Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

---

Chapitre XIV: Ultérieures applications des méthodes de M. Cartan .

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [243]--256.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402571

CHAPITRE XIV.

ULTÉRIEURES APPLICATIONS DES MÉTHODES DE M. CARTAN.

85. **Les repères normaux attachés à une congruence W.** — Soit donnée une congruence W dont les deux surfaces focales S_0 et S_1 soient distinctes et non développables. Nous allons attacher à la congruence un *repère normal* A_0, A_1, A_2, A_3. On pourrait procéder d'une manière analytique tout analogue à celle employée au Chapitre XIII, mais nous allons simplifier le calcul moyennant quelques considérations géométriques. Nous choisirons le repère mobile A_0, A_1, A_2, A_3 de la manière suivante : Le point $A_0(A_1)$ décrira la surface focale S_0 (S_1) de manière que la droite $[A_0 A_1]$ soit la génératrice de la congruence donnée et donc une tangente commune aux deux surfaces S_0 et S_1 ; les deux autres sommets A_2, A_3 seront choisis de manière que la droite $[A_0 A_2]$ (la droite $[A_1 A_3]$) soit la tangente à S_0 (à S_1) *conjuguée* à la tangente $[A_0 A_1]$. En désignant par u, v les paramètres essentiels (coordonnées curvilignes) on voit que, pour une valeur donnée de (u, v), la position géométrique des points A_0, A_1, est fixe, tandis que le point $A_2(A_3)$ peut encore varier sur la droite $[A_0 A_2]$ (sur la droite $[A_1 A_3]$). Quant aux facteurs des coordonnées homogènes des points A_0, A_1, A_2, A_3, nous poserons, outre la condition usuelle

$$[A_0 A_1 A_2 A_3] = 1, \tag{1}$$

encore la suivante : Le plan tangent à S_0 en A_0 est, d'après ce qui a été demandé plus haut, le plan $[A_0 A_1 A_2]$; et nous poserons la condition que le facteur des coordonnées de $[A_0 A_1 A_2]$ corresponde à celui de A_0 selon la convention habituelle de la théorie projective des surfaces (§ 14).

On voit qu'un repère ainsi déterminé dépend, outre des paramètres essentiels u, v, de *quatre* paramètres inessentiels que nous fixerons comme fonctions de u, v. Mais auparavant, il faut exprimer analytiquement les conditions posées plus haut.

Dans les équations (3) du paragraphe 75, on a évidemment, outre la condition usuelle

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0, \tag{2}$$

les relations

$$\omega_{03} = 0, \qquad \omega_{12} = 0; \tag{3}$$

elles expriment en effet que les plans tangents à S_0 en A_0 et à S_1 en A_1 sont respectivement $[A_0 A_1 A_2]$ et $[A_0 A_1 A_3]$. Des relations (3) on déduit par différentiation extérieure, selon les formules de structure [§ 75 (5)],

$$\begin{cases} [\omega_{01}\omega_{13}] + [\omega_{02}\omega_{23}] = 0, \\ [\omega_{10}\omega_{02}] + [\omega_{13}\omega_{32}] = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Le point A_0 décrivant une *surface*, l'équation

$$dA_0 = \omega_{00} A_0 + \omega_{01} A_1 + \omega_{02} A_2 \tag{5}$$

montre (*voir* § 76) que les expressions ω_{01}, ω_{02} sont deux combinaisons linéaires indépendantes des différentielles du, dv des deux paramètres essentiels. L'équation (4_1) montre alors que

$$\omega_{13} = \lambda_1 \omega_{01} + \lambda_3 \omega_{02}, \qquad \omega_{23} = \lambda_3 \omega_{01} + \lambda_2 \omega_{02}.$$

Or l'équation différentielle des asymptotiques de la surface S_0 est (*voir* la fin du paragraphe 76)

$$\omega_{01}\omega_{13} + \omega_{02}\omega_{23} = \lambda_1 \omega_{01}^2 + 2\lambda_3 \omega_{01}\omega_{02} + \lambda_2 \omega_{02}^2 = 0.$$

