Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

Chapitre XIII: Application des méthodes de M. Cartan a la théorie projective des surfaces

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [218]--242.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402570

CHAPITRE XIII.

APPLICATION DES MÉTHODES DE M. CARTAN A LA THÉORIE PROJECTIVE DES SURFACES.

75. Les équations de structure du groupe projectif. — Dans l'espace ordinaire, nous appellerons *repère* la figure formée par quatre points linéairement indépendants A_0, A_1, A_2, A_3 donnés par ses coordonnées homogènes. Chaque point M de l'espace peut, d'une manière et d'une seule, être mis sous la forme

$$M = x_0 A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3; \tag{1}$$

les quantités x_0, x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées homogènes de M par rapport au repère. Nous ne considérerons que les repères tels que

$$[A_0 A_1 A_2 A_3] = 1, \tag{2}$$

le premier membre étant le déterminant des coordonnées des points A_0, A_1, A_2, A_3.

Soient A_0, A_1, A_2, A_3 le repère *le plus général possible*. D'après la condition (2), il dépend de 15 paramètres t_1, t_2, ..., t_{15} (¹). D'après (1), on a des formules du type

$$\left\{\begin{aligned} dA_0 &= \omega_{00} A_0 + \omega_{01} A_1 + \omega_{02} A_2 + \omega_{03} A_3, \\ dA_1 &= \omega_{10} A_0 + \omega_{11} A_1 + \omega_{12} A_2 + \omega_{13} A_3, \\ dA_2 &= \omega_{20} A_0 + \omega_{21} A_1 + \omega_{22} A_2 + \omega_{23} A_3, \\ dA_3 &= \omega_{30} A_0 + \omega_{31} A_1 + \omega_{32} A_2 + \omega_{33} A_3, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

où les ω_{rs} sont des expressions linéaires par rapport à dt_1, dt_2, ..., dt_{15}. En différentiant l'équation (2), on obtient l'identité

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0. \tag{4}$$

(¹) On peut prendre pour t_1, t_2, ..., t_{15}, par exemple, les coordonnées homogènes des points A_r, sauf *une* qui est déterminée en fonction des autres par l'équation (2).

On peut ajouter qu'il n'y a aucune autre relation entre les formes ω_{rs}. En effet, si l'on donne aux différentielles $dt_1, \ldots, dt_{15}$ des valeurs annulant toutes les ω_{rs}, on a nécessairement

$$dA_0 = dA_1 = dA_2 = dA_3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad dt_1 = \ldots = dt_{15} = 0,$$

de manière qu'il y ait 15 formes indépendantes entre les ω_{rs}.

Des équations (3), on obtient par différentiation extérieure (*voir* § 71)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{3} (A_k\,\omega_{rk})' = \sum_{k=0}^{3} [dA_k,\ \omega_{rk}] + \sum_{k=0}^{3} \omega'_{rk} A_k \\ &= \sum_{k=0}^{3} \left[\sum_{s=0}^{3} \omega_{ks} A_s.\ \omega_{rk} \right] + \sum_{s=0}^{3} A_s\,\omega'_{rs} = \sum_{s=0}^{3} A_s \left[\omega'_{rs} - \sum_{k=0}^{3} [\omega_{rk}\,\omega_{ks}] \right]. \end{aligned}$$

Les points A_0, A_1, A_2, A_3 étant linéairement indépendants, on arrive aux *formules de structure du groupe projectif*

$$(5) \qquad \omega'_{rs} = \sum_{k=0}^{3} [\,\omega_{rk}\,\omega_{ks}] \qquad (r,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Nous avons supposé que le repère A_0, A_1, A_2, A_3 soit le plus général possible. Or, si l'on soumet les paramètres $t_1, \ldots, t_{15}$ à des relations quelconques, il résulte de la covariance du produit extérieure et de la dérivée extérieure que la forme des équations (5) reste inaltérée.

Réciproquement, supposons données 16 formes de Pfaff ω_{rs}, liées par les équations (4) et (5), $n \leqq 15$ de ces formes étant indépendantes. Les équations (5) montrent en premier lieu que le système de Pfaff

$$\omega_{10} = 0, \qquad \omega_{01} = 0, \qquad \ldots \qquad \omega_{33} = 0$$

est complètement intégrable, de manière qu'on puisse exprimer toutes les ω_{rs} moyennant n paramètres $t_1, \ldots, t_n$. Ensuite, les équations (5) expriment que le système de Pfaff (3) à n variables indépendantes $(t_1, \ldots, t_n)$ et 16 dépendantes (ce sont les coordonnées homogènes des points A_0, A_1, A_2, A_3) est complètement intégrable. Enfin, l'équation (3) montre qu'on a

$$[A_0\,A_1\,A_2\,A_3] = \text{const.},$$

en vertu de (3). On peut donc intégrer le système (3) sous la condition (2) et l'on arrive à un repère mobile A_0, A_1, A_2, A_3 dépendant de n paramètres pour lequel les formes ω_{rs} coïncident avec les formes de Pfaff données.

Occasionnellement, il y a lieu de considérer, outre le repère *ponctuel* A_0, A_1, A_2, A_3, le repère *adjoint* α_0, α_1, α_2, α_3 formé des *plans*

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_0 &= -[A_1 A_2 A_3], \\ \alpha_1 &= [A_0 A_2 A_3], \\ \alpha_2 &= -[A_0 A_1 A_3], \\ \alpha_3 &= [A_0 A_1 A_2]. \end{aligned}\right.$$

On en tire, d'après (2),

$$(7)\qquad SA_r\alpha_r = 1, \qquad SA_r\alpha_s = 0 \qquad (r, s = 0, 1, 2, 3;\ r \neq s).$$

Les équations (7) donnent, d'après la règle de multiplication des déterminants,

$$[A_0 A_1 A_2 A_3][\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = 1,$$

de manière que (2) donne

$$(8)\qquad [\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = 1.$$

On a des équations analogues à (3),

$$d\alpha_r = \sum_{s=0}^{3} \Omega_{rs}\alpha_s \qquad (r = 0, 1, 2, 3),$$

d'où, selon (7),

$$SA_s\, d\alpha_r = \Omega_{rs};$$

pareillement, on tire de (3),

$$S\alpha_r\, dA_s = \omega_{sr}.$$

Or, en différentiant (7), on obtient

$$dSA_s\alpha_r = SA_s\, d\alpha_r + S\alpha_r dA_s = 0,$$

d'où $\Omega_{rs} = -\omega_{sr}$. Donc, on obtient le système *adjoint* à (3),

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} d\alpha_0 &= -\omega_{00}\alpha_0 - \omega_{10}\alpha_1 - \omega_{20}\alpha_2 - \omega_{30}\alpha_3, \\ d\alpha_1 &= -\omega_{01}\alpha_0 - \omega_{11}\alpha_1 - \omega_{21}\alpha_2 - \omega_{31}\alpha_3, \\ d\alpha_2 &= -\omega_{02}\alpha_0 - \omega_{12}\alpha_1 - \omega_{22}\alpha_2 - \omega_{32}\alpha_3, \\ d\alpha_3 &= -\omega_{03}\alpha_0 - \omega_{13}\alpha_1 - \omega_{23}\alpha_2 - \omega_{33}\alpha_3. \end{aligned}\right.$$

En différentiant extérieurement les équations (9), on retrouve naturellement les équations (5).

