CHAPITRE X.

RÉSEAUX PLANS.

51. **Transformation de Laplace d'un réseau plan.** — Considérons dans un plan P deux familles de courbes telles que de chaque point d'une région de P il sorte une courbe de chaque famille. On dit alors que ces deux familles constituent un *réseau plan*. En particulier, on obtient un réseau plan en partant d'une surface S non développable et en projetant ses asymptotiques d'un centre fixe O dans le plan P. Nous verrons bientôt qu'un réseau ainsi obtenu jouit d'une propriété spéciale; nous l'appellerons *réseau asymptotique*. Des propriétés connues de la surface S, on passe immédiatement à celles du réseau asymptotique; mais nous verrons que plusieurs notions importantes ainsi obtenues se généralisent facilement au cas d'un réseau plan *quelconque*. Ainsi, la géométrie d'un réseau plan peut être regardée comme une extension de la géométrie d'une surface.

Analytiquement, on obtient un réseau plan en exprimant les coordonnées homogènes x du point mobile du plan P en fonction de deux paramètres u, v; les deux familles de courbes du réseau s'obtiennent en ne faisant varier qu'*un* des deux paramètres u, v. Toutefois, pour qu'on ait un véritable réseau, il faut que $(x, x_u, x_v) \neq 0$, car autrement le point $x(u, v)$ ne décrirait qu'une courbe ou bien serait fixe. Occasionnellement, nous parlerons d'un réseau *dégénéré* dans le cas où $(x, x_u, x_v) = 0$.

La figure corrélative d'un réseau plan est appelée *congruence plane*. Une congruence plane est donc donnée en exprimant les coordonnées homogènes ξ d'une droite du plan P en fonction de u, v; les courbes de la congruence sont enveloppées par la droite $\xi(u, v)$ lorsqu'on fait varier un seul des paramètres u, v.

La congruence est dégénérée si $(\xi, \xi_u, \xi_v) = 0$. La figure corrélative d'un réseau asymptotique est une *congruence asymptotique*. On l'obtient en formant les intersections $\xi(u, v)$ du plan P avec les plans tangents d'une surface non développable S pour laquelle u, v sont des paramètres asymptotiques.

Soit $x(u, v)$ un réseau plan non dégénéré; donc $(x, x_u, x_v) \neq 0$ de manière que les points x, x_u, x_v soient linéairement indépendants. Chaque point du plan P peut donc être exprimé en combinaison linéaire de ces trois points. Il en résulte en particulier qu'on a des équations de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \alpha x_u + \beta x_v + p x, \\ x_{vv} = \gamma x_u + \delta x_v + q x, \\ x_{uv} = a x_u + b x_v + c x. \end{cases}$$

Les coefficients de ces équations sont des fonctions de u, v. Ils sont liés par certaines relations, les *conditions d'intégrabilité* du système (1); nous les formerons plus loin (§ 60).

Par un procédé classique, nous déduirons du réseau $x(u, v)$ donné deux autres réseaux $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$.

Remarquons d'abord que les congruences (¹)

$$\xi_1(u, v) = (x, x_u),$$
$$\xi_2(u, v) = (x, x_v)$$

sont intrinsèquement liées au réseau $x(u, v)$. Les droites ξ_1 par exemple sont les tangentes aux courbes $v =$ const. du réseau $x(u, v)$; ces courbes forment donc une famille de courbes de la congruence $\xi_1(u, v)$. Calculons la seconde famille de courbes de cette congruence! Les courbes de cette famille étant les enveloppes de la droite ξ_1 pour $u =$ const., désignons par x_1 le point de contact. Donc on peut poser $x_1 = x_u + \lambda x$, où λ se détermine de la condition que le point x_{1v} est situé sur la droite ξ_1. Or, on déduit de (13)

$$x_{1v} = a x_u + (b + \lambda) x_v + (c + \lambda_v) x,$$

d'où $\lambda = -b$ ou

$$(2) \qquad x_1 = x_u - b x.$$

Le réseau $x_1(u, v)$ est dit le *transformé de Laplace du réseau* $x(u, v)$

(¹) Ces congruences peuvent être dégénérées.

dans le sens du paramètre u. Pareillement, on arrive au *transformé*

$$x_2 = x_v - a x \tag{2'}$$

du réseau $x(u, v)$ dans le sens de v. Les réseaux $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$ peuvent d'ailleurs être dégénérés.

Remarquons que la relation géométrique des deux congruences $\xi_1(u, v)$, $\xi_2(u, v)$ au réseau $x(u, v)$ est la même (¹) que la relation des deux réseaux $x(u, v)$, $x_1(u, v)$ à la congruence $\xi_1(u, v)$, ou la relation des réseaux $x_2(u, v)$, $x(u, v)$ à la congruence $\xi_2(u, v)$.

Dans la théorie classique de la transformation de Laplace, les quantités

$$h = c + ab - a_u, \qquad k = c + ab - b_v \tag{3}$$

jouent un rôle fondamental. On les appelle ordinairement les *invariants de Laplace-Darboux* de l'équation (1_3) ou du réseau $x(u, v)$. Elles jouissent de la propriété d'invariance par rapport à la substitution $x' = \rho x$, mais non par rapport à $u' = \varphi(u)$, $v' = \psi(v)$ qui conserve aussi le réseau $x(u, v)$. Au contraire, les deux formes différentielles quadratiques

$$h\,du\,dv, \quad k\,du\,dv \tag{4}$$

sont invariantes par rapport à toutes les substitutions que nous venons d'écrire. D'ailleurs, cette invariance découle aussi immédiatement de la signification géométrique des formes (4) que nous allons expliquer. A cet effet, donnons à u un accroissement infinitésimal du, ce qui change le point x en x'; encore l'accroissement infinitésimal dv donné à v change le point x_1 en x'_1. En négligeant les quantités infinitésimales d'ordre supérieur au premier, on a

$$x' = x + x_u\,du, \qquad x'_1 = x_1 + x_{1v}\,dv.$$

Or de (1_3) on déduit que

$$x_{1v} = a x_1 + k x,$$

de manière qu'en continuant à négliger les quantités infinitésimales du second ordre

$$x' = (1 + b\,du)(x + x_1\,du),$$
$$x'_1 = (1 + a\,du)(x_1 + kx\,du).$$

(¹) Ou plutôt corrélative.

Les points x, x'_1, sont donc sensiblement situés sur la droite $(x, x_1) = \xi_1$, ce qui était intuitif. En calculant le rapport anharmonique des quatre points x, x_1, x', x'_1 de la droite ξ_1, on trouve précisément la forme $k\,du\,dv$. C'est la signification géométrique cherchée de cette forme, que nous appellerons *la forme associée à la congruence* $\xi_1(u, v)$. En échangeant u et v, on arrive à la *forme* $h\,du\,dv$ *associée à la congruence* $\xi_2(u, v)$.

La droite (x_1, x_2) qui joint les deux transformés de Laplace de x joue un rôle important dans ce qui suit. Nous l'appellerons la *droite de Laplace* du réseau $x(u, v)$.