Il en résulte que $\lambda_3 = 0$, en se rappelant que les tangentes $[A_0 A_1]$ et $[A_0 A_2]$ à la surface S_0 sont conjuguées [en effet ces deux tangentes correspondent respectivement à $\omega_{02} = 0$ et à $\omega_{01} = 0$ comme on le voit de (5)]. Au contraire, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, car la surface S_0 est par hypothèse non développable. Donc nous avons les relations

$$\omega_{13} = \lambda_1 \omega_{01}, \qquad \omega_{23} = \lambda_2 \omega_{02} \tag{6}$$

avec $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. La considération de l'autre surface focale conduit d'une manière analogue aux équations

$$(7)\qquad \omega_{02}=\mu_1\omega_{10},\qquad \omega_{32}=\mu_2\omega_{13},$$

où $\mu_1\mu_2\neq 0$. En outre, on voit que les asymptotiques de S_1 sont données par $\mu_1\omega_{10}^2+\mu_2\omega_{13}^2=0$, ce qui peut s'écrire, d'après (6) et (7),

$$\omega_{02}^2+\mu_1\mu_2\lambda_1^2\omega_{01}^2=0;$$

or l'équation différentielle des asymptotiques à S_0 était

$$\lambda_1\omega_{01}^2+\lambda_2\omega_{02}^2=0.$$

Ces deux équations doivent coïncider, car les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales d'une congruence W; cela donne la relation

$$(8)\qquad \lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2=1.$$

Il reste à exprimer la condition relative aux facteurs de coordonnées. A ce but, il convient de considérer, outre le repère A_0, A_1, A_2, A_3, le repère adjoint α_0, α_1, α_2, α_3 défini au paragraphe 75. D'après (3) et § 75 (3), (9), on a

$$(9)\qquad \begin{cases} dA_0 = \omega_{00}A_0+\omega_{01}A_1+\omega_{02}A_2,\\ dA_1 = \omega_{10}A_0+\omega_{11}A_1+\omega_{13}A_3,\\ d\alpha_3 = -\omega_{13}\,\alpha_1-\omega_{23}\,\alpha_2-\omega_{33}\,\alpha_3,\\ d\alpha_2 = -\omega_{02}\,\alpha_0-\omega_{22}\,\alpha_2-\omega_{32}\,\alpha_3. \end{cases}$$

Il en résulte, en désignant par d, δ deux différents symboles de différentiation,

$$(10)\qquad \begin{cases} [A_0\,dA_0\,\delta A_0] = [\omega_{01}\omega_{02}]\alpha_3,\\ [\alpha_3\,d\alpha_3\,\delta\alpha_3] = -[\omega_{13}\omega_{23}]A_0,\\ [A_1\,dA_1\,\delta A_1] = [\omega_{10}\omega_{13}]\alpha_2,\\ [\alpha_2\,d\alpha_2\,\delta\alpha_2] = -[\omega_{02}\omega_{32}]A_1; \end{cases}$$

en écrivant ces équations, nous avons fait usage des relations § 6 (6) et (10). Ces relations donnent en particulier $[A_0A_1A_2]=\alpha_3$. Donc la condition faite relativement aux facteurs signifie, en considérant le cas d'asymptotiques réelles,

$$[\omega_{01}\omega_{02}]+[\omega_{13}\omega_{23}]=0;$$

d'après (6), cela donne

$$(11)\qquad \lambda_1\lambda_2=-1.$$

Il est important de remarquer que les équations (8) et (11) donnent $\mu_1\mu_2 = -1$ ou bien, selon (7),

$$[\omega_{10}\omega_{13}] + [\omega_{02}\omega_{32}] = 0.$$

D'après (10), nous voyons que *non seulement les facteurs de* A_0 *et* α_3 (relativement à S_0), *mais aussi ceux de* A_1 *et* α_2 (relativement à S_1) *satisfont à la condition habituelle.*

Nous avons déjà remarqué que ω_{01} et ω_{02} sont deux combinaisons linéaires indépendantes de du, dv; d'après (6_1) on peut dire de même des deux expressions ω_{02} et ω_{13} (car $\lambda_1 \neq 0$); pour mettre en évidence ce fait, nous écrirons

$$(12)\qquad \omega_{02} = \omega_1, \qquad \omega_{13} = \omega_2.$$

Les équations (6) et (7) peuvent alors s'écrire, en vertu de (8) et (11),

$$(13)\quad \omega_{01} = -\lambda\omega_2, \qquad \omega_{23} = \lambda\omega_1, \qquad \omega_{10} = -\mu\omega_1, \qquad \omega_{32} = \mu\omega_2 \qquad (\mu\lambda \neq 0).$$