Remarquons enfin que les équations (7) montrent que la relation entre les deux repères A_0, A_1, A_2, A_3 et $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ est *symétrique*. Donc, on a les équations analogues à (6) :

$$(6') \qquad \left\{\begin{aligned} A_0 &= -[\alpha_1\alpha_2\alpha_3], \\ A_1 &= [\alpha_0\alpha_2\alpha_3], \\ A_2 &= -[\alpha_0\alpha_1\alpha_3], \\ A_3 &= [\alpha_0\alpha_1\alpha_2]. \end{aligned}\right.$$

76. **Les repères mobiles attachés à une surface.** — Soit donnée une surface S engendrée par le point $x(u, v)$. A chaque point x de S, nous associerons un repère A_0, A_1, A_2, A_3, assujetti aux conditions suivantes : 1° le point A_0 coïncide *en position* avec x; 2° le plan $\alpha_3 = [A_0A_1A_2]$ est le plan tangent à S en X ; 3° la condition usuelle (2). On voit tout de suite que pour chaque valeur de (u, v) le repère A_0, A_1, A_2, A_3 (et donc aussi les formes de Pfaff ω_{rs}) dépend encore de *dix* paramètres; donc, on a en tout *douze* paramètres : les deux paramètres *essentiels* u, v et dix autres paramètres *inessentiels* t_1, t_2, ..., t_{10}. Notre but sera de *normaliser* le repère, c'est-à-dire de définir d'une manière *intrinsèque* et *invariante* les paramètres inessentiels en fonction de ceux essentiels, de façon qu'on arrive à un *repère normal* ne dépendant que des deux paramètres u, v. Que le procédé qui suit soit *intrinsèque*, c'est évident, car nous n'emploierons jamais *explicitement* les paramètres u, v; qu'il soit *invariant* (par rapport au groupe projectif), cela résulte de ce que nous emploierons seulement les expressions ω_{rs} qui ne changent pas si l'on soumet les coordonnées de A_0, A_1, A_2, A_3 à une substitution linéaire à coefficients constants.

Nous commencerons par une convention relative à la notation : Nous désignerons par δ un symbole de différentiation obtenue en laissant u, v fixes et faisant varier seulement les paramètres inessentiels t_1, ..., t_{10}; le symbole d se rapportera à une variation quelconque de *tous* les paramètres. Pour abréger, nous désignerons par e_{rs} ce que devient ω_{rs} quand on y utilise le symbole δ de différentiation, en gardant la notation ω_{rs} pour le symbole d. Rappelons la relation (4),

$$(4) \qquad \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0,$$

qui donne naturellement aussi

$$e_{00}+e_{11}+e_{22}+e_{33}=0. \tag{4'}$$

Le point A_0 coïncidant en position avec le point $x(u, v)$ de la surface S, sa différentielle dA_0 représente un point situé dans le plan tangent à S; or, d'après la convention faite plus haut, c'est le plan $[A_0 A_1 A_2]$; donc, l'équation (3_1) donne qu'on a identiquement

$$\omega_{03}=0. \tag{10}$$

d'où

$$e_{03}=0. \tag{10'}$$

L'équation citée devient donc

$$dA_0 = \omega_{00} A_0 + \omega_{01} A_1 + \omega_{02} A_2,$$

d'où

$$\delta A_0 = e_{00} A_0 + e_{01} A_1 + e_{02} A_2.$$

Or, si l'on ne varie que les paramètres inessentiels, le point A_0 reste fixe en position; il en résulte que le point δA_0 est proportionnel à A_0, ce qui donne

$$e_{01}=0, \qquad e_{02}=0. \tag{11}$$

Les équations (11) disent que les formes ω_{01}, ω_{02} s'annulent en vertu de $du = dv = 0$; ce sont donc deux combinaisons linéaires des *du*, *dv seules* [1]. On peut ajouter que les formes ω_{01}, ω_{02} sont *indépendantes;* en effet, dans le cas contraire, on aurait $\omega_{01} : \omega_{02} = a_1 : a_2$, a_1 et a_2 étant des fonctions de nos douze paramètres, et la tangente $[A_0, dA_0]$ à S en X coïnciderait en position avec la droite

$$[A_0, a_1 A_1 + a_2 A_2]$$

indépendante de $du : dv$, ce qui est absurde. Une particularisation du repère ne pouvant introduire aucune relation entre u et v, on voit que les formes ω_{01}, ω_{02} restent indépendantes après la particularisation. Au contraire, quand la normalisation sera achevée, il ne restera que les deux paramètres indépendants u, v, et toutes les

---

[1] Les *coefficients* de ces combinaisons peuvent dépendre aussi des paramètres inessentiels $t_1, t_2, \ldots, t_{10}$.

formes ω_{rs} seront linéairement dépendantes de du, dv, c'est-à-dire de ω_{01}, ω_{02}. On voit que les formes de Pfaff ω_{01}, ω_{02} jouent un rôle distingué; il convient donc d'introduire pour elles une notation plus commode; nous poserons

$$\omega_{01}=\omega_1, \qquad \omega_{02}=\omega_2. \tag{12}$$

Nous savons que notre repère dépend de *douze* paramètres u, v, t_1, ..., t_{10}. Donc, il y a *quatre* relations indépendantes entre les seize formes de Pfaff ω_{rs}; nous en connaissons déjà *deux*, à savoir (4) et (10). Les deux autres relations s'obtiennent en différentiant extérieurement l'équation (10); cela donne, d'après les formules de structure (5), en tenant compte de l'équation (10) elle-même,

$$[\omega_1\omega_{13}]+[\omega_2\omega_{23}]=0.$$

En effet, les formes ω_1, ω_2 étant indépendantes, le lemme de M. Cartan (§ 70) dit que l'on peut trouver des fonctions a_1, a_2, a_3 de nos douze paramètres telles que

$$\omega_{13}=a_1\omega_1+a_2\omega_2, \qquad \omega_{23}=a_2\omega_1+a_3\omega_2; \tag{13}$$

voilà les deux relations cherchées entre les ω_{rs}. D'après (5), cela donne

$$e_{13}=e_{23}=0. \tag{13'}$$

Le nombre des paramètres inessentiels étant égal à *dix*, il y a *six* relations indépendantes entre les e_{rs}; ce sont les équations (4'), (10'), (11) et (13'). Il importe de remarquer qu'il n'y a aucune autre relation entre les e_{rs}.

Les relations (13) peuvent s'écrire

$$\omega_{13}=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\omega_1}, \qquad \omega_{23}=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\omega_2},$$

où nous avons posé

$$\varphi_2=a_1\omega_1^2+2a_2\omega_1\omega_2+a_3\omega_2^2.$$

L'équation $\varphi_2=0$ définit les *asymptotiques*. En effet, une direction asymptotique est caractérisée par la circonstance que non seulement A_0 et dA_0, mais aussi le point d^2A_0 est situé dans le plan tangent $[A_0A_1A_2]$. Or, les équations (3) donnent, en tenant compte de (10),

$$d^2A_0=(\ldots)A_0+(\ldots)A_1+(\ldots)A_2+(\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23})A_3,$$

de manière que la condition cherchée soit bien

$$\varphi_2 = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = 0.$$

77. Première particularisation du repère. — Nous allons rechercher comment varient les quantités a_1, a_2, a_3 en variant les paramètres inessentiels. Dans ce but, nous partirons des équations

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= [\omega_{00} - \omega_{11},\ \omega_1\ ] + [\omega_2\ \omega_{21}],\\ \omega'_2 &= [\omega_{00} - \omega_{22},\ \omega_2\ ] + [\omega_1\ \omega_{12}],\\ \omega'_{13} &= [\omega_{11} - \omega_{33},\ \omega_{13}] + [\omega_{12}\,\omega_{23}],\\ \omega'_{23} &= [\omega_{21}\,\omega_{13}] + [\omega_{22} - \omega_{33},\ \omega_{23}], \end{aligned}\right.$$

qui s'obtiennent des (5), d'après (10). Les équations (14) sont valables pour deux symboles d, δ de différentiation *quelconques*. En particulier, supposons, conformément à la convention faite plus haut, que le symbole δ se rapporte à la variation des paramètres inessentiels seuls. L'équation (14_1) sera alors

$$de_{01} - \delta\omega_1 = (\omega_{00} - \omega_{11})e_{01} - (e_{00} - e_{11})\omega_1 + \omega_2 e_{21} - e_{02}\omega_{21};$$

d'après (11), c'est la première des équations

$$(14')\quad \left\{\begin{aligned} \delta\omega_1 &= (e_{00} - e_{11})\omega_1 - e_{21}\omega_2,\\ \delta\omega_2 &= e_{12}\omega_1 + (e_{00} - e_{22})\omega_2,\\ \delta\omega_{13} &= (e_{11} - e_{33})\omega_{13} + e_{12}\omega_{23},\\ \delta\omega_{23} &= e_{21}\omega_{13} + (e_{22} - e_{33})\omega_{23}; \end{aligned}\right.$$

les autres s'obtiennent par la même méthode en tenant compte aussi de (13').