52. Réseaux asymptotiques. — Soit

$$x(u, v) = [x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)]$$

un réseau situé dans un plan P. On a $(x, x_u, x_v) \neq 0$; donc on peut poser

$$(x, x_u, x_v) = \pm e^{\theta}. \tag{I}$$

On en déduit par différentiation, en tenant compte de (I),

$$\theta_u = \alpha + b, \qquad \theta_v = \delta + a.$$

Les équations (I) prennent donc la forme

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x_{uu} = (\theta_u - b)x_u + \beta x_v + p x, \\ x_{vv} = \gamma x_u + (\theta_v - a)x_v + q x, \\ x_{uv} = a x_u + b x_v + c x. \end{cases}$$

Or considérons un espace à trois dimensions contenant le plan P. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que l'équation du plan P soit $x_4 = 0$. Dans l'espace, le point $x(u, v)$ a *quatre* coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4, dont la dernière est identiquement égale à zéro. Cependant, les équations (II) étant *homogènes*, elles sont vérifiées non seulement par x_1, x_2, x_3, mais aussi par x_4. Pour abréger, écrivons les (II) sous la forme

$$L_1(x) = 0, \qquad L_2(x) = 0, \qquad L_3(x) = 0.$$

Cela étant, soit y un point *fixe* de l'espace (donc $y_u = y_v = 0$) non situé dans le plan P, de manière que

$$(x, x_u, x_v, y) \neq 0.$$

Soit $z = z(u, v)$ un point situé sur la droite (x, y), de manière que x soit la projection de z du centre y dans le plan P. En choisissant convenablement le facteur de z, on aura ([1])

$$z(u, v) = x(u, v) + t(u, v)y.$$

Les expressions L_i ($i = 1, 2, 3$) étant linéaires et homogènes, on a

$$L_i(z) = L_i(x) + L_i(ty).$$

Or $L_i(x) = 0$; d'autre part le point y étant fixe, les expressions $L_i(ty)$ sont manifestement proportionnelles à y. Donc on peut poser

$$(\star) \qquad L_1(z) = f_1 y, \qquad L_2(z) = f_2 y, \qquad L_3(z) = f y.$$

Les *asymptotiques* de la surface S engendrée par le point $z(u, v)$ sont données par l'équation

$$(z, z_u, z_v, z_{uu}\,du^2 + 2 z_{uv}\,du\,dv + z_{vv}\,dv^2) = 0.$$

D'après $(\star)$, cette équation prend la forme

$$f_1\,du^2 + f_2\,dv^2 + 2f\,du\,dv = 0.$$

Si le réseau $x(u, v)$ est *asymptotique*, on peut s'arranger de manière que les u, v soient des coordonnées asymptotiques sur la surface S, d'où $f_1 = f_2 = 0$; $f \neq 0$ et le système $(\star)$ devient

$$(5) \qquad \begin{cases} z_{uu} = (\theta_u - b) z_u + \beta z_v + p z, \\ z_{vv} = \gamma z_u + (\theta_v - a) z_v + q z, \\ z_{uv} = a z_u + b z_v + c z + f y, \\ y_u = y_v = 0. \end{cases}$$

Donc, si le réseau $x(u, v)$ est asymptotique, on peut déterminer la fonction $f = f(u, v) \neq 0$ de manière que le système (5) soit complètement intégrable.

Inversement, supposons que le système (5) soit complètement intégrable. On peut alors l'intégrer en prescrivant arbitrairement les valeurs initiales de z, z_u, z_v, y. Donc le système (5) a quatre solutions linéairement indépendantes, soit z_i, y_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $y_4 = 1$. De

([1]) On suppose que le point z soit distinct du point y.

plus, on peut encore supposer que $z_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$) pour la valeur initiale (u_0, v_0) de (u, v). Or, pour $i = 1, 2, 3$, on a identiquement $y_i = 0$, de manière que le système (5) se réduise à la forme (II); il en résulte que $z_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$) *identiquement* [non seulement pour $(u, v) = (u_0, v_0)$]. Donc le point $x = (x_1, x_2, x_3, 0)$ est la projection du point $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ du centre $y = (0, 0, 0, 1)$. Or, des équations (5) on déduit comme plus haut que les u, v sont des coordonnées *asymptotiques* pour la surface S engendrée par le point $z(u, v)$. Donc le réseau $x(u, v)$ est asymptotique.

Pour trouver la condition pour un réseau asymptotique, nous n'avons donc qu'à écrire les conditions d'intégrabilité du système (5). Ces conditions sont

$$(\star\star) \qquad z_{uuv} - z_{uvu} = 0, \qquad z_{uvv} - z_{vvu} = 0,$$

où l'on doit remplacer les premiers membres par les expressions obtenues en différentiant le système (5). Cela donne des équations de la forme

$$\lambda_i z + \mu_i z_u + \nu_i z_v + \pi_i y = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Le système (5) est donc complètement intégrable si

$$\lambda_i = \mu_i = \nu_i = \pi_i = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Or, on voit que le système (5) se réduit au système (II) en remplaçant y par zéro, d'où il résulte que les conditions d'intégrabilité du système (II) sont $\lambda_i = \mu_i = \nu_i = 0$ ($i = 1, 2$). Donc ces équations doivent être des identités, car le système (II) est complètement intégrable par l'existence même du réseau x. Donc les conditions d'intégrabilité de (5) sont $\pi_1 = \pi_2 = 0$. Autrement dit, il faut seulement annuler le *coefficient de y* dans les premiers membres de $(\star\star)$. Cela donne

$$f_u = (\theta_u - 2b)f, \qquad f_v = (\theta_v - 2a)f.$$

La condition nécessaire et suffisante pour un réseau asymptotique est donc que l'on puisse déterminer la quantité $f \neq 0$ satisfaisant aux équations précédentes. Cela donne évidemment

$$(6) \qquad a_u = b_v.$$

C'est la *condition* cherchée *pour un réseau asymptotique*. D'après (3) on peut l'écrire aussi

$$(6') \qquad h = k.$$

Nous en donnerons une interprétation géométrique au paragraphe suivant.

53. **Correspondances polaires.** — Considérons le point $x(u, v)$ décrivant une région du plan P. A chaque position du point x, attachons une droite $\xi(u, v)$ du plan P, en excluant seulement que la droite ξ passe par x. Nous pouvons donc poser

$$\xi = (x_u + l_1 x, \, x_v + l_2 x). \tag{7}$$

Nous dirons que la correspondance entre le point x et la droite ξ est *polaire* si $l_1\,du + l_2\,dv$ est une différentielle exacte. Cette définition est *intrinsèque*, la forme de Pfaff $l_1\,du + l_2\,dv$ étant telle. Elle est aussi *invariante*, car en remplaçant x par ρx, la forme $l_1\,du + l_2\,dv$ se change en

$$l_1\,du + l_2\,dv - \frac{d\rho}{\rho}.$$

Pour un choix convenable du facteur du point x, on a $\xi = (x_u, x_v)$ dans le cas d'une correspondance polaire.

Le nom *polaire* s'explique comme il suit. Soit $F = F(x_1, x_2, x_3)$ une forme algébrique ternaire. Dans la géométrie algébrique, on donne le nom de polaire linéaire du point $x = (x_1, x_2, x_3)$ par rapport à la courbe $F = 0$ à la droite ξ dont les coordonnées sont

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3}. \tag{$\star$}$$

Or, en excluant les points situés sur la courbe $F = 0$, on peut normaliser le facteur du point x selon la condition

$$F(x_1, x_2, x_3) = 1. \tag{$\star\star$}$$

Posons $x = (x_1, x_2, x_3) = x(u, v)$. En différentiant l'équation $(\star\star)$, on voit que la droite $(\star)$ contient les points x_u, x_v. *La polarité linéaire par rapport à une courbe algébrique est* donc *une correspondance polaire* au sens que nous venons d'expliquer.

La correspondance polaire a une signification géométrique simple. Choisissons le facteur de $x = (x_1, x_2, x_3)$ de manière que $\xi = (x_u, x_v)$. Supposons que le plan P soit le plan à l'infini de l'espace ordinaire. On peut considérer x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées *non* homogènes d'un point décrivant une surface S. Alors la droite ξ est la droite à l'infini du plan tangent à S. Donc *la correspondance polaire la plus générale dans le plan* P *s'obtient par la construction suivante : soit* S *une surface et* O *un point fixe* (en dehors du plan P); *le point* x *du plan* P *étant donné, la droite correspondante* ξ *est l'intersection de* P *avec le plan tangent à* S *à ce point de* S *qui est situé sur la droite* (Ox). Nous avons supposé que le point x décrive toute une région du plan P. La droite ξ, au contraire, peut rester fixe ou bien envelopper une courbe. Dans la construction qui précède, cela arrive si la surface S est plane ou développable.