En les différentiant extérieurement, on obtient des équations de structure, en se rappelant les relations (3),

$$(14)\qquad \begin{cases} [\omega_2,\ d\lambda - \lambda(\ \omega_{00} - 2\omega_{11} + \ \omega_{33})] - [\omega_1\omega_{21}] = 0, \\ [\omega_1,\ d\lambda + \lambda(\ \omega_{00} - 2\omega_{22} + \ \omega_{33})] - [\omega_2\omega_{21}] = 0, \\ [\omega_1,\ d\mu + \mu(2\omega_{00} - \ \omega_{11} - \ \omega_{22})] - [\omega_2\omega_{30}] = 0, \\ [\omega_2,\ d\mu + \mu(\ \omega_{11} + \ \omega_{22} - 2\omega_{33})] - [\omega_1\omega_{30}] = 0. \end{cases}$$

Comme au paragraphe 76, soit δ un symbole de différentiation relative seulement aux paramètres inessentiels, et désignons par e_{rs} ce qui devient ω_{rs} en y remplaçant d par δ. Comme il y a quatre paramètres inessentiels, quatre des expressions e_{rs} seront indépendantes. Les expressions (12) ne contenant que du, dv, on a

$$(15)\qquad e_{02} = e_{13} = 0.$$

Les équations (2), (3) et (13) donnent

$$(16)\qquad \begin{cases} e_{00} + e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0, \\ e_{03} = e_{12} = 0, \\ e_{01} = e_{23} = e_{10} = e_{32} = 0. \end{cases}$$

Enfin les équations (14) deviennent, en y donnant à δ la signification restreinte définie plus haut,

$$\begin{aligned}
&(\delta\lambda - \lambda.\,\overline{e_{00} - 2e_{11} + e_{33}})\,\omega_2 - e_{21}\,\omega_1 = 0,\\
&(\delta\lambda + \lambda.\,\overline{e_{00} - 2e_{22} + e_{33}})\,\omega_1 - e_{21}\,\omega_2 = 0,\\
&(\delta\mu + \mu.\,\overline{2e_{00} - e_{11} - e_{22}})\,\omega_1 - e_{30}\,\omega_2 = 0,\\
&(\delta\mu + \mu.\,\overline{e_{11} + e_{22} - 2e_{33}})\,\omega_2 - e_{30}\,\omega_1 = 0.
\end{aligned}$$

En se rappelant que ω_1, ω_2 sont deux expressions linéairement indépendantes en du, dv, on obtient

$$e_{21} = e_{30} = 0, \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\delta\lambda - \lambda(\;e_{00} - 2e_{11} + \;e_{22}) = 0,\\
&\delta\lambda + \lambda(\;e_{00} - 2e_{22} + \;e_{33}) = 0,\\
&\delta\mu + \mu(2e_{00} - \;e_{11} - \;e_{22}) = 0,\\
&\delta\mu + \mu(\;e_{11} + \;e_{22} - 2e_{33}) = 0.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Les équations (18) exigent

$$e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33} = 0, \tag{19}$$

car $\lambda\mu \neq 0$. Les équations (15), (16), (17) et (19) expriment *toutes* les relations entre les e_{rs}, car autrement il y aurait moins de quatre expressions e_{rs} linéairement indépendantes. Donc en particulier les formes de Pfaff $e_{00} - 2e_{11} + e_{22}$, $2e_{00} - e_{11} - e_{22}$ sont indépendantes, de manière que (*voir* § 77) les équations (18) expriment qu'en faisant varier les paramètres inessentiels, les quantités λ, μ varient selon le groupe engendré par

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}, \quad \mu\frac{\partial}{\partial\mu}.$$

On peut donc multiplier chacune des quantités λ, μ par un facteur arbitraire. Donc on peut (parce que $\lambda\mu \neq 0$) particulariser le repère selon les conditions