En différentiant les équations (13) par rapport aux paramètres inessentiels, on obtient, d'après (14'),

$$\begin{aligned} &(\delta a_1 + \overline{e_{00} - 2e_{11} + e_{22}}\,a_1 - 2e_{12}a_2)\,\omega_1\\ &\quad + (\delta a_2 - e_{21}a_1 + \overline{e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33}}\,a_2 - e_{12}a_3)\,\omega_2 = 0,\\ &(\delta a_2 - e_{21}a_1 + \overline{e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33}}\,a_2 - e_{12}a_3)\,\omega_1\\ &\qquad + (\delta a_3 - 2e_{21}a_2 + \overline{e_{00} - 2e_{22} + e_{33}}\,a_3)\,\omega_2 = 0. \end{aligned}$$

Or, les quantités entre parenthèses ne dépendent point de du, dv, tandis que ω_1, ω_2 sont deux combinaisons linéaires indépendantes de

du, dv; il en résulte que

$$(15)\qquad \begin{cases} \delta a_1 + (e_{00} - 2e_{11} + e_{33})a_1 - 2e_{12}a_2 = 0, \\ \delta a_2 - e_{21}a_1 + (e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33})a_2 - e_{12}a_3 = 0, \\ \delta a_3 - 2e_{21}a_2 + (e_{00} - 2e_{22} + e_{33})a_3 = 0. \end{cases}$$

Les équations (15) nous apprennent comment varient les a_1, a_2, a_3 en variant les paramètres inessentiels. En effet, d'après la remarque que nous avons faite après avoir écrit la formule (13'), les formes de Pfaff

$$(\star)\qquad e_{12}, \quad e_{21}, \quad e_{00} - 2e_{11} + e_{33}, \qquad e_{00} - 2e_{22} + e_{33}$$

sont indépendantes (tandis que

$$\overline{2e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33}} = \overline{e_{00} - 2e_{11} + e_{33}} + \overline{e_{00} - 2e_{22} + e_{33}}).$$

On peut donc donner aux $t_1, \ldots, t_{10}$ des accroissements infiniment petits tels qu'une quelconque des expressions $(\star)$ soit différente de zéro et que les autres s'évanouissent; or, cela signifie pour les a_1, a_2, a_3 les transformations infinitésimales dont les symboles sont respectivement

$$2a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + a_3\frac{\partial}{\partial a_2}, \quad a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + 2a_2\frac{\partial}{\partial a_3},$$
$$2a_1\frac{\partial}{\partial a_1} + a_2\frac{\partial}{\partial a_2}, \quad a_2\frac{\partial}{\partial a_2} + 2a_3\frac{\partial}{\partial a_3}.$$

On reconnaît tout de suite que ces quatre transformations infinitésimales engendrent le groupe de *toutes les transformations linéaires qui conservent la forme* $a_1 a_3 - a_2^2$ *à un facteur numérique près*. Or, *excluons le cas d'une surface développable;* alors, le discriminant $a_1 a_3 - a_2^2$ de la forme asymptotique φ_2 sera différent de zéro, et l'on voit qu'on peut introduire entre nos paramètres les relations identiques

$$(16)\qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = 0.$$

C'est la *première particularisation du repère;* on pourrait l'obtenir plus brièvement par une considération géométrique, mais nous avons préféré procéder par une voie purement analytique pour faire ressortir clairement le caractère général de la méthode.

Après avoir introduit les relations (16), il ne reste que *sept* paramètres inessentiels indépendants, soient $t_1, t_2, \ldots, t_7$. Les relations (16) ont naturellement comme conséquence trois relations nouvelles entre les ω_{rs} auxquelles correspondent trois relations entre les e_{rs}. Pour les obtenir, il faut différentier extérieurement les équations (13) qui deviennent, en vertu de (16),

$$(17) \qquad \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = \omega_1.$$

Cela donne, en effet, les relations extérieures

$$2[\omega_1 \omega_{12}] + [\omega_2, \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33}] = 0,$$
$$[\omega_1, \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33}] + 2[\omega_2 \omega_{21}] = 0.$$

D'après le lemme de M. Cartan, il résulte l'existence de quatre quantités b_0, b_1, b_2, b_3 telles que

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{12} = b_0 \omega_1 + b_1 \omega_2, \qquad \omega_{21} = b_2 \omega_1 + b_3 \omega_2, \\ \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 2(b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2). \end{array} \right.$$

Ce sont les relations cherchées entre les ω_{rs} auxquelles correspondent les relations

$$(18') \qquad e_{12} = 0, \qquad e_{21} = 0;$$
$$(18'') \qquad e_{11} + e_{22} - e_{00} - e_{33} = 0$$

entre les e_{rs}. Nous savons qu'il n'y a pas d'autres relations.

78. **Deuxième particularisation du repère.** — Les équations ($14'_{12}$) s'écrivent, d'après (18'),

$$(19) \qquad \delta\omega_1 = (e_{00} - e_{11})\omega_1, \qquad \delta\omega_2 = (e_{00} - e_{22})\omega_2.$$

En formant les covariants bilinéaires des expressions ω_{12}, ω_{21}, $\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33}$ et en procédant comme pour les (14'), on obtient, ayant égard à (17), (18'), (18''),

$$(19') \qquad \left\{ \begin{array}{r} \delta\omega_{12} = (e_{10} - e_{32})\omega_2 + (e_{11} - e_{22})\omega_{12}, \\ \delta\omega_{21} = (e_{20} - e_{31})\omega_1 + (e_{22} - e_{11})\omega_{21}, \\ \delta(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33}) = (e_{10} - e_{32})\omega_1 + (e_{20} - e_{31})\omega_2. \end{array} \right.$$

La dernière de ces équations devient, d'après (18_3) et (19),

$$\left(2\,\delta b_1 + 2\overline{e_{00} - e_{11}}\,b_1 + \overline{e_{32} - e_{10}}\right)\omega_1$$
$$+ \left(2\,\delta b_2 + 2\overline{e_{00} - e_{22}}\,b_2 + \overline{e_{31} - e_{20}}\right)\omega_2 = 0,$$

d'où

$$(20)\qquad \begin{cases} 2\,\delta b_1 + 2(e_{00} - e_{11})b_1 + e_{32} - e_{10} = 0, \\ 2\,\delta b_2 + 2(e_{00} - e_{22})b_2 + e_{31} - e_{20} = 0. \end{cases}$$

Les expressions $e_{00} - e_{11}$, $e_{00} - e_{22}$, $e_{32} - e_{10}$, $e_{31} - e_{20}$ étant encore linéairement indépendantes, on voit qu'en variant les sept paramètres inessentiels, les quantités b_1, b_2 se transforment selon le groupe engendré par les transformations infinitésimales de symboles

$$\frac{\partial}{\partial b_1}, \quad b_1\frac{\partial}{\partial b_1}, \quad \frac{\partial}{\partial b_2}, \quad b_2\frac{\partial}{\partial b_2},$$

c'est-à-dire chacune des quantités b_1, b_2 subit indépendamment de l'autre une substitution linéaire entière complètement arbitraire.