On peut donner une autre propriété caractéristique d'une correspondance polaire, en ne sortant pas cette fois du plan P. A ce but considérons une correspondance *quelconque* entre le point x et la droite ξ du plan P, en supposant seulement que $Sx\xi \neq 0$. On peut donc normaliser les facteurs selon la condition

$$(\star) \qquad Sx\xi = 1.$$

De ($\star$) il résulte que les points

$$x_u - x\, S\xi x_u, \qquad x_v - x\, S\xi x_v$$

sont situés sur la droite ξ. En comparant avec (7), on voit que

$$l_1 = -S\xi x_u, \qquad l_2 = -S\xi x_v,$$

de manière que la correspondance entre le point x et la droite ξ est polaire lorsque $S\xi dx$ est une différentielle exacte. Ceci donne la condition

$$\frac{\partial}{\partial v} S\xi x_u = \frac{\partial}{\partial u} S\xi x_v$$

qui peut s'écrire aussi

$$(8) \qquad S\xi_v x_u = S\xi_u x_v.$$

Or, il est facile d'interpréter géométriquement la relation (8). A ce but, donnons aux variables u, v des accroissements infinitésimaux (du, dv) ou $(\delta u, \delta v)$. Dans le premier accroissement, le point x se déplace dans la direction (x, dx); dans le second accroissement, la droite ξ touche son enveloppe au point $(\xi, \delta\xi)$. Cherchons la condition pour que la droite (x, dx) passe par le point $(\xi, \delta\xi)$. L'intersection de (x, dx) avec ξ étant, d'après l'équation ($\star$),

$$dx - x\, S\xi\, dx,$$

nous devons écrire que ce point est situé sur la droite $\delta\xi$, ce qui donne

$$\mathrm{S}\,dx\,\delta\xi - \mathrm{S}\,x\,\delta\xi\,\mathrm{S}\,\xi\,dx = 0.$$

Or, d'après ($\star$), on a $\mathrm{S}x\delta\xi + \mathrm{S}\xi\delta x = 0$ de manière que l'équation trouvée prenne la forme

$$\mathrm{S}\,dx\,\delta\xi + \mathrm{S}\,\xi\,dx\,\mathrm{S}\,\xi\,\delta x = 0. \tag{9}$$

Cette relation bilinéaire entre (du, dv) et $(\delta u, \delta v)$ définit une projectivité dans le faisceau au centre x; cette projectivité est évidemment une *involution* si la forme $\mathrm{S}\,dx\,\delta\xi$ est symétrique et dans ce cas seulement. Or cette symétrie est précisément demandée par la condition (8) pour une correspondance polaire.

En excluant les cas où la droite ξ est fixe, ou enveloppe une courbe fixe, il résulte des équations ($\star$) et (8) que la correspondance *inverse* d'une correspondance polaire est elle aussi polaire.

Revenons à l'étude du réseau $x(u, v)$; *la droite de Laplace* (§ 51) de ce réseau est $\xi = (x_u - bx, x_v - ax)$. Nous voyons [*voir* (6)] que *la correspondance entre le point $x(u, v)$ et la droite du Laplace ξ du réseau engendré par $x(u, v)$ est polaire si le réseau est asymptotique et dans ce cas seulement.* Dans ce cas on peut choisir le facteur du point x de manière que $\xi = (x_u, x_v)$ ou bien $a = b = 0$.

L'équation (5_3) donne alors que la droite (z, z_{uv}) coïncide avec (y, z). Or, la droite (z, z_{uv}) correspond à la droite (z_u, z_v) dans la polarité fondamentale relative à la surface S décrite par le point $z(u, v)$. Donc :

Si l'on projette les asymptotiques d'une surface S *d'un point* O *dans un plan* P, *la droite de Laplace du réseau projeté est la projection de la droite qui correspond, dans la polarité fondamentale relative à* S, *à la droite qui joint le point de* S *avec le centre de projection* O.

54. **L'élément linéaire projectif d'un réseau.** — Prenons d'abord le cas d'un réseau asymptotique. D'après (5) l'élément linéaire projectif de la surface S correspondante est

$$(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3) : 2\,du\,dv. \tag{$\star$}$$

Or, pour un réseau *quelconque*, la forme différentielle ($\star$) est intrinsèque et invariante par rapport aux homographies. Il est donc naturel d'appeler *élément linéaire projectif d'un réseau* $x(u, v)$ la forme différentielle fractionnaire ($\star$).

D'après cette définition, *l'élément linéaire projectif d'une surface* S *est égal à celui d'un réseau projection des asymptotiques de* S. Au lieu de vérifier par le calcul les propriétés d'invariance de ($\star$), nous en donnerons l'interprétation géométrique. Nous ne pouvons pas transporter l'interprétation donnée au paragraphe 22 pour les surfaces, mais nous en donnerons une autre qui, comme le lecteur le verra, est valable aussi pour une *surface*.

A ce but, considérons dans le plan P une cubique rationnelle C ayant un point double en $x(u, v)$, les tangentes à C à ce point coïncidant avec les tangentes (x, x_u), (x, x_v) aux deux courbes du réseau qui passent par x. En considérant les quantités x_0, x_1, x_2, comme les coordonnées du point

$$x_0 x + x_1 x_u + x_2 x_v,$$

l'équation de la cubique C est

$$x_0 x_1 x_2 + a_1 x_1^3 + b_1 x_1^2 x_2 + b_2 x_1 x_2^2 + a_2 x_2^3 = 0. \tag{10}$$

Les trois points d'inflexion de la cubique C sont situés sur la droite l dont l'équation est

$$x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0. \tag{10'}$$

Si $a_2 = 0$ (et pareillement pour $a_1 = 0$), la cubique C contient la droite (x, x_v) $(x_1 = 0)$ et la partie résiduelle de C est une conique C_0; la droite l est la tangente à la conique C_0 à son intersection (différente de x) avec la droite (x, x_u). Enfin, si $a_1 = a_2 = 0$, la cubique C se compose des trois droites (x, x_u), (x, x_v) et l.

Cela posé considérons un point x' du plan P infiniment voisin du point x. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on a

$$x' = x + x_u\, du + x_v\, dv.$$

Soit P(Q) l'intersection de la droite (x, x') avec la cubique C (avec la droite l); un calcul aisé donne la valeur du rapport anharmonique

$$(x, \mathrm{P}, x', \mathrm{Q}) = -\frac{a_1\, du^3 + a_2\, dv^3}{du\, dv}.$$

Ce rapport anharmonique dépend donc seulement des valeurs de a_1,

a_2, et non des nombres b_1, b_2 qui fixent la position de la droite l. Pour arriver à l'interprétation géométrique de ($\star$), il suffit donc d'avoir la signification des nombres a_1, a_2. Or (*voir* § 38) les invariants de contact des deux branches de la cubique C et de la courbe $u =$ const. ou $v =$ const. qui la touche en x sont

$$j_1 = -\frac{2a_1}{\beta}, \qquad j_2 = -\frac{2a_2}{\gamma}.$$

En faisant usage de la notation expliquée (*loc. cit.*), nous avons

$$C = C\left(-\frac{2a_1}{\beta}, -\frac{2a_2}{\gamma}; l\right).$$

Donc pour $C = C(1, 1; l)$, c'est-à-dire en choisissant la cubique C de manière que, au point x, chaque branche ait un contact du second ordre avec la courbe du réseau qui la touche, on obtient

$$-(x, P, x', Q) = \frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv}.$$

Posons encore $C = (1, 0; l)$, c'est-à-dire prenons pour C une conique ayant en x un contact du second ordre avec la courbe $u =$ const. du réseau; alors

$$-(x, P, x', Q) = \frac{1}{2}\beta\frac{du^2}{dv}.$$

Ainsi, nous sommes arrivés à la signification géométrique non seulement de l'élément linéaire projectif, mais aussi des *formes élémentaires* (¹)

$$\beta\frac{du^2}{dv}, \quad \gamma\frac{dv^2}{du}.$$

Appelons *réglé* un réseau plan pour lequel $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$. Or, d'après (1), l'équation $\beta = 0$, par exemple, peut s'écrire $(x, x_u, x_{uu}) = 0$, ce qui signifie que les courbes $v =$ const. sont des droites. Donc *les réseaux réglés sont ceux dont une famille de courbes est composée de droites.* Pour $\beta = \gamma = 0$, on a les *réseaux doublement réglés* dont *toutes* les courbes sont des droites.

