_2 c_2 + \dots + cx_n c_n = \\
&= c . (x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n) = c . f(X) .
\end{aligned}
$$

Funkce f je tedy lineární homogenní forma x/, jež nabývá ve vektorech A_i předepsané hodnoty

$f(A_i) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Pravíme, že <u>lineární homogenní forma</u> f je <u>identicky rovna nule</u>, a značíme $f \equiv 0$, když pro každý vektor X modulu M je číslo $f(X) = 0$.

---

x/ V algebře rozumí se obyčejně lineární homogenní formou polynom prvého stupně v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ tvaru

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n .$$

Lineární homogenní forma, jak jsme ji obecně definovali, je jiný pojem. Zvolíme-li však basi modulu, je specielní forma, jejíž existenci jsme dokázali, lineární homogenní formou ve smyslu algebry.

Věta. Není-li lineární homogenní forma f identicky rovna nule, pak nabývá všech reálných hodnot.

Důkaz. Jelikož $f \neq 0$, existuje vektor A té vlastnosti, že $f(A) = d \neq 0$. Je-li x libovolné reálné číslo, pak vektor $x.A$ náleží do modulu a jest $f(x.A) = xd$; probíhá-li x všecka reálná, probíhá také $f(x.A)$ všecka reálná čísla.

Kořenem lineární homogenní formy f nazveme každý vektor X té vlastnosti, že číslo $f(X) = 0$.

Nulový vektor $0'$ je kořenem každé lineární homogenní formy f; vskutku, je-li A libovolný vektor, jest $f(A) = f(A + 0') = f(A) + f(0')$, takže $f(0') = 0$.

Věta. Množina M^* všech kořenů lineární homogenní formy f je podmodul modulu M.

Důkaz. Množina M^* je především neprázdná, neboť obsahuje nulový vektor. Jsou-li dále A, B dva vektory z M^*, pak také vektor $A + B$ náleží do M^*, neboť $f(A) = 0$, $f(B) = 0$, takže $f(A + B) = f(A) + f(B) = 0$. Je-li konečně c reálné číslo, pak vektor $c.A$ náleží rovněž do M^*, neboť jest $f(c.A) = c.f(A) = c.0 = 0$.

Věta. Množina M^* všech kořenů lineární homogenní formy f je rovna modulu M, když a jen když $f \equiv 0$.

Důkaz snadno vyplývá z definice lineární homogenní formy identicky rovné nule.

Věta. Nechť f je lineární homogenní forma, jež není identicky rovna nule. Pak množina M^* všech kořenů formy f má dimensi $n - 1$.

Důkaz. Jelikož $f \neq 0$, existuje vektor A té vlastnosti, že $f(A) = d \neq 0$, takže vektor A není v podmodulu M^*. Nechť X je libovolný vektor; označme $f(X) = x$. Pak jest

$$f\left(X - \frac{x}{d}.A\right) = f(X) - \frac{x}{d}.f(A) = x - \frac{x}{d}.d = 0,$$

takže vektor $X - \frac{z}{u} \cdot A$ je v podmodulu M^*. Podle pomocné věty v § 32 na str. 69 má podmodul M^* dimensi $n - 1$.

<u>Věta.</u> Nechť je dán podmodul $M^* \subset M$ dimense $n - 1$. Pak existuje lineární homogenní forma f, jejíž kořeny tvoří přesně podmodul M^*.

<u>Důkaz.</u> Zvolme reálné číslo $c \neq 0$ a basi $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ modulu M^*. Ve množině $M - M^*$ existuje pak nenulový vektor A_n, takže $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ je base modulu M. Lineární homogenní formu f definujeme takto: Je-li $X = x_1 . A_1 + x_2 . A_2 + \dots + x_n . A_n$ libovolný vektor, pak položme $f(X) = x_n . c$.

Tím je definována specielní lineární homogenní forma, jejíž existenci jsme už dokázali. V tomto případě je $0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1}$, $c_n = c$. Tato forma má zřejmě žádané vlastnosti.

Dokázali jsme existenci lineární homogenní formy f, jejíž kořeny tvoří přesně podmodul M^*. Z důkazu je patrno, že každou jinou takovou lineární homogenní formu dostaneme, násobíme-li formu f číslem $d \neq 0$.

§ 35.

L i n e á r n í n e h o m o g e n n í f o r m a .

R o v n i c e n a d r o v i n y .

Nechť je dán lineární prostor kladné dimense. <u>Lineární nehomogenní forma</u> je pravidlo / funkce/, které každému bodu Z prostoru přiřazuje číslo $F(Z)$; při tom je splněna podmínka

3/ Jsou-li x, y dvě reálná čísla té vlastnosti že,

$x + y = 1$ a jsou-li P, Q dva body, pak

$$F(x.P + y.Q) = x.F(P) + y.F(Q).$$

<u>Věta.</u> Z každé lineární nehomogenní formy F dá se odvoditi lineární homogenní forma f.

<u>Důkaz.</u> Je-li $A = Q - P$ libovolný vektor, položme

$$f(Q - P) = F(Q) - F(P).$$

Dokažme nejprve; jsou-li $Q - P$ a $Q_1 - P_1$ dva stejné vektory, pak platí $f(Q - P) = f(Q_1 - P_1)$. Vskutku, označíme-li $R = \frac{1}{2} . Q + \frac{1}{2} . P_1$, pak jest také $R = \frac{1}{2} . P + \frac{1}{2} . Q_1$, takže podle podmínky 3/ jest

$$F(R) = \frac{1}{2} . F(Q) + \frac{1}{2} . F(P_1) = \frac{1}{2} . F(P) + \frac{1}{2} . F(Q_1).$$

Odtud vyplývá

$$F(Q) - F(P) = F(Q_1) - F(P_1), \quad \text{j.t.d.}$$

Nyní jest třeba dokázati, že funkce f splňuje oba axiomy linearity. Nechť A, B jsou dva vektory příslušného modulu. Pak existují body P_1, P_2, P_3 té vlastnosti, že $A = P_1 - P_2$, $B = P_2 - P_3$. Jest tedy

$$f(A + B) = f(P_1 - P_3) = F(P_1) - f(P_3) =$$

$$= F(P_1) - F(P_2) + F(P_2) - F(P_3) =$$

$$= f(P_1 - P_2) + f(P_2 - P_3) = f(A) + f(B).$$

Je-li libovolné číslo, pak $c.A = c.(P_1 - P_2) = c.P_1 - c.P_2 =$

$= (c.P_1 + (1 - c) . P_2) - P_2$. Podle definice funkce f jest

$f(c.A) = F(c.P_1 + (1 - c) . P_2) - F(P_2)$, takže podle podmínky 3/ jest $f(c.A) = c.F(P_1) + (1 - c) . F(P_2) -$

$- F(P_2) = c.(F(P_1) - F(P_2)) = c.f\ A$.

Je-li u jednoho bodu S předepsána hodnota funkce $F(S)$, platí také obrácení této věty;

<u>Věta.</u> Nechť je dána lineární homogenní forma f,

bod S a číslo c_0. Pak existuje lineární nehomogenní forma F té vlastnosti, že

$$f(P - Q) = F(P) - F(Q)$$

a že $F(S) = c_0$.

<u>Důkaz.</u> Je-li $Z = S + X$ libovolný vod prostoru, definujme lineární nehomogenní formu F takto:

$$F(Z) = (F)\, S + f(X), \text{ kde } F(S) = c_0 .$$

Dokažme, že funkce F má vlastnost 3/. Nechť x, y jsou dvě reálná čísla té vlastnosti, že $x + y = 1$ a nechť P, Q jsou dva body prostoru. Existují vektory A, B tak, že $P = S + A$, $Q = S + B$. Proto $x.P + y.Q = (x + y) . S + x.A + y.B = S + x.A + y.B$.

Podle definice funkce F jest $F(P) = c_0 + f(A)$, $F(Q) = c_0 + f(B)$, $F(x.P + y.Q) = c_0 + f(x.A + y.B)$

Podle axiomů linearity jest $f(x.A + y.B) = f(x.A) + f(y.B) = x.f(A) + y.f(B)$.

Tedy

$$F(x.P + y.Q) = c_0 + x.f(A) + y.f(B) =$$
$$= (x + y) . c_0 + x.f(A) + y.f(B) =$$
$$= x.(c_0 + f(A)) + y.(c_0 + f(B)) =$$
$$= x.F(P) + y.F(Q), \quad \text{j.b.d.}$$

Funkce F splňuje žádaný vztah, jak se snadno přesvědčíme, položíme-li $P - Q = (P - S) + (S - Q)$.

Podle této věty a vzhledem k tomu, že existuje speciální lineární homogenní forma, můžeme sestrojiti speciální nehomogenní lineární formu takto:

Nechť $S, A_1, A_2, \ldots, A_n$ je soustava souřadná v n - rozměrném lineárním prostoru a nechť $c_0, c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla. Je-li Z libovolný bod prostoru, existují čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ té vlastnosti, že $Z = S + x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots + x_n A_n$. Funkce

$F(Z) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_n x_n$ je pak lineární nehomogenní forma*) ; jest $c_0 = F(S)$,
$c_i = F(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Pravíme, že <u>lineární nehomogenní forma F je identicky</u> rovna nule, a značíme $F \equiv 0$, když pro každý bod Z prostoru je číslo $F(Z) = 0$.

<u>Kořenem lineární nehomogenní formy F</u> nazveme každý bod Z té vlastnosti, že číslo $F(Z) = 0$.

<u>Věta.</u> Lineární nehomogenní forma F je identicky rovna nule, když a jen když každý bod prostoru je jejím kořenem.

<u>Věta.</u> Lineární nehomogenní forma je rovna konstantě $c \neq 0$, když a jen když žádný bod prostoru není jejím kořenem.

<u>Důkaz.</u> Nabude-li funkce F ve dvou bodech Z_1, Z_2 různých hodnot $F(Z_1) = c_1$, $F(Z_2) = c_2$, pak bod

$$R = \frac{c_2}{c_2 - c_1} \cdot Z_1 + \frac{c_1}{c_1 - c_2} \cdot Z_2$$ je kořenem lineární nehomogenní formy F, neboť $F(R) = \frac{c_2}{c_2 - c_1} \cdot F_1(Z_1) +$

$$+ \frac{c_1}{c_1 - c_2} \cdot F(Z_2) = \frac{c_2 \cdot c_1}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 - c_2} = 0 .$$

<u>Věta.</u> Není-li lineární nehomogenní forma F konstantní, pak její kořeny tvoří nadrovinu prostoru.

<u>Důkaz.</u> Lineární nehomogenní formě F přiřaďme lienární homegenní formu f : $f(Q - P) = F(Q) - F(P)$. Zvolme bod S a označme $F(S) = c_0$. Jelikož funkce F není konstantní, není rozdíl $F(Q) - F(P)$ vždy roven 0, takže $f \neq 0$. Podle větv / na str. 77 nahoře/ nabývá funkce f všech reálných hodnot. Existuje tedíž vektor A té vlastnosti, že $f(A) = - c_0$. Bod $T = S + A$ je pak kořenem formy F, neboť $F(T) = F(S) + f(A) = c_0 - c_0 = 0$.

---

*) Z tvaru této speciální formy je patrné, že je to lineární nehomogenní forma ve smyslu algebry.

Zvolme nyní bod T za počátek. Pak se dá každý bod Z psáti ve tvaru $Z = T + X$, takže $F(Z) = F(T) + f(X) = f(X)$. Bod Z je tudíž kořenem formy F, když a jen když vektor X je kořenem formy f. Avšak kořeny formy f tvoří modul dimense $n - 1$. Proto kořeny lineární nehomogenní formy F jsou tvaru $T + X$, kde vektor X probíhá modul dimense $n - 1$. Tyto kořeny tvoří tedy nadrovinu prostoru.

<u>Věta.</u> Nechť je dána nadrovina lineárního prostoru, pak existuje lineární nehomogenní forma F, jejíž kořeny tvoří přesně onu nadrovinu.

<u>Důkaz.</u> Zvolme reálné číslo $c \neq 0$, bod prostoru S a basi nadroviny $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Existuje vektor A_n té vlastnosti, že $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ je base celého prostoru. Lineární nehomogenní formu F definujme takto: Je-li $Z = S + x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots + x_n.A_n$ libovolný bod prostoru, položme $F(Z) = cx_n$. Tím je definována speciální lineární nehomogenní forma, při níž $F(S) = c_0 = 0$, $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$, $c_n = c$. Tato forma má požadovanou vlastnost. Vskutku, $F(Z) = 0$, když a jen když $x_n = 0$, t.j. když a jen když bod Z je v nadrovině.

Dokázali jsme existenci lineární nehomogenní formy F, jejíž kořeny tvoří nadrovinu. Z důkazu je patrno, že každou jinou formu uvedené vlastnosti dostaneme, násobíme-li formu F číslem $d \neq 0$.

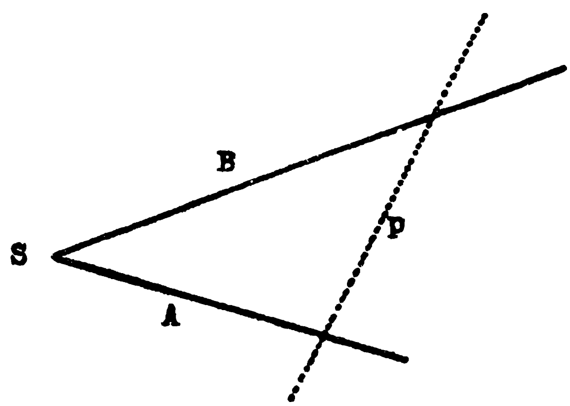
Ke každé nadrovině existuje lineární nehomogenní forma F té vlastnosti, že $F(Z) = 0$, když a jen když bod Z leží této nadrovině. Pravíme, že

$$F(Z) = 0$$

je <u>rovnice této nadroviny.</u>

Zvolme v prostoru soustavu souřadnou. Každá lineární rovnice, jejíž koeficienty při proměnných nejsou vesměs rovny 0, určuje nadrovinu a naopak každá nadrovina je určena lineární rovnicí.

V rovině je soustavou souřadnou počátek S a dvojice mezi sebou nezávislých vektorů A a B. Každý bod se dá vyjádřiti ve tvaru $S + x.A + y.B$. Lineární rovnice vyjadřuje přímku.



Nechť přímka p neprochází počátkem S a nechť vektor A ani vektor B není ve směru přímky. Pak existují čísla $a \neq 0 \neq b$ té vlastnosti, že body $S + a.A$, $S + b.B$ leží na přímce p. Jsou to průsečíky přímky p s osami/. Rovnice

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

je rovnicí přímky p, neboť bod $S + a.A + 0.B$ má souřadnice $(a, 0)$, bod $S + 0.A \neq b.B$ má souřadnice $(0, b)$, takže rovnice je splněna, dosadíme-li do ní souřadnice těchto bodů. Tato rovnice sluje <u>úsekovým tvarem rovnice přímky.</u>

V prostoru trojrozměrném je soustavou souřadnou počátek S a trojice mezi sebou nezávislých vektorů A, B, C. Každý bod se dá vyjádřiti ve tvaru $S + x.A + y.B + z.C$. Lineární rovnice vyjadřuje rovinu.

Nechť rovina v trojrozměrném prostoru neprochází bodem S a nechť žádný z vektorů A, B, C není ve směru této roviny. Pak existují čísla $a \neq 0 \neq b \neq 0 \neq c$ té vlastnosti, že body $S + a.A$, $S + b.B$, $S + c.C$ leží v této rovině / Jsou to průsečíky roviny s osami/.
Rovnice

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

je rovnicí této roviny, jak se snadno přesvědčíme, dosadíme-li do této rovnice souřadnice $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ bodů $S + a.A$, $S + b.B$, $S + c.C$, jimiž je rovina určena. Uvedená rovnice sluje úsekovým tvarem rovnice roviny.

Věta. Nechť je dána soustava souřadná v modulu dimense n. Nechť jsou dány dvě lineární homogenní formy

$$f' = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n ,$$
$$f'' = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n ,$$

jež nejsou identicky rovny nule. Označme M' kořeny prvé formy, M'' kořeny druhé formy. Nutnou a postačující podmínkou, aby $M' = M''$, je existence čísla c té vlastnosti, že

$f' = c.f''$, $c \neq 0$, t.j. $c_1 = cd_1$, $c_2 = cd_2, \dots, c_n = cd_n$

Poznámka. Tato podmínka se udává také v jiném tvaru. Nechť

$$\begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \dots, & c_n \\ d_1, & d_2, & \dots, & d_n \end{pmatrix}, \quad n \geqq 2 ,$$

je matice o 2 řádcích a n sloupcích. Z této matice můžeme sestaviti $\binom{n}{2}$ způsoby čtvercové matice stupně 2 a jejich determinanty.

Nutná a postačující podmínka, aby $M' = M''$ je, aby každý z těchto $\binom{n}{2}$ determinantů byl roven 0. /Říká se také, že hodnost matice je rovna 1 /.

Důkaz věty vyplývá z poznámky k větě v § 34 na str. 78.

Věta. Nechť je dána soustava souřadná v n-rozměrném lineárním prostoru. Nechť

$$F' = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$F'' = d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n$$

jsou dvě lineární nehomogenní formy, jež nejsou identicky rovny 0. Označme N' nadrovinu kořenů F' a N'' nadrovinu kořenů formy F''. Nutnou a postačující podmínkou, aby $N' = N''$ je existence čísla $c \neq 0$ té vlastnosti, že $F' = c.F''$.

Tato podmínka je ekvivalentní s podmínkou, aby všecky subdeterminanty stupně 2 vybrané z matice

$$\begin{pmatrix} c_0, & c_1, & \dots & c_n \\ d_0, & d_1, & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

byly rovny 0, čili, aby hodnost matice bala rovna 1.

<u>Důkaz</u> vyplývá z poznámky k větě na str. 82.

Z těchto dvou vět vyplývá

<u>Věta</u>. Nechť $F_1 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_nx_n$ je rovnice nadroviny N_1 a nechť $F_2 = d_0 + d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n$ je rovnice nadroviny N_2. Nutnou a postačující podmínkou, aby obě nadroviny N_1 a N_2 byly rovnoběžné jest, aby hodnost matice

$$\begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \dots, & c_n \\ d_1, & d_2, & \dots, & d_n \end{pmatrix} \quad \text{byla rovna } 1.$$

V rovině je dána přímka rovnicí $ax + by + c = 0$, kde není současně $a = b = 0$. Nechť $a'x + b'y + c' = 0$ je rovnice druhé přímky. Podle předešlého je nutnou a postačitelnou podmínkou pro rovnoběžnost obou přímek: $ab' - a'b = 0$, pro splynutí obou přímek: $ab' - a'b = ac' - a'c = bc' - b'c = 0$.

V prostoru je dána rovina rovnicí $ax + by + cz + d = 0$, kde není současně $a = b = c = 0$. Nechť $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ je rovnice druhé roviny. Nutnou a postačitelnou podmínkou pro rovnoběžnost obou rovin je $ab' - a'b = ac' - a'c = bc' - b'c = 0$, pro splynutí obou rovin je $ab' - a'b = ac' - a'c = ad' - a'd = bc' - b'c = bd' - b'd = cd' - c'd = 0$.

<u>Věta.</u> Nechť je dána v prostoru lineární nehomogenní forma F, jež není konstantní. Body Z, pro než $F(Z) = 0$, tvoří nadrovinu prostoru, body Z, pro něž $F(Z) < 0$, tvoří jeden poloprostor a body Z, pro než $F(Z) > 0$, tvoří druhý

poloprostor.

Důkaz. Podle kriteria na str. 73 stačí dokázati, že úsečka o krajních bodech P, Q /které neleží v nadrovině/ má společný bod s nadrovinou, když a jen když číslo $F(P)$ má jiné znamení než číslo $F(Q)$.

Nechť pro určitost $F(P) > 0$, $F(Q) < 0$. Za tohoto předpokladu je $F(P) - F(Q) > 0$, takže existuje číslo

$$x = \frac{-F(Q)}{F(P) - F(Q)}$$

a jest $0 < x < 1$.