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 1. \tag{20}$$

Les équations (20) diminuent le nombre des paramètres inessentiels de deux unités. Cela a pour effet deux nouvelles relations entre les e_{rs}. Ce sont, d'après (18) et (20),

$$e_{00} - 2e_{11} + e_{22} = 0, \qquad 2e_{00} - e_{11} - e_{22} = 0.$$

En se rappelant les relations précédentes, on voit que toutes les e_{rs} sont égales à zéro, à l'exception de e_{20} et e_{31}; ces deux dernières expressions sont d'ailleurs linéairement indépendantes, car on a encore deux paramètres inessentiels. Après avoir introduit les relations (20), les équations (13) prennent la forme

$$\omega_{01} = -\omega_2, \qquad \omega_{22} = \omega_1, \qquad \omega_{10} = -\omega_1, \qquad \omega_{32} = \omega_2 \tag{21}$$

et les équations (14) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &[\omega_1\omega_{21}] + [\omega_2, \omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33}] = 0, \\ &[\omega_1, \omega_{00} - 2\omega_{22} + \omega_{33}] - [\omega_2\omega_{21}] = 0, \\ &[\omega_1, 2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}] - [\omega_2\omega_{30}] = 0, \\ &[\omega_1\omega_{30}] - [\omega_2, \omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{33}] = 0. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

D'après le lemme de M. Cartan, les équations (22) fournissent plusieurs relations entre les ω_{rs}; à présent, nous n'en écrirons qu'une seule :

$$\omega_{11} - \omega_{22} = a_1\omega_1 + a_2\omega_2. \tag{23}$$

On en déduit, par différentiation extérieure,

$$\begin{aligned} &[\omega_1, da_1 + a_1(\omega_{00} - \omega_{22}) + \omega_{20}] \\ &+ [\omega_2, da_2 + a_2(\omega_{11} - \omega_{33}) + \omega_{31}] = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$(\delta a_1 + e_{20})\omega_1 + (\delta a_2 + e_{31})\omega_2 = 0,$$

ou bien

$$\delta a_1 = -e_{20}, \qquad \delta a_2 = e_{31}. \tag{24}$$

Les expressions e_{20}, e_{31} étant encore indépendantes, on voit qu'on peut varier le repère de manière à rendre

$$a_1 = a_2 = 0.$$

On aura alors $e_{20} = e_{31} = 0$, toutes les e_{rs} seront égales à zéro, il ne reste aucun paramètre inessentiel. La normalisation du repère est achevée. L'équation (23) devient

$$\omega_{11} - \omega_{22} = 0. \tag{25}$$

D'après (22) et (25), il existe des quantités a, b, α, β telles que

$$\begin{aligned} \omega_{00} - \omega_{11} &= (a + \alpha)\omega_1 + b\omega_2, \\ \omega_{11} - \omega_{33} &= a\omega_1 + (b - \beta)\omega_2, \\ \omega_{21} = -\beta\omega_1 + \alpha\omega_2, &\qquad \omega_{30} = -2b\omega_1 - 2a\omega_2. \end{aligned} \tag{26}$$

En différentiant extérieurement l'équation (25), on obtient encore

$$[\omega_1 \omega_{20}] + [\omega_2 \omega_{31}] = 0,$$

ce qui permet de poser

$$\omega_{20} = \lambda\omega_1 + (\mu + 1)\omega_2, \qquad \omega_{31} = (\mu + 1)\omega_1 + \nu\omega_2. \tag{27}$$

Les équations (2), (3), (12), (21), (25), (26) et (27) expriment toutes les ω_{rs} en combinaison linéaire de ω_1, ω_2, les coefficients dépendant de a, b, α, β, λ, μ, ν. Les formes de Pfaff ω_1 et ω_2 et les quantités a, b, α, β, λ, μ, ν sont les invariants fondamentaux de la congruence W. Si on les connaît, la congruence s'obtient en intégrant le système de Pfaff :

$$\left\{\begin{aligned}
dA_0 &= \left(\frac{4a + 3\alpha}{4}\,\omega_1 + \frac{4b - \beta}{4}\,\omega_2\right)A_0 - \omega_2 A_1 + \omega_1 A_2,\\
dA_1 &= -\omega_1 A_0 - \left(\frac{\alpha}{4}\,\omega_1 + \frac{\beta}{4}\,\omega_2\right)A_1 + \omega_2 A_3,\\
dA_2 &= (\lambda\omega_1 + \overline{\mu + 1}\,\omega_2)A_0 + (-\beta\omega_1 + \alpha\omega_2)A_1\\
&\quad - \left(\frac{\alpha}{4}\,\omega_1 + \frac{\beta}{4}\,\omega_2\right)A_2 + \omega_1 A_3,\\
dA_3 &= -2(b\,\omega_1 + a\,\omega_2)A_0 + (\overline{\mu + 1}\,\omega_1 + \nu\omega_2)A_1\\
&\quad - \left(\frac{4a + \alpha}{4}\,\omega_1 + \frac{4b - 3\beta}{4}\,\omega_2\right)A_2.
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Rappelons que la congruence est engendrée par la droite $[A_0 A_1]$, les points A_0 et A_1 étant les deux foyers.