Pour un réseau non réglé, on peut considérer les *courbes de*

(¹) Cette dénomination a été introduite par M. Bompiani [34].

Darboux et les *courbes de Segre* définies respectivement par

$$\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3 = 0, \qquad \beta\, du^3 - \gamma\, dv^3 = 0.$$

Pour un réseau asymptotique, les courbes de Darboux et de Segre sont naturellement les projections de courbes du même nom de la surface. Pour un réseau quelconque, il résulte des remarques faites au paragraphe 38 que les points d'inflexion de la cubique $C(1, 1; l)$ sont situés sur les *tangentes de Darboux* et que les intersections, différentes de x, des coniques $C(1, 0; l)$, $C(0, 1; l)$ sont situées sur les *tangentes de Segre*.

De l'invariance de $(*)$ on déduit (*voir* § 23) l'invariance des formes entières

$$2\beta\gamma\, du\, dv, \quad \beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3),$$

qui sont identiquement nuls dans le cas d'un réseau réglé. La forme quadratique $\beta\gamma du dv$ a une signification géométrique simple; *c'est la forme associée au réseau* $x(u, v)$ (*voir* le paragraphe 51, où est expliquée la notion corrélative de forme associée à une congruence). Pour un réseau *asymptotique*, la démonstration est essentiellement donnée au paragraphe 23; elle reste la même dans le cas général.

55. **Les caractéristiques d'une correspondance entre deux plans.** — Nous montrerons au paragraphe suivant qu'on peut transporter la notion de déformation projective d'une surface aux réseaux plans. Il convient de commencer avec quelques considérations générales sur une correspondance arbitraire entre deux plans P et Q ([1]). Supposons que le point $x(u, v)$ décrive le plan P et le point $y(u, v)$ le plan Q; la correspondance sera définie par valeurs égales des paramètres u, v. Pour qu'on ait une correspondance proprement dite, il faut que

$$(x, x_u, x_v) \neq 0, \qquad (y, y_u, y_v) \neq 0.$$

Alors, on peut choisir les facteurs des coordonnées homogènes de manière que

$$(11) \qquad (x, x_u, x_v) = (y, y_u, y_v).$$

L'équation (11) est évidemment intrinsèque.

([1]) Nous n'étudierons que les propriétés projectives de la correspondance *indépendantes de la position relative des deux plans.*

Nous étudierons la correspondance au voisinage de $u = u_0$, $v = v_0$. Les substitutions $u = u_0$, $v = v_0$ seront sous-entendues pour ne pas compliquer la notation. Considérons une homographie K entre les plans P et Q assujettie à la condition de *réaliser un contact analytique du premier ordre* des deux plans. En désignant, pour chaque point z du plan P, par Kz le point transformé de z moyennant K, on doit avoir, pour un déplacement infinitésimal quelconque,

$$Kx = \rho y, \qquad K\,dx = d(\rho y),$$

$\rho = \rho(u, v)$ étant une fonction convenablement choisie de u et v. On peut supposer que $\rho(u_0, v_0) = 1$, de manière que

$$(12) \qquad Kx = y, \qquad Kx_u = y_u + \lambda y, \qquad Kx_v = y_v + \mu y.$$

Il y a donc ∞^2 homographies K, les quantités $\lambda = \frac{\rho_u}{\rho}$, $\mu = \frac{\rho_v}{\rho}$ étant arbitraires.

Or, soit C une courbe du plan P, passant par $x(u_0, v_0)$. Lorsque le point $x(u, v)$ décrit C, le point correspondant $y(u, v)$ du plan Q décrit une courbe Γ, et le point Kx transformé de x moyennant K décrit une courbe C^*. D'après la définition de K, les courbes Γ et C^* ont au point $y(u_0, v_0)$ un contact (analytique) du premier ordre; désignons par j l'invariant de contact relatif. D'après le paragraphe 7 on détermine j par la condition que le point $d^2y - jKd^2x$ dépende linéairement de y, dy, ce qui donne

$$(y, dy, d^2y - jK\,d^2x) = 0.$$

D'après (12), cela peut s'écrire

$$(y, dy, d^2y) = j(Kx, K\,dx, K\,d^2x).$$

Or pour trois points z_0, z_1, z_2 du plan P, on a toujours

$$(\star) \qquad (z_0, z_1, z_2) = (Kz_0, Kz_1, Kz_2)$$

de manière que l'équation précédente prenne la forme

$$(13) \qquad (y, dy, d^2y) = j(x, dx, d^2x).$$

Pour démontrer la formule ($\star$), posons

$$z_r = a_{r0}x + a_{r1}x_u + a_{r2}x_v \qquad (r = 0, 1, 2);$$

d'après la règle de multiplication des déterminants,

$$(z_0,\ z_1,\ z_2) = \Delta(x,\ x_u,\ x_v),$$
$$(\mathrm{K}z_0,\ \mathrm{K}z_1,\ \mathrm{K}z_2) = \Delta(\mathrm{K}x,\ \mathrm{K}x_u,\ \mathrm{K}x_v),$$

où Δ est le déterminant de la matrice (a_{rs}). Or, d'après (11) et (12),

$$(\mathrm{K}x,\ \mathrm{K}x_u,\ \mathrm{K}x_v) = (y,\ y_u + \lambda y,\ y_v + \mu y) = (y,\ y_u,\ y_v) = (x,\ x_u,\ x_v)$$

et l'on arrive bien à la relation ($\bigstar$).

L'équation (13) montre que l'invariant j est indépendant des quantités λ, μ dont dépend le choix de l'homographie K. En général, l'équation (13) contient des différentielles secondes. Cependant, il y a une exception importante, à savoir $j = 1$. En effet, d'après (11), l'équation

$$(14) \qquad (y,\ dy,\ d^2y) - (x,\ dx,\ d^2x) = 0$$

ne contient que les différentielles premières. Nous appellerons *direction caractéristique* de la correspondance donnée chaque direction vérifiant l'équation (14). *L'homographie* K *réalise un contact du second ordre d'une courbe* C *avec sa courbe correspondante* Γ *lorsque la direction de* C *au point* $x\,(u_0, v_0)$ *est caractéristique et dans ce cas seulement*. En particulier, *la correspondance conserve les inflexions dans les directions caractéristiques*. Cette propriété peut servir comme définition de ces directions; on voit en effet que des trois équations (14) et

$$(x,\ dx,\ d^2x) = 0, \qquad (y,\ dy,\ d^2y) = 0,$$

chacune est une conséquence des deux autres. En particulier, l'équation (14) est une identité seulement lorsque la correspondance conserve toutes les inflexions ou, ce qui est équivalent, toutes les *droites;* c'est, comme on le sait, le cas d'une simple homographie. En excluant ce cas élémentaire, (14) est une équation différentielle du premier ordre et du troisième degré; les courbes intégrales dans le plan P (ainsi que les courbes correspondantes dans le plan Q) s'appellent les (courbes) *caractéristiques de la correspondance*. En général, on a *trois* systèmes ∞^1 de caractéristiques; mais il peut exister une famille ∞^1 de caractéristiques doubles ou triples.