Odtud vyplývá, že $x.F(P) + (1-x).F(Q) = 0$. Označme bod $Z' = x.P + (1-x).Q$, jenž leží na úsečce u /P, Q /. Podle vlastnosti 3/ nehomogenní formy jest $F(Z') = x.F(P) + (1-x).F(Q) = 0$, takže Z' je v nadrovině. Jsou-li tedy čísla $F(P)$, $F(Q)$ různého znamení, má úsečka u /P, Q / společný bod s nadrovinou.

Nechť jsou nyní obě čísla $F(P)$ a $F(Q)$ buď kladná nebo obě záporná. Je-li Z'' libovolný bod úsečky u / P,Q /, pak existují kladná čísla x, y té vlastnosti, že $Z'' = x.P + y.Q$ a že $x + y = 1$. Číslo $F(Z'') = x.F(P) + y.F(Q)$ má stejné znamení jako čísla $F(P)$ a $F(Q)$, takže $F(Z'') \neq 0$.

Mají-li tedy čísla $F(P)$ a $F(Q)$ stejné znamení, pak úsečka u / P,Q / neprotne nadrovinu.

§ 36.

Svazek přímek a svazek rovin.

Nechť je dán v rovině systém přímek. Tento systém nazveme <u>svazkem přímek v rovině</u>, když jest neprázdný a když má tuto vlastnost: Je-li dán libovolný bod roviny, pak jím prochází buďto přesně jedna přímka nebo všecky přímky tohoto systému.

Prochází-li bodem P jediná přímka svazku, nazveme jej <u>obyčejným bodem</u>, prochází-li jím všecky přímky svazku, nazveme jej <u>základním bodem svazku.</u>

Je zřejmé, že svazek přímek má nejvýš jediný základní bod.

<u>Věta.</u> Svazek přímek v rovině obsahuje nekonečně mnoho přímek.

<u>Důkaz.</u> Je-li dán konečný počet přímek ve svazku, můžeme zvoliti v rovině bod, jenž není na žádné z těchto přímek. Jelikož svazek je neprázdný, existuje v něm další přímka tímto bodem procházející.

Nechť je dán svazek přímek v rovině. Pak mohou nastati tyto dva případy:

a/ Existuje základní bod svazku

b/ Neexistuje základní bod svazku.

V případě a/ prochází základním bodem S každá přímka svazku. Každý jiný bod roviny jest obyčejný a prochází jím přesně jedna přímka svazku. Přímka, jež neobsahuje základního bodu S, nenáleží do tohoto svazku. Svazek skládá se tudíž ze všech přímek roviny, jež procházejí bodem S.

V případě b/ nenáleží do svazku žádná dvojice různoběžných přímek, neboť společný jejich průsečík byl by základním bodem svazku. Odtud vyplývá, že přímky tohoto svazku jsou navzájem rovnoběžné. Svazek se skládá ze všech přímek roviny, jež jsou navzájem rovnoběžné.

Snadno se přesvědčíme, že svazky obou druhů existují.x/

Nechť je dán v prostoru trojrozměrném systém rovin. Tento nazveme <u>svazkem rovin v prostoru</u>, když jest neprázdný

---

x/ Definujeme-li podobným způsobem jako v rovině svazek přímek v prostoru, pak tu jsou také dva případy, z nichž případ a/ je stejný jako právě popsaný, kdežto případ b/ je daleko složitější.

a když má tuto vlastnost: Je-li dán libovolný bod prostoru, pak jím prochází buďto přesně jedna rovina nebo všechny roviny toho systému.

Prochází-li bodem P jediná rovina systému, nazveme jej obyčejným bodem, prochází-li jím každá rovina svazku, nazveme jej základním bodem svazku.

Věta. Svazek rovin v prostoru obsahuje nekonečně mnoho rovin.

Je-li dán v prostoru svazek rovin, mohou opět nastati dva případy:

a/ Existuje základní bod svazku

b/ Neexistuje základní bod svazku.

Jelikož svazek obsahuje nekonečně mnoho rovin, můžeme zvoliti dvě roviny, jež v případě a/ obsahují základní bod a v případě b / jsou rovnoběžné.

V případě a/ jest každý bod průsečnice těchto dvou rovin bodem základním, takže svazek se skládá ze všech rovin prostoru jež procházejí touto průsečnicí; průsečnice tato se nazývá osou svazku rovin.

V případě b/ skládá se svazek ze všech rovnoběžných rovin.

Snadno se opět přesvědčíme o existenci obou svazků rovin v prostoru.

Nechť je dána v trojrozměrném prostoru soustava souřadná a svazek rovin. Nechť

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad \dots. \quad /1/$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad \dots. \quad /2/$$

jsou rovnice dvou různých rovin svazku. Zvolme čísla k_1, k_2, jež nejsou obě rovna 0, a utvořme výraz[x/]

---

x/Tento výraz je součtem prvé rovnice násobené číslem k_1 a druhé rovnice násobené číslem k_2.

$k_1 . \left(a_1x + b_1y + c_1z\right) + k_2 . \left(a_2x + b_2y + c_2z\right) =$
$= k_1d_1 + k_2d_2$ . ..... /3/

Rozeznávejme dva případy.

Nechť je především svazek prvého druhu, t.j.nechť všecky roviny svazku procházejí společnou průsečnicí. Pak rovnice / 3 / je rovnicí roviny, neboť je to lineární rovnice, jejíž koeficienty u proměnných nejsou všecky rovny 0 . Kdyby totiž tyto koeficienty $k_1a_1 + k_2a_2 = k_1b_1 + k_2b_2 =$
$= k_1c_1 + k_2c_2 = 0$, byla by hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{pmatrix}$$

rovna 1 a pak by podle věty v předešlém §/na str. 85/ byly roviny rovnoběžné. To se nemůže u svazku rovin prvého druhu státi.

Dokažme nyní, že rovnice /3/ je rovnicí roviny, jež náleží do svazku. Vskutku, je-li T libovolný bod osy svazku o souřadnicích x_0, y_0, z_0, pak jest $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 =$
$= d_1$, $c_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$, takže také

$k_1 . (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) + k_2 . (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0) =$
$= k_1d_1 + k_2d_2$.

Rovina určená rovnicí /3/ obsahuje tedy osu svazku. Náleží proto do svazku rovin. Nechť je nyní dána rovina svazku. Nechť x_1, y_1, z_1 jsou souřadnice obyčejného bodu P ležícího v této rovině. Jelikož P je obyčejným bodem, není současně v obou rovinách. Bez újmy obecnosti můžeme tedy předpokládati,že

$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 - d_1 \neq 0$. Volíme-li

$k_1 = \left(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 - d_2\right) : \left(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 -\right.$
$\left.- d_1\right)$, $k_2 = 1$,

pak rovnice roviny svazku obsahující bod P je

$k_1 \left(a_1x + b_1y + c_1z\right) + \left(a_2x + b_2y - c_2z\right) = k_1d_1 + d_2$

Nechť je nyní svazek druhého druhu, t.j. nechť všecky roviny svazku jsou rovnoběžné. V tomto případě jest třeba vyloučiti rovnost $k_1 + k_2 = 0$, neboť jinak by mohly vymizeti všecky koeficienty u proměnných x, y, z v rovnici /3/. Roviny, jejichž rovnice jsou /1/ a /3/ jsou rovnoběžné, neboť hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ k_1a_1 + k_2a_2, & k_1b_1 + k_2b_2, & k_1c_1 + k_2c_2 \end{pmatrix}$$

je rovna 1, jelikož také hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a_1, & b_1 & c_1 \\ a_2, & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

je rovna 1. Každá rovina o rovnici /3/ je tedy v tomto případě druhém rovnoběžná s rovinou svazku o rovnici /1/, takže náleží do svazku a naopak každá rovina, jež náleží do svazku druhého druhu má rovnici /3/.

Poznámka. Rovnice roviny svazku dá se psáti ve tvaru /3/ nekonečně mnoha způsoby. Jsou-li totiž k_1 a k_2 čísla, jež určují tuto rovinu, pak každá dvojice čísel ck_1, ck_2, kde $c \neq 0$, určuje tutéž rovinu.

Nechť je dána v rovině soustava souřadná. Jsou-li

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

rovnice dvou různých přímek svazku, pak každá přímka svazku má rovnici

$$k_1 . (a_1x + b_1y + c_1) + k_2 . (a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

při čemž čísla k_1, k_2 nejsou obě rovna 0 a je-li svazek druhého druhu, není $k_1 + k_2 = 0$. Také naopak udaná rovnice je rovnicí přímky ze svazku.

§ 37 .

A x i o m y p r o s k a l á r n í s o u č i n .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Je mnoho pojmů, jež se dají logicky navázati na dosavadní látku. Důležitý je pojem konvexní množiny. Část lineárního prostoru sluje konvexní, když se dvěma svými body P,Q obsahuje celou úsečku u /P,Q / . Je-li dán v lineárním prostoru konečný počet bodů, pak existuje minimální konvexní množina, obsahující tyto body. V rovině je to konvexní mnohoúhelník, v prostoru konvexní mnohostěn.

Neméně důležitý je pojem plošného obsahu rovinného mnohoúhelníka a objemu těles v prostoru, dále pojmy křivky , plochy, tečny křivky, tečné roviny plochy, atd.

Těmito pojmy se nyní nebudeme zabývati a obrátíme zřetel k pojmu vzdálenosti.

Pojem vzdálenosti pokládáme z názoru za známý.Vzdálenost dvou bodů je vyjádřena číslem. Rovněž cosinus úhlu t pokládáme z názoru za známý pojem.

Nechť jsou dány dva názorné vektory: A o délce a , B o délce b . Definujeme jejich skalární nebo-li vnitřní součin A.B takto: Je-li $A = 0'$ nebo $B = 0'$, pak položíme $A.B = 0$. Je-li $A \neq 0' \neq B$, definujeme $A.B = ab.\cos t$, kde t je úhel obou vektorů umístěných v témž počátečním bodě , $0 \leq t \leq 180^0$.

Snadno se verifikuje, že z definice plynou tyto zákony:

IX. $A.B = B.A$; to je zákon komutativní.

X. $a.(A.B) = (a.A) . B$, a je reálné číslo.

XI. $(A_1 + A_2) .B = A_1B + A_2.B$

XII. $A \neq 0' \Rightarrow A^2 > 0$.

Tato čtyři pravidla jsou odvozena z názoru.Postavme se nyní na abstraktní stanovisko. Předpokládejme,že je definován skalární nebo-li vnitřní součin dvou vektorů,t.j.každým dvěma vektorům A, B je přiřazeno číslo A.B , při čemž jsou splněny axiomy IX – XII. Pomocí tohoto skalárního součinu můžeme pak abstraktně definovati vzdálenost.

Snadno se dokáže platnost obecného <u>zákona distributivního</u>, jejž uvedeme bez důkazu:

$$\sum_i A_i \cdot \sum_k B_k = \sum_{i.k} A_i . B_k ,$$

slovy: Součet vektorů se násobí součtem vektorů, když se každý sčítanec prvého součtu násobí každým sčítancem druhého součtu a výsledek se sečte.

Dále platí tento <u>zákon</u>:

$(a. A) . (b. B) = ab. A.B$, kde a, b jsou reálná čísla.

To se odvodí z axiomu X pomocí axiomu IX , dosadí-li se místo B vektor b.B .

Jelikož $0' = 2.0'$, jest podle X : $2. (0'.A) = 2 0'. A = 0'.A$, takže $0'A = 0$. Tím je dokázán další <u>zákon</u> :

$$A. 0' = 0'. A = 0 \quad \text{pro každý vektor } A.$$

§ 38.

Délka vektoru a vzdálenost dvou bodů.

Jelikož $A^2 \geqq 0$, existuje reálné číslo $\sqrt{A^2} \geqq 0$. <u>Absolutní hodnotou</u> čili <u>délkou vektoru</u> A rozumíme nezáporné číslo $\sqrt{A^2}$, jež označujeme $|A|$.

Z definice vyplývá:

Délka vektoru A je rovna 0 , když a jen když $A = 0'$.

Platí tento zákon:

$|c.A| = |c| . |A|$, kde $|c|$ je absolutní hodnota čísla c.

Důkaz. $cA.cA = c^2.A^2$, takže $|c.A| = \sqrt{c^2.A^2} = \sqrt{c^2}.\sqrt{A^2} = |c|.|A|$.

Dále platí tento důležitý zákon:

$$A.B \leqq |A|.|B| \qquad /1/$$

Rovnost $A.B = |A|.|B|$ platí jen v těch případech: když $A = 0'$ nebo $B = 0'$, nebo existuje-li kladné číslo c té vlastnosti, že $B = c.A$.

Důkaz. Je-li $A = 0'$ nebo $B = 0'$, pak je $A.B = 0$. Jelikož pak také $|A| = 0$ nebo $|B| = 0$, jest rovněž $|A|.|B| = 0$. Nechť tedy $A \neq 0' \neq B$ a nechť existuje číslo $c > 0$ takové, že $B = c.A$; jest pak $A.B = (1.A).(c.A) = c.A^2$; avšak také $|A|\,|B| = |A|.|c.A| = |A|.c.|A| = c.|A|^2 = c.A^2$.

Předpokládejme nyní, že $A \neq 0' \neq B$ a že neexistuje číslo $c > 0$ uvedené vlastnosti. Máme dokázati vztah $A.B < |A|.|B|$. Kdyby $A - B = 0'$, bylo by $A = 1.B$, t.j. existoval by vyjímečný případ $c = 1$. Proto $A - B \neq 0'$, tedy podle axiomu XII jest $(A - B)^2\ 0$, t.j. $0 < A^2 + B^2 - 2.A.B$; připočteme-li k oběma stranám této nerovnosti číslo $2.A.B$, dostaneme nerovnost

$$2.A.B < A^2 + B^2.$$

Tato poslední nerovnost platí pro každou dvojici vektorů, jež splňuje uvedené předpoklady. Zejména tedy pro vektory $z.A$; $\frac{1}{z}.B$, kde z je kladné číslo. Vskutku, předpoklady jsou splněny: $z.A \neq 0' \neq \frac{1}{z}.B$, dále neexistuje číslo $c > 0$ takové, že $\frac{1}{z}.B = cz.A$, neboť jinak by $B = cz^2.A$, což je vyloučeno.

Pro každé kladné číslo z platí tedy nerovnost:

$$2.z.A.\frac{1}{z}.B < z^2.A^2 + \frac{1}{z^2}.B^2,$$

čili

$$2.A.B < z^2.A^2 + \frac{1}{z^2}.B^2$$

Dosadíme-li sem za $x = \sqrt{\frac{|B|}{|A|}}$, což je kladné číslo, neboť $A \neq 0' \neq B$, takže podle XII je $|A| > 0$, $|B| > 0$, dostaneme nerovnost:

$$2.A.B < \frac{|B|}{|A|} . |A|^2 + \frac{|A|}{|B|} . |B|^2 = 2 . |A| . |B|,$$

čili $A.B < |A| . |B|$, c.b.d.

Z tohoto zákona se odvodí další zákon:

$$|A.B| \leqq |A| . |B| , \qquad /2/$$

Rovnost $|A.B| = |A| . |B|$ nastane, když buďto $A = 0'$ $B = 0'$ anebo existuje-li číslo c té vlastnosti, že $B = c.A$. / Rovnost nastane tudíž tehdy, když vektory A, B jsou mezi sebou závislé/.

Důkaz vyplývá snadno ze zákona /1/ , dosadíme-li místo vektoru A vektor $-A$. Jest pak $-A.B \leqq |-A| . |B| =$ $= |-1| . |A| . |B| = |A| . |B|$, tedy $-A.B \leqq |A| . |B|$, což vzhledem k /1/ dává /2/.

Dokažme další zákon

$$|A + B| \leqq |A| + |B| \qquad /3/$$

Rovnost $|A + B| = |A| + |B|$ nastane přesně v těchto případech: když buďto $A = 0'$ nebo $B = 0'$ anebo existuje-li kladné číslo c té vlastnosti, že $B = c.A$.

Důkaz . Je-li $B = 0'$, pak je vztah /3/ splněn,neboť pak $|A| \leqq |A|$. Podobně pro $A = 0'$. Když $B = c.A$, $c > 0$, pak

$$|A + B| = |A + c.A| = |(1 + c) . A| = |1 + c| . |A| =$$
$$= (1 + c) .|A| = |A| + c. |A| = |A| + |c.A| = |A| + |B| .$$

Předpokládejme nyní, že $A \neq 0' \neq B$ a že neexistuje číslo $c > 0$ uvedené vlastnosti. Máme dokázati vztah $|A + B| < |A| + |B|$. Jelikož délka vektoru je nezáporné

číslo, stačí dokázati, že čtverec čísla na levé straně je menší než-li čtverec čísla na pravé straně v této nerovnosti. Tomu tak vskutku jest, neboť podle /1/ jest $A.B < |A| \cdot |B|$, takže $|A + B|^2 = (A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2.A.B =$
$= |A|^2 + |B|^2 + 2.A.B <$
$< |A|^2 + |B|^2 + 2.|A|.|B| = (|A| + |B|)^2$, j.b.d.

Dosadíme-li do /3/ za A vektor B a za B vektor $A - B$, dostaneme

$$|A| \leqq |B| + |A - B| \text{, čili}$$
$$|A| - |B| \leqq |A - B| .$$

Dosadíme-li sem za B vektor $-B$, pak $|B| = |-B|$, takže

$$|A| - |B| \leqq |A + B|$$

Odtud vyplývá

$$|A| - |B| \leqq |A \pm B| \leqq |A| + |B|$$

V tomto vztahu můžeme zaměniti vektory A a B ; výsledek je pak tento:

$$-(|A| - |B|) \leqq |A \pm B| ,$$

takže platí tento <u>zákon:</u>

$$\big|\,|A| - |B|\,\big| \leqq |A \pm B| \leqq |A| + |B|$$

Nechť je dán lineární prostor dimense n . <u>Vzdáleností dvou bodů</u> P, Q v tomto prostoru rozumíme číslo

$$|Q - P| ,$$

jež značíme $vz(P, Q)$.

Tato vzdálenost splňuje určité základní vlastnosti, jež symbolicky vyjádříme takto:

1/ $vz(P, P) = 0$; $P \neq Q \Rightarrow vz(P, Q) > 0$.

2/ $vz(P, Q) = vz(Q, P)$

1/ vz $(P, P) = 0$; $P \neq Q \Longrightarrow$ vz $(P, Q) > 0$.
2/ vz $(P, Q) =$ vz (Q, P)
3/ vz $(P, R) \leq$ vz (P, Q) + vz (Q, R) /trojúhelníková nerovnost/

Slovy:

1/ Vzdálenost dvou bodů je 0 , když oba body splynou. V každém jiném případě je vzdálenost kladné číslo.

2/ Vzdálenost jednoho bodu od druhého je rovna vzdálenosti druhého bodu od prvého.

3/ Jsou-li dány tři body / nemusí býti navzájem různé/, pak vzdálenost prvého od třetího bodu je nejvýš rovna součtu vzdáleností prvého od druhého a druhého od třetího bodu .x/

Důkaz.

1/ Je-li $P \neq Q$, pak $Q - P \neq 0'$, takže podle axiomu XII jest $(Q - P)^2 > 0$, tedy také $|Q - P| > 0$. Je-li $P = Q$,pak $Q - P = 0'$, takže $|Q - P| = 0$; také naopak:když $|Q - P| = 0$, jest $P = Q$.

2/ Jest

$$|Q - P| = |-1 . (P-Q)| = |-1| . |P - Q| = |P - Q|$$

3/ Dosaďme do zákona 3/ : $A = Q - P$, $B = R - Q$.

Pak jest

$$|R - P| \leq |Q - P| + |R - Q| ,$$

j.b.d.

Věta. V trojúhelníkové nerovnosti 3/ platí rovnost vz $(P, R) =$ vz $(P,Q) + (Q. R)$, když a jen když buďto všecky tři body P, Q, R splynou, nebo když bod Q je na uzavřené úsečce u $|P, R|$.

Důkaz. Je-li $P = Q = R$, pak je věta zřejmá.Předpokládejme tedy, že všecky tři body nesplynou. Pak je buďto

x/ To je t.zv. trojúhelníková nerovnost, která říká,že strana trojúhelníka je menší než součet zbývajících dvou stran.

vz $(P, Q) > 0$ nebo vz $(Q, R) > 0$, takže rovnost v 3/ může nastati, když a jen když vz $(P, R) > 0$, t.j. $P \neq R$.