On peut donc introduire les deux relations

$$(21)\qquad b_1 = b_2 = 0.$$

C'est la *deuxième particularisation du repère*. L'équation (18_3) devient

$$(22)\qquad \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{33} = 0.$$

En la différentiant extérieurement, on obtient, d'après (17),

$$[\omega_{10} - \omega_{32}, \omega_1] + [\omega_{20} - \omega_{31}, \omega_2] = 0.$$

Cela démontre l'existence de quantités c_1, c_2, c_3 telles que

$$(23)\qquad \omega_{32} - \omega_{10} = c_1\omega_1 + c_2\omega_2, \qquad \omega_{31} - \omega_{20} = c_2\omega_1 + c_3\omega_2.$$

La particularisation (21) signifie deux relations nouvelles entre les paramètres ; il ne reste plus que *cinq* paramètres inessentiels, soient t_1, t_2, ..., t_5. Les deux relations nouvelles entre les ω_{rs} sont les équations (23) auxquelles correspondent les relations

$$(23')\qquad e_{32} = e_{10}, \qquad e_{31} = e_{20}$$

entre les e_{rs}.

79. **Troisième particularisation du repère.** — Les relations $(18_{1,2})$ deviennent, en vertu de (21),

$$(24)\qquad \omega_{12} = b_0\omega_1, \qquad \omega_{21} = b_3\omega_2.$$

En les différentiant extérieurement, on obtient, d'après (19), (19') et (23′),

$$\delta b_0 + (e_{00} - 2e_{11} + e_{22}) b_0 = 0,$$
$$\delta b_3 + (e_{00} + e_{11} - 2e_{22}) b_3 = 0.$$

Les deux formes de Pfaff $e_{00} - 2e_{11} + e_{22}$, $e_{00} + e_{11} - 2e_{22}$ sont encore indépendantes; il en résulte que l'effet de la variation des paramètres inessentiels $t_1, t_2, \ldots, t_5$ signifie pour b_0, b_3 une transformation arbitraire du groupe engendré par

$$b_0 \frac{\partial}{\partial b_0}, \quad b_3 \frac{\partial}{\partial b_3}.$$

On peut donc multiplier chacune des deux quantités b_0, b_3 par un facteur quelconque différent de zéro. *En supposant* $b_0 b_3 \neq 0$, on peut donc effectuer la *troisième particularisation du repère* selon les équations

$$b_0 = b_3 = 1. \tag{25}$$

Quelle est la signification géométrique de la condition $b_0 b_3 \neq 0$?

L'équation $\varphi_2 = 0$ des asymptotiques est, d'après (16), $2\omega_1\omega_2 = 0$. Si l'on se déplace le long de l'asymptotique $\omega_2 = 0$, on a, d'après (10) et (24₁),

$$dA_0 = \omega_{00} A_0 + \omega_1 A_1,$$
$$dA_1 = \omega_{10} A_0 + \omega_{11} A_1 + b_0 \omega_1 A_2,$$

d'où

$$d[A_0 A_1] = (\omega_{00} + \omega_{11}) [A_0 A_1] + b_0 \omega_1 [A_0 A_2].$$

Donc, l'équation $b_0 = 0$ signifie que la droite $[A_0 A_1]$ reste fixe en position en se déplaçant sur une asymptotique $\omega_2 = 0$, c'est-à-dire que les asymptotiques $\omega_2 = 0$ sont rectilignes. Pareillement, on voit que l'équation $b_3 = 0$ signifie que les asymptotiques $\omega_1 = 0$ sont rectilignes. Donc, moyennant l'inégalité $b_0 b_3 \neq 0$, *nous avons exclu les surfaces réglées.*

Après la particularisation (25), les équations (24) deviennent

$$\omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{21} = \omega_2. \tag{26}$$

Leur différentiation extérieure donne, d'après (17),

$$[\omega_1, \omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22}] + [\omega_2, \omega_{32} - \omega_{10}] = 0,$$
$$[\omega_1, \omega_{31} - \omega_{20}] + [\omega_2, \omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22}] = 0.$$

On voit donc, en se rappelant les équations (23), qu'il existe des quantités c_0, c_1 telles que

$$(27)\quad \begin{cases} \omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11} = c_0\omega_1 + c_1\omega_2, \\ \omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22} = c_3\omega_1 + c_4\omega_2. \end{cases}$$

Les équations (25) introduisant deux nouvelles relations entre les paramètres, il ne reste que trois paramètres inessentiels indépendants; soient t_1, t_2, t_3. Les deux relations nouvelles entre les ω_{rs} sont les (27), d'où résultent pour les e_{rs} les relations

$$e_{00} + e_{22} - 2e_{11} = 0,$$
$$e_{00} + e_{11} - 2e_{22} = 0.$$

D'après (4'), (10'), (11), (13'), (18'), 18'') et (23'),

$$(28)\quad \begin{cases} e_{00} = e_{01} = e_{02} = e_{03} = e_{11} = e_{12} = e_{13} = e_{21} = e_{22} = e_{23} = e_{33} = 0, \\ e_{32} = e_{10}, \qquad e_{31} = e_{20}, \end{cases}$$

tandis que e_{10}, e_{20}, e_{30} sont encore trois formes de Pfaff indépendantes en t_1, t_2, t_3. Les équations (19) prennent la forme simple

$$(29)\qquad \delta\omega_1 = 0, \qquad \delta\omega_2 = 0.$$

80. **Une remarque relative aux repères semi-normaux.** — Avant d'achever la normalisation, nous ferons une remarque qui nous sera utile plus tard. Le plus général repère A_0, A_1, A_2, A_3 dépend de quinze paramètres; ce sont, par exemple, quinze des coordonnées homogènes des points $A_r (r = 0, 1, 2, 3)$, la sixième étant déterminée par la relation (2); on peut encore prendre comme paramètres quinze fonctions indépendantes de ces quinze coordonnées. Or, écrivons le système de Pfaff

$$(30)\quad \begin{cases} \omega_{01} = 0, \quad \omega_{02} = 0, \quad \omega_{03} = 0, \quad \omega_{12} = 0, \quad \omega_{13} = 0, \quad \omega_{21} = 0, \quad \omega_{23} = 0, \\ \omega_{00} - \omega_{11} = 0, \qquad \omega_{00} - \omega_{22} = 0, \qquad \omega_{00} - \omega_{33} = 0, \\ \omega_{10} - \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{20} - \omega_{31} = 0 \end{cases}$$

contenant nos quinze paramètres. Les équations de structure (5) montrent que ce système est complètement intégrable. Il est donc équivalent à un système de la forme

$$(30')\qquad d\tau_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\tau_{12} = 0,$$

$\tau_1, \ldots, \tau_{12}$ étant douze fonctions indépendantes de nos quinze paramètres. Nous pouvons donc déterminer trois nouvelles fonctions τ_{13}, τ_{14}, τ_{15} de ces paramètres de manière que les quinze fonctions

$$(\star) \qquad \tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_{15}$$

soient indépendantes. On peut donc prendre les quantités $(\star)$ comme nouveaux paramètres du repère A_0, A_1, A_2, A_3. Pour abréger, appelons les quantités

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots, \quad \tau_{12}$$

les *paramètres principaux* du repère A_0, A_1, A_2, A_3; les τ_{13}, τ_{14}, τ_{15} soient les *paramètres secondaires* de ce repère. Cela étant, retournons aux repères trois fois particularisés que nous avons attachés à la surface S. En se rappelant que les deux systèmes de Pfaff (30) et (30') sont équivalents, on voit que les équations (28) peuvent s'écrire

$$\delta\tau_1 = \delta\tau_2 = \ldots = \delta\tau_{12} = 0.$$

Donc, après les particularisations faites plus haut, les paramètres principaux du repère A_0, A_1, A_2, A_3 sont des fonctions bien déterminées des variables essentielles u, v. Pour abréger, appelons A_0, A_1, A_2, A_3 le repère *semi-normal*. Pour chaque valeur de (u, v), il y a ∞^3 tels repères; ils dépendent de trois paramètres arbitraires, qui sont les paramètres secondaires du repère.