Pour écrire plus explicitement l'équation (14), faisons usage des équations (II) et des équations analogues (¹)

$$(15)\qquad \begin{cases} y_{uu} = (\theta_u - b')y_u + \beta' y_v + p'y, \\ y_{vv} = p'y_u + (\theta_v - a')y_v + q'y, \\ y_{uv} = a'y_u + b'y_v + c'y \end{cases}$$

relatives au plan Q. L'équation (14) obtient alors la forme

$$(14')\qquad (\beta' - \beta)\,du^3 + 3(b' - b)\,du^2\,dv - 3(a' - a)\,du\,dv^2 - (\gamma' - \gamma)\,dv^3 = 0.$$

56. **Déformation projective d'un réseau plan.** — Considérons maintenant deux réseaux plans $x(u, v), y(u, v)$ (²). En associant les points $x(u, v)$, $y(u, v)$ appartenant aux mêmes valeurs des paramètres u, v, on obtient une correspondance entre les plans P, Q des deux réseaux, qui porte le premier réseau dans le second. Pour chaque valeur de u, v, nous avons vu qu'il existe des homographies K ayant un contact analytique du premier ordre avec la correspondance étudiée. Précisément, nous savons que

$$(12)\qquad Kx = y, \qquad Kx_u = y_u + \lambda y, \qquad Kx_v = y_v + \mu y,$$

les quantités λ et μ pouvant être choisies à volonté. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer, comme au paragraphe précédent, que le choix des facteurs des coordonnées homogènes soit fait selon la condition

$$(11)\qquad (x, x_u, x_v) = (y, y_u, y_v).$$

Cela étant, nous dirons que *la correspondance considérée est une déformation projective si*, pour chaque valeur admissible de u, v, *l'homographie* K *réalise un contact du second ordre des courbes des deux réseaux*. Cela veut dire que les courbes du réseau $x(u, v)$ soient des *caractéristiques* de la correspondance (³). La condition pour une déformation projective est donc que l'équation (14′) soit vérifiée par $u = \text{const.}$ et par $v = \text{const.}$, ce qui donne $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$. Donc *la condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective d'un réseau plan est l'invariance de l'élément linéaire projectif.*

(¹) La quantité θ est la même dans les deux cas, d'après (I) et (11).

(²) Ici encore, la position relative des deux plans est indifférente.

(³) On voit que la notion de déformation projective, comme celle de caractéristiques, ne dépend point des quantités λ, μ dont dépend l'homographie K.

D'ailleurs, on peut déduire aisément ce résultat de l'interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif donnée au paragraphe 4, sans avoir recours aux considérations du paragraphe 55.

Une correspondance *générale* (à trois systèmes distincts de caractéristiques) est une déformation projective pour *trois* réseaux ayant une famille commune deux à deux. Une correspondance qui possède un système de caractéristiques *doubles* est une déformation projective pour *un* réseau. Une correspondance à caractéristiques *triples* n'est une déformation projective pour *aucun* réseau. Enfin, une correspondance homographique est une déformation projective pour *chaque* réseau.

Évidemment, la déformation projective change un réseau réglé ou doublement réglé en un réseau jouissant de la même propriété. En particulier, *chaque* correspondance entre deux réseaux doublement réglés est une déformation projective, car un réseau doublement réglé est caractérisé par la propriété que son élément linéaire projectif est identiquement nul. On obtient ce résultat simple aussi par la remarque suivante : une direction caractéristique étant caractérisée par la propriété de conserver les inflexions, on voit que, dans une correspondance quelconque portant un réseau doublement réglé en un réseau pareil, les courbes (droites) des réseaux sont des caractéristiques de la correspondance.

Dans la définition de la déformation projective, l'homographie K joue un rôle important. Or, pour chaque valeur de u, v, K dépend des deux quantités λ, μ. Bien que la notion de la déformation ne dépende point du choix de λ, μ, il convient de les fixer d'une manière intrinsèque. A ce but, posons la condition que K réalise un contact *analytique* du second ordre des courbes des deux réseaux. Cela exige l'existence d'une fonction $\rho(u, v)$ telle qu'on ait pour $u = u_0$, $v = v_0$,

$$(\star) \qquad \mathrm{K}x = \rho y, \qquad \mathrm{K}x_u = (\rho y)_u, \qquad \mathrm{K}x_v = (\rho y)_v,$$

$$(\star\star) \qquad \mathrm{K}x_{uu} = (\rho y)_{uu}, \qquad \mathrm{K}x_{vv} = (\rho y)_{vv}.$$

Les équations ($\star$) donnent d'après (12)

$$\rho = 1, \qquad \rho_u = \lambda, \qquad \rho_v = \mu \qquad (\text{pour } u = u_0,\ v = v_0).$$

Ensuite, les équations ($\star\star$) donnent, en faisant usage des équations

(II) et (15),

$$\begin{aligned}
&(b'-b-2\lambda)y_u + (\beta-\beta')y_v + (p-p'+\lambda.\overline{\theta_u-b}+\beta\mu-\rho_{uu})y=0,\\
&(\gamma-\gamma')y_u+(a'-a-2\mu)y_v+(q-q'+\mu.\overline{\theta_v-a}+\gamma\lambda-\rho_{vv})y=0.
\end{aligned}$$

Il en résulte en premier lieu les équations $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$ qui nous sont déjà connues, ensuite les équations

$$(15)\qquad b'-b-2\lambda=0,\qquad a'-a-2\mu=0;$$

enfin deux équations déterminant ρ_{uu} et ρ_{vv} qui ne nous intéressent plus.

Les équations (15), dont nous connaissons ainsi la signification géométrique, déterminent sans ambiguïté les valeurs de λ, μ. En les supposant vérifiées, l'homographie K est, pour chaque valeur de u, v, complètement définie; nous l'appellerons *l'homographie fondamentale de la déformation projective*. En vertu de (15), les équations (12) prennent la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} \mathrm{K}x=y, & \mathrm{K}(2x_u+bx)=2y_u+b'y,\\ & \mathrm{K}(2x_v+ax)=2y_v+a'y.\end{cases}$$

On voit par exemple que, en échangeant les deux réseaux $x(u,v)$, $y(u,v)$, l'homographie fondamentale passe dans son inverse. Rappelons que les équations (16) supposent effectué le choix des facteurs selon (11).

Nous avons vu que, pour une déformation projective, deux familles de caractéristiques se confondent avec les courbes du réseau. La troisième famille de caractéristiques est donnée d'après (14') par

$$(17)\qquad (b'-b)\,du=(a'-a)\,dv.$$

Appelons *direction principale* de la déformation projective la direction définie par (17). L'homographie fondamentale K en donne une construction simple. A cet effet rappelons du paragraphe 51 que les deux transformés de Laplace de x sont

$$x_1=x_u-bx,\qquad x_2=x_v-ax.$$

Pareillement, les deux transformés de Laplace de y sont

$$y_1=y_u-b'y,\qquad y_2=y_v-a'y.$$

En posant

$$x'_1 = x_u + \frac{b-3b'}{2}x, \qquad x'_2 = x_v + \frac{a-3a'}{2}x,$$

on a, d'après (16),

$$Kx'_1 = y_1, \qquad Kx'_2 = y_2.$$

Les points x'_1, x'_2 du plan P sont donc déterminés par la condition que l'homographie fondamentale K les porte dans les transformés de Laplace y_1, y_2 du réseau y. Or l'intersection des droites (x_1, x'_2), (x_2, x'_1) est évidemment

$$\begin{aligned}
&2(a'-a)x_1 + 2(b'-b)x'_2 \\
&= 2(a'-a)x'_1 + 2(b'-b)x_2 \\
&= (a'-a)(2x_u + bx) + (b'-b)(2x_v + ax) + 3(ab - a'b')x = z,
\end{aligned}$$

de manière que

$$(x, z) = 2(a'-a)(x, x_u) + 2(b'-b)(x, x_v).$$

En comparant avec (17), on voit que la direction de la droite (x, z) est principale.