Z důkazu 3/ a ze zákona /3/ vyplývá, že rovnost nastane přesně v těchto případech buďto $Q - P = O'$, t.j. $P = Q$, nebo $R - Q = O'$, t.j. $Q = R$, anebo existuje kladné číslo c té vlastnosti, že $R - Q = c.(Q - P)$. V tomto třetím případě je bodem Q a vektorem $P \neq O'$ určena přímka. Body

$$Q + 0.(P - Q) = Q$$
$$Q + 1.(P - Q) = P$$
$$Q + c.(P - Q) = R$$

leží na této přímce. Orientujeme přímku tak, že prohlásíme vektor $P - Q$ za positivní. Uspořádání bodů na přímce je pak takové jako uspořádání jejich souřadnic / v. § 30 str. 51 /. Poněvadž c jest kladné číslo, jest $-c < 0 < 1$, takže bod Q, jehož souřadnice je 0 je mezi body P a R / jejich souřadnice jsou 1 a $-c$ /. Bod Q leží tudíž na u /P,R/.

Tím je dokázáno, že v prvých dvou vyjímečných případech je $P = Q$ resp. $Q = R$, takže bod Q je na uzavřené úsečce u /P, R /, v případě třetím je bod Q na otevřené úsečce u /P, R/.

Také se snadno dokáže naopak: Je-li bod Q na uzavřené úsečce u /P, R /, pak v 3/ platí rovnost.

§ 39.

Kartézská base modulu

Nechť je dán modul kladné dimense n. Nechť $A_1, A_2, \dots\dots, A_n$ je base tohoto modulu. Pravíme, že tento systém vektorů je <u>kartézskou basí modulu</u>, když

$$i \neq k \Longrightarrow A_i . A_k = 0$$
$$A_i^2 = 1 \qquad /i = 1, 2, \dots\dots, n/,$$

t.j. když skalární součin dvou různých vektorů base je 0 a délka každého vektoru base je 1.

V názorném trojrozměrném prostoru tvoří kartézskou basi trojice na sobě kolmých vektorů A, B, C, jejichž délka je 1. Zvolíme-li si v tomto prostoru počátek S, pak se dá každý bod prostoru přesně jedním způsobem vyjádřiti ve tvaru

$$S + x.A + y.B + z.C ,$$

kde x, y, z jsou souřadnice toho bodu. Tyto souřadnice zavedl Descartes čili Cartesius; proto se nazývají <u>kartézské souřadnice.</u> Tím je také odůvodněn název kartézská base modulu.

Existenci kartézské base modulu dokazuje tato

<u>Věta.</u> Nechť $B_1, B_2, \dots, B_n$ je base modulu M dimense n. Pak existuje kartézská base modulu $A_1, A_2, \dots A_n$ té vlastnosti, že vaktor A_i je závislý na vektorech $B_1, B_2, \dots, B_i$, $(i = 1, 2, \dots n)$.

<u>Důkaz /indukcí/.</u> Dokažme správnost věty pro $n = 1$. Nechť B_1 je base modulu. Pak jest $B_1 \not\leq 0'$, takže $\frac{1}{|B_1|} > 0$. Položme $A_1 = \frac{1}{|B_1|} . B_1$. Pak jest vektor A_1 závislý na B_1 a jest $A_1^2 = \frac{1}{|B_1|^2} \cdot B_1^2 = 1$.

Předpokládejme nyní, že věta je správná pro $n - 1$ a dokažme její správnost také pro n.

Vektory $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ tvoří basi podmodulu $M_1 \subset M$ dimense $n - 1$. Podle předpokladu pro indukci existuje kartézská base $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ podmodulu M_1. Položme

$$A_n = z.B_n + x_1.A_1 + x_2.A_2 + \dots + x_{n-1} . A_{n-1} ,$$

kde $z > 0$.

Vektor A_n není závislý na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, neboť v opačném případě byl by vektor B_n závislý na těchto vektorech. Proto systém vektorů

$$A_1 , A_2 , \dots , A_n$$

tvoří basi modulu M. Hledejme podmínku, jak jest třeba voliti čísla x_j a z, aby tato base byla kertézská. Jelikož base $A_1 , A_2, \dots, A_{n-1}$ je kartézská, dá se tato podmínka vyjádřiti těmito vztahy:

$$A_n^2 = 1 , \quad A_n . A_j = 0 \text{ pro } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Podle distributivního zákona platí:

$$0 = A_n . A_j = (z . B_n + x_1 . A_1 + x_2 . A_2 + \dots + x_{n-1} . A_{n-1}) . A_j = z . B_n . A_j + x_1 . A_1 . A_j + \dots + x_j . A_j^2 + \dots + x_{n-1} . A_{n-1} . A_j = 0 .$$

Poněvadž $A_i . A_j = 0$ (pro $i \neq j$, $i, j < n$) a $A_j^2 = 1$, jest $z . B_n . A_j + x_j = 0$, tedy $x_j = - z . B_n . A_j$. Odtud vyplývá: $A_n = z \left(B_n - (B_n . A_1) A_1 - (B_n . A_2) . A_2 - \dots - (B_n . A_{n-1}) . A_{n-1}\right) = z . A$. Volíme-li $z = \frac{1}{|A|}$, jest $A_n^2 = \frac{A^2}{|A|^2} = 1$. Položíme-li tedy $A_n = \frac{A}{|A|}$, kde

$$A = B - (B_n . A_1) . A_1 - (B_n . A_2) . A_2 - \dots - (B_n . A_{n-1}) . A_{n-1} ,$$

pak systém vektorů $A_1, A_2, \dots , A_n$ tvoří kartézskou basi modulu M.

Z této věty vyplývá snadno

<u>Věta.</u> Nechť M_1 je podmodul modlu M. Nechť dimense M_1 je m, dimense M je n. Nechť $A_1, A_2, \dots, A_m$ je kartézská base modulu M_1. Pak se tato base dá rozšířiti v kartézskou basi modulu M.

$$A_1 , A_2, \dots , A_m, A_{m+1} , \dots , A_n .$$

§ 40.

K O L M O S T .

xxxxxxxxxxxxxxx

Nechť M je modul. Jsou-li A a B dva jeho vektory, řekneme, že <u>vektor</u> A <u>je kolmý na vektor</u> B nebo že vektory A a B jsou <u>na sobě kolmé</u>, když $A.B = 0$. Je-li $M_1 \subset M$ podmodul a C vektor modulu M, řekneme, že <u>vektor</u> C <u>je kolmý na podmodul</u> M_1, když je kolmý na každý vektor podmodulu M_1.

Z této definice vyplývá, že vektor O' je kolmý na každý vektor modulu M. Je-li tedy dimense M_1 rovna 0, pak je každý vektor kolmý na podmodul M_1; je-li dimense M_1 rovna dimensi M, pak jediný nulový vektor je kolmý na podmodul M_1.

<u>Věta</u>. Nechť je dán modul M dimense $n > 0$ a podmodul $M_1 \subset M$ dimense m, $0 < m < n$. Zvolme v M_1 kartézskou basi $A_1, A_2, \dots, A_m$. Podle poslední věty v předešlém § dá se tato base rozšířiti v kartézskou basi $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, A_n$ modulu M. Nechť je dán vektor $X = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \dots + x_n.A_n$. Vektor X je kolmý na podmodul M_1, když a jen když $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$, t.j. $X = x_{m+1}.A_{m+1} + x_{m+2}.A_{m+2} + \dots + x_n.A_n$.

<u>Důkaz.</u> Je-li především vektor X kolmý na podmodul M_1, pak jest

$$0 = A_1.X = x_1.A_1^2 + x_2.A_1.A_2 + \dots + x_n.A_1.A_n = x_1$$

$$0 = A_2.X = x_1.A_2.A_1 + x_2.A_2^2 + \dots + x_n.A_2.A_n = x_2$$

$$\vdots$$

$$0 = A_m.X = x_1.A_m.A_1 + x_2.A_m.A_2 + \dots + x_n.A_m.A_n = x_m,$$

tedy $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.

Je-li naopak $X = x_{m+1}.A_{m+1} + x_{m+2}.A_{m+2} + \dots + x_n.A_n$ a je-li $Y = y_1.A_1 + y_2.A_2 + \dots + y_m.A_m$ libovolný vektor podmodulu M_1, pak jest $X.Y = 0$, neboť roznásobíme-li součin X.Y podle distributivního zákona, bude v každém sčítanci číslo $x_j.y_i.A_j.A_i$, $i = 1,2,\dots m$, $j = m+1, m+2, \dots, n$. Poněvadž $A_j.A_i = 0$, jest každý sčítanec roven 0.

Všecky vektory X uvedeného tvaru tvoří podmodul dimense $n - m$. Odtud vyplývá věta, jež platí i pro vyjímečné případy $m = 0$ a $m = n$:

<u>Věta.</u> Nechť M_1 je podmodul modulu M . Nechť dimense M_1 jest m , dimense M jest n . Všecky vektory, jež jsou kolmé na podmodul M_1 tvoří podmodul $M_2 \subset M$ dimense $n - m$.

Podmoduly M_1 a M_2 mají tuto vlastnost: Vektor A je kolmý na podmodul M_1 ,když a jen když náleží do M_2 a vektor B je kolmý na podmodul M_2 , když a jen když náleží do M_1 . Podmoduly M_1 a M_2 mají jediný společný vektor, totiž nulový vektor $0'$.

Mají-li dva podmoduly M_1 a M_2 vlastnost právě popsanou,pravíme, že jsou <u>totálně kolmé.</u>

<u>Věta.</u> Součet dimensí dvou totálně kolmých podmodulů je roven dimensi modulu.

Nechť je dán lineární prostor kladné dimense n . Nechť p a q jsou dvě přímky v tomto prostoru. Nechť směr přímky p je určen vektorem A , směr přímky q vektorem B . Pravíme, že <u>přímka</u> p <u>je kolmá na přímku</u> q , nebo že <u>přímky</u> p a q <u>jsou na sobě kolmé,</u> když $A.B = 0$. Říkáme také,že dva směry jsou na sobě kolmé nebo že směr a přímka resp. vektor a přímka jsou na sobě kolmé.

Kolmost dvou přímek je tu definována jednoznačně. Vskutku, jsou-li A', B' dva jiné vektory jež určují směry přímek p a q , pak jest $A' = x.A$, $B' = y.B$, kde $x \neq 0$, $y \neq 0$, takže $A'.B' = 0$, když a jen když $A.B = 0$.

Nechť N je nadrovina lineárního prostoru.Pravíme, že <u>směr je kolmý k nadrovině</u> N , když každý jeho vektor je kolmý ke každému vektoru té nadroviny.Poněvadž tento směr a směr nadroviny jsou totálně kolmé podmoduly a jelikož dimense směru nadroviny je $n - 1$, jest podle poslední věty dimense tohoto kolmého směru rovna 1 . V lineárním prostoru existuje tudíž přesně jeden směr kolmý k nadrovině N ./ Tento směr není zřejmě obsažen ve směru nadroviny/.

Řekneme, že přímka p je kolmá k nadrovině N , když její směr je kolmý k této nadrovině.

Věta. Je-li dána nadrovina a bod, pak tímto bodem prochází přesně jedna přímka, jež je kolmá k nadrovině.

Tímto bodem a směrem je přímka jednoznačně určena.

§ 41 .

Vzdálenost bodu od nadroviny.

Věta. Nechť je dán lineární prostor, bod P a nadrovina N . Nechť bod Z probíhá všecky body nadroviny N . Pak existuje přesně jeden bod Z takový, že jeho vzdálenost od bodu P je minimální.

Důkaz. Bodem P prochází jediná přímka kolmá k nadrovině N . Poněvadž směr této kolmice není obsažen ve směru nadroviny N , existuje jediný průsečík - pata kolmice - přímky s nadrovinou; označme Q patu této kolmice a dokažme vztah

$$vz\,(Z, P) \geq vz\,(Q, P)\,.$$

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ je kartézská base nadroviny N . Touto basí a bodem Q je nadrovina N úplně určena. Je-li Z libovolný bod nadroviny, existují čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ té vlastnosti, že $Z = Q + x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots + x_{n-1}.A_{n-1}$, tedy $Z - P = x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots + x_{n-1}.A_{n-1} + Q - P$. Odtud vyplývá $(Z - P)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + (Q - P)^2$, neboť vektor $Q - P$ je kolmý na každý vektor A_i $(i = 1, 2, \ldots n-1)$

Proto

$$(Z - P)^2 \geq (Q - P)^2 \quad \text{čili} \quad |Z - P| \geq |Q - P|, \quad \text{j.b.d.}$$

Rovnost $vz\,(Z, P) = vz\,(Q, P)$ nastane jen v jediném případě $Z = Q$. Pro každý jiný bod Z jest vzdálenost vz (Z, P) kladná, neboť existuje aspoň jeden index i té vlastnosti, že $x_i \neq 0$, takže $x_i^2 > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$.

Definice. Minimální vzdálenost vz (P,Q) se nazývá <u>vzdáleností bodu P od nadroviny N.</u>

V obyčejném prostoru tvoří kartézskou basi trojice na sobě kolmých vektorů A_1, A_2, A_3, jež mají délku 1. Je-li X libovolný vektor prostoru, dá se přesně jedním způsobem psáti ve tvaru

$$X = x.A_1 + y.A_2 + z.A_3$$

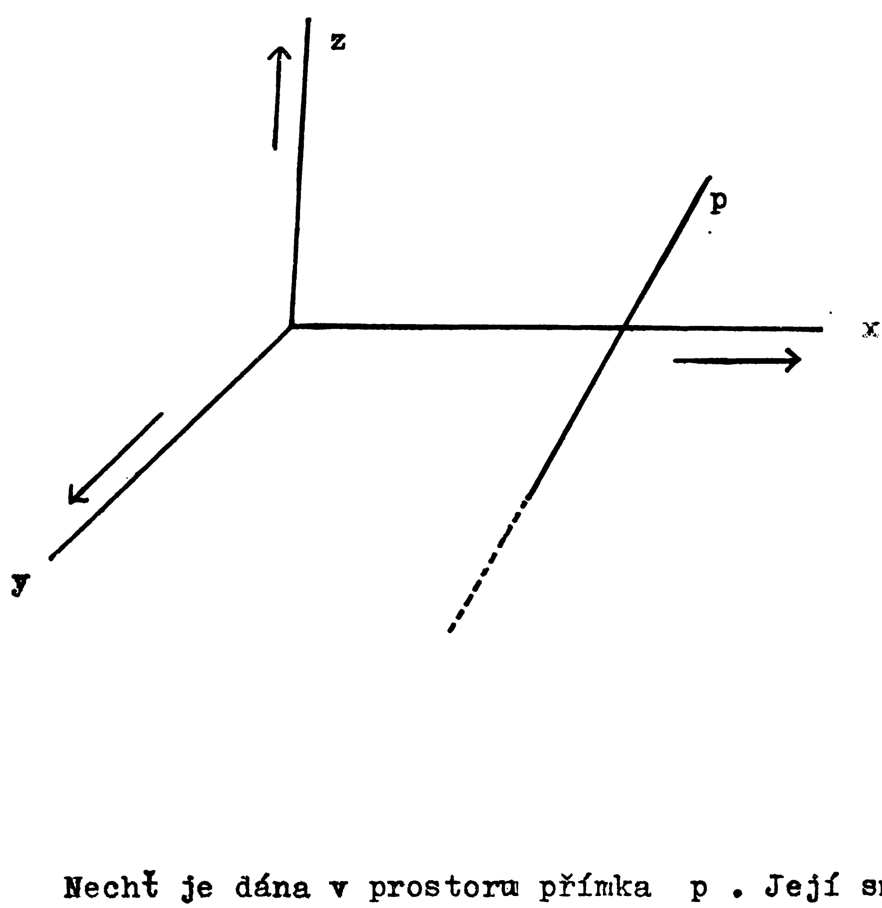
Zvolíme-li v prostoru počátek S, pak systém S, A_1, A_2, A_3 tvoří <u>kartézskou souřadnou soustavu</u> prostoru. Každý bod Z prostoru dá se přesně jedním způsobem psáti ve tvaru

$$Z = S + x.A_1 + y.A_2 + z.A_3$$

Názorný význam čísla x je tento: Bod S a vektory A_2 a A_3 určují rovinu, jež se nazývá <u>souřadná rovina.</u> Bod Z je v této rovině, když a jen když $x = 0$. Proto se tato souřadná rovina nazývá také rovinou yz nebo rovinou $x = 0$. Poněvadž vektor A_1 je kolmý k rovině yz, jest podle předešlé věty číslo $|x|$ rovno vzdálenosti bodu Z od roviny yz. Rovnice roviny yz jest $F(Z) = 0$, kde $F(Z)$ je lineární nehomogenní forma té vlastnosti, že $F(Z) = 0$, když a jen když bod Z je v rovině yz, tedy, když $x = 0$. Rovnice roviny yz jest tudíž $x = 0$. Body Z pro než $x > 0$ vyplňují jeden poloprostor, body Z, pro než $x < 0$ vyplňují druhý poloprostor.

Podobný je význam čísel y a z.

Počátkem S veďme tři přímky na sobě kolmé. Prvá přímka, jež je určena vektorem A_1, sluje osou x, druhá, určená vektorem A_2, osou y a třetí, jež je určena vektorem A_3, sluje osa z. Existují tři souřadné roviny yz, xz, xy, jež jsou určeny příslušnými páry os. Třemi na sobě kolmými přímkami a počátkem S není soustava souřadná ještě určena. Na těchto přímkách musí býti zvoleny jednotkové vektory, jejichž směr je na osách symbolisován šipkami.



Nechť je dána v prostoru přímka p. Její směr dá se určiti jednotkovým vektorem B, jejž můžeme psáti ve tvaru

$$B = a.A_1 + b.A_2 + c.A_3$$

Poněvadž vektory A_1, A_2, A_3 tvoří kartézskou basi prostoru, jest

$$A_1.B = a.A_1^2 + b.A_1.A_2 + c.A_1.A_3 = a$$
$$A_2.B = a.A_2.A_1 + b.A_2^2 + c.A_2.A_3 = b$$
$$A_3.B = a.A_3.A_1 + b.A_3.A_2 + c.A_3^2 = c$$

Jelikož skalární součin dvou jednotkových vektorů je roven kosinu úhlu, který tyto vektory svírají / v. str. 91 /, jest

$$a = \cos \widehat{A_1 B}$$

$$b = \cos \widehat{A_2 B}$$

$$c = \cos \widehat{A_3 B}$$

To jsou tak zv. <u>směrové kosiny přímky</u> p . Tyto směrové kosiny splňují vztah:

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1}$$

neboť $B^2 = 1$, takže $(a.A_1 + b.A_2 + c.A_3)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$

<u>Vzorec pro skalární součin dvou vektorů</u>

$A = a.A_1 + b.A_2 + c.A_3$, $A' = a'.A_1 + b'.A_2 + c'.A_3$ jest

$$\boxed{A.A' = a.a' + b.b' + c.c'}$$

Vskutku $A.A' = (a.A_1 + b.A_2 + c.A_3) . (a'.A_1 + b'.A_2 + c'.A_3) =$
$= a.a' + b.b' + c.c'$.

<u>Vzorec pro úhel dvou jednotkových vektorů</u> A, A' jest

$$\boxed{\cos \widehat{A A'} = a.a' + b.b' + c.c'} ,$$

neboť $A.A' = |A| . |A'| . \cos \widehat{A A'}$.