81. Les repères normaux. — Passons à la dernière particularisation du repère. Des équations de structure, on déduit, ayant égard à (10), (12), (17), (22), (23), (26), (27) et (28), que

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\delta\omega_{00} = \quad \delta\omega_{33} &= e_{10}\omega_1 + e_{20}\omega_2, \\ \delta\omega_{11} = -\delta\omega_{22} &= e_{10}\omega_1 - e_{20}\omega_2, \\ \delta(\omega_{32} - \omega_{10}) &= 2(e_{20}\omega_1 + e_{30}\omega_2), \\ \delta(\omega_{31} - \omega_{20}) &= 2(e_{30}\omega_1 + e_{10}\omega_2). \end{aligned} \right.$$

En différentiant extérieurement les équations (23) et (27), on obtient, d'après (29) et (31),

$$\begin{aligned} (\delta c_1 - 2e_{20})\omega_1 + (\delta c_2 - 2e_{30})\omega_2 &= 0, \\ (\delta c_2 - 2e_{30})\omega_1 + (\delta c_3 - 2e_{10})\omega_2 &= 0, \\ (\delta c_0 + 4e_{10})\omega_1 + (\delta c_1 - 2e_{20})\omega_2 &= 0, \\ (\delta c_3 - 2e_{10})\omega_1 + (\delta c_4 - 4e_{20})\omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\delta c_0 = -4e_{10}, \quad \delta c_1 = 2e_{20}, \quad \delta c_2 = 2e_{30},$$
$$\delta c_3 = 2e_{10}, \quad \delta c_4 = -4e_{10}.$$

Donc, les changements encore permis des paramètres inessentiels transforment les quantités c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 selon le groupe engendré par les transformations infinitésimales

$$2\frac{\partial}{\partial c_0} - \frac{\partial}{\partial c_3}, \quad 2\frac{\partial}{\partial c_4} - \frac{\partial}{\partial c_1}, \quad \frac{\partial}{\partial c_2}.$$

Les équations finies de ce groupe sont

$$c'_0 = c_0 - 2\lambda_1, \quad c'_1 = c_1 + \lambda_2, \quad c'_2 = c_2 + \lambda_3,$$
$$c'_3 = c_3 + \lambda_1, \quad c'_4 = c_4 - 2\lambda_2.$$

On peut donc particulariser le repère selon les conditions

(32) $$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Les équations (23) deviennent simplement

(33) $$\omega_{31} = \omega_{20}, \quad \omega_{32} = \omega_{10}.$$

En les différentiant extérieurement, on obtient

$$[\omega_1 \omega_{30}] + [\omega_2 \omega_{10}] = 0,$$
$$[\omega_1 \omega_{20}] + [\omega_2 \omega_{30}] = 0,$$

de manière qu'il existe des quantités λ, μ, ν, ρ telles que

(34) $$\begin{cases} \omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2, \\ \omega_{20} = \nu\omega_1 + \rho\omega_2, \\ \omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2. \end{cases}$$

Ce sont les trois relations nouvelles entre les ω_{rs} auxquelles conduisent les conditions (36). Les relations correspondantes entre les e_{rs} sont

(34′) $$e_{10} = e_{20} = e_{30} = 0.$$

En comparant avec (28), on voit que toutes les expressions e_{rs} sont égales à zéro. Il n'y a plus de paramètres inessentiels; pour chaque valeur de (u, v), le repère A_0, A_1, A_2, A_3 est bien déterminé; nous l'appellerons le *repère normal* [1].

---

[1] En réalité, il faut remarquer que notre procédé de normalisation introduit certaines *irrationnalités;* à toute rigueur, nous pouvons seulement affirmer que, pour une valeur donnée de (u, v), il y a un nombre *fini* de repères normaux. Nous reviendrons à ce point à la fin du paragraphe 82.

Après la normalisation, toutes les formes de Pfaff ω_{rs} sont des combinaisons linéaires des deux formes indépendantes $\omega_1 = \omega_{01}$, $\omega_2 = \omega_{02}$. En effet, les équations (10), (17), (22), (26), (27), (32), (33) et (34) donnent, en posant $c_0 = -3a$, $c_4 = -3b$, le tableau suivant :

$$
\text{(I)} \quad \left\{
\begin{array}{ll}
\omega_{03} = 0, & \\
\omega_{13} = \omega_2, & \omega_{23} = \omega_1, \\
\omega_{12} = \omega_1, & \omega_{21} = \omega_2, \\
\omega_{31} = \omega_{20}, & \omega_{32} = \omega_{10};
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{(II)} \quad \left\{
\begin{array}{l}
\omega_{11} - \omega_{00} = 2a\omega_1 + b\omega_2, \\
\omega_{22} - \omega_{00} = a\omega_1 + 2b\omega_2, \\
\omega_{33} - \omega_{00} = 3a\omega_1 + 3b\omega_2, \\
\qquad \omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2, \\
\qquad \omega_{20} = \nu\omega_1 + \rho\omega_2, \\
\qquad \omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2,
\end{array}
\right.
$$

où il faut tenir encore compte de la relation (4). Il est important de remarquer que les équations (I) suffisent à caractériser un repère normal; on voit en effet facilement que les équations (II) s'obtiennent, au moyen du lemme de M. Cartan (§ 70), en différentiant extérieurement les relations (I) et en tenant compte des équations de structure (5).

En calculant les dérivées extérieures des formes ω_1, ω_2, on obtient les formules importantes

$$
\text{(III)} \qquad \omega'_1 = b[\omega_1\omega_2], \qquad \omega'_2 = -a[\omega_1\omega_2].
$$

Les deux formes de Pfaff normales ω_1, ω_2 et les quantités a, b, λ, μ, ν, ρ sont les *invariants fondamentaux* de la surface S. Si on les connaît, on obtient à des homographies près la surface S et les repères normaux attachés à elle en intégrant le système de Pfaff

$$
\text{(IV)} \quad \left\{
\begin{array}{l}
dA_0 = -\left(\dfrac{3a}{2}\omega_1 + \dfrac{3b}{2}\omega_2\right)A_0 + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \\[2ex]
dA_1 = (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)A_0 + \left(\dfrac{a}{2}\omega_1 - \dfrac{b}{2}\omega_2\right)A_1 + \omega_1 A_2 + \omega_2 A_3, \\[2ex]
dA_2 = (\nu\omega_1 + \rho\omega_2)A_0 + \omega_2 A_1 + \left(-\dfrac{a}{2}\omega_1 + \dfrac{b}{2}\omega_2\right)A_2 + \omega_1 A_3, \\[2ex]
dA_3 = (\rho\omega_1 + \lambda\omega_2)A_0 + (\nu\omega_1 + \rho\omega_2)A_1 \\
\qquad\qquad + (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)A_2 + \left(\dfrac{3a}{2}\omega_1 + \dfrac{3b}{2}\omega_2\right)A_3
\end{array}
\right.
$$

sous la condition initiale

$$(\mathrm{V}) \qquad [A_0 A_1 A_2 A_3] = 1.$$

Naturellement, les invariants fondamentaux ne peuvent pas être choisis arbitrairement. Ils doivent satisfaire à la condition que le système de Pfaff (IV) soit complètement intégrable ; cela revient à différentier extérieurement les équations (I) et (II) ayant égard aux formules de structure (5). Nous avons déjà remarqué que les équations (I) ne donnent rien de nouveau ; au contraire, les équations (II) conduisent aux *conditions d'intégrabilité;* on obtient

$$(\mathrm{VI}) \qquad \begin{cases} \left[\omega_1,\ da + \left(1 - ab - \frac{4}{3}\mu - \frac{2}{3}\nu\right)\omega_2\right] = 0, \\ \left[\omega_2,\ db + \left(1 - ab - \frac{2}{3}\mu - \frac{4}{3}\nu\right)\omega_2\right] = 0, \\ [\omega_1\, d\nu] + [\omega_2\, d\rho] + (2a\rho - 3b\nu)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [\omega_1\, d\rho] + [\omega_2\, d\lambda] + 4(a\lambda - b\rho)[\omega_1\omega_2] = 0, \\ [\omega_1\, d\lambda] + [\omega_2\, d\mu] + (3a\mu - 2b\lambda)[\omega_1\omega_2] = 0. \end{cases}$$