Notons le cas particulier $b = b'$ où la direction $dv = 0$ est principale; autrement dit, la famille $v =$ const. des courbes du réseau est composée de caractéristiques *doubles*. Nous voyons que (seulement) dans ce cas l'homographie fondamentale K porte le transformé de Laplace x_1 du réseau x dans le sens de u dans le transformé correspondant du réseau y. La remarque analogue vaut naturellement dans le cas $a = a'$. Si l'on a *simultanément* $a' = a$, $b' = b$, l'équation (14') montre que les caractéristiques sont indéterminées ; nous savons que cela signifie que la déformation projective se réduit à une simple homographie.

57. Tangentes conjuguées; sommets d'une courbe par rapport à un réseau plan. — Appelons *tangente* d'un réseau plan $x(u, v)$ à un point $x_0 = x(u_0, v_0)$, chaque droite du plan P passant par x_0. Deux tangentes à un point x_0 sont *conjuguées* (par rapport au réseau) si elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes (x, x_u), (x, x_v) aux courbes du réseau passant par x_0. Dans le cas d'un réseau *asymptotique*, les tangentes conjuguées sont les projections des tangentes conjuguées de la surface projetée S. On sait que, C étant une courbe de la surface S, les tangentes conjuguées aux tangentes à C forment une développable; c'est une propriété caractéristique des tangentes conjuguées par rapport à une *surface*. Cette propriété ne peut pas se transporter directement aux tangentes conjuguées par rapport à un réseau plan, car dans le plan *chaque* famille ∞^1 de droites a une enveloppe. Pourtant, nous allons voir qu'il y a une analogie en ne considérant que les propriétés invariantes pour une déformation projective.

Cela étant, considérons dans le plan P du réseau $x(u, v)$ une courbe arbitraire C et, par chaque point $x(u, v)$ de C, menons une droite

$$p = (x, \lambda x_u + \mu x_v)$$

en excluant seulement le cas $\lambda dv - \mu du = 0$ [1], où les droites p seraient tangentes à C. En se déplaçant le long de C, la droite p a une enveloppe (courbe ou point); soit

$$z = \lambda x_u + \mu x_v + \nu x \tag{18}$$

le point de contact. Pour déterminer ν, on a la condition que le point dz soit situé sur la droite $p = (x, z)$. Or, d'après (II), on calcule

$$\begin{aligned} dz = {} & [d\lambda + \lambda(\overline{\theta_u - b}\, du + a\, dv) + \mu(a\, du + \gamma\, dv) + \nu\, du]\, x_u \\ & + [d\mu + \lambda(\beta\, du + b\, dv) + \mu(b\, du + \overline{\theta_v - a}\, dv) + \nu\, dv]\, x_v \\ & + [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]\, x, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (\lambda\, dv - \mu\, du)\nu = {} & \mu\, d\lambda - \lambda\, d\mu - \lambda^2(\beta\, du + b\, dv) \\ & + \mu^2(a\, du + \gamma\, dv) + \lambda\mu(\overline{\theta_u - 2b}\, du - \overline{\theta_v - 2a}\, dv). \end{aligned} \tag{18'}$$

Or, considérons une déformation projective portant le réseau $x(u, v)$ dans un réseau $y(u, v)$ du plan Q; soit K l'homographie fondamentale de cette déformation. A la courbe C correspond une courbe C' du plan Q'. Quant aux droites p, les homographies K les portent dans les positions

$$p' = (y, \lambda y_u + \mu y_v).$$

En se déplaçant le long de C', la droite p' touche son enveloppe au point

$$z' = \lambda y_u + \mu y_v + \nu' z;$$

---

[1] Les différentielles se rapportent naturellement à un déplacement le long de C.

pour ν', on a l'équation qui s'obtient de (18') en y remplaçant a, b, ν respectivement par a', b', ν'. D'autre part, en choisissant les facteurs selon (11), on déduit de (16) que l'homographie K porte le point z en

$$\begin{aligned} \mathrm{K}z &= \lambda\left(y_u + \frac{b'-b}{2}y\right) + \mu\left(y_v + \frac{a'-a}{2}y\right) + \nu y \\ &= z' + \left(\nu - \nu' + \lambda\,\frac{b'-b}{2} + \mu\,\frac{a'-a}{2}\right)y. \end{aligned}$$

En remplaçant ν et ν' par leurs valeurs, on obtient

$$\tfrac{2}{3}(\lambda\,dv - \mu\,du)(\mathrm{K}z - z') = (\lambda\,dv + \mu\,du)(\lambda.\overline{b'-b} - \mu.\overline{a'-a}).$$

Donc l'homographie fondamentale K porte le point de contact z de p avec son enveloppe dans le point z' ayant la signification analogue si et seulement si

$$(\bigstar) \qquad (\lambda\,dv + \mu\,du)(\lambda\,\overline{b'-b} - \mu.\overline{a'-a}) = 0.$$

En général, l'équation ($\bigstar$) exige que $\lambda\,dv + \mu\,du = 0$, c'est-à-dire que p soit *conjuguée* [par rapport au réseau $x(u, v)$] à la tangente à C. Il y a une exception si

$$\lambda(b'-b) = \mu(a'-a),$$

ce qui signifie, d'après (17), que la direction de p soit *principale* par rapport à la déformation projective envisagée; alors, l'homographie K porte le point de contact z dans le point de contact z' pour *chaque* choix de la courbe C. Voici une propriété intéressante de la direction principale; elle contient comme cas particulier une proposition donnée déjà au paragraphe 56 : Si $b = b'$, la direction principale est donnée par $dv = 0$; donc, pour chaque déplacement, l'homographie K porte le point de contact z de la droite $p = (x, x_u)$ avec son enveloppe dans le point de contact z' de (y, y_u); or, en se déplaçant en particulier le long de la courbe $u =$ const., les points de contact z et z' coïncident évidemment avec les transformés de Laplace x_1 et y_1 dans le sens de u et nous retrouvons le résultat que $\mathrm{K}x_1 = y_1$.

Revenons au cas où p est conjuguée à la tangente à C. Les points z de contact des droites p avec son enveloppe sont appelés les *sommets* de la courbe C par rapport au réseau $x(u, v)$ considéré; à chaque point de C appartient *un* sommet. On l'obtient de (18) et (18') en y posant $\lambda = du$, $\mu = -dv$, ce qui donne

$$(19)\qquad \begin{aligned} &2\,du\,dv[x_u\,du - x_v\,dv] \\ &+ [du\,d^2v - dv\,d^2u - \beta\,du^3 \\ &+ (b - \theta_u)\,du^2\,dv - (a - \theta_v)\,du\,dv^2 + \gamma\,dv^3]\,x. \end{aligned}$$

La position du sommet dépend évidemment de l'élément du second ordre de la courbe C.