<u>Vzorec pro délku vektoru</u> $A = a.A_1 + b.A_2 + c.A_3$ jest

$$\boxed{|A| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

nebo $A^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Jsou-li dány dva body $P = S + x.A_1 + y.A_2 + z.A_3$, $P' = S + x'.A_1 + y'.A_2 + z'.A_3$, pak jest
$P' - P = (x' - x) . A_1 + (y' - y) . A_2 + (z' - z) . A_3$, takže <u>vzorec pro vzdálenost dvou bodů</u> P, P' jest

$$vz\ (P,P') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

Stejné úvahy a podobné vzorce platí i v prostoru dimense $n > 3$. V tomto n-rozměrném prostoru platí tato

Věta. Nechť $B_1, B_2, \ldots, B_n$ je base n-rozměrného prostoru. Nechť

$$C_1 = x_1.B_1 + x_2.B_2 + \ldots + x_n.B_n$$
$$C_2 = y_1.B_1 + y_2.B_2 + \ldots + y_n.B_n$$
$$\vdots$$
$$C_n = z_1.B_1 + z_2.B_2 + \ldots + z_n.B_n$$

je n vektorů tohoto prostoru. Pak tyto vektory jsou mezi sebou závislé, když a jen když

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ \vdots & & & \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_n \end{vmatrix} = 0$$

Je-li base kartézská, pak nutnou a postačitelnou podmínkou pro závislost vektorů je

$$\begin{vmatrix} C_1^2, & C_1.C_2, & \ldots, & C_1.C_n \\ C_2.C_1, & C_2^2, & \ldots, & C_2.C_n \\ \vdots & & & \\ C_n.C_1, & C_n.C_2, & \ldots, & C_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

Důkaz. Vektory $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou mezi sebou závislé, když a jen když vektorová rovnice

$$a.C_1 + b.C_2 + \ldots + c.C_n = 0'$$

má netriviální řešení / v. § 7, str.10 /. Tato vektorová rovnice je ekvivalentní se soustavou n lineárních homogenních rovnic o n neznámých $a, b, \ldots, c$:

$$x_1.a + y_1.b + \ldots + z_1.c = 0$$
$$x_2.a + y_2.b + \ldots + z_2.c = 0$$
$$\vdots$$

$$\vdots$$
$$x_n.a + y_n.b + \ldots + z_n.c = 0$$

Z teorie determinantů je známo,že tato soustava má vedle triviálního řešení ještě řešení netriviální, když a jen když determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} x_1, y_1, \ldots, & z_1 \\ x_2, y_2, \ldots, & z_2 \\ \vdots & \\ x_n, y_n, \ldots, & z_n \end{vmatrix} = 0$$

Vektory C_1, C_2, ..., C_n jsou tudíž závislé když a jen když determinant jejich souřadnic je roven 0 .

Jelikož reálné číslo je rovno 0 , když a jen když jeho čtverec je roven 0 , jest nutná a postačitelná podmínka pro závislost vektorů C_1, C_2, ..., C_n v prostoru s kartézskou basí x/

$$\begin{vmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \\ \vdots \\ z_1, z_2, \ldots, z_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} C_1^2, & C_1.C_2, & \ldots, & C_1.C_n \\ C_2.C_1, & C_2^2, & \ldots, & C_2.C_n \\ \vdots & & & \\ C_n.C_1, & C_n.C_2, & \ldots, & C_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Příklad.</u> Určiti vzdálenost bodu Q od přímky p .

Nechť přímka p je dána bodem P a vektorem A . Pak existuje číslo x takové ,že P + x.A je pata kolmice procházející bodem Q . Vzdálenost bodu Q od přímky p je rovna vzdálenosti bodu Q od paty kolmice P + x.A. Číslo x vypočítáme takto: Poněvadž vektor Q - (P + x.A) je kolmý na vektor A , jest

$$\big(Q - (P + x.A)\big) . A = 0 \text{, čili}$$

$$(Q - P) . A - x.A^2 = 0 .$$

---

x/ Součin dvou determinantů stupně n je determinant stupně n , v jehož r - tém řádku a s - tém sloupci je skalární součin r - tého řádku prvého determinantu a s - tého sloupce druhého determinantu, tedy číslo, jež je rovno součtu součinů stejnolehlých členů r- tého řádku a s - tého sloupce.

Poněvadž $A \neq O'$, jest $A^2 > 0$, takže

$$x = \frac{(Q - P) . A}{A^2}$$

Příklad. Určiti vzdálenost bodu Q od roviny.

Nechť rovina je dána bodem P a vektory A, B. Pak existují čísla x a y taková, že $P + x.A + y.B$ je pata kolmice procházející bodem Q. Jest třeba vypočítati čísla x a y.

Poněvadž vektor $Q - (P + x.A + y.B)$ je kolmý na rovinu, tedy i na vektor A i na vektor B, jest

$$\big(Q - (P + x.A + y.B)\big) . A = 0$$

$$\big(Q - (P + x.A + y.B)\big) . B = 0 \text{, čili}$$

$$(Q - P) .A - x. A^2 - y.A.B = 0$$

$$(Q - P) .B - x.A.B - y.B^2 = 0$$

Jelikož vektory A, B jsou mezi sebou nezávislé, jest podle poslední věty

$$\begin{vmatrix} A^2, & A.B \\ A.B, & B^2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ,}$$

takže ze dvou posledních rovnic dají se vždy vypočítati čísla x a y

§ 42 .

Vzdálenost dvou mimoběžek.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Definice. Osa mimoběžek je příčka, jež je na obě mimoběžky kolmá.

Věta. Nechť p a q jsou dvě mimoběžky v prostoru. Nechť bod X probíhá přímku p, bod Y přímku q. Pak existuje přesně jedna dvojice bodů X, Y taková, že vzdálenost vz (X, Y) je minimální.

Definice. Tuto minimální vzdálenost nazýváme vzdáleností dvou mimoběžek.

Důkaz. Nechť přímka p je určena bodem P a vektorem A, přímka q bodem Q a vektorem B. Vektory A, B určují modul dimense 2. Podle věty na str. 101. existuje jediný směr / v trojrozměrném prostoru/ - určený vektorem C - jenž je kolmý na tento modul. Poněvadž C není v tomto modulu, tvoří vektory A, B, C basi celého prostoru. Existují tudíž reálná čísla a, b. c té vlastnosti, že

$$Q - P = a.A + b.B + c.C \text{ , čili}$$

$$Q - b.B - (P + a.A) = c.C$$

Bod $X_0 = P + a.A$ je na přímce p, bod $Y_0 = Q - b.B$ je na přímce q. Poněvadž $Y_0 - X_0 = c.C$, jest vektor $Y_0 - X_0$ a tedy i přímka procházející body X_0 a Y_0 kolmá na obě mimoběžky. Tím je dokázáno, že ke dvěma mimoběžkám existuje aspoň jedna jejich osa.

Předpokládejme, že body P a Q jsou voleny tak, že příčka jimi procházející je osou obou mimoběžek, takže vektor $P - Q$ je kolmý na oba vektory A a B. Je-li $X = P + x.A$, $Y = Q + y.B$, pak

$$X - Y = x.A - y.B - (Q - P) \text{ , tedy}$$

$$(X - Y)^2 = \left(x.A - y.B - (Q - P)\right)^2 = (x.A - y.B)^2 + (Q - P)^2 .$$

Odtud vychází

$$|X - Y| \geq |Q - P| \text{ , čili } vz\,(X, Y) \geq vz\,(P,Q)$$

Vzdálenost $vz\,(P, Q)$ je tudíž minimální mezi vzdálenostmi $vz\,(X, Y)$.

Rovnost $vz\,(X, Y) = vz\,(P, Q)$ nastane, když a jen když $(x.A - y.B)^2 = 0$, tedy $x = 0$, $y = 0$, čili $X = P$, $Y = Q$. Body P a Q jsou tudíž jedinou dvojicí bodů na různých mimoběžkách, jejichž vzdálenost je minimální.

Poznámka. Dokázali jsme existenci aspoň jedné osy dvou mimoběžek. Jelikož průsečíky této osy s mimoběžkami tvoří právě onu jedinou dvojici bodů o minimální vzdálenosti, existuje jediná osa dvou mimoběžek.

Příklad. Určiti vzdálenost dvou mimoběžek.

Nechť prvá mimoběžka je určena bodem P a vektorem A, druhá mimoběžka bodem Q a vektorem B. Průsečíky osy s mimoběžkami jsou tvaru $P + x.A$, $Q + y.B$. Jest třeba vypočítati čísla x a y.

Vektor $Q + y.B - (P + x.A)$ je kolmý na vektory A a B. Proto

$$\big((Q + y.B) - (P + x.A)\big).A = 0$$
$$\big((Q + y.B) - (P + x.A)\big).B = 0\ , \text{ čili}$$
$$(Q - P).A - x.A^2 + y.A.B = 0$$
$$(Q - P).B - x.A.B + y.B^2 = 0\ .$$

Jelikož vektory A, B jsou mezi sebou nezávislé, jest

$$\begin{vmatrix} A^2, & A.B \\ A.B, & B^2 \end{vmatrix} \neq 0\ .$$

takže ze dvou posledních rovnic dají se vypočítati čísla x a y. Vzdálenost dvou mimoběžek je pak rovna vzdálenosti nalezených bodů $P + x.A$ a $Q + y.B$.

§ 43.

N o r m á l n í   r o v n i c e   n a d r o v i n y .

Nechť $S, A_1, A_2, \dots, A_n$ je kartézská soustava v n - rozměrném lineárním prostoru. Nechť N je nadrovina tohoto prostoru. Její rovnice je

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \qquad \dots /1/$$

kde koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_n$ nejsou vesměs rovny 0.

Nechť je dán bod $P = S + x_1^o . A_1 + x_2^o . A_2 + \dots + x_n^o . A_n$ v N. Pak jest $a_1 x_1^o + a_2 x_2^o + \dots + a_n x_n^o = b$. Odečteme-li tuto rovnici od rovnice /1/ dostaneme rovnici nadroviny N procházející bodem P:

$$a_1 . (x_1 - x_1^o) + a_2 . (x_2 - x_2^o) + \dots + a_n . (x_n - x_n^o) = 0 \quad \dots /2/$$

Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ určují vektor $A = a_1 . A_1 + a_2 . A_2 + \dots + a_n . A_n$, jenž není $0'$, neboť existuje aspoň jedno číslo $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Označíme-li souřadnice proměnného bodu X: $x_1, x_2, \dots, x_n$, pak se dá rovnice /2/ psáti takto:

$$A . (X - P) = 0 \qquad \dots\dots /3/$$

Bod X je v nadrovině N, když a jen když splňuje vektorovou rovnici /3/. Je-li B libovolný vektor nadroviny N, pak existuje v N bod Z té vlastnosti, že $B = Z - P$, takže podle 3/ jest $A.B = 0$. Vektor A je tudíž kolmý k nadrovině N. Tím je určen význam čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ v rovnici nadroviny /1/ a /2/. Tato čísla a_i jsou souřadnicemi vektoru A kolmého k nadrovině N.

Nechť je dán v prostoru bod Q a nadrovina N o rovnici /3/. Pata kolmice X spuštěné z bodu Q na nadrovinu N je v N .

Existuje tudíž číslo x té vlastnosti, že $X = Q + x.A$ a že

$$A . Q + x.A - P = 0, \text{ čili}$$

$$A . (Q - P) + x.A^2 = 0 .$$

Poněvadž $A \neq 0$, jest $A^2 > 0$, takže

$$X = - \frac{A.(Q-P)}{A^2}$$

Vzdálenost bodu Q od nadroviny N je rovna vzdálenosti bodu Q od paty kolmice $Q + x.A$, tedy rovna

$$|Q + x.A - Q| = |x| . |A| = \frac{|A . (Q-P)|}{|A|}$$

Nechť /1/ je rovnice nadroviny N. Podle poznámky k § na str. 82 není to jediná rovnice této nadroviny. Každou jinou rovnici nadroviny N dostaneme, když celou rovnici /1/ násobíme číslem $d \neq 0$. Ke každé takové rovnici dostaneme příslušný vektor $d.A$, jehož souřadnice jsou $da_1, da_2, \ldots, da_n$. Jsou dva význačné tvary rovnice – zvané <u>normální rovnice nadroviny</u> –, jejichž příslušný vektor $d.A$ je jednotkový, takže $1 = |d.A| = |d| . |A|$, čili

$$d = \pm \frac{1}{|A|} = \pm \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}$$

<u>Normální rovnice nadroviny</u> obdržíme z obecné její rovnice /1/, když ji dělíme výrazem $\pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$, resp. z vektorové rovnice /3/, když ji dělíme výrazem $\pm |A|$.

Jelikož $\frac{A.(X-P)}{|A|} = 0$ je normální tvar rovnice nadroviny N a jelikož vzdálenost bodu Q od této nadroviny je $\frac{|A.(Q-P)|}{|A|}$, vyplývá odtud toto pravidlo:

<u>Vzdálenost bodu</u> Q <u>od nadroviny</u> N vypočteme, když do anulované normální rovnice nadroviny dosadíme souřadnice bodu Q a z čísla, jež dostaneme, vezmeme absolutní hodnotu.

Rovnice roviny v prostoru procházející body

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ jest

$$\begin{vmatrix} x - x_1 , & y - y_1 , & z - z_1 \\ x_3 - x_1 , & y_3 - y_1 , & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 , & y_3 - y_2 , & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Nechť je dáno v prostoru n bodů $P_1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $P_2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$, ..., $P_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n)$, jež určují nadrovinu N. Pak vektory

$$P_n - P_1 = (x_1^n - x_1^1, x_2^n - x_2^1, \ldots, x_n^n - x_n^1),$$

$$P_n - P_2 = (x_1^n - x_1^2, x_2^n - x_2^2, \ldots, x_n^n - x_n^2),$$

$$\vdots$$

$$P_n - P_{n-1} = (x_1^n - x_1^{n-1}, x_2^n - x_2^{n-1}, \ldots, x_n^n - x_n^{n-1})$$

tvoří basi ~~směru~~ této nadroviny. Bod o souřadnicích $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je v nadrovině N, když a jen když vektor o souřadnicích $x_1 - x_1^1$, $x_2 - x_2^1$, ..., $x_n - x_n^1$ je závislý na této basi. Podle věty na str. 106 nastane tento případ, když a jen když

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^1, & x_2 - x_2^1, & \ldots & x_n - x_n^1 \\ x_1^n - x_1^1, & x_2^n - x_2^1, & \ldots & x_n^n - x_n^1 \\ x_1^n - x_1^2, & x_2^n - x_2^2, & \ldots & x_n^n - x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^n - x_1^{n-1}, & x_2^n - x_2^{n-1}, & \ldots & x_n^n - x_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

To je <u>rovnice nadroviny</u> o neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$, <u>procházející n body</u> $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

<u>Rovnice přímky v rovině procházející body</u> $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ jest

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ čili}$$

$$(y_2 - y_1) \cdot (x - x_1) - (x_2 - x_1) \cdot (y - y_1) = 0.$$

Je-li $x_2 \neq x_1$, můžeme uvésti tuto rovnici na známý tvar:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

§ 44 .

T ř e t í s k u p i n a c v i č e n í .

/1/. Určiti v rovině vzdálenost bodu $Q = (4, -1)$ od přímky jdoucí body $P_1 = (5, 3)$ a $P_2 = (-1, 2)$.

/2/. Určiti v prostoru vzdálenost bodu $Q = (-1, 4, -1)$ od přímky procházející body $P_1 = (7, 3, 4)$ a $P_2 = (3, 4, 7)$.

/3/. Určiti vzdálenost bodu $Q = (2, 5, 2)$ od roviny procházející body $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (2, 3, 4)$, $P_3 = (4, -1, -3)$,

/4/. Určiti vzdálenost dvou mimoběžek určených body $P_1 = (3, 1, 3)$, $P_2 = (1, 4, 2)$ a $Q_1 = (2, -6, -6)$, $Q_2 = (-7, 3, 2)$.

/5/. Vzdálenosti ve cvičeních /1/ a /3/ vypočtěte znovu pomocí normálních tvarů rovnic.

§ 45.

K o n g r u e n t n í   t r a n s f o r m a c e .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Nechť je dán n - rozměrný lineární prostor $\mathfrak{P}_n$ a nechť $\mathfrak{P}'$ značí lineární prostor. Kongruentním zobrazením neboli kongruentní transformací rozumíme zobrazení/ v. str.8 / prostoru $\mathfrak{P}_n$ do prostoru $\mathfrak{P}'$, jež zachovává vzdálenost, t.j. jsou-li P, Q dva libovolné body z $\mathfrak{P}_n$ a P', Q' jejich obrazy v $\mathfrak{P}'$, pak $vz\,(P, Q) = vz\,(P', Q')$.

Věta. Kongruentní transformace je prosté zobrazení.

Důkaz. Jsou-li P, Q dva různé body, pak podle vlastnosti 1/ na str. 96 jest $vz\,(P, Q) > 0$, takže také $vz\,(P', Q') > 0$, tedy $P' \neq Q'$.

Věta. Kongruentním obrazem úsečky jest úsečka.

Důkaz. Nechť $u\,/\,P, Q\,/$ jest úsečka o krajních bodech P a Q. Jelikož $P \neq Q$ jest podle předešlé věty $P' \neq Q'$ takže také $u\,/P', Q'/$ jest úsečka v prostoru $\mathfrak{P}'$. Zvolíme-li bod Z na úsečce $u/P,Q/$ pak podle věty na str.96 jest $vz\,(P,Q) = vz\,(P, Z) + vz\,(Z, Q)$, takže také $vz\,(P', Q') = vz\,(P', Z') + vz\,(Z', Q')$. Obraz Z' bodu jest tedy na úsečce $u\,/\,P', Q'/$. Máme ještě dokázati, že obraz Z' proběhne celou úsečku $u\,/P', Q'/$, jakmile jeho vzor Z proběhne úsečku $u/P,Q/$.

Podle věty na str. 63 jest úsečka $u/\,P,Q\,/$ množinou bodů Z tvaru $Z = P + x.\,(Q - P)$, kde $0 \leq x \leq 1$.

Poněvadž $vz\,(P, Z) = |Z - P| = x.\,|Q - P| = x.d$, kde $d = vz\,(P, Q)$, jest vzdálenost bodu Z od bodu P číslo mezi 0 a d; ke každému číslu y, $0 \leq y \leq d$ existuje přesně jeden bod Z, jehož vzdálenost od P jest y.

Kdyby bod Z' neprobíhal celou úsečkou $u\,/\,P', Q'/$, pak by $vz\,(P', Z')$ nenabývala všech hodnot mezi 0 a d, což není možné, neboť $vz\,(P', Z') = vz\,(P, Z)$.

Definice. Pravíme, že bod S je uprostřed mezi body P a Q, když $vz\,(P, S) = vz\,(Q, S) = \frac{1}{2}.vz\,(P,Q)$.

Z této definice vyplývá, že bod P je uprostřed mezi body P a Q, když a jen když $P = Q$. Na úsečce existuje přesně jeden bod S uprostřed mezi krajními body P a Q. Je to střed úsečky $S = \frac{1}{2}.(P + Q)$.

Věta. Kongruentním obrazem bodu S, jenž je uprostřed mezi body P a Q, je bod S', jenž je uprostřed mezi obrazy P' a Q'.

Důkaz. Vskutku, jest $vz\,(P', S') = vz\,(Q', S') = \frac{1}{2}.vz\,(P', Q')$.

Věta. Kongruentním obrazem vektoru jest vektor.

Důkaz. Nechť je dán vázaný vektor $Q - P$. Jeho obrazem rozumíme vázaný vektor $Q' - P'$. Je-li $Q_1 - P_1 = Q - P$ volný vektor, pak jest $\frac{1}{2}.(P + Q_1) = \frac{1}{2}.(Q + P_1) = Z$, takže bod Z je uprostřed mezi body P a Q_1 a také uprostřed mezi body Q a P_1. Podle předešlé věty je obraz Z' uprostřed mezi body P' a Q_1' a také uprostřed mezi body Q' a P_1'. Proto $\frac{1}{2}.(P' + Q_1') = \frac{1}{2}.(Q' + P_1')$. Odtud vyplývá rovnost vektorů $Q_1' - P_1' = Q' - P'$. Tím je dokázáno, že obrazem volného vektoru je volný vektor.

Věta. Kongruentním obrazem přímky je přímka.

Důkaz. Jsou-li P a Q dva různé body přímky, pak tato se skládá z bodů Z mezi P a Q, dále ze všech těch bodů Z_1, pro než bod P je na úsečce $u\,/\,Z_1, Q\,/$ a konečně ze všech těch bodů Z_2, pro něž bod Q je na úsečce $u\,/\,P, Z_2/$. Snadno se pozná, že také obrazy Z', Z_1', Z_2' mají tuto vlastnost v prostoru Q', j.b.d.

Je -li přímka p určitým způsobem orientována, můžeme tuto orientaci jednoduše přenésti pomocí kongruentní transformace na přímku p'.