82. Comparaison avec les formules des Chapitres précédents. — Nous allons encore comparer les formules de M. Cartan que nous venons de déduire avec les formules de la théorie de M. Fubini. Supposons à ce but que u, v soient des paramètres asymptotiques. L'équation des asymptotiques étant $2\omega_1\omega_2 = 0$, on a des formules du type

$$(35) \qquad \omega_1 = f_1\, du, \qquad \omega_2 = f_2\, dv.$$

L'équation (IV_1) donne alors

$$(36) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A_0}{\partial u} = -\dfrac{3a}{2} f_1 A_0 + f_1 A_1, \\ \dfrac{\partial A_0}{\partial v} = -\dfrac{3b}{2} f_2 A_0 + f_2 A_2. \end{cases}$$

D'autre part, rappelons les usuelles équations fondamentales [§ 17 (1)],

$$(37) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta\, x_v + p_{11} x, \\ x_{vv} = \gamma\, x_u + \theta_v x_v + p_{22} x, \end{cases}$$

et la formule [§ 17 (I_2)]

$$(\star) \qquad (x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) = a_{12}^2 = e^{2\theta}.$$

Pour faire la comparaison, nous pouvons poser

$$A_0 = x, \tag{38}$$

de manière que les équations (36) donnent

$$\left\{\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{f_1} x_u + \frac{3a}{2} x, \\ A_2 &= \frac{1}{f_2} x_v + \frac{3b}{2} x. \end{aligned}\right. \tag{38'}$$

Or, les équations ($IV_{2,3}$) donnent, d'après (35),

$$\frac{\partial A_1}{\partial u} = f_1\left(\lambda A_0 + \frac{a}{2} A + A_2\right), \qquad \frac{\partial A_1}{\partial v} = f_2\left(\mu A_0 - \frac{b}{2} A_1 + A_3\right),$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial u} = f_1\left(\nu A_0 - \frac{a}{2} A_2 + A_3\right), \qquad \frac{\partial A_2}{\partial v} = f_2\left(\rho A_0 - A_1 + \frac{b}{2} A_2\right).$$

En remplaçant A_0, A_1, A_2 par leurs valeurs (38) et (38′), on obtient

$$\left\{\begin{aligned} x_{uu} &= \left(\frac{f_{1u}}{f_1} - af_1\right) x_u + \frac{f_1^2}{f_2} x_v + \left(\lambda + \frac{3a^2}{4} + \frac{3b}{2} - \frac{3a_u}{2f_1}\right) f_1^2 x, \\ x_{vv} &= \frac{f_2^2}{f_1} x_u + \left(\frac{f_{2v}}{f_2} - bf_2\right) x_v + \left(\rho + \frac{3b^2}{4} + \frac{3a}{2} - \frac{3b_v}{2f_2}\right) f_2^2 x; \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$$\begin{aligned} x_{uv} &= \left(\frac{f_{1v}}{f_1} - \frac{b}{2} f_2\right) x_u - \frac{3af_1}{2} x_v \\ &\quad - \left(\frac{3a_v f_1}{2} - f_1 f_2 \mu + \frac{3abf_1f_2}{4}\right) x + f_1 f_2 A_3 \\ &= - \frac{3bf_2}{2} x_u + \left(\frac{f_{2u}}{f_2} - \frac{a}{2} f_1\right) x_v \\ &\quad - \left(\frac{3b_u f_2}{2} - f_1 f_2 \nu + \frac{3abf_1f_2}{4}\right) x + f_1 f_2 A_3. \end{aligned} \tag{39'}$$

L'équation (V) devient, d'après (38), (38′) et (39′),

$$\frac{1}{f_1^2 f_2^2}(x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) = 1.$$

En comparant avec (★), on obtient

$$a_{12} = \pm f_1 f_2. \tag{★★}$$

Les équations (39) donnent, comparées avec (37),

$$(40)\qquad \frac{f_1^2}{f_2}=\beta,\qquad \frac{f_2^2}{f_1}=\gamma,\qquad f_1f_2=\beta\gamma,$$

$$(40')\qquad \frac{f_{1u}}{f_1}-af_1=\theta_u,\qquad \frac{f_{2v}}{f_2}-bf_2=\theta_v,$$

$$(40'')\qquad \begin{cases} \lambda+\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{3b}{2}-\dfrac{3a_u}{2f_1}=f_1^2p_{11},\\[2mm] \rho+\dfrac{3b^2}{4}+\dfrac{3a}{2}-\dfrac{3b_v}{2f_2}=f_2^2p_{22}.\end{cases}$$

Des équations ($\star\star$) et (40_3), on voit que $a_{12}=\pm\beta\gamma$; cela signifie que les coordonnées A_0 du point $x(u,v)$ sont *normales* au sens du paragraphe 23. D'après ($\star\star$),

$$\theta_u=\frac{f_{1u}}{f_1}+\frac{f_{2u}}{f_2},\qquad \theta_v=\frac{f_{1v}}{f_1}+\frac{f_{2v}}{f_2},$$

de manière que les équations (40′) donnent

$$(41)\qquad a=-\frac{f_{2u}}{f_1f_2},\qquad b=-\frac{f_{1v}}{f_1f_2}.$$

Des équations ($\mathrm{VI}_{1,2}$), on tire, ayant égard à (35),

$$(41')\qquad \begin{cases} a_v+\left(1-ab-\dfrac{4}{3}\mu-\dfrac{2}{3}\nu\right)f_2=0,\\[2mm] b_u+\left(1-ab-\dfrac{2}{3}\mu-\dfrac{4}{3}\nu\right)f_1=0,\end{cases}$$

d'où l'on peut calculer μ et ν. En substituant les valeurs ainsi trouvées dans l'équation (39′), on obtient selon ($\star\star$), après quelques réductions,

$$(42)\qquad x_{uv}=\frac{3}{2}\frac{f_{1v}}{f_1}x_u+\frac{3}{2}\frac{f_{2u}}{f_2}x_v + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\log f_1f_2}{\partial u\,\partial v}+f_1f_2-\frac{9}{2}\frac{f_{2u}f_{1v}}{f_1f_2}\right)x+f_1f_2A_3.$$

D'après (40) et (41), les équations (38), (38') et (42) peuvent s'écrire

$$(43)\quad \begin{cases} A_0 = x, \\ f_1 A_1 = x_u - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} x, \\ f_2 A_2 = x_v - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} x, \\ f_1 f_2 A_3 = x_{uv} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} x_u - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} x_v \\ \qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v} + \beta\gamma - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) x. \end{cases}$$

En se rappelant que les coordonnées x sont normales, on voit : *Les droites* $[A_0 A_3]$, $[A_1 A_2]$ *sont les deux directrices de Wilczynski* (*voir* § 33); *le point* A_3 *est situé sur la quadrique de Lie* [*voir* § 20 (11₁)].