Considérons par exemple les sommets des *droites* passant par le point $x(u, v)$ (¹). Les droites sont caractérisées par la condition

$$\begin{aligned}(x, dx, d^2x) = (x,\ &x_u\,du + x_v\,dv, \\ &x_u\,d^2u + x_v\,d^2v + x_{uu}\,du^2 + 2x_{uv}\,du\,dv + x_{vv}\,dv^2) = 0.\end{aligned}$$

ou bien, d'après (II),

$$(20)\qquad \begin{aligned} &du\,d^2v - dv\,d^2u - \beta\,du^3 \\ &+ (3b - \theta_u)\,du^2\,dv - (3a - \theta_v)\,du\,dv^2 - \gamma\,dv^3 = 0. \end{aligned}$$

Donc les sommets des droites sont

$$(\star)\qquad \left\{ \begin{aligned} &x_1 x_u + x_2 x_v + x_0 x, \\ &x_0 : x_1 : x_2 = (\beta\,du^3 + b\,du^2\,dv - a\,du\,dv^2 - \gamma\,dv^3) : \\ &\qquad : -du^2\,dv : du\,dv^2. \end{aligned} \right.$$

En éliminant $du : dv$, on obtient l'équation

$$x_1 x_2 (x_0 + b x_1 + a x_2) = \beta x_1^3 + \gamma x_2^3$$

de la courbe C lieu des sommets des droites passant par $x(u, v)$. En général, c'est-à-dire si le réseau n'est pas réglé, la courbe C est une cubique rationnelle ayant en x un point double; ses points d'inflexion sont les trois intersections de la droite de Laplace (*voir* § 51) $x_0 + bx_1 + ax_2 = 0$ avec les tangentes de Darboux (*voir* § 54). Pour un réseau simplement réglé, C est une conique; pour un réseau doublement réglé, C se réduit à la droite de Laplace. Considérons encore le cas du réseau (asymptotique) projection des asymptotiques d'une surface $z(u, v)$ du point O; il est clair que la courbe C est la projection de la courbe transformée du faisceau de plans passant par la droite (zO) moyennant la correspondance de Segre (*voir* § 39).

On peut donner une autre définition de la courbe C (²). Pour un déplacement infinitésimal (du, dv) les équations (18) et (18′) donnent le point de

(¹) Il s'agit naturellement des sommets appartenant au point $x(u, v)$ considéré.

(²) D'après le résultat du paragraphe 54, chaque définition géométrique de la courbe C donne une interprétation de l'élément linéaire projectif.

contact z de la droite $(x, \lambda x_u + \mu x_v)$ avec son enveloppe. Posons en particulier : 1° $\lambda = 1$, $\mu = 0$; 2° $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Nous obtenons les points

$$x_u\,dv - (\beta\,du + b\,dv)x,$$
$$x_v\,du - (a\,du + \gamma\,dv)x,$$

de contact des droites (x, x_u), (x, x_v) avec leurs enveloppes [pour le déplacement infinitésimal (du, dv)]. La droite qui joint les deux points trouvés est

$$(a\,du + \gamma\,dv)\,dv(x, x_u) - (\beta\,du + b\,dv)(x, x_v) + du\,dv(x_u, x_v).$$

Or on voit aisément que l'intersection de cette droite avec la tangente $(x, x_u\,du - x_v\,dv)$ conjuguée à la direction (du, dv) coïncide avec le point (★) de la courbe C.

Soit donné un réseau asymptotique $x(u, v)$, projection des asymptotiques d'une surface S. Il semble difficile de caractériser géométriquement les projections des courbes planes tracées sur S (si l'on ne veut pas se borner aux *droites* qui sont les projections de ces courbes planes sur S dont les plans passent par le centre de projection). Or, les courbes sur S *corrélatives* aux sections planes sont les courbes de contact de S avec les cônes; et leurs projections sont évidemment caractérisées par la propriété que *leurs sommets sont fixes* (ce sont tout simplement les projections des sommets des cônes). Évidemment, pour un réseau *quelconque*, il existe ∞^1 courbes dont le sommet est fixe et occupe une position donnée.

On peut se demander s'il existe des déformations projectives telles qu'à chaque courbe à sommet fixe dans le plan du premier réseau correspond une courbe pareille dans le second plan. Deux solutions de ce problème sont évidentes. La première est donnée par un couple de réseaux en correspondance *homographique*. La seconde s'obtient en partant de deux surfaces *homographiques* non développables S, S′ et en projetant leurs asymptotiques. Or, *il n'existe pas d'autre solution*; nous nous bornons ici à énoncer ce résultat.

58. **L'axe d'un réseau plan; réseaux F.** — Supposons que le réseau $x(u, v)$ ne soit pas réglé. Au paragraphe 54 nous avons déjà défini les courbes de Darboux et de Segre. Ce sont des cas particuliers des courbes

$$\frac{dv}{du} = \tau\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}, \tag{21}$$

où $\tau \neq 0$ est une constante. Les courbes (21) peuvent être définies géométriquement par la propriété que leur tangente forme un rapport anharmonique constant avec les tangentes de Darboux (ou de Segre). Nous dirons que les courbes (21) forment le *faisceau de Darboux-Segre*. En éliminant la constante τ par différentiation, on obtient

$$du\, d^2v - dv\, d^2u = \frac{1}{3}\left(\frac{d\beta}{\beta} - \frac{d\gamma}{\gamma}\right) du\, dv, \tag{21'}$$

de manière que l'on obtient de la formule (19) pour le sommet d'une courbe de ce faisceau l'expression

$$\begin{aligned}(\star)\qquad &\Bigg[\beta + \left(\theta_u - b - \frac{1}{3}\frac{\beta_u}{\beta} + \frac{1}{3}\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,\tau \\ &\quad + \left(a - \theta_v - \frac{1}{3}\frac{\beta_v}{\beta} + \frac{1}{3}\frac{\gamma_v}{\gamma}\right)\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}}\,\tau^2 - \beta\tau^3\Bigg]x \\ &\quad - 2\tau\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,x_u + 2\tau^2\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}}\,x_v.\end{aligned}$$

Or *considérons trois familles* ∞^1 *de courbes du faisceau de Darboux-Segre* et indiquons par τ_i ($i = 1, 2, 3$) les valeurs respectives de τ. Proposons-nous de *rechercher quand il arrive que pour chaque valeur de u, v les trois sommets sont situés sur une droite.* D'après ($\star$), cela est exprimé par l'équation

$$|1 - \tau_i^3,\ \tau_i,\ \tau_i^2| = 0,$$

le premier membre indiquant un déterminant. En l'évaluant, on obtient

$$\tau_1\tau_2\tau_3 = 1. \tag{22}$$

En outre, nous devons encore écrire que la quantité

$$\tau_i = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}\,\frac{dv}{du}$$

est constante *le long de la courbe*, ce qui donne

$$\tau_{iu} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,\tau_i\tau_{iv} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{22'}$$

Introduisons deux nouvelles inconnues

$$\lambda = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \qquad \mu = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}. \tag{23}$$

En multipliant les équations (22′) 1° avec 1, 2° avec $\frac{1}{\tau_i}$, 3° avec $\frac{1}{\tau_i^2}$ et en sommant, on obtient les équations

$$\lambda_v = 0, \qquad \mu_u = 0, \qquad \lambda_u = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,\mu_v$$

tout à fait équivalentes aux équations (22′). On peut les écrire, en introduisant une inconnue auxiliaire ν,

$$(24) \qquad \lambda_u = \sqrt[6]{\frac{\beta}{\gamma}}\,\nu, \qquad \lambda_v = 0; \qquad \mu_u = 0, \qquad \mu_v = \sqrt[6]{\frac{\gamma}{\beta}}\,\nu.$$