Zvolme za tím účelem na přímce p dva různé body P a Q a označme $vz\,(P, Q) = d > 0$. Přímka p je množinou všech bodů tvaru $Z = P + x.(Q - P)$, kde x je reálné číslo. Z této rovnice vyplývá: $vz\,(P, Z) = |Z - P| = |x| \cdot vz\,(P, Q) = |x| \cdot d$. Podobně jest $Z' = P' + x'.(Q' - P')$, takže $vz\,(P', Z') = |x'| \cdot d$. Poněvadž $d \neq 0$ a $vz\,(P, Z) = vz\,(P', Z')$, jest $|x| = |x'|$. Dále jest $Z - Q = (P - Q) + x.(Q - P) = (1 - x).(P - Q)$, takže $vz\,(Q, Z) = |1 - x| \cdot d$. Podobně jest $Z' - Q' = (1 - x').(P' - Q')$, takže $vz\,(Q', Z') = |1 - x'| \cdot d$. Odtud vyplývá $|1 - x| = |1 - x'|$. Poněvadž také $|x| = |x'|$, snadno se pozná, že $x = x'$.

Kongruentní zobrazení zachová tudíž souřadnice bodů na přímce. Uspořádání bodů na přímce p / v.str.61/ se přenese kongruentní transformací na přímku p' takto: bod Z_1' je před bodem Z_2', když a jen když $x_1 < x_2$.

<u>Věta.</u> Kongruentním obrazem nulového vektoru je nulový vektor, tedy $O' = O'$.

<u>Důkaz.</u> Jest $O = P - P$, takže $O' = P' - P' = O'$.

<u>Věta.</u> Kongruentním obrazem součtu dvou vektorů je součet obrazů těchto vektorů, tedy $(A + B)' = A' + B'$.

<u>Důkaz.</u> Zvolme bod P. Pak existují body P_1 a P_2 té vlastnosti, že $A = P_1 - P$, $B = P_2 - P_1$, takže $A + B = P_2 - P$. Kongruentní transformací dostáváme $A' = P_1' - P'$, $B' = P_2' - P_1'$, $(A + B)' = P_2' - P' = A' + B'$.

<u>Věta.</u> Kongruentním obrazem součinu čísla a vektoru je součin tohoto čísla a obrazu vektoru, tedy $(c.A)' = c.A'$.

<u>Důkaz.</u> Nechť je dán vektor A a číslo c. Je-li $A = O'$, pak $c.A = O'$, takže $(c.A)' = O' = O'$. Avšak také $A' = O'$, takže $c.A' = (c.A)'$.

Je-li $A \neq O'$, pak existují dva body P, Q té vlastnosti, že $A = Q - P$. Sestrojme bod $Z = P + c.(Q - P)$ na přímce procházející body P a Q. Jeho obraz je $Z' = P' + c.(Q' - P')$, takže $Z - P = c.A$; $Z' - P' = c.A'$. Proto $(c.A)' = c.A'$.

<u>Věta.</u> Kongruentní transformace zachová skalární součin, tedy $A.B = A'.B'$.

<u>Důkaz.</u> Je-li $C = Q - P$ libovolný vektor, pak $|C| = |C'|$. Vskutku jest $C' = Q' - P'$ a $|C| = vz(P, Q) = vz(P', Q') = |C'|$. Proto jest $|A + B| = |(A + B)'| = |A' + B'|$, tedy $(A + B)^2 = (A' + B')^2$. Odtud vyplývá $A^2 + B^2 + 2.A.B = A'^2 + B'^2 + 2.A'.B'$. Poněvadž $|A| = |A'|$ a $|B| = |B'|$ jest $A^2 = A'^2$ a $B^2 = B'^2$, takže $A.B = A'.B'$.

<u>Věta.</u> Kongruentní transformace zobrazuje n-rozměrný lineární prostor $\mathcal{P}_n$ <u>na</u> nějaký n-rozměrný lineární prostor $\mathcal{P}_n'$ vnořený do prostoru $\mathcal{P}'$.

<u>Důkaz.</u> Nechť $S, A_1, A_2, \ldots, A_n$ je kartézský systém souřadný v prostoru $\mathcal{P}_n$. Každý bod Z dá se psáti přesně jedním způsobem ve tvaru

$$Z = S + x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots + x_n.A_n,$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kartézské souřadnice bodu Z. Bod S přejde kongruentní transformací v bod S', bod Z v bod Z' a vektor $Z - S$ ve vektor $Z' - S'$. Jest

$$\begin{aligned} Z' &= S' + (Z' - S') = S' + (x_1.A_1 + x_2.A_2 + \ldots + x_n.A_n)' = \\ &= S' + (x_1.A_1)' + (x_2.A_2)' + \ldots + (x_n.A_n)' = \\ &= S' + x_1.A_1' + x_2.A_2' + \ldots + x_n.A_n'. \end{aligned}$$

Kdyby vektory $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ byly mezi sebou závislé, existovala by reálná čísla $y_1, y_2, \ldots, y_n$, nikoli vesměs rovna 0 , tak že

$$y_1 . A_1' + y_2 . A_2' + \dots + y_n . A_n' = O' .$$

Avšak vektor na levé straně této rovnice je obrazem vektoru $y_1 . A_1 + y_2 . A_2 + \dots + y_n . A_n$, takže tento poslední vektor by byl nulový, což je nemožné.

Vektory $A_1', A_2', \dots, A_n'$ tvoří tudíž basi n - rozměrného lineárního prostoru $\mathcal{P}_n'$, jenž je vnořen do prostoru $\mathcal{P}'$. Snadno se pozná, že tato base je kartézskou, neboť délka i kolmost vektorů se kongruentní transformací zachovají.

<u>Poznámka.</u> Kongruentní transformací prostoru $\mathcal{P}_n$ na prostor $\mathcal{P}_n'$ dostaneme obecně takto: Zvolme v $\mathcal{P}_n$ bod S a kartézskou basi $A_1, A_2, \dots, A_n$, v prostoru $\mathcal{P}_n'$ bod S' a kartézskou basi $A_1', A_2', \dots, A_n'$. Každému bodu Z $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prostoru $\mathcal{P}_n$ přiřadíme bod Z' $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prostoru $\mathcal{P}_n'$. Tím je vskutku definována kongruentní transformace, neboť jsou-li P $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, Q $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ dva libovolné body v prostoru $\mathcal{P}_n$,pak jim odpovídají body P' $(a_1 a_2 , \dots, a_n)$, $Q'(b_1, b_2, \dots, b_n)$ v prostoru $\mathcal{P}_n'$, takže podle podobného vzorce jako na str.105 jest

$$vz\ (P,Q) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + \dots + (b_n-a_n)^2} = vz(P',Q')$$

<u>Věta.</u> Nechť je dána kongruentní transformace prostoru $\mathcal{P}_n$ na prostor $\mathcal{P}_n'$. Nechť $A_1, A_2, \dots, A_n$ je kartézská base a nechť $B_1, B_2, \dots, B_n$ je jiná base prostoru $\mathcal{P}_n$. Pak determinant přechodu od base prvé k basi druhé je roven determinantu přechodu od base $A_1', A_2', \dots, A_n'$ k basi $B_1', B_2', \dots, B_n'$.

<u>Důkaz.</u> Poněvadž vektory $B_1, B_2, \dots, B_n$ jsou závislé na vektorech $A_1, A_2, \dots, A_n$, existují reálná čísla $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}$ té vlastnosti, že

$$
\begin{aligned}
B_1 &= x_{11}A_1 + x_{12}A_2 + \dots + x_{1n}A_n \\
B_2 &= x_{21}A_1 + x_{22}A_2 + \dots + x_{2n}A_n \\
&\vdots \\
B_n &= x_{n1}A_1 + x_{n2}A_2 + \dots + x_{nn}A_n
\end{aligned}
$$

Podle předešlé věty jest

$$
\begin{aligned}
B_1' &= x_{11}A_1' + x_{12}A_2' + \dots + x_{1n}A_n' \\
B_2' &= x_{21}A_1' + x_{22}A_2' + \dots + x_{2n}A_n' \\
&\vdots \\
B_n' &= x_{n1}A_1' + x_{n2}A_2' + \dots + x_{nn}A_n'
\end{aligned}
$$

Determinant přechodu od base $A_1, A_2, \dots, A_n$ k basi $B_1, B_2, \dots, B_n$ jest podle § 28 na str. 56

$$
\begin{vmatrix}
x_{11}, & x_{12}, & \dots, & \\
x_{21}, & x_{22}, & \dots, & x_{2n} \\
\vdots & & & \\
x_{n1}, & x_{n2}, & \dots, & x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

To je také determinant přechodu od base $A_1', A_2', \dots, A_n'$ k basi $B_1', B_2', \dots, B_n'$.

Z této věty vyplývá, že se kongruentní transformací orientace přenese jednoduchým způsobem. Je-li prostor Φ_n nějak orientován, přejdou kongruentní transformací všecky positivní base v jednu skupinu basí, všecky negativní base prostoru Φ_n ve druhou skupinu basí prostoru Φ_n'.

__Definice.__ Nechť je dána kongruentní transformace orientovaného prostoru Φ_n na týž prostor Φ_n. Tuto transformaci nazveme __přímou__, když positivní base přejde zase v positivní basi, __nepřímou__, když positivní base přejde v negativní basi.

§ 46.

K o m p l e x n í   s o u ř a d n i c e   v   r o v i n ě .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Komplexní číslo $z = a + bi$ je skupina dvou čísel. Prvé reálné číslo a sluje reálná část, druhé reálné číslo b sluje imaginární část komplexního čísla. Když imaginární část je 0, pak komplexní číslo je reálným číslem; když imaginární část není 0, pak komplexní číslo nazveme imaginárním číslem. Ryze imaginární číslo je to komplexní číslo, jehož reálná část je 0.

Komplexní čísla jsou souhrnem čísel reálných a imaginárních. Znalost základních početních úkonů komplexními čísly předpokládáme.

Komplexní číslo $a - bi$ sluje konjugované nebo sdružené k číslu $a + bi$. Označujeme je takto:

$$a - bi = (a + bi)^*$$

Nejdůležitější vlastnosti konjugovaných čísel jsou:

$$(z^*)^* = z$$

$z^* = z$, když a jen když z je reálné číslo .

$z^* = -z$, když a jen když z je číslo ryze imaginární.

$$(z_1 \quad z_2)^* = z_1^* \pm z_2^* \qquad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$z \cdot z^* = |z|^2$, kde $|z|$ je absolutní hodnota komplexního čísla z .

V oboru komplexních čísel je možné zavésti absolutní hodnotu touto definicí:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Je-li $b = 0$, pak $a = \sqrt{a^2}$, což je v souhlase s obvyklým znakem pro absolutní hodnotu v oboru reálných čísel.

Verifikací snadno se dokáže vztah:

$$|(a + bi) \cdot (c + di)| = |a + bi| \cdot |c + di|$$

Vskutku, $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$.

Nechť je dána orientovaná rovina. Nechť S, U_1, U_2 je kartézský souřadný systém; každý bod P dá se jediným způsobem vyjádřiti ve tvaru

$$P = S + x \cdot U_1 + y \cdot U_2$$

a každý vektor jediným způsobem ve tvaru

$$A = x \cdot U_1 + y \cdot U_2$$

Souřadnice bodu P resp. vektoru A jsou dvě reálná čísla x, y. Místo o dvou reálných souřadnicích x, y budeme mluviti o jedné komplexní souřadnici $z = x + iy$ bodu P, resp. vektoru A. Reálná část komplexní souřadnice z je souřadnice x, imaginární část je souřadnice y.

Každé komplexní číslo je souřadnicí přesně jednoho vektoru / bodu/ a naopak.

Věta. Vektor A je nulový, když a jen když jeho komplexní souřadnice jest 0.

Věta. Jsou-li $A_1 = x_1 U_1 + y_1 U_2$, $A_2 = x_2 U_1 + y_2 U_2$ dva vektory o komplexních souřadnicích $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, pak $A_1 + A_2$ je vektor o souřadnicích $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, tedy jeho komplexní souřadnice je $z_1 + z_2$.

Věta. Je-li c reálné číslo a má-li vektor A komplexní souřadnici $z = x + iy$, pak vektor $c \cdot A$ má souřadnice cx, cy, tedy komplexní souřadnici cz.

Věta. Poněvadž $|A| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, jest délka vektoru A rovna absolutní hodnotě jeho komplexní souřadnice.

Z této věty a ze zákona /3/ na str. 94, podle něhož $|A_1 + A_2| \leqq |A_1| + |A_2|$, vyplývá důležitá trojúhelníková nerovnost mezi komplexními čísly:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| .$$

Nechť jsou dány dva body $P_1 = S + x_1U_1 + y_1U_2$, $P_2 = S + x_2U_1 + y_2U_2$. Pak vektor $P_1 - P_2$ má komplexní souřadnici $z_1 - z_2$. Odtud vyplývá:

<u>Věta.</u> Je-li bod P komplexní souřadnici z a vektor A komplexní souřadnici z', pak bod $P + A$ má komplexní souřadnici $z + z'$.

<u>Věta.</u> Jelikož vz $(P_1, P_2) = |P_1 - P_2| = |z_1 - z_2|$, jest vzdálenost dvou bodů rovna absolutní hodnotě rozdílu jejich komplexních souřadnic.

Skalární součin dvou vektorů $A_1 . A_2$ je obecně jiný než součin jejich komplexních souřadnic, neboť podle vzorce na str. 105 jest $A_1 . A_2 = x_1x_2 + y_1y_2$, kdežto $z_1 . z_2 =$
$= (x_1 + iy_1) . (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

<u>Věta.</u> Nechť A_1, A_2 jsou dva nenulové vektory o komplexních souřadnicích z_1, z_2. Tyto vektory jsou rovnoběžné /t.j. mezi sebou závislé/, když a jen když číslo $\frac{z_2}{z_1}$ je reálné; jsou na sobě kolmé / t.j. jejich skalární součin je 0 /, když a jen když číslo $\frac{z_2}{z_1} = ik$ je ryze imaginární; vektory A_1, A_2 tvoří positivní basi, když $k > 0$, negativní basi, když $k < 0$.

<u>Důkaz.</u> Předpokládejme nejprve, že vektory A_1, A_2 jsou rovnoběžné. Pak existuje reálné číslo h té vlastnosti, že $A_2 = h.A_1$, takže $z_2 = h.z_1$. Proto $h = \frac{z_2}{z_1}$, kde $z_1 \neq 0$, neboť $A_1 \neq 0'$.

Nechť nyní naopak číslo $\frac{z_2}{z_1}$ je reálné. Označme je opět h. Pak jest $z_2 = h.z_1$, takže $A_2 = h.A_1$, t.j. vektory A_1, A_2 jsou rovnoběžné.

Předpokládejme nyní, že vektory A_1, A_2 jsou na sobě kolmé. Pak jest $A_1 . A_2 = 0$, tedy $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Avšak $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, když a jen když komplexní číslo

$z_1^{*} . z_2 = (x_1 - iy_1) . (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 +$

$+ i(x_1y_2 - x_2y_1)$ má reálnou část 0, t.j. když je ryze imaginární. Proto jest $z_1^{*} . z_2 = ik$, kde $k = (x_1y_2 - x_2y_1)$ je reálné číslo. Platí vztah: $z_1^{*} = \frac{|z_1|^2}{z_1}$, takže $\frac{z_2}{z_1} = i \frac{k}{|z_1|^2}$, což je číslo ryze imaginární.

Nechť nyní naopak číslo $\frac{z_2}{z_1}$ je ryze imaginární. Pak jest $z_1^{*} . z_2 = i(x_1y_2 - x_2y_1)$, takže $x_1x_2 + y_1y_2 = A_1 . A_2 = 0$. Vektory $A_1 . A_2$ jsou tudíž na sobě kolmé.

Determinant přechodu od base U_1, U_2 k basi A_1, A_2 jest

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = k ,$$

takže vektory A_1, A_2 tvoří positivní basi, když a jen když tento determinant je kladný, t.j. $k > 0$.

<u>Věta.</u> Vektory A_1, A_2 jsou na sobě kolmé a jsou stejně dlouhé, když a jen když $\frac{z_2}{z_1} = \pm i$.

Vskutku, jelikož $k = 1$, jest

$|ik| = 1 = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{|A_2|}{|A_1|}$, takže $|A_2| = |A_1|$.

Z této věty vyplývá: Otočíme-li vektor A s komplexní souřadnicí z o pravý úhel, pak komplexní souřadnice otočeného vektoru je $+ iz$ nebo $- iz$ podle toho, zda otočený vektor je nalevo či napravo od vektoru A.

§ 47.

K o n g r u e n t n í   t r a n s f o r m a c e   r o v i n y

P o j e m   ú h l u

Nechť S, U_1, U_2 je kartézský souřadný systém.

orientované roviny. Nechť je dána kongruentní transformace této roviny na tutéž rovinu. Počátek S přejde touto transformací v bod S' o komplexní souřadnici a ; base U_1, U_2 přejde opět v kartézskou basi U_1', U_2' ; komplexní souřadnici vektoru U_1' označme c , takže komplexní souřadnice vektoru U_2' jest $\pm ic$ podle toho, zda transformace je přímá či nepřímá. Poněvadž délka vektoru U_1' jest 1 , jest $|c| = 1$.

Nechť $P = S + xU_1 + yU_2$ je libovolný bod roviny o komplexní souřadnici $z = x + iy$; nechť $P' = S + xU_1' + yU_2'$ je jeho obraz. Označíme-li $a = u + iv$, $c = c_1 + ic_2$, jest $S' = S + uU_1 + vU_2$, $U_1' = c_1U_1 + c_2U_2$, $U_2' = \mp c_2U_1 \pm c_1 U_2$ / horní znaménko platí pro přímou, dolní pro nepřímou transformaci/ , takže

$$P' = S + (c_1x \mp c_2y + u) . U_1 + (c_2x \pm c_1y + v) . U_2 .$$

Souřadnice obrazu P' v soustavě S, U_1, U_2 jsou tudíž x', y', kde $x' = c_1x \mp c_2y + u$, $y' = c_2x \pm c_1y + v$. Komplexní souřadnice bodu P' v soustavě souřadné S, U_1, U_2 jest:

$$z' = x' + iy' = c_1x \mp c_2y + i.(c_2x \pm c_1y) + u + iv =$$
$$= (c_1 + ic_2) . (x \pm iy) + (u + iv) = c.(x \pm iy) + a ;$$

přímá kongruentní transformace roviny na rovinu dá se tudíž vydíž vyjádřiti ve tvaru $z' = cz + a$, nepřímá ve tvaru $z' = cz^* + a$.

Jsou-li naopak předepsána dvě komplexní čísla c, a, kde $|c| = 1$, pak vztah $z' = cz + a$ vyjadřuje kongruentní transformaci roviny na rovinu. Vskutku, jsou-li P_1, P_2 dva libovolné body roviny o komplexních souřadnicích z_1, z_2 , pak obrazy P_1', P_2' mají komplexní souřadnice $cz_1 + a$, $cz_2 + a$. Jest vz $(P_1, P_2) = |z_2 - z_1|$; rovněž vz $(P_1', P_2') = |(cz_2 + a) - (cz_1 + a)| = |c| . |z_2 - z_1| = |z_2 - z_1|$, takže vz $(P_1, P_2) =$ vz (P_1', P_2'). Podobně se dokáže, že vztah $z' = cz^* + a$ vyjadřuje kongruentní transformaci nepřímou.

Odtud vyplývá

Věta. Přímá a nepřímá kongruentní transformace orientované roviny s kartézskou souřadnou soustavou S, U_1, U_2 je jednoznačně stanovena dvojicí komplexních čísel c, a podrobených jediné podmínce $|c| = 1$. Přímá kongruentní transformace se dá vyjádřiti vzorcem

$$z' = cz + a,$$

nepřímá vzorcem

$$z' = cz^* + a.$$

Z této věty snadno vyplývá poznámka:

Přímou kongruentní transformací přejde vektor $A = xU_1 + yU_2$ o komplexní souřadnici z ve vektor $A' = xU_1' + yU_2'$ o komplexní souřadnici $z' = cz$. Nepřímou kongruentní transformací přejde vektor o souřadnici z ve vektor o souřadnici $z' = cz^*$, při čemž c je komplexní souřadnice vektoru U_1'.

Přímé kongruentní transformace.