Il est important de remarquer qu'on obtient des équations (35) et (40) pour l'*élément linéaire projectif*

$$(44)\quad \frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv} = \frac{\omega_1^3 + \omega_2^3}{2\omega_1\omega_2}.$$

Nous avons déjà remarqué que le repère normal n'est pas déterminé sans ambiguïté. Les *sommets* A_0, A_1, A_2, A_3 sont *géométriquement* déterminés, d'après ce que nous venons de voir; il s'ensuit que si A_0, A_1, A_2, A_3 est un repère normal, tout autre repère normal a la forme

$$\alpha_0 A_0,\quad \alpha_1 A_1,\quad \alpha_2 A_2,\quad \alpha_3 A_3 \qquad (\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1),$$

ou bien

$$\alpha_4 A_0,\quad \alpha_5 A_2,\quad \alpha_6 A_2,\quad \alpha_7 A_3 \qquad (\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7 = -1).$$

On détermine les facteurs α_i en remarquant que pour chaque repère normal, on a des formules du type (I); cela donne sans difficulté que tous les repères normaux sont

$$(45_1)\quad \eta_1 A_0,\quad \eta_1\varepsilon A_1,\quad \eta_1\varepsilon^2 A_2,\quad \eta_1 A_3 \qquad (\eta_1^4 = \varepsilon^3 = 1),$$

et

$$(45_2)\quad \eta_2 A_0,\quad \eta_2\varepsilon^2 A_2,\quad \eta_2\varepsilon A_1,\quad \eta_2 A_3 \qquad (-\eta_2^4 = \varepsilon^3 = 1).$$

Le nombre de tous les repères normaux est donc 24. Pour les repères (45_1), les expressions analogues à

$$(46)\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad a,\quad b,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \rho$$

sont

(46₁) $\varepsilon^2\omega_1, \quad \varepsilon\omega_2, \quad \varepsilon a, \quad \varepsilon^2 b, \quad \varepsilon^2\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \varepsilon\rho;$

pour les repères (45_2), elles sont

(46_2) $\varepsilon\omega_2, \quad \varepsilon^2\omega_1, \quad \varepsilon^2 b, \quad \varepsilon a, \quad \varepsilon\rho, \quad \nu, \quad \mu, \quad \varepsilon^2\lambda.$

On voit que les expressions

$$\frac{\omega_1^3+\omega_2^3}{2\omega_1\omega_2}, \quad ab, \quad a^3+b^3, \quad \mu+\nu, \quad (\mu-\nu)^2, \quad a\lambda+b\rho, \quad (a\lambda-b\rho)^2$$

sont déterminées sans ambiguïté par la surface S.

83. Déformation projective. — Considérons deux surfaces *non réglées* S, S′ en relation de déformation projective. Attachons à la surface S un repère normal A_0, A_1, A_2, A_3 et gardons pour elle les notations précédentes. Soient B_0, B_1, B_2, B_3 un repère normal attaché à la surface S et désignons par

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad a', \quad b', \quad \lambda', \quad \mu', \quad \nu', \quad \rho',$$

les expressions relatives à S′ et analogues à

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad a, \quad b, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \rho.$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'applicabilité projective de S, S′ est l'égalité des éléments linéaires projectifs; donc, d'après (44),

$$\frac{\Omega_1^3+\Omega_2^3}{2\Omega_1\Omega_2}=\frac{\omega_1^3+\omega_2^3}{2\omega_1\omega_2}.$$

Or, on déduit tout de suite, d'après les (46), qu'en choisissant convenablement le repère normal B_0, B_1, B_2, B_3, la condition devient plus simplement

$$\Omega_1=\omega_1, \qquad \Omega_2=\omega_2.$$

Il s'ensuit, d'après (III) et les équations analogues relatives à S′, que $a'=a$, $b'=b$. Pareillement, les équations ($\mathrm{VI}_{1,2}$) donnent encore $\mu'=\mu$, $\nu'=\nu$. Posons enfin

(47) $\lambda'=\lambda+u, \qquad \rho'=\rho+v$

(les lettres u, v ne signifient donc pas ici les coordonnées curvilignes).

Supposons que la surface S soit donnée et cherchons à déterminer la surface S'. Les équations (VI) sont donc vérifiées et l'on doit seulement écrire qu'elles restent vérifiées en y remplaçant les quantités λ, ρ par λ', ρ'. Cela donne, d'après (47),

$$(48)\qquad [\omega_2\, dv] + 2av[\omega_1\omega_2] = 0, \qquad [\omega_1\, du] - 2bu[\omega_1\omega_2] = 0,$$

$$(48')\qquad [\omega_1\, dv] + [\omega_2\, du] + 4(au - bv)[\omega_1\omega_2] = 0.$$

Or, les équations (48) permettent de poser

$$dv - 2av\omega_1 = w_1\omega_2, \qquad du - 2bu\omega_2 = w_2\omega_1.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (48'), on obtient

$$w_1 - w_2 = 4(bv - au),$$

d'où

$$w_1 = w + 4bv, \qquad w_2 = w + 4au.$$

Donc, il faut déterminer trois quantités u, v, w telles que

$$(49)\qquad \begin{cases} du = (w + 4au)\omega_1 + 2bu\omega_2, \\ dv = 2av\omega_1 + (w + 4bv)\omega_2. \end{cases}$$

Remarquons que l'hypothèse $u = v = 0$ conduit au cas banal que S' soit simplement *homographique* à S; en effet, tous les coefficients du système de Pfaff (IV) seraient alors égaux pour les deux surfaces. En différentiant extérieurement les équations (49), on obtient, ayant égard aux équations (III) et (VI$_{1,2}$),

$$\left[\omega_1,\ dw - (3bw + 2.\overline{1 - 2\mu}.u)\omega_2\right] = 0,$$

$$\left[\omega_2,\ dw - (3aw + 2.\overline{1 - 2\nu}.v)\omega_1\right] = 0,$$

d'où

$$(49')\qquad dw = (3aw + 2.\overline{1 - 2\nu}.v)\omega_1 + (3bw + 2.\overline{1 - 2\mu}.u)\omega_2.$$

Donc, pour déterminer les surfaces non réglées projectivement déformables, on a à intégrer le système Pfaff :

$$(50)\qquad \begin{cases} \omega_{03} = 0, \quad \omega_{13} = \omega_2, \quad \omega_{23} = \omega_1, \quad \omega_{12} = \omega_1, \quad \omega_{21} = \omega_2, \\ \qquad \omega_{31} = \omega_{20}, \quad \omega_{32} = \omega_{10}, \\ \omega_{11} - \omega_{00} = 2a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_{22} - \omega_{00} = a\omega_1 + 2b\omega_2, \\ \qquad \omega_{33} - \omega_{00} = 3a\omega_1 + 3b\omega_2, \\ \omega_{10} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2, \quad \omega_{20} = \nu\omega_1 + \rho\omega_2, \quad \omega_{30} = \rho\omega_1 + \lambda\omega_2, \\ du = (w + 4au)\omega_1 + 2bu\omega_2, \quad dv = 2av\omega_1 + (w + 4bv)\omega_2, \\ dw = (3aw + 2.\overline{1 - 2\nu}.v)\omega_1 + (3bw + 2.\overline{1 - 2\mu}.u)\omega_2, \end{cases}$$

composé des équations (49), (49′) et (I), (II). Dans les équations (50), les $\omega_{rs}(\omega_{01} = \omega_1,\ \omega_{02} = \omega_2)$ ont la même signification qu'au paragraphe 75; ce sont donc des formes de Pfaff contenant quinze variables $t_1, t_2, \ldots, t_{15}$. Outre ces variables, le système (6) contient neuf autres variables :

$$a,\quad b,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \rho,\quad u,\quad v,\quad w.$$

Nous cherchons les solutions à deux dimensions du système (50), laissant indépendantes les formes de Pfaff ω_1, ω_2; en outre, les solutions avec $u = v = 0$ ne nous intéressent pas. Chaque solution du système (50) donne tous les coefficients du système (IV); en l'intégrant, on obtient la surface S; analogiquement s'obtient sa déformée projective S′ en tenant compte de (47).