86. **Congruences W réalisant la déformation projective des deux nappes focales.** — Comme application, nous déterminerons les congruences telles que la correspondance ponctuelle entre les deux surfaces focales déterminée par la congruence soit une déformation projective. La déformation projective étant une correspondance asymptotique, une telle congruence est W de manière que nous pouvons appliquer les formules qui viennent d'être déduites. Nous nous bornerons ici d'ailleurs au cas où les deux nappes focales ne sont pas réglées. En gardant les notations précédentes et en se rappelant que les facteurs du point A_0 décrivant la surface S_0 et du plan tangent α_3 à S_0 sont associés selon la règle habituelle, on voit (*voir* § 22) que

l'élément linéaire projectif de S_0 est égal à

$$-\frac{1}{2}\frac{S(dA_0\, d^2\alpha_3 - d\alpha_3\, d^2A_0)}{S\, dA_0\, d\alpha_3}.$$

Pareillement, l'élément linéaire projectif de S_1 est

$$-\frac{1}{2}\frac{S(dA_1\, d^2\alpha_2 - d\alpha_2\, d^2A_1)}{S\, dA_1\, d\alpha_2}.$$

Pour faire le calcul, on doit faire usage des équations (3), (7) et (9) du paragraphe 75; les valeurs actuelles des formes de Pfaff ω_{rs} étant données par (28). Le résultat est

$$\frac{\alpha-\beta}{8}\frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{\omega_1-\omega_2}+\frac{\alpha+\beta}{8}\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{\omega_1+\omega_2} \tag{29}$$

pour la surface S_0 et

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{8}+\frac{a+b}{2}\right)\frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{\omega_1-\omega_2}+\left(\frac{\alpha+\beta}{8}+\frac{a-b}{2}\right)\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{\omega_1+\omega_2} \tag{29'}$$

pour la surface S_1. Dans le cas actuel, les deux éléments linéaires projectifs doivent coïncider, ce qui donne

$$a=b=0. \tag{30}$$

D'après (3), (21), (25) et (26), nous avons donc à intégrer le système de Pfaff :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \omega_{03}=0, & \omega_{12}=0, & \omega_{23}=\omega_1, & \omega_{32}=\omega_2, & \omega_{10}=-\omega_1,\\ \omega_{01}=-\omega_2, & \omega_{11}-\omega_{22}=0, & \multicolumn{3}{l}{\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{22}+\omega_{33}=\alpha\omega_1+\beta\omega_2,}\\ \multicolumn{2}{l}{\omega_{21}=-\beta\omega_1+\alpha\omega_2,} & \multicolumn{2}{l}{\omega_{00}-\omega_{33}=\alpha\omega_1-\beta\omega_2,} & \omega_{30}=0. \end{array}\right. \tag{31}$$

En différentiant ces équations selon les formules de structure on obtient [il faut se rappeler les équations (12)]

$$\left\{\begin{array}{l} [\omega_1\omega_{20}]+[\omega_2\omega_{31}]=0,\\ [\omega_1\omega_{31}]+[\omega_2\omega_{20}]=0; \end{array}\right. \tag{32}$$

$$\left\{\begin{array}{l} [\omega_1\, d\alpha]-[\omega_2\, d\beta]=0,\\ [\omega_1,\, d\beta-\omega_{31}]-[\omega_2,\, d\alpha+\omega_{20}]=0,\\ [\omega_1,\, d\alpha+2\omega_{20}]+[\omega_2,\, d\beta-2\omega_{31}]-4[\omega_1\omega_2]=0. \end{array}\right. \tag{33}$$

Les équations (32) conduisent à poser

$$\omega_{20}=\lambda\omega_1+(\mu+1)\omega_2,\qquad \omega_{31}=(\mu+1)\omega_1+\lambda\omega_2. \tag{34}$$

Ensuite, les équations (33) deviennent

$$(35) \qquad [\omega_1 - \omega_2,\ d\overline{\alpha + \beta}] = 0, \qquad [\omega_1 + \omega_2,\ d\overline{\alpha - \beta}] = 0,$$

$$(36) \qquad [\omega_1\, d\alpha] + [\omega_2\, d\beta] + 4\mu[\omega_1\omega_2] = 0.$$