Nechť je dána kongruentní transformace roviny na rovinu. Bod P nazveme invariantním bodem, když splyne se svým obrazem $P' = P$. Podle invariantních bodů dají se přímé kongruence takto klasifikovati:

1

Každý bod roviny jest invariantní. Tento případ nastane, když a jen když $c = 1$, $a = 0$. Pak jest vskutku $z' = z$, takže $Z' = Z$ pro každý bod Z roviny. Kongruentní transformace jest v tomto případě identitou.

2

Žádný bod roviny není invariantní. Tento případ nastane, když a jen když $c = 1$, $a \neq 0$. Pak z rovnice $z' = cz + a$ vyplývá $z' \neq z$, tedy $Z' \neq Z$ pro každý bod roviny. Kongruentní transformace se nazývá v tomto případě <u>translací.</u> Tato jest jednoznačně stanovena vektorem A o komplexní souřadnici a, neboť bod Z přejde v bod $Z' = Z + A$.

3

Existuje přesně jeden invariantní bod. Tento případ nastane, když a jen když $c \neq 1$. Rovnice $z = cz + a$ má pak přesně jedno řešení $z = \frac{a}{1-c}$, což jest komplexní souřadnice onoho jediného invariantního bodu. Této kongruentní transformaci se říká <u>rotace</u> neboli <u>otáčení.</u>

Při identitě a translaci zůstanou zachovány všecky vektory, neboť $c = 1$, takže $z' = z$ pro každou komplexní souřadnici vektoru. Jest tudíž $X' = X$ pro každý vektor roviny. Naproti tomu při rotaci, při níž $c \neq 1$, zůstane zachován jediný nulový vektor.

Dokázali jsme, že dvojici čísel c, a, kde $|c| = 1$ je stanovena kongruentní transformace roviny o souřadné soustavě S, U_1, U_2 na tutéž rovinu. Tato dvojice komplexních čísel bude obecně jiná, zvolíme-li jinou soustavu souřadnou. To vyjadřuje

<u>Věta.</u> U přímých kongruencí má změna soustavy souřadné v rovině vliv jen na komplexní číslo a, kdežto komplexní číslo c není závislé na volbě soustavy souřadné, nýbrž na orientaci roviny.

<u>Důkaz.</u> Je-li A libovolný vektor, označme A^x vektor jenž je kolmý na vektor A, má stejnou délku a je nalevo od A. Při určité orientaci roviny jest vektor A^x určen jednoznačně vektorem A a to nezávisle na soustavě souřadné. Má-li vektor A komplexní souřadnici z, pak má vektor A^x podle věty v předchozím § na str. 124 komplexní souřadnici iz. Označíme-li z' komplexní souřadnici obrazu A', jest

$z' = cz = (c_1 + ic_2) \cdot z = c_1 z + ic_2 z$, takže vektor A' má stejnou komplexní souřadnici jako vektor $c_1 A + c_2 A^x$.

Proto

$$A' = c_1 A + c_2 A^x$$

Tu se nevyskytuje vůbec soustava souřadná. Koeficienty c_1, c_2 jsou tedy jednoznačně stanoveny a to nezávisle na soustavě souřadné. Proto také komplexní číslo $c = c_1 + ic_2$ není závislé na volbě soustavy souřadné, nýbrž jenom na orientaci roviny. Je-li rovina opačně orientována, pak místo čísla c nastoupí číslo $c^x = c_1 - ic_2$.

<u>Definice.</u> Komplexní číslo c, jež je závislé jenom na orientaci roviny nikoli na změně soustavy souřadné, nazveme <u>modulem</u> dané <u>kongruentní transformace</u>.

Místo o modulu mluví se často o <u>úhlu.</u> Pojem úhlu můžeme zavésti aritmeticky pomocí modulu takto:

Body, jejichž komplexní souřadnice je $c = c_1 + ic_2$, mají od počátku S vzdálenost $|c| = 1$. Vyplňují tedy jednotkovou kružnici o středu v počátku S. Dají se definovat *) dvě funkce reálné proměnné t, jež značíme $\cos t$, $\sin t$, a to tak, že lze psáti

$$c_1 = \cos t$$
$$c_2 = \sin t$$

Tyto dvě funkce mají určité vlastnosti, z nichž některé uvedeme:

1/ Jest $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Tato vlastnost říká, že bod o obyčejných souřadnicích $\cos t$, $\sin t$, t.j. o komplexní souřadnici $\cos t + i \sin t$, leží na jednotkové kružnici o středu v počátku S.

2/ Ke každému bodu (c_1, c_2) na jednotkové kružnici o středu v S existuje nekonečně mnoho čísel t takových, že $c_1 = \cos t$, $c_2 = \sin t$. Je-li t_0 jedno z nich, pak

---

*) Definici a bližší vlastnosti těchto funkcí nalezne čtenář v článku prof. Čecha: O funkcích x^s, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ v časopise, r.57 -/1928/ str. 208-216.

každé jiné jest tvaru

$$t = t_c + 2n\pi ,$$

kde n je celé číslo a $\pi = 3,14159 \ldots$. Vztah tento vyjadřujeme také sybolicky $t \equiv t_0 \pmod{2\pi}$, jejž čteme: t je kongruentní s číslem t_0 modulem 2π.

Bod $P(1,0)$ o komplexní souřadnici $z = 1$ dostane se pro $t = 0$, bod $P(0,1)$ o komplexní souřadnici $z = i$ pro $t = \frac{\pi}{2}$, bod $P(-1,0)$ o komplexní souřadnici $z = -1$ pro $t = \pi$ a bod $P(0,-1)$ o komplexní souřadnici $z = -i$ pro $t = -\frac{\pi}{2} \bmod (2\pi)$.

Dvě reálné funkce $\cos t$, $\sin t$ reálné proměnné t spojujeme v jedinou komplexní funkci e^{it} reálné proměnné t, vyjadřujíce ji ve tvaru:

$$c = e^{it} = \cos t + i.\sin t.$$

Platí tedy vztahy: $e^0 = 1$, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$.

Funkce e^{it} splňuje <u>adiční teorém</u>: Jsou-li t_1, t_2 reálná čísla, pak

$$e^{it_1} . e^{it_2} = e^{i.(t_1 + t_2)}$$

Porovnáním reálných resp. imaginárních částí této rovnice vyplývají známé vztahy:

$$\cos t_1.\cos t_2 - \sin t_1.\sin t_2 = \cos(t_1 + t_2)$$

$$\sin t_1.\cos t_2 + \cos t_1.\sin t_2 = \sin(t_1 + t_2)$$

Každá přímá kongruentní transformace roviny má určitý modul $c = e^{it}$, kde číslo t je tak zvaný <u>úhel rotace</u>. Přímou kongruentní transformací je modul c jednoznačně stanoven, kdežto úhel rotace t je určen až na celistvé násobky 2π.

Nechť jsou dány dvě přímé kongruentní transformace. První nechť převádí bod P v bod P', druhá bod P' v bod P''. Transformace, složená z těchto dvou, převádí bod P v bod P''. Snadno se pozná, že je to rovněž přímá kongruentní transformace. Při určité volbě soustavy souřadné je první transformace vyjádřena vztahem mezi souřadnicemi:

$$z' = c'z + a',$$

druhá vztahem

$$z'' = c''z + a''$$

Kongruentní transformace, jež je složená z těchto dvou, je dána rovnicí

$$z' = cz + a$$

Bod P o komplexní souřadnici z přejde v bod P' o komplexní souřadnici $z' = c'z + a'$, tento pak v bod P'' o komplexní souřadnici $z'' = c''z' + a'' = c''.(c'z + a') + a'' =$ $= c'c''.z + a'c'' + a''$. Poněvadž $z'' = cz + a$, jest $c = c'.c''$, $a = a'c'' + {}'$. Odtud vyplývá

Věta. Složením dvou přímých kongruentních transformací dostaneme zase přímou kongruentní transformaci, jejíž modul je roven součinu modulů těchto dvou kongruentních transformací. Je-li úhel rotace prvé kongruence t_1, úhel rotace druhé kongruence t_2, jest úhel rotace složené kongruence $t \equiv t_1 + t_2 \pmod{2\pi}$.

Vskutku, jest $c' = e^{it_1}$, $c'' = e^{it_2}$, takže $c = c'.c'' = e^{i.(t_1 + t_2)}$.

Definice úhlu dvou jednotkových vektorů A, A'.

Označme A^x vektor, jenž je kolmý na vektor A, má stejnou délku a je nalevo od vektoru A. Zvolíme-li počátek S, jest S, A, A^x kartézský systém souřadný. Existují reálná čísla c_1, c_2 taková, že

$$A' = c_1 A + c_2 A^x .$$

Poněvadž $A^x = iA$, jest $A' = (c_1 + ic_2) . A = c.A$, kde $c = c_1 + ic_2$. Poněvadž dále jest $|A| = |A'| = 1$, jest $|c| = 1$. Podle věty na str. 125 jest komplexní číslo c modulem nějaké přímé kongruentní transformace. Provedeme-li rotaci o modulu c, přejde vektor A ve vektor A'. K číslu c dá se určiti číslo reálné t mod 2π takové, že

$$c = e^{it} .$$

Toto reálné číslo t, jež je stanoveno až na celistvé násobky 2π, nazýváme <u>úhlem dvou jednotkových vektorů</u> A a A'.

<u>Definice úhlu dvou směrů.</u>

Nechť jsou dány v rovině dva směry. Zvolme v prvém směru jednotkový vektor A, ve druhém směru jednotkový vektor A'. Za <u>úhel</u> těchto <u>dvou směrů</u> prohlásíme úhel vektorů A, A'.

Jsou-li oba směry orientované, pak tyto jednotkové vektory A, A' můžeme voliti jednoznačně, ku př. tak, že jsou oba positivní. Nejsou-li však oba směry orientované, pak jsou dvě volby pro jednotkový vektor v prvém směru a dvě volby ve druhém směru. Celkem je tedy tato čtverá možnost volby: A, A'; $-A, A'$; $A, -A'$; $-A, -A'$. V prvém a čtvrtém případě jest $A' = c_1 . A + c_2 . A^x$, takže modul $c = e^{it}$ i úhel t zůstane nezměněn. V druhém případě jest $A' = -c_1 . A - c_2 . A^x$, v třetím případě $-A' = c_1 . A + c_2 . A^x$, takže modul $c = e^{it}$ přejde v $-c = -e^{it} = e^{i\pi} . e^{it} = e^{i.(t+\pi)}$ a úhel t v úhel $t + \pi$.

Úhel orientovaných směrů je tudíž určen mod 2π, úhel neorientovaných směrů je určen mod π.

Úhel dvou jednotkových vektorů závisí obecně na pořádku těchto vektorů. Úhel vektorů A, A' je obecně jiný než úhel vektorů A', A. Označíme-li modul kongruentní transformace při níž přejde A v A' písmenem c', modul transformace, při níž přejde A' v A písmenem c'', pak složením obou těchto transformací dostaneme identitu, takže $c'.c'' = 1$, tedy $c'' = \frac{1}{c'}$. Vyměníme-li vektory A a A', pak úhel vektorů A', A jest roven zápornému úhlu vektorů A, A'. Vskutku, vyměníme-li vektory A a A' má to ten účinek, že modul $c' = e^{it}$ se změní v modul $c'' = \frac{1}{c'} = e^{-it}$, tedy úhel t v úhel $-t$.

Úhel dvou jednotkových vektorů A, A' nezávisí na pořádku těchto vektorů, když a jen když $c = \frac{1}{c}$, tedy $c = \pm 1$. Úhel dvou vektorů A, A' nezávisí tedy na pořádku, když a jen když tyto jednotkové vektory jsou rovnoběžné. Při tom oba vektory jsou stejně orientované, když a jen když $c = 1 = e^0$, t.j. když a jen když svírají úhel $0 \pmod{2\pi}$, jsou opačně orientované, když a jen když $c = -1 = e^{i\pi}$, t.j. když a jen když svírají úhel $\pi \pmod{2\pi}$.

Také úhel dvou neorientovaných směrů závisí obecně na pořádku těchto směrů. Poněvadž úhel dvou neorientovaných směrů je určen až na násobky čísla π, existují dva případy, kdy úhel dvou neorientovaných směrů nezáleží na jejich pořádku. Jest to tehdy, když a jen když $c = \frac{1}{c}$ nebo $-c = \frac{1}{c}$, t.j. když tyto směry jsou rovnoběžné ($c^2 = 1$, $c = \pm 1$, t.j. $t = 0$ nebo π) nebo když oba směry jsou na sobě kolmé ($-c^2 = 1$, $c = \pm i$).

Dosavadní výsledky dají se shrnouti ve větu.

<u>Věta</u>. Úhly dvou směrů jsou dvojí: úhly orientovaných směrů a úhly neorientovaných směrů. Obecně záleží na pořádku, v jakém jsou směry dány. Úhel dvou orientovaných směrů je určen pouze a přesně až na násobky 2π, úhel dvou neorientovaných směrů až na násobky π. Vyměníme-li dva orientované směry, pak jejich úhel je $-t \equiv t \pmod{2\pi}$, vyměníme-li dva neorientované směry, pak jejich úhel je $-t \equiv t \pmod{\pi}$.

Přihlížíme-li k orientaci, pak úhel dvou směrů nezáleží na jejich pořádku, když a jen když jsou tyto rovnoběžné, nepřihlížíme-li k orientaci, pak úhel dvou směrů nezáleží na jejich pořádku, když a jen když jsou tyto buď rovnoběžné nebo na sobě kolmé.

Poznámka. V předešlé úvaze se vyskytovala celkem trojí změna: Změna orientace jednoho směru /místo modulu c přijde nový modul $-c$, t.j. místo úhlu t přijde úhel $t+\pi$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ /, pak změna pořadí dvou směrů / místo modulu c přijde modul $\frac{1}{c}$, t.j. místo úhlu t přijde úhel $-t$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$/, a konečně změna orientace roviny / místo modulu c přijde modul c^*, t.j. místo úhlu t přijde $-t\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$/.

O úhlu dvou vektorů A, A', můžeme mluviti také v lineárních prostorech dimense n, kde $n > 2$. Vektory A, A' - jsou-li mezi sebou nezávislé - určují totiž podmodul dimense 2, v němž je už definován úhel dvou vektorů. Je to však určitá dvojznačnost, jelikož si můžeme tento dvojrozměrný modul orientovati dvojím způsobem, takže vektor A^x je určen pak dvojznačně.

Poněvadž rovnice $c = e^{it}$ je splněna pro nekonečně mnoho hodnot t, je nekonečně mnoho hodnot pro úhel dvou vektorů. Naproti tomu číslo $\cos t$ jest určeno jednoznačně a číslo $\sin t$ jest určeno dvojznačně, neboť změnou orientace modulu jest $t \equiv -t\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, takže $\cos(-t) = \cos t$, $\sin(-t) = -\sin t$.

V orientované rovině s orientovanými směry jest $\cos t$ rovněž jednoznačně určen. Jsou-li směry neorientované, pak je $\cos t$ i $\sin t$ dvojznačný, neboť $\cos(t+\pi) = -\cos t$, $\sin(t+\pi) = -\sin t$. Avšak poměr $\frac{\sin t}{\cos t}$ jest jednoznačně určen.

Tento poměr se nazývá tangens úhlu t a značí se

$$\mathrm{tg}\ t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

/ není definován pro $\cos t = 0$, t.j. pro $t \equiv \frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod}\ \pi)$/.

Jelikož $\mathrm{tg}\ t$ je jednoznačný, vyskytuje se v rovinné geometrii základní vzorec pro tangens

Naproti tomu v prostoru se užívá základní formule pro kosinus, jenž je při orientovaných směrech jednoznačný.

Nechť jsou dány v prostoru dvě orientované přímky. Nechť při určité kartézské soustavě souřadné jest směr prvé přímky dán jednotkovým vektorem $A\,(a_1, a_2, a_3)$, směr druhé přímky jednotkovým vektorem $A'(b_1, b_2, b_3)$. Modul kongruentní transformace převádějící vektor A ve vektor A' jest $c = c_1 + ic_2$, takže $A' = c_1 A + c_2 A^x$, kde symbol A^x má obvyklý význam. Proto

$$A.A' = c_1 A^2 + c_2 A.A^x = c_1, \text{ neboť } A^2 = 1,\ A.A^x = 0 .$$

Proto $A.A' = c_1 = \cos t$. Jelikož podle vzorce na str. 105 jest $A.A' = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, vyplývá odtud vzorec pro úhel dvou orientovaných přímek v prostoru.

$$\boxed{\cos t = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Je-li dán vektor $A\,(a_1, a_2, a_3)$ a je-li $A'\,(1, 0, 0)$, pak dostaneme vztah

$$\cos t = a_1$$

Uvažujeme-li vektor A' o souřadnicích $0,1,0$ resp. $0,0,1$ dostaneme tyto podobné vztahy

$$\cos t = a_2$$
$$\cos t = a_3$$

Souřadnice a_1, a_2, a_3 vektoru A mají tudíž tento význam: Číslo a_1 je kosinus úhlu, který svírá přímka určená vektorem A s osou x, a_2 je kosinus úhlu, který svírá přímka tato s osou y, a_3 je kosinus úhlu této přímky s osou z. Číslům a_1, a_2, a_3 se říká <u>směrové kosiny přímky</u> určené vektorem A.

Stejný vzorec pro kosinus úhlu dvou směrů a stejný význam souřadnic a_1, a_2, a_3 vektoru A jsme odvodili z názoru na str. 105. V této úvaze jsou však tyto pojmy zavedeny přesně axiomaticky.

V trojrozměrném prostoru udává se také vzorec pro sinus úhlu dvou jednotkových vektorů A, A'. To odvodíme takto:

$$\sin^2 t = 1-\cos^2 t = 1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 .$$

Jelikož $|A| = 1 = |A'|$ a $|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,

$|A'| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, jest $1 = |A|^2 . |A'|^2 =$ $= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) . (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$. Proto

$\sin^2 t = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) . (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 +$ $+ a_3b_3)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 -$ $- a_3b_2)^2$.

Sinus úhlu jejž svírají dvě přímky určené jednotkovými vektory $A (a_1, a_2, a_3)$, $A' (b_1, b_2, b_3)$ jest tedy

$$\sin t = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2} .$$

<u>Věta.</u> Označme $a_2b_3 - a_3b_2 = c_1$, $a_3b_1 - a_1b_3 = c_2$, $a_1b_2 - a_2b_1 = c_3$. Čísla c_1, c_2, c_3 jsou souřadnicemi určitého vektoru C. Tento vektor je nulový, když a jen když oba vektory $A (a_1, b_2, a_3)$, $A' (b_1, b_2, b_3)$ jsou rovnoběžné, vektor C má délku 1, když a jen když oba vektory A, A' jsou na sobě kolmé. Jsou-li vektory A, A' mezi sebou nezávislé, pak vektor C je na obou kolmý.

<u>Důkaz.</u> $C = 0'$, když a jen když $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, t.j. když a jen když $\sin t = 0$, t.j. když a jen když A a A' jsou rovnoběžné. Jest $|c| = 1$, když a jen když

$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = 1$, t.j. $\sin t = 1$, tedy, když a jen když vektory A, A' jsou na sobě kolmé. Jsou-li vektory A, A'

mezi sebou nezávislé, pak vektor C je na obou kolmý, neboť

$$A.C = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

jak se snadno přesvědčíme, rozvineme-li tento determinant podle prvků prvého řádku. Podobně jest

$$B.C = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = \begin{vmatrix} b_1, & b_2, & b_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Nepřímé kongruentní transformace .

Nechť je dána v rovině soustava souřadná; nepřímá kongruentní transformace vektorů je stanovena tímto vztahem mezi souřadnicemi

$$z' = cz^{*} , \text{ kde } |c| = 1.$$

Kdežto u přímé kongruentní transformace není komplexní číslo c závislé na volbě soustavy souřadné, je u nepřímých transformací toto číslo závislé na soustavě souřadné.

Ke komplexnímu číslu c existuje reálné číslo t takové, že $c = e^{it}$, takže $z' = e^{it}.z^{*}$. Násobme tuto rovnici číslem $e^{-i\frac{t}{2}}$. Jest pak $e^{-i\frac{t}{2}}.z' = e^{i\frac{t}{2}}.z^{*} = (e^{-i\frac{t}{2}}.z)^{*}$. Hledejme vektor $A(z)$, jenž je roven svému obrazu $A'(z') = A(z)$, t.j. $z' = z$. Jeho komplexní souřadnice z musí splňovati rovnici $z.e^{-i\frac{t}{2}} = (z.e^{-i\frac{t}{2}})^{*}$, takže $e^{-i\frac{t}{2}}.z = d$ je reálné číslo. Tedy $z = d.e^{i\frac{t}{2}}$. Vektor A o souřadnici $z = d.e^{i\frac{t}{2}}$ je invariantním.