Or, en différentiant extérieurement les équations (50), on obtient [*voir* (VI)]

$$(50')\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\omega_1,\ da + \left(1 - ab - \frac{4}{3}\mu - \frac{2}{3}\nu\right)\omega_2\right] = 0,\\ \left[\omega_2,\ db + \left(1 - ab - \frac{2}{3}\mu - \frac{4}{3}\nu\right)\omega_2\right] = 0,\\ [\omega_1\, d\nu] + [\omega_2\, d\rho] + (2a\rho - 3b\nu)[\omega_1\omega_2] = 0,\\ [\omega_1\, d\rho] + [\omega_2\, d\lambda] + 4(a\lambda - b\rho)[\omega_1\omega_2] = 0,\\ [\omega_1\, d\lambda] + [\omega_2\, d\mu] + (3a\mu - 2b\lambda)[\omega_1\omega_2] = 0,\\ u[\omega_2\, d\mu] + v[\omega_1\, d\nu] - \frac{2}{3}w(\mu - \nu)\,[\omega_1\omega_2] = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations ont la forme (9) du paragraphe 74; on doit seulement remplacer Ω_1, Ω_2 par ω_1, ω_2 et les τ_s par da, db, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, $d\rho$. Le déterminant D [§ 74 (11)] est

$$D = \omega_1^2\,\omega_2^2\,(v\,\omega_2^2 - u\,\omega_1^2).$$

Pour les solutions qui nous intéressent, D n'est pas identiquement égal à zéro. Donc, le système (50) est en involution par rapport à ω_1, ω_2, et nous avons l'important résultat : *Les surfaces non réglées projectivement déformables dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument.* Les caractéristiques (*voir* la fin du paragraphe 74) du système de Pfaff (50) sont données par

$$\omega_1^2\,\omega_2^2\,(v\,\omega_2^2 - u\,\omega_1^2) = 0.$$

On a donc deux familles *doubles* de caractéristiques, composées d'asymptotiques $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ de la surface S; en outre, on a deux familles simples de caractéristiques, définies par l'équation quadratique

$$(\star) \qquad u\,\omega_1^2 - v\,\omega_2^2 = 0.$$

Il y manque le produit $\omega_1\omega_2$, d'où l'on conclut que les courbes $(\star)$ forment sur S un réseau conjugué; c'est d'ailleurs le réseau R appartenant à la déformation; on le vérifie facilement en se rappelant la signification de u, v exprimée par (47) et en tenant compte des équations (40″), où les quantités a, b, f_1, f_2 ont les mêmes valeurs pour les deux surfaces S et S′ de manière que $(\star)$ devienne, d'après (35),

$$(p'_{11} - p_{11})\,du^2 - (p'_{22} - p_{22})\,dv^2 = 0,$$

où maintenant les u, v signifient les coordonnées curvilignes.

84. Correspondances asymptotiques de seconde espèce. — Les coefficients β, γ de l'élément linéaire projectif

$$\frac{\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3}{2\,du\,dv}$$

d'une surface non réglée S ne peuvent pas être choisis arbitrairement; on le voit tout de suite en remarquant qu'une surface dépend d'*une seule* fonction arbitraire d'un argument, de manière qu'on ne puisse pas prescrire les *deux* fonctions $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$. Or, cette simple remarque rend vraisemblable que l'on peut prescrire arbitrairement une relation

$$(\star) \qquad f(\beta, \gamma) = 0$$

entre β et γ. Nous allons vérifier et préciser ce résultat. Dans ce but, nous ferons usage pour les surfaces cherchées S des repères *semi-normaux* définis aux paragraphes 79 et 80. Nous avons vu [§ 82, (44)] que dans le cas particulier du repère *normal*, l'élément linéaire projectif est égal à

$$\frac{\omega_1^3 + \omega_2^3}{2\,\omega_1\omega_2}$$

et l'on voit immédiatement des équations (29) que ce résultat reste valable pour chaque repère semi-normal. Cela étant, pour déterminer toutes les surfaces dont l'élément linéaire projectif satisfait à la condition ($\star$), nous procéderons de la manière suivante : on peut mettre la relation ($\star$) sous la forme paramétrique

$$(\star\star) \qquad \beta = \frac{f_1^2}{f_2}, \qquad \gamma = \frac{f_2^2}{f_1},$$

f_1 et f_2 étant deux fonctions connues d'une variable auxiliaire t. On a, d'ailleurs, $f_1(t) \neq 0$, $f_2(t) \neq 0$, car nous avons exclu le cas des surfaces réglées; les expressions ω_1, ω_2 relatives à un repère semi-normal doivent alors satisfaire aux conditions

$$(51) \qquad \omega_1 = f_1(t)\,du, \qquad \omega_2 = f_2(t)\,dv.$$

En outre, on voit aisément du paragraphe 79 qu'un repère semi-normal est caractérisé par les équations

$$(51') \quad \begin{cases} \omega_{03} = 0, \quad \omega_{13} = \omega_2, \quad \omega_{23} = \omega_1, \quad \omega_{12} = \omega_1, \quad \omega_{21} = \omega_2, \\ \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} = 0. \end{cases}$$

Il faut seulement intégrer le système de Pfaff composé des équations (51) et (51'). Les expressions ω_{rs} ($\omega_{01} = \omega_1$, $\omega_{01} = \omega_2$) contiennent les quinze paramètres du repère A_0, A_1, A_2, A_3 ; or, selon le paragraphe 79, les premiers membres des équations (51'), ainsi que les expressions

$$\omega_{00} - \omega_{11}, \quad \omega_{00} - \omega_{22}, \quad \omega_{10} - \omega_{32}, \quad \omega_{20} - \omega_{31},$$

ne dépendent que des douze paramètres *principaux* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{12}$. Nous pouvons complètement négliger les paramètres secondaires τ_{13}, τ_{14}, τ_{15} qui restent entièrement arbitraires. Outre $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{12}$, les équations (51) et (51') contiennent donc seulement trois variables ultérieures, à savoir, u, v, t. Il s'agit de ces solutions à deux dimensions du système de Pfaff (51), (51') qui laissent indépendantes les variables u, v ou, ce qui est la même chose, qui laissent linéairement indépendantes les deux formes de Pfaff ω_1, ω_2. En différentiant extérieurement les équations (51) et (51'), on obtient

$$\left[\frac{f_1'}{f_1}\,dt - \omega_{00} + \omega_{11},\ \omega_1\right] = 0,$$

$$\left[\frac{f_2'}{f_2}\,dt - \omega_{00} + \omega_{22},\ \omega_2\right] = 0,$$

$$[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22},\ \omega_1] + [\omega_{32} - \omega_{10},\ \omega_2] = 0,$$

$$[\omega_{32} - \omega_{10},\ \omega_1] + [\omega_{31} - \omega_{20},\ \omega_2] = 0.$$

Ces équations ont la forme (9) du paragraphe 74, les expressions Ω_1, Ω_2; τ_s étant à remplacer par ω_1, ω_2; $\omega_{00}-\omega_{11}$, $\omega_{00}-\omega_{22}$, $\omega_{10}-\omega_{32}$, $\omega_{20}-\omega_{31}$, dt. Le déterminant D [§ 74, (11)] est donc égal à

$$\omega_1\omega_2\left[\frac{f_1'}{f_1}(2\omega_1^3-\omega_2^3)+\frac{f_2'}{f_2}(2\omega_2^3-\omega_1^3)\right].$$

Il n'est pas identiquement égal à zéro, car cela exigerait $f_1'=f_2'=0$, ce qui est impossible, les deux équations (★★) étant équivalentes à la seule relation (★). Donc, notre système de Pfaff est en involution, et nous voyons que *les surfaces, dont l'élément linéaire projectif satisfait à une relation de la forme* (1) *dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument.* Par exemple, si (★) a la forme $\beta=\gamma$, on obtient les surfaces F (isothermo-asymptotiques) de M. Fubini. Le cas exclu $\beta=0$ ou $\gamma=0$ des surfaces réglées forme une véritable exception, car les surfaces réglées ne dépendent évidemment que de *trois* fonctions arbitraires d'un argument.

Par ce qui précède, nous avons aussi déterminé la généralité des correspondances asymptotiques de seconde espèce (*voir* § 67). En effet, si l'on a donné une surface S_0, dont l'élément linéaire projectif soit $(\beta_0\,du^3+\gamma_0\,dv^3):2\,du\,dv$, et que l'on cherche les surfaces S en correspondance asymptotique de seconde espèce avec S_0 satisfaisant à une relation donnée

$$\varphi(r,s)=0$$

entre les deux invariants r, s, il faut seulement rappeler la définition $r=\beta:\beta_0$, $s=\gamma:\gamma_0$ des invariants r, s pour voir que la relation donnée peut se mettre sous la forme (★).

Presque tout le contenu de ce Chapitre est dû à M. Cartan [4]. Le théorème du paragraphe 84 a été donné par Čech [30] (*cf.* déjà [26]).