D'après (12) et (31), les formules de structure donnent $\omega_1' = \omega_2' = 0$; donc on a, d'après (35),

$$[(\alpha + \beta)(\omega_1 - \omega_2)]' = 0,$$
$$[(\alpha - \beta)(\omega_1 + \omega_2)]' = 0.$$

Les expressions

$$(\alpha + \beta)(\omega_1 - \omega_2), \quad (\alpha - \beta)(\omega_1 + \omega_2)$$

sont donc des différentielles exactes. Elles sont d'ailleurs indépendantes d'après la valeur (29) de l'élément linéaire projectif, car nous avons exclu le cas de surfaces focales réglées. Donc, en choisissant convenablement les coordonnées curvilignes u, v, on peut poser

$$(37) \qquad (\alpha + \beta)(\omega_1 - \omega_2) = 4\, du, \qquad (\alpha - \beta)(\omega_1 + \omega_2) = 4\, dv.$$

D'après (35) et (37), on a

$$(38) \qquad \alpha + \beta = 4\sqrt{U}, \qquad \alpha - \beta = 4\sqrt{V},$$

$U(V)$ ne dépendant que de la variable $u(v)$. L'équation (36) devient, en vertu de (37) et (38),

$$(39) \qquad 2\mu = U' - V'.$$

En différentiant extérieurement les équations (34), on obtient

$$[\omega_1 + \omega_2,\ 2d(\lambda + \mu) + (\alpha + \beta)\mu(\omega_1 - \omega_2)] = 0,$$
$$[\omega_1 - \omega_2,\ 2d(\lambda - \mu) - (\alpha - \beta)\mu(\omega_1 + \omega_2)] = 0,$$

ou bien, selon (37),

$$[dv,\ d(\lambda + \mu) + 2\mu\, du] = 0,$$
$$[du,\ d(\lambda - \mu) - 2\mu\, dv] = 0.$$

Cela donne, d'après (39),

$$(40) \qquad d\lambda = \left(-\frac{1}{2}U'' - U' + V'\right) du + \left(-\frac{1}{2}V'' - V' + U'\right) dv.$$

L'expression $V' du + U' dv$ est donc une différentielle exacte, d'où

$$U'' = V'' = \text{const.}$$

ou bien

$$U = au^2 + 2b_1 u + c_1, \qquad V = av^2 + 2b_2 v + c_2, \tag{41}$$

a, b_1, b_2, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires. L'équation (40) donne, d'après (41),

$$\lambda = -a(u-v)^2 + a(u+v) + 2(b_1 - b_2)(u-v) + c_0, \tag{42}$$

c_0 étant une nouvelle constante arbitraire. L'équation (39) devient, en vertu de (41),

$$\mu = a(u-v) + b_1 - b_2. \tag{43}$$

En substituant les valeurs de ω_1, ω_2, α, β tirées de (37) et (38) dans les équations (28), en tenant compte de (30) et en remarquant que $\nu = \lambda$ d'après (27) et (34), on obtient le système d'équations

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial A_0}{\partial u} &= \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{U}}\right)A_0 + \frac{1}{2\sqrt{U}}(A_1 + A_2),\\
\frac{\partial A_1}{\partial u} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{U}}A_1 - \frac{1}{2\sqrt{U}}(A_0 + A_3),\\
\frac{\partial A_2}{\partial u} &= \frac{\lambda - \mu - 1}{2\sqrt{U}}A_0 - 2A_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{U}}A_2 + \frac{1}{2\sqrt{U}}A_3,\\
\frac{\partial A_3}{\partial u} &= -\frac{\lambda - \mu - 1}{2\sqrt{U}}A_1 - \frac{1}{2\sqrt{U}}A_2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{U}}\right)A_3;\\
\frac{\partial A_0}{\partial v} &= \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{V}}\right)A_0 - \frac{1}{2\sqrt{V}}(A_1 - A_2),\\
\frac{\partial A_1}{\partial v} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{V}}A_1 - \frac{1}{2\sqrt{V}}(A_0 - A_3),\\
\frac{\partial A_2}{\partial v} &= \frac{\lambda + \mu + 1}{2\sqrt{V}}A_0 + 2A_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{V}}A_2 + \frac{1}{2\sqrt{V}}A_3,\\
\frac{\partial A_3}{\partial v} &= \frac{\lambda + \mu + 1}{2\sqrt{V}}A_1 + \frac{1}{2\sqrt{V}}A_2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{V}}\right)A_3,
\end{aligned}\right. \tag{44}$$

dont l'intégration donne les congruences cherchées. Les valeurs des quantités U, V, λ, μ qui y apparaissent sont déterminées par (41), (42) et (43). En éliminant A_1, A_2, A_3 ou bien A_0, A_2, A_3, on obtient les équations déterminant les surfaces focales