<u>Věta.</u> U nepřímých kongruentních transformací existují vždy dva invariantní směry, jež jsou navzájem kolmé. U jednoho z nich se zachová orientace, u druhého nikoliv.

Klasifikace nepřímých kongruentních transformací podle invariantních bodů je tato:

Volme soustavu souřadnou tak, že osa x je určena směrem, jenž se i co do orientace zachová. Pak vzorec pro nepřímou kongruenci zní: $z' = z^{*} + a$. Označme $z = x + iy$, $a = a_1 + ia_2$. Má-li býti bod $P(z)$ invariantní, musí $z = z' = z^{*} + a$, tedy $x = x + a_1$, $y = -y + a_2$. Jsou dva možné případy.

/1/

Jest $a_1 \neq 0$. Pak rovnice $x = x + a$ není splněna pro žádné x, takže není $z = z'$ pro žádnou komplexní souřadnici z. Žádný bod není tudíž invariantním.

/2/

Jest $a_1 = 0$. Pak $x = x$, $y = \frac{1}{2} a_2$. Reálná část x - tedy prvá souřadnice bodů $P(z)$ - je libovolná, kdežto imaginární část - tedy druhá souřadnice bodů $P(z)$ - je určité $y = \frac{1}{2} a_2$. Body $P(z)$ vyplňují tudíž přímku, jež je rovnoběžná s osou x. Nepřímé kongruentní transformace tohoto druhu slují osové souměrnosti.

Uveďme tu ještě větu, jejíž důkaz je snadný.

Věta. Každá nepřímá kongruentní transformace dá se složiti z osové souměrnosti a translace ve směru osy souměrnosti, t.j. ve směru přímky, jež se i co do orientace zachová.

§ 48.

Podobné transformace.

Nechť je dána v rovině pevná kartézská soustava souřadná. Nechť c, a jsou dvě komplexní čísla podrobená jediné podmínce $c \neq 0$. Vztah

$$z' = cz + a$$

určuje transformaci roviny na tutéž rovinu. Dva body $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$ přejdou touto transformací v body $P_1'(z_1')$, $P_2'(z_2')$, kde $z_1' = cz_1 + a$, $z_2' = cz_2 + a$. Odečtením dostaneme

rovnici $z_2' - z_1' = c.(z_2 - z_1)$. Proto
$|z_2' - z_1'| = |c| . |z_2 - z_1| = m.|z_2 - z_1|$, kde $m = |c| > 0$.
Proto jest

$$vz\left(P'_1 , P'_2\right) = m.vz\left(P_1, P_2\right) ,$$

slovy: Vzdálenost obrazů je m - násobkem vzdálenosti jejich vzorů. Kladné číslo m není závislé na poloze jednotlivých bodů, nýbrž jenom na dotyčné transformaci.

Transformaci, kterou jsme právě popsali, říkáme <u>přímá podobnost</u>. Transformaci, jež je určena vztahem

$$z' = cz^* + a , \quad c \neq 0$$

říkáme <u>nepřímá podobnost.</u>

Kongruentní transformace je zvláštním případem podobnosti pro $m = 1$.

<u>Věta.</u> Nechť je dáno kladné číslo m. Nechť $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$, $P_1'(z_1')$, $P'_2(z_2')$ jsou body v rovině, mezi nimiž platí vztah: $vz(P_1', P_2') = m.vz(P_1, P_2)$. Pak existuje podobná transformace $z' = cz + a$ nebo $z' = cz^* + a$, $|c| = m$, jež převádí bod P_1 v bod P_1' a bod P_2 v bod P_2'.

<u>Důkaz.</u> Transformace bodů, při níž přejde bod P_1 v P_1' a bod P_2 v P_2', dá se vyjádřiti nějakou závislostí g mezi souřadnicemi, což naznačíme takto: $z' = g(z)$. Máme dokázati, že $g(z) = cz + a$ nebo $g(z) = cz^* + a$, $c \neq 0$. Zaveďme pomocnou transformaci, jež převádí bod $P(z)$ v bod $P(u)$, kde $u = \frac{1}{m}.g(z)$ /výraz $\frac{1}{m}$ má smysl, neboť $m \neq 0$ /. Touto pomocnou transformací přejde bod $P_1(z_1)$ v $P_1(u_1)$ a bod $P_2(z_2)$ v $P_2(u_2)$, kde
$u_1 = \frac{1}{m}. g(z_1) = \frac{1}{m}.z_1'$, $u_2 = \frac{1}{m}. g(z_2) =$
$= \frac{1}{m}.z_2'$. Podle předpokladu jest $vz(P_1', P_2') =$
$= m.vz(P_1, P_2)$, takže $|z_1'-z_2'| = m.|z_1-z_2|$. Proto
$|u_1 - u_2| = |\frac{1}{m}.z'_1 - \frac{1}{m}.z'_2| = \frac{1}{m}.|z_1'-z'_2| =$
$= |z_1-z_2|$, tedy $vz(P_1(u_1), P_2(z_2)) = vz(P_1(z_1)$,

P_2 (z_2)). Existuje tudíž taková pomocná transformace, jež je transformací kongruentní. Existuje komplexní číslo d takové, že $|d| = 1$ a že

$u = dz + b$, je-li to kongruence přímá

$u = dz^* + b$, je-li to kongruence nepřímá.

Proto $\frac{1}{m} \cdot g(z) = dz + b$ nebo $= dz^* + b$, tedy $z' = g(z) = mdz + mb$ nebo $z' = mdz^* + mb$, při čemž $|md| = m.|d| = m \neq 0$. Označíme-li $md = c$, $mb = a$, jest $z' = cz + a$ resp. $z' = cz^* + a$, $c \neq 0$, j.b.d.

Věta. Podobná transformace převádí vektor zase ve vektor.

Důkaz. Nechť V je volný vektor o komplexní souřadnici z. Pak existuje dvojice bodů P_1 (z_1), P_2 (z_2) taková, že $V = P_2(z_2) - P_1(z_1)$, takže $z = z_2 - z_1$. Podobnou transformací přejdou tyto dva body v body P_1' (z'_1), P_2' (z'_2), takže $z'_1 = cz_1 + a$, $z_2' = cz_2 + a$ resp. $z_1' = cz^* + a$, $z_2' = cz^* + a$. Odtud vyplývá $z_2' - z_1' = c.(z_2 - z_1) = cz$ resp. $z_2' - z_1' = c.(z_2^* - z_1^*) = cz^*$. Jsou-li R_1 (y_1), R_2 (y_2) dva jiné body takové, že $V = R_2 - R_1$ a jsou-li $R_1'(y_1')$, $R_2'(y'_2)$ jejich obrazy, pak opět $y_2' - y_1' = cz$ resp. $y_2' - y_1' = cz^*$; volný vektor $V(z)$ přejde podobnou transformací opět ve volný vektor $V(cz)$ resp. $V(cz^*)$.

Přímá podobnost vektorů je dána vztahem

$$z' = cz$$

nepřímá podobnost vztahem

$$z' = cz^*,$$

kde $c \neq 0$.

Přímé podobné transformace.

Přímá podobnost vektorů je určena vztahem mezi souřadnicemi

$z' = cz = m.e^{it}.z$, kde $m = |c| > 0$, $c = m.e^{it}.z$.

Přímá podobnost, jak z tohoto vyjádření vychází najevo, dá se složiti ze dvou transformací; z přímé kongruentní transformace $z^* = e^{it} . z$ a trasformace $z' = mz^*$, jež směry nechá beze změny a násobí m - krát délku vektoru.

Věta. Přímá podobnost vznikne složením rotace o úhel t / všecky směry se otočí o úhel t / a zkrácením resp. prodloužením vektorů v poměru $m : 1$.

Podobná transformace zachová všecky orientované směry, když a jen když $t \equiv 0 \pmod{2\pi}$, t.j. $e^{it} = 1$, tedy, když a jen když číslo c je reálné kladné. Podobné transformace zachová neorientované směry, když a jen když $t \equiv 0$ nebo $t \equiv \pi \pmod{2\pi}$, t.j. $e^{it} = \pm 1$, tedy když a jen když číslo c je reálné $\neq 0$. Podobná transformace nezachová žádný směr, když a jen když číslo c není reálné.

U přímých podobností / jako u přímých kongruencí/ není číslo c závislé na volbě soustavy souřadné. Vskutku ani číslo m ani číslo d není závislé na volbě soustavy souřadné, tedy ani číslo $c = md$.

Klasifikace přímých podobností podle invariantních bodů je obdobná jako u přímých kongruencí.

/1/

Jest $c = 1$, $a = 0$. Pak všecky body jsou invariantní a podobnost jest identitou.

/2/

Jest $c = 1$, $a \neq 0$. Pak žádný bod není invariantní a podobnost je translací.

/3/

Jest $c \neq 1$. Pak existuje jediný invariantní bod, jehož souřadnice jest $z = \frac{a}{1-c}$. Je-li tento invariantní bod v počátku soustavy souřadné, jest $z = 0$, tedy $a = 0$. Přímá podobnost jest pak dána vzorcem $z' = cz = m. e^{it} . z$. Z tohoto vzorce vyplývá, že se dá složiti ze dvou transformací: $z^* = e^{it}z$, což je rotace kol počátku o úhel t a $z' = mz^+$, což je homothetie o středu v počátku a určujícím poměru m / viz § 1 str. 2 /.

Homothetie, jež se tu vyskytuje, nazýváme <u>přímou homothetií</u>. Vzorec $z' = m.z$, kde $m < 0$ udává <u>nepřímou homothetii</u>. Nepřímá homothetie je přímá podobná transformace

$$z' = |m| \cdot e^{i\pi} . z ,$$

jež se dá složiti z rotace kol počátku o úhel π a přímé homothetie o určujícím poměru $|m|$. Přímá podobnost je tedy přímou nebo nepřímou homothetií, když a jen když $c > 0$ nebo $c < 0$.

Nepřímé podobné transformace.

Nepřímá podobná transformace jest určena vztahem

$$z' = cz^{x} + a = me^{it} . z^{x} + a , \text{ kde } m = |c| > 0 ,$$
$$c = m . e^{it} .$$

Nepřímá podobnost dá se složiti z nepřímé kongruentní transformace $z^+ = e^{it} . z^x$ a transformace $z' = m.z^+$, jež násobí délku vektoru m - krát.

Nepřímé podobnosti můžeme podle invariantních bodů takto klasifikovati:

/ 1 /

Jest $c = 1$. Pak nepřímá podobnost je nepřímou kongruentní transformací a nastane přesně jeden z obou případů: buďto existuje nekonečně mnoho invariantních bodů, jež vyplní přímku - pak je to osová souměrnost - nebo neexistuje žádný invariantní bod.

/ 2 /

Jest $c \neq 1$. V tomto případě existuje jediný invariantní bod o komplexní souřadnici $z = \frac{a}{1-c}$. Je-li počátek souřadnic v tomto invariantním bodě a je-li soustava souřadná tak volena, že komplexní číslo c je reálné kladné, pak invariantní bod má komplexní souřadnici $z = 0$, takže $a = 0$.

Transformace pak zní:

$$z' = mz^{*} \quad , \text{kde } m = \quad c > 0 \; .$$

V tomto případě dá se nepřímá podobnost složiti ze dvou transformací: $z^{+} = z^{*}$, což je symetrie vzhledem k ose x a $z' = mz^{+} = mz^{*}$, což je přímá homothetie o středu v počátku a určujícím poměru m .

Nepřímá podobná transformace, jež není kongruentní, má přesně jeden invariantní bod S . Tímto bodem jde přímka, jež se i co do orientace zachová. Tato přímá podobnost dá se složiti ze symetrie vzhledem k ose x a přímé homothetie o středu S a určujícím poměru m .

Na konci tohoto § rozřešme ještě úlohu: Jakým podmínkám musí vyhovovati dvě přímé podobné transformace, aby byly záměnné , t.j. aby jejich skládání nebylo závislé na pořádku obou transformací.

Nechť je prvá podobnost dána vzorcem

$$z_1' = c_1 z + a_1 \quad , \quad c_1 \neq 0$$

druhá vzorcem

$$z_2' = c_2 z + a_2 \; , \quad c_2 \neq 0 \; .$$

Složením těchto dvou podobností dostaneme transformaci

$z_3' = c_2 (c_1 z + a_1) + a_2 = c_1 c_2 z + c_2 a_1 + a_2 = cz + a$, kde $c = c_1 c_2$, $a = c_2 a_1 + a_2$. Jelikož $c_1 \neq 0 \neq c_2$, jest $c \neq 0$, takže složená transformace jest opět přímou podobností. Složíme-li tyto dvě podobnosti v opačném pořádku, dostaneme transformaci

$z_4' = c_1 (c_2 z + a_2) + a_1 = c_1 c_2 z + c_1 a_2 + a_1 = cz + b$, kde $b = c_1 a_2 + a_1$. Obě podobnosti jsou záměnné, když a jen když $z_3' = z_4'$, t.j. $a = b$, tedy

$$(1 - c_1) \cdot a_2 = (1 - c_2) \cdot a_1$$

Tomuto vztahu lze vyhověti rozmanitými způsoby.

1/ $c_1 = 1$, $a_1 = 0$ nebo $c_2 = 1$, $a_2 = 0$, Buďto prvá nebo druhá podobnost jest identitou.

2/ $c_1 = 1 = c_2$. Obě podobnosti jsou translace.

3/ Jest $c_1 \neq 1 \neq c_2$. Pak existuje přesně jeden bod T_1, jenž je invariantní vzhledem k prvé podobnosti a přesně jeden bod T_2, jenž je invariantní vzhledem ke druhé podobnosti. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že bod T_1 je počátkem souřadnic, takže $a_1 = 0$. Poněvadž $c_1 \neq 1$ a $(1 - c_1) \cdot a_2 = (1 - c_2) \cdot a_1$, jest také $a_2 = 0$, takže $T_1 = T_2$. Existuje společný invariantní bod.

Výsledek můžeme shrnouti v tuto větu :

<u>Věta.</u> Dvě přímé podobnosti jsou záměnné, když a jen když jedna z nich je identitou nebo obě dvě jsou translacemi nebo obě mají společný invariantní bod.

§ 49 .

T r o j ú h e l n í k .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Nechť je dána orientovaná rovina. Nechť $B \neq A \neq C$ jsou tři její body. Položme $B - A = |B - A| \cdot U$, $C - A = |C - A| \cdot V$, takže U, V jsou jednotkové vektory takové, že $B - A$, U mají stejný směr i orientaci a $C - A$, V mají také stejný směr i orientaci. <u>Úhlem</u> $\widehat{BAC}$ rozumíme úhel vektorů $B - A$ a $C - A$, tedy úhel vektorů U a V . Označíme-li U' vektor, jenž je nalevo a je kolmý na U a je také jednotkový, pak

$$V = \cos t \cdot U + \sin t \cdot U',$$

kde t je úhel $\widehat{BAC}$ / podle definice úhlu/.

<u>Trojúhelník v rovině</u> je soustava tří různých bodů A, B, C jež neleží v jedné přímce. Jelikož je šest permutací symbolů A, B, C, jest šest úhlů trojúhelníka / obyčejně se mluví jen o třech kladných úhlech trojúhelníka/.

Početní vyjádření trojúhelníka. Zvolme v rovině souřadnou soustavu a označme $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ trojúhelník v rovině. Vektory $B-C$, $C-A$, $A-B$ mají pak komplexní souřadnice u_1, u_2, u_3, takže existují taková čísla t_1, t_2, t_3 určená až na násobky 2π, že $u_1 = ae^{it_1}$, $u_2 = be^{it_2}$, $u_3 = ce^{it_3}$, kde $a = |B-C|$, $b = |C-A|$, $c = |A-B|$ jsou délky stran trojúhelníka.

Jelikož $A-B = -|B-A| .U = -c.U$, jest komplexní souřadnice vektoru U: $-e^{it_3} = e^{i(t_3+\pi)}$; podobným způsobem se snadno pozná, že komplexní souřadnice vektoru V jest e^{it_2} a komplexní souřadnice vektoru U' jest $-ie^{it_3}$. Vztahu mezi vektory

$$V = \cos t.U + \sin t.U'$$

odpovídá vztah mezi souřadnicemi. Proto

$$e^{it_2} = \cos t.\ e^{it_3} - i.\sin t.\ e^{it_3},\ \text{t.j.}$$

$$-e^{i(t_2-t_3)} = \cos t + i.\sin t = e^{it},\ \text{takže}$$

$$e^{i(t_2-t_3+\pi)} = e^{it} .$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} \alpha &= \widehat{BAC} \equiv t_2-t_3+\pi \pmod{2\pi};\ \text{podobně} \\ \beta &= \widehat{CBA} \equiv t_3-t_1+\pi \pmod{2\pi} \qquad \ldots./1/ \\ \gamma &= \widehat{ACB} \equiv t_1-t_2+\pi \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Úhly trojúhelníka se normují tím, že se předepíší podmínky

$$|\alpha| < \pi,\ |\beta| < \pi,\ |\gamma| < \pi$$

a že žádný úhel není roven 0.

Věta. Všecky tři úhly trojúhelníka α, β, γ jsou buďto kladné nebo všecky jsou záporné.

Důkaz. Determinant přechodu od base U, V k basi U, U' jest

$$\begin{vmatrix} 1, & 0 \\ \cos t, & \sin t \end{vmatrix} = \sin t$$

Jest tedy $\sin t > 0$, když a jen když determinant přechodu je kladný, tedy, když vektor V je nalevo od vektoru U. Proto jest úhel t kladný, když a jen když vektor $C-A$ je nalevo od vektoru $B-A$. Abychom dokázali, že všecky tři úhly jsou kladné, je-li úhel α kladný uvažujeme tyto rovnosti:

$$\begin{aligned} C - B &= -1.(B - A) + (C - A) \\ A - B &= -1.(B - A) + 0.(C - A) \\ A - C &= 0.(B - A) - 1.(C - A) \\ B - C &= B - A - 1.(C - A) \end{aligned}$$

Přechod base $C - B$, $A - B$ k basi $B - A$, $C - A$ je

$$\begin{vmatrix} -1, & 1 \\ -1, & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

přechod base $A - C$, $B - C$ k basi $B - A$, $C - A$ je

$$\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

takže, je-li base $B-A$, $C-A$ positivní /t.j. úhel α kladný/ pak jsou i obě druhé base positivní a všecky tři úhly kladné. Je-li base $B-A$, $C-A$ negativní / t.j. úhel α záporný/, jsou všecky tři úhly záporné.

Sečtením vztahů /1/ dostaneme známou větu:

Věta. Součet kladných úhlů trojúhelníka je π, součet záporných úhlů je $-\pi$.

Známé trigonometrické formule vyplývají z identity:

$$(z_2-z_3) + (z_3 - z_1) + (z_1 - z_2) = 0, \text{ tedy}$$

$$ae^{it_1} + be^{it_2} + ce^{it_3} = 0,$$

neboť $z_2 - z_3$ je komplexní souřadnice vektoru $B - C$, $z_3 - z_1$ je komplexní souřadnice $A - B$. Násobíme-li komplexním číslem $-e^{-it_3}$, dostaneme

$$- ae^{i(t_1-t_3)} - be^{i(t_2-t_3)} = c \quad \text{čili}$$

$$ae^{i(t_1-t_3+\pi)} + be^{i(t_2-t_3+\pi)} = c \, ,$$

takže vyjde rovnice

$$\text{(r)} \qquad ae^{-i\beta} + be^{i\alpha} = c \, .$$

Porovnáním reálných částí v rovnici (r) vyjde t.zv. <u>věta o průměru nebo projekční věta</u>

$$a.\cos\beta + b.\cos\alpha = c \, .$$

Porovnáním imaginárních částí v rovnici (r) vyjde

$$- a.\sin\beta + b.\cos\alpha = 0 \, , \text{ tedy}$$

$$\sin\alpha : \sin\beta = a : b \, .$$

To je t.zv. <u>sinová věta.</u>

Konečně plyne z rovnice (r) ještě

$$c^2 = \left|ae^{-i\beta} + be^{i\alpha}\right|^2 = \left(ae^{-i\beta} + be^{i\alpha}\right)\left(ae^{i\beta} + be^{-i\alpha}\right) =$$

$$= a^2 + b^2 + ab\left(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}\right) =$$

$$= a^2 + b^2 + 2\,a\,b.\cos(\alpha + \beta) \, , \text{ tedy}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b.\cos\gamma \, , \text{ neboť } \alpha + \beta + \gamma = \pm\pi \, .$$

To je t.zv. **<u>kosinová věta.</u>**

K r u ž n i c e .

xxxxxxxxxxxxxxxxx

V dané rovině nechť je dán bod A ; nechť je dáno kladné číslo r . **Kružnicí** o **středu** A a **poloměru** r rozumíme množinu těch bodů Z naší roviny, pro něž

$$|Z - A| = r.$$

Věta. Kružnice obsahuje nekonečně mnoho bodů.