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial u^2} = -2\frac{U'}{U}\frac{\partial A_0}{\partial u} + \sqrt{\frac{V}{U}}\frac{\partial A_0}{\partial v} + \left(\frac{\lambda-\mu-2}{4U} + 2\frac{U'}{U} + \frac{1}{4}\frac{V}{U} + \frac{1}{2}\right)A_0,$$

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial v^2} = \sqrt{\frac{U}{V}}\frac{\partial A_0}{\partial u} - 2\frac{V'}{V}\frac{\partial A_0}{\partial v} + \left(\frac{\lambda+\mu+2}{4V} + 2\frac{V'}{V} + \frac{1}{4}\frac{U}{V} + \frac{1}{2}\right)A_0,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial u^2} = -2\frac{U'}{U}\frac{\partial A_1}{\partial u} + \sqrt{\frac{V}{U}}\frac{\partial A_1}{\partial v} + \left(\frac{\lambda-\mu-2}{4U} + \frac{1}{4}\frac{V}{U} + \frac{1}{2}\right)A_1,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial v^2} = \sqrt{\frac{U}{V}}\frac{\partial A_1}{\partial u} - 2\frac{V'}{V}\frac{\partial A_1}{\partial v} + \left(\frac{\lambda+\mu+2}{4V} + \frac{1}{4}\frac{U}{V} + \frac{1}{2}\right)A_1.$$

On en conclut sans difficulté que la déformation projective réalisée par la congruence se réduit à une simple homographie seulement dans le cas $U' = V' = 0$, ou bien

$$U = c_1, \qquad V = c_2, \qquad \lambda = c_0, \qquad \mu = 0.$$

87. Déformation projective des réseaux plans. — Dans un *plan*, un repère se compose seulement de *trois* points A_0, A_1, A_2 satisfaisant à la condition

$$[A_0 A_1 A_2] = 1. \tag{45}$$

Le plus général repère dépend donc de *huit* paramètres. On a des équations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} dA_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2, \\ dA_1 &= \omega_{10}A_0 + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2, \\ dA_2 &= \omega_{20}A_0 + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2, \end{aligned}\right. \tag{46}$$

ω_{rs} étant des formes de Pfaff entre lesquelles l'équation (45) fournit la relation

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0. \tag{47}$$

Si le repère n'est pas particularisé, c'est la seule relation entre les ω_{rs}. En différentiant extérieurement les équations (46), on obtient (*voir* § 75) les formules de structure du groupe projectif dans le plan

$$\omega'_{rs} = \sum_{k=0}^{2}[\omega_{rk}\omega_{ks}] \qquad (r, s = 0, 1, 2). \tag{48}$$

Cela posé, considérons dans notre plan un réseau $x(u, v)$. Nous allons attacher à chaque valeur de (u, v) un repère A_0, A_1, A_2. Nous ne déterminerons pas ce repère intrinsèquement, au contraire nous ferons usage du système de coordonnées curvilignes donné (u, v). Nous poserons

$$(49)\qquad A_0 = \rho x, \qquad A_1 = \frac{\partial A_0}{\partial u} + \lambda A_0, \qquad A_2 = \frac{\partial A_0}{\partial v} + \mu A_0.$$

Nous déterminerons le facteur ρ d'après la condition (45). Quant aux quantités λ, μ, nous les choisirons de manière que les points A_1, A_2 soient les deux transformés de Laplace (*voir* § 51) du réseau. L'équation (46_1) donne, comparée avec ($49_{2,3}$),

$$(50)\qquad \omega_{01} = du, \qquad \omega_{02} = dv.$$

Le point A_1 étant le transformé de Laplace dans le sens de la variable u, la droite $\left[A_1 \frac{\partial A_1}{\partial v}\right]$ passe par le point A_0. En comparant avec (46_2) on voit que $\omega_{12} = 0$ si l'on ne fait varier que le paramètre v. Il s'ensuit la première des deux équations

$$(51)\qquad \omega_{12} = \beta\, du, \qquad \omega_{21} = -\gamma\, dv,$$

et l'autre s'obtient par une considération analogue. L'élément linéaire projectif du réseau est (*voir* § 54)

$$\frac{[A_0 A_{0u} A_{0uu}]\, du^3 + [A_0 A_{0v} A_{0vv}]\, dv^3}{2[A_0 A_{0u} A_{0v}]\, du\, dv}.$$

Or, d'après (45) et (49), on a

$$[A_0 A_{0u} A_{0v}] = 1.$$

En différentiant l'équation (49_2) par rapport à u, on obtient

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial u^2} = \frac{\partial A_1}{\partial u} + (\ldots) A_1 + (\ldots) A_0.$$

D'autre part, d'après (46_2) et (51_1),

$$\frac{\partial A_1}{\partial u} = (\ldots) A_0 + (\ldots) A_1 + \beta A_2.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial u^2} = (\ldots) A_0 + (\ldots) A_1 + \beta A_2,$$

d'où

$$[A_0 A_{0u} A_{0uu}] = \beta [A_0 A_1 A_2] = \beta.$$

Pareillement on obtient

$$[A_0 A_{0v} A_{0vv}] = \gamma.$$

En définitive, l'élément linéaire projectif du réseau considéré est

$$(\star) \qquad \frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv}.$$

Nous allons maintenant déterminer tous les réseaux plans dont l'élément linéaire projectif soit égal à l'expression ($\star$) *donnée*. D'après ce qui précède, cela revient à intégrer le système de Pfaff

$$(52) \qquad \begin{cases} \omega_{01} = du, & \omega_{02} = dv, \\ \omega_{12} = \beta\, du, & \omega_{21} = -\gamma\, dv. \end{cases}$$

Ce système de Pfaff contient dix variables, à savoir les huit paramètres donc dépendent les formes de Pfaff ω_{rs}, ainsi que u et v (β et γ sont des fonctions données de u et v). Il s'agit des solutions à deux dimensions du système de Pfaff pour lesquelles les formes de Pfaff $\omega_{01} = du$, $\omega_{02} = dv$ sont indépendantes. En différentiant extérieurement les équations (52), on obtient, d'après les formules de structure (48),

$$(53) \qquad \begin{cases} [\omega_{00} - \omega_{11}, \omega_{01}] = 0, \qquad [\omega_{00} - \omega_{22}, \omega_{02}] = 0, \\ [\omega_{10}, \omega_{02}] + \beta [\omega_{11} - \omega_{22}, \omega_{01}] = [d\beta, du], \\ [\omega_{20}, \omega_{01}] + \gamma [\omega_{11} - \omega_{22}, \omega_{02}] = -[d\gamma, dv]. \end{cases}$$

Ces équations ont la forme (9) du paragraphe 74, en y remplaçant Ω_1, Ω_2, π_s par $\omega_{01} = du$, $\omega_{02} = dv$, $\omega_{00} - \omega_{11}$, $\omega_{00} - \omega_{22}$, ω_{10}, ω_{20}. Le déterminant D [§ 74(11)] est égal à $\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 \neq 0$. Donc le système (10) est en involution par rapport à ω_1, ω_2 et l'on a le résultat suivant : *Les réseaux plans dont l'élément linéaire projectif est égal à une expression donnée de la forme ($\star$) dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.* Il en résulte que, contrairement à ce qui arrive pour les surfaces, *chaque* réseau plan est projectivement déformable; la déformation dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument. Il y a une exception apparente dans le cas $\beta = \gamma = 0$ d'un réseau doublement réglé, car ces réseaux ne dépendent évidemment que de *deux* fonctions arbitraires d'un argument. Or un moment de réflexion suffit à nous rendre évident que cette exception est une conséquence du fait que chaque réseau plan doublement réglé admet une infinité de déformations projectives en lui-même, cette infinité dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument.

Le repère normal attaché à une congruence W au paragraphe 85 est un peu différent de celui qui a été introduit par M. Mentré [3]. Le repère de M. Mentré est choisi *symétriquement* relativement aux deux surfaces focales, le procédé du paragraphe 85 n'a pas cette symétrie, mais il a l'avantage que la particularisation peut être poussée plus loin si l'on a donné seulement la première surface focale, mais non la congruence W. Les résultats du paragraphe 86 ont été énoncés sans démonstration par Čech [26]. Le théorème du paragraphe 87 a été énoncé sans démonstration par Čech [27].