Důkaz. Je-li U libovolný jednotkový vektor, pak na přímce určené bodem A a vektorem U , jsou přesně dva body naší kružnice, totiž $A \pm r U$.

Věta. Kružnice má jen jeden střed a jeden poloměr.

Důkaz. Nechť kružnice o středu A_1 a poloměru r_1 splyne s kružnicí o středu A_2 a poloměru r_2 . Existuje jednotkový vektor U a číslo $d \geq 0$ tak, že $A_2 - A_1 = d\,U$. Naše kružnice obsahuje body Z_1, Z_2 , kde $Z_1 = A_1 - r_1 U = A_2 - (r_1 + d)\,U$, $Z_2 = A_2 + r_2 U = A_1 + (r_2 + d)\,U$, takže $r_1 + d = |Z_1 - A_2| = r_2$, $r_2 + d = |Z_2 - A_1| = r_1$, tedy $d = 0$, $A_1 = A_2$, $r_1 = r_2$.

R o v n i c e k r u ž n i c e .

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Zaveďme kartézskou soustavu souřadnou. Nechť $a = a_1 + i\,a_2$ je komplexní souřadnice středu A ; nechť $z = x + i\,y$ je komplexní souřadnice bodu Z . Pak $|Z - A|^2 = |z - a|^2 = (z - a)(z^{\ast} - a^{\ast}) = z\,z^{\ast} - a^{\ast} z - a\,z^{\ast} + a\,a^{\ast}$, takže rovnice naší kružnice je

$$(k) \qquad z\,z^{\ast} + u\,z + u^{\ast} z^{\ast} + v = 0,$$

kde $u = -a^*$ je komplexní číslo a $v = aa^* - r^2$ je reálné číslo. <u>Diskriminantem</u> rovnice (k) rozumíme číslo $d = uu^* - v$, takže $d = r^2 > 0$.

Obráceně nechť je dána rovnice tvaru (k) s komplexním u a reálným v. Lze ji psáti ve tvaru

$$|z + u^*|^2 = uu^* - v = d .$$

Tedy: /1/ v případě $d < 0$ rovnice (k) je nemožná, /2/ v případě $d = 0$ rovnice (k) má <u>jediné</u> řešení $z = -u^*$, /3/ v případě $d > 0$ je (k) rovnicí kružnice s poloměrem $\sqrt{d}$; střed kružnice má komplexní souřadnici $-u^*$.

<u>Věta</u>. Přímka p a kružnice K mají nejvýš dva body společné. Je-li d vzdálenost přímky p od středu A kružnice K, pak /1/ v případě $d < r$ jsou přesně dva společné body, /2/ v případě $d = r$ je přesně jeden společný bod, /3/ v případě $d > r$ není společných bodů.

<u>Důkaz</u>. Přímku p stanovíme patou B kolmice spuštěné s bodu A a jednotkovým vektorem U. Libovolný bod přímky p je $Z = B + tU$. Jest $U.(B - A) = 0$, tedy $|Z - A|^2 = (Z - A)^2 = (B - A - tU)^2 = (B - A)^2 - 2tU\,U.(B - U) + t^2 U^2 = |B - A|^2 + t^2 U^2 = d^2 + t^2$.
Podmínka, aby Z byl na kružnici, je tedy $d^2 + t^2 = r^2$. Pro $d < r$ máme dvě řešení $t = \pm \sqrt{r^2 - d^2}$, pro $d = r$ jediné řešení $t = 0$ a pro $d > r$ není žádné řešení.

Z provedeného důkazu snadno plyne: Vedeme-li bodem Z kružnice K přímku p, pak Z je <u>jediný</u> průsečík p s K tehdy a jen tehdy, když p je kolmá na $Z - A$. Tedy platí

<u>Věta</u>. Každým bodem Z kružnice K jde přesně jedna tečna t, totiž přímka mající s K společný <u>pouze</u> bod Z ; t jde kolmo k $Z - A$.

<u>Věta</u>. Dvě různé kružnice K_1, K_2 mají nejvýš

dva společné body .

Důkaz . Mají-li K_1, K_2 společný střed, mají různé poloměry a zřejmě se neprotnou . Nechť tedy středy kružnic jsou různé. K_1, K_2 mají rovnice

$$zz^* + u_1 z + u_1^* z^* + v_1 = 0 ,$$
$$zz^* + u_2 z + u_2^* z^* + v_2 = 0 ,$$

kde u_1, u_2 jsou komplexní a v_1, v_2 jsou reálná. Ježto jsou středy různé, je $u_1 \neq u_2$. Když Z vyhovuje oběma rovnicím, vyhovuje také rovnici vzniklé odečtením:

$$(p) \quad (u_1 - u_2)\, z + (u_1 - u_2)^* z^* + v_1 - v_2 = 0 .$$

Klademe-li $u_1 - u_2 = s + ti$, $z = x + yi$, nabude rovnice (p) tvaru

$$2\,(sx - ty) + v_1 - v_2 = 0 .$$

Ježto $u_1 - u_2 \neq 0$, je to rovnice přímky / t.vz. chordály obou kružnic /; víme však, že přímka protne kružnici nejvýš ve dvou bodech.

Věta. Nechť P, Q jsou dva různé body. Nechť je dáno reálné číslo φ tak, že není $\varphi \equiv 0 \mod \pi$. Označme M množinu těch bodů $Z \neq P$, $Z \neq Q$, pro něž úhel

$$\widehat{PZQ} \equiv \varphi \mod \pi .$$

Množina M zvětšená o body P, Q je kružnice .

Důkaz. Nechť z_1 je komplexní souřadnice bodu P ; nechť z_2 je komplexní souřadnice bodu Q . Je-li z komplexní souřadnice bodu Z , takže

$$/1/ \qquad z_1 \neq z \neq z_2$$

pak podmínka pro úhel $\widehat{PZQ}$ se dá vyjádřiti takto: číslo

$$/2/ \qquad e^{-i\varphi} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

má býti reálné, tedy rovné svému konjugovanému, tedy

$$e^{-i\varphi} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2} = e^{i\varphi} \frac{z^* - z_1^*}{z^* - z_2^*} .$$

Z toho plyne, že

$$/3/ \quad e^{-i\varphi} (z - z_1) (z^* - z_2^*) - e^{i\varphi}(z - z_2)(z^* - z_1^*) = 0 .$$

Obráceně ze /3/ plyne, že číslo /2/ je reálné, předpokládame-li /1/ ; mimo to však /3/ platí také pro $z = z_1$ i pro $z = z_2$. Tedy stačí dokázati, že /3/ je rovnice kružnice. To je zřejmé, neboť, krátíme-li faktorem $e^{-i\varphi} - e^{i\varphi} = -2i \sin\varphi \neq 0$, nabude /3/ tvaru

$$zz^* + uz + u^* z^* + v = 0 .$$

Nemusíme verifikovati, že deskriminant je kladný, neboť víme, že je rovnici vyhověno dvěma různými hodnotami $z = z_1$, $z = z_2$.

Věta. Třemi různými body P, Q, R, které neleží na přímce, prochází přesně jedna kružnice.

Důkaz. Podmínka, že dané body neleží na přímce, byla nutná, neboť přímka a kružnice nemohou míti tři různé společné body. Ježto dvě různé kružnice mají nejvýš dva společné body, stačí dokázati, že existuje aspoň jedna kružnice K, obsahující P, Q i R. Existenci takové kružnice podává však předešlá věta, když si v ní zvolíme φ podle rovnice:

$$\varphi = \widehat{PRQ} .$$

/Není $\varphi \equiv 0 \mod \pi$, ježto P, Q, R neleží na přímce/.

Máme vlastně dokázánu

Větu. Nechť P, Q, Z_1, Z_2 jsou čtyři různé body na kružnici. Pak je

$$/0/ \quad \widehat{PZ_1Q} \equiv \widehat{PZ_2Q} \mod \pi .$$

To je věta o obvodovém úhlu, jedna z nejhezčích a nejplodnějších vět elementární geometrie. Obvykle se dokazuje s tímto doplňkem: kongruence / o/ platí dokonce mod 2π tehdy a jen tehdy, když jsou Z_1, Z_2 oba na stejné straně od přímky (P, Q) . Tento doplněk bychom snadno dokázali. Místo toho upozorněme, že při aplikacích věty o obvodovém úhlu zpravidla stačí věta v tom znění, jak jsme je uvedli, při čemž pro správné vedení důkazu bývá podstatný jiný fakt / který se obvykle přechází mlčky/ , že totiž kon - gruence /o / platí i co do znamení /orientace/ úhlů.

§ 51 .

Úhly v trojrozměrném prostoru.

V trojrozměrném prostoru mluvíme o trojích úhlech: úhel dvou přímek, úhel přímky s rovinou, úhel dvou rovin.

O úhlu dvou přímek jsme již mluvili/str.134-135/. V souvislosti s tím se zavádí následující definice. Jsou-li při dané positivní kartézské soustavě souřadné dány dva vektory $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, pak vektor

$$(a_2b_3 - a_3b_2 \ , \ a_3b_1 - a_1b_3 \ , \ a_1b_2 - a_2b_1)$$

se nazývá vnější součin vektorů A, B a naznačíme jej $A \times BB$. /Tedy $A \times B$ je vektor, kdežto $A.B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ je číslo /.

Vektor $A \times B$ nezávisí na volbě positivní kartézské soustavy souřadné, neboť vektor $X = A \times B$ se dá plně popsati těmito vlastnostmi: /1/ $AX = BX = 0$, t.j. X je kolmý na obou vektorech A, B , /2/ $X = 0$, když a jen když A, B jsou mezi sebou závislé, /3/ jsou-li A, B mezi sebou nezávislé, pak A, B, X tvoří positivní basi pro modul všech vektorů,
/4/ $|X| = |A| \cdot |B| \cdot |\sin t|$, kde t je úhel vektorů A, B .

Vektor $A \times B$ závisí na dané orientaci prostoru a násobí se minus jednou, změníme-li tuto orientaci.

Z definice plyne, že

$$B \times A = -(A \times B),$$

takže zákon <u>komutativní</u> neplatí pro vektorový součin. Zákony <u>distributivní</u> zřejmě platí.

Pro tři vektory A, B, C je

/1/ $$(A \times B) . C = (B \times C) . A = (C \times A) . B ,$$

neboť $(A \times B) . C$ je determinant ze souřadnic vektorů A, B, C.

Jetě si poznamenejme, že pro čtyři vektory A, B, C, D je

/2/ $$(A \times B).(C \times D) = \begin{vmatrix} AC & BC \\ AD & BD \end{vmatrix} .$$

Při verifikaci formule /2/ můžeme předpokládati, že positivní kartézská soustava souřadná byla zvolena tak, že $A = (a, 0, 0)$, $B = (b_1, b_2, 0)$; verifikace je pak snadná.

<u>Úhel přímky</u> p <u>s rovinou</u> r se definuje jako úhel přímky p s tou přímkou p_0 roviny r, která je ortogonální projekcí přímky p do roviny r. Je-li směr přímky p určen vektorem A a je-li směr roviny r určen basí (B_1, B_2), zaveďme ještě vektor $B_3 \neq 0$ kolmý k rovině r. Jest pak $A = x_1B_1 + x_2B_2 + x_3B_3$ a směr přímky p_0 je určen vektorem $B_0 = x_1B_1 + x_2B_2$. Tedy pro úhel t přímky p s rovinou r máme vzorec

/3/ $$|A| . |B_0| . \cos t = A B_0 .$$

Jest $A = B_0 + x_3B_3$, $B_0B_3 = 0$, takže $AB_0 = B_0^2$, tedy $\cos t \geq 0$. Při celé úvaze jsme mlčky předpokládali, že přímka p není kolmá k rovině r. Nastane-li tento výjimečný případ, je $B_0 = 0$ a rovnice /3/ neurčuje t ; je zvykem v tomto případě voliti $\cos t = 0$, takže /3/ pak platí pro libovolný vektor B_0 v rovině r.

Přejde-li A v $-A$, přejde B_o v $-B_o$, tedy úhel t nezávisí na orientaci přímky p.
Přistupme konečně k <u>úhlu dvou rovin</u> r_1, r_2. Neztratíme mnoho, vyloučíme-li případ rovnoběžných rovin. Roviny r_1, r_2 nechť se tedy protnou v přímce s. Přímka s rozdělí r_1 ve dvě poloroviny r_1', r_1'' a rovinu r_2 ve dvě poloroviny r_2', r_2''. Budeme definovati napřed <u>úhel dvou polorovin</u>, třeba polorovin r_1', r_2'.
Tento úhel

$$\widehat{r_1' \, r_2'} \tag{4}$$

definujeme jako úhel orientovaných přímek p_1, p_2, při čemž: p_1 leží v rovině r_1 kolmo k s a její šipka ukazuje do poloroviny r_1', p_2 leží v rovině r_2 kolmo k s a její šipka ukazuje do poloroviny r_2'. Tím je určen úhel /4/ <u>až na znamení</u> / orientaci/ mod 2π.

Můžeme také znamení úhlu /4/ určiti jednoznačně, je-li dána orientace průsečnice s. Nechť jsou orientované směry přímek p_1, p_2, s určeny vektory A_1, A_2, A_3. K určení znamení úhlu /4/ je třeba zvoliti buďto (A_1, A_2) nebo (A_2, A_1) za basi v rovině přímek p_1, p_2: volíme (A_1, A_2) nebo (A_2, A_1) podle toho, zda (A_1, A_2, A_3) či (A_2, A_1, A_3) je positivní base prostoru.

Úhel t <u>polorovin</u> r_1', r_2' je tedy při dané orientaci průsečnice s určen jednoznačně mod 2π / a mění znamení při změně orientace přímky s /. Tedy $\cos t$ nezávisí ani na orientaci s, kdežto $\sin t$ mění znamení při změně orientace s. Když třeba místo poloroviny r_1' vezmeme polorovinu r_1'', ukazuje snadná úvaha, že místo t je vzíti $\pi - t$, takže $\cos t$ změní znamení, kdežto $\sin t$ zůstane beze změny.

Často je výhodné počítati úhel polorovin r_1', r_2' pomocí úhlu kolmic k_1, k_2 k rovinám r_1, r_2. Snadno se dokáže, že

$$\widehat{r_1' \, r_2'} = \widehat{k_1 \, k_2} ,$$

jsou-li k_1, k_2 orientovány tak, že třeba u k_1 ukazuje šipka do toho z obou poloprostorů určených rovinou r_1, ve kterém leží polorovina r_2', kdežto u k_2 ukazuje šipka do toho z obou poloprostorů určených rovinou r_2, ve kterém neleží polorovina r_1'.

§ 52.

T r o j h r a n.

Bodem S veďme v trojrozměrném prostoru tři polopřímky p_1, p_2, p_3 tak, že neleží všecky ve stejné rovině. Tím vznikne trojhran. Nechť A_1, A_2, A_3 jsou jednotkové vektory určující směry našich polopřímek. Volme označení tak, že (A_1, A_2, A_3) je positivní base. Pak také (A_2, A_3, A_1), (A_3, A_1, A_2) jsou positivní base, t.j. všude v následujícím je dovolena cyklická záměna indexů. Hranové úhly a, b, c našeho trojhranu jsou určeny vztahy

$$a = \widehat{A_2 A_3}, \quad 0 < a < \pi,$$
$$b = \widehat{A_3 A_1}, \quad 0 < b < \pi,$$
$$c = \widehat{A_1 A_2}, \quad 0 < c < \pi,$$

Mimo to zavádíme u trojhranu stěnové úhly, A, B, C. Úhel A je úhel dvou polorovin, z nichž prvá obsahuje polopřímky p_1, p_2 a druhá polopřímky p_1, p_3; Ježto průsečnice je orientovaná, je úhel A jednoznačně určen (mod 2π). Cyklickými záměnami dostaneme definici úhlů B, C.

Nechť q_1 je polopřímka vedená bodem S kolmo k rovině (p_2, p_3) a ležící ve stejném z obou touto rovinou určených poloprostorů jako polopřímka p_1. Cyklickými záměnami se definují polopřímky q_2, q_3. Nechť U_1, U_2, U_3 jsou jednotkové vektory určující směry polopřímek q_1, q_2, q_3. Pak je

$$A_1U_1 > 0\,,\quad A_2U_1 = 0\,,\quad A_3U_1 = 0\,,$$

/5/ $$A_1U_2 = 0\,,\quad A_2U_2 > 0\,,\quad A_3U_2 = 0\,,$$

$$A_1U_3 = 0\,,\quad A_2U_3 = 0\,,\quad A_3U_3 > 0\,,$$

Ježto (A_1, A_2, A_3) je positivní base, determinant souřadnic vektorů A_1, A_2, A_3 je kladný. Z /5/ však plyne, že součin tohoto determinantu s determinantem ze souřadnic vektorů U_1, U_2, U_3 je kladný. Tedy také (U_1, U_2, U_3) je base, a to zase positivní base.

Z toho plyne, že také (q_1, q_2, q_3) je trojhran; nazývá se polárním trojhranem trojhranu (p_1, p_2, p_3).

Z pravidla vysloveného na konci minulého paragrafu vychází, že hranové úhly trojhrany (q_1, q_2, q_3) jsou

$$\pi - A\,,\quad \pi - B\,,\quad \pi - C\,,$$

takže $0 < A < \pi$, $0 < B < \pi$, $0 < C < \pi$.

Ze symetrie formulí /5/ plyne, že polárním trojhranem trojhranu (q_1, q_2, q_3) je trojhran (p_1, p_2, p_3). Tedy stěnové úhly trojhranu (q_1, q_2, q_3) jsou

$$\pi - a\,,\quad \pi - b\,,\quad \pi - c\,.$$

Tedy v každém vzorci o obecném trojhranu je dovoleno provésti substituci

/6/ $$\begin{pmatrix} a & b & c & A & B & C \\ \pi - A & \pi - B & \pi - C & \pi - a & \pi - b & \pi - c \end{pmatrix}$$

neboť tato substituce znamená prostě přechod od trojhranu (p_1, p_2, p_3) k polárnímu trojhranu (q_1, q_2, q_3).

Z definic vychází ihned, že

$$A_2 \times A_3 = \sin a .\, U_1\,;$$

přechodem k polárnímu trojhranu plyne z toho, že

$$U_2 \times U_3 = \sin A . A_1 .$$

Tedy

$$(A_2 \times A_3) . A_1 = \sin a . A_1 U_1, \quad (U_2 \times U_3) . U_1 = \sin A . A_1 U_1,$$

takže ze vzorce /1/ /str. 152/ plyne

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

což je t.zv. sinová věta.

Dále jest podle vzorce /2/ /str. 152/

$$(A_1 \times A_2) . (A_3 \times A_1) = \begin{vmatrix} A_1 A_3 & A_2 A_3 \\ A_1^2 & A_2 A_1 \end{vmatrix} .$$

Zde je

$$A_1^2 = 1, \; A_2 A_1 = \cos c, \; A_1 A_3 = \cos b, \; A_2 A_3 = \cos a ,$$

$$A_1 \times A_2 = \sin c . U_3, \; A_3 \times A_1 = \sin b . U_2 ,$$

$$U_3 U_2 = \cos (\pi - A) = -\cos A ,$$

takže vznikne vzorec

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A ,$$

což je t.zv. první cosinová věta. Substitucí /6/ dostaneme druhou cosinovou větu

$$\cos A = - \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a .$$

-ooOoo-