Les conditions d'intégrabilité $\lambda_{uv} = \lambda_{vu}$, $\mu_{uv} = \mu_{vu}$ donnent

$$(24') \qquad \nu_u = -\frac{1}{6}\,\frac{\partial \log(\beta : \gamma)}{\partial v}\,\nu, \qquad \nu_v = \frac{1}{6}\,\frac{\partial \log(\beta : \gamma)}{\partial u}\,\nu.$$

La condition d'intégrabilité $\nu_{uv} = \nu_{vu}$ donne

$$(24'') \qquad \nu\,\frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Elle est toujours satisfaite si $\nu = 0$. Dans ce cas les équations (24) donnent que λ et μ sont des constantes arbitraires, de manière que τ_1, τ_2, τ_3 sont des constantes liées par la condition (22). *Le problème proposé possède donc en général* ∞^2 *solutions.*

Le cas le plus intéressant est $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\tau_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ appartenant aux courbes de Segre. *Les sommets des trois courbes de Segre sont situés sur une droite.* Son équation est, d'après (*),

$$(25) \qquad \begin{aligned} 6x_0 &+ \left(3\theta_u - 3b - \frac{\beta_u}{\beta} + \frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x_1 \\ &+ \left(3\theta_v - 3a + \frac{\beta_v}{\beta} - \frac{\gamma_v}{\gamma}\right)x_2 = 0, \end{aligned}$$

x_0, x_1, x_2 étant les coordonnées du point $x_0 x + x_1 x_u + x_2 x_v$. Dans le cas particulier d'un réseau asymptotique, ce résultat nous est connu (§ 40); la droite (25) est alors évidemment la projection du second *axe* de la surface. Nous appellerons donc, pour un réseau quelconque, la droite (25) *l'axe du réseau.*

En posant $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = -e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\tau_3 = -e^{\frac{4\pi i}{3}}$, on obtient le théorème suivant : *Les sommets de deux des trois courbes de Darboux et de* *la troisième courbe de Segre sont situés sur une droite* (*cf.* Bompiani [23]).

Nous avons vu que le problème étudié possède *en général* ∞^2 solutions. Cependant, il y a une exception importante. D'après (24″), c'est le cas où les coefficients de l'élément linéaire projectif satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{\partial u\, \partial v} = 0. \tag{26}$$

Dans le cas d'une *surface*, l'équation (26) définit (*voir* § 29 et 35) une classe très importante de surfaces découverte par M. Fubini et étudiée par lui sous le nom de « surfaces isothermo-asymptotiques ». Nous appellerons *réseau de M. Fubini* ou *réseau* F chaque réseau (asymptotique ou non) non réglé vérifiant la condition (26). Celle-ci donne

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{U}{V},$$

U (V) étant une fonction de la variable u (v) seule et différente de zéro. En introduisant

$$u_1 = \int \sqrt[3]{U}\, du, \qquad v_1 = \int \sqrt[3]{V}\, dv$$

comme nouveaux paramètres et en écrivant simplement u, v au lieu de u_1, v_1, la condition (26) devient simplement .

$$\beta = \gamma. \tag{26'}$$

Dans ce cas, les équations (24′) donnent seulement que ν est une *constante*. Les équations (24) donnent ensuite, d'après (26′),

$$\lambda = \nu u + \nu_1, \qquad \mu = \nu v + \nu_2,$$

ν_1 et ν_2 étant des nouvelles constantes. Donc, d'après (21), (22) et (23), la solution générale de notre problème dans le cas d'un réseau F est donnée par les trois familles ∞^1 de courbes définies par

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^3 - (\nu u + \nu_1)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\nu v + \nu_2)\frac{dv}{du} - 1 = 0. \tag{$\bigstar$}$$

Il y a ∞^3 solutions. L'équation ($\bigstar$) suppose naturellement le choix des paramètres u, v fait selon (26′). L'intégrale de ($\bigstar$) s'obtient immédiatement, car $\tau = \frac{dv}{du}$ est, pour chaque solution, une constante.

59. **Le faisceau canonique.** — Supposons toujours que le réseau $x(u, v)$ ne soit pas réglé. Pour un réseau *asymptotique*, on obtient le *faisceau canonique* en projetant le faisceau canonique [1] de la surface. Mais nous pouvons généraliser la notion du faisceau canonique au cas d'un réseau plan quelconque. Il ne s'agit que de faire la généralisation pour *deux* droites canoniques particulières. Or, dans le paragraphe précédent, nous avons déjà généralisé la notion de l'*axe*. Avec la même facilité, on généralise la notion de l'*arête*. D'après le paragraphe 6, la polaire du point $x_u + \lambda x$ par rapport à la conique osculatrice à la courbe $v =$ const. du réseau est

$$(\star) \qquad (x, x_{uu}) + \left(\lambda - \frac{1}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi}\right)(x, x_u) \qquad [\varphi = (x, x_u, x_{uu})].$$

Or, d'après (I) et (II), on trouve

$$(x, x_{uu}) = (\theta_u - b)(x, x_u) + \beta(x, x_v),$$
$$\varphi = \beta(x, x_u, x_v) = \pm \beta e^{\theta},$$

de manière que la droite $(\star)$ devienne

$$\beta(x, x_v) + \left(\lambda - b - \frac{1}{3}\frac{\beta_u}{\beta} + \frac{2}{3}\theta_u\right)(x, x_u).$$

Il en résulte que *le pôle de la droite* (x, x_v) *par rapport à la conique osculatrice à la courbe* $v =$ const. est

$$(27) \qquad 3x_u + \left(3b - 2\theta_u + \frac{\beta_u}{\beta}\right)x.$$

Pareillement, on obtient le pôle de la droite (x, x_u) par rapport à la conique osculatrice à la courbe $u =$ const.,

$$(27') \qquad 3x_v + \left(3a - 2\theta_v + \frac{\gamma_u}{\gamma}\right)x.$$

Cela posé, soit p la droite qui joint les deux points (27) et (27');

(1) Il s'agit naturellement du *second* faisceau canonique situé dans le plan tangent.

soit l la droite de Laplace,

$$(x_u - bx,\ x_v - ax);$$

soit q la droite du faisceau (p, l) contenant x. Nous appellerons l'*arête du réseau* la droite g déterminée par le rapport anharmonique

$$(p, q, l, g) = 4.$$

Dans le cas d'un réseau *asymptotique*, l'arête du réseau est la projection de la seconde arête de la surface (*voir* § 34); cela résulte de la signification géométrique de la droite de Laplace d'un réseau asymptotique expliquée à la fin du paragraphe 53. En faisant le calcul, on obtient que l'arête g joigne les points

$$4x_u + \left(2b - 2\theta_u + \frac{\beta_u}{\beta}\right)x,$$

$$4x_v + \left(2a - 2\theta_v + \frac{\gamma_v}{\gamma}\right)x.$$

Nous avons directement transporté la notion de droite canonique dans deux cas particuliers : celui de l'axe et celui de l'arête. Les rapports anharmoniques permettent maintenant de transporter la notion d'une droite canonique quelconque (*voir* § 35). Cela conduit à la définition suivante : *la droite canonique de paramètre* λ (λ étant une constante quelconque) *joint les points*

$$(28)\qquad \begin{cases} 2x_u + \left(b - \theta_u + \overline{2\lambda+1}\,\dfrac{\beta_u}{\beta} + \overline{4\lambda+1}\,\dfrac{\gamma_u}{\gamma}\right)x, \\[2ex] 2x_v + \left(a - \theta_v + \overline{4\lambda+1}\,\dfrac{\beta_v}{\beta} + \overline{2\lambda+1}\,\dfrac{\gamma_v}{\gamma}\right)x. \end{cases}$$

Cas particuliers : 1° l'*axe*, $\lambda = -\frac{1}{3}$; 2° l'*arête*, $\lambda = -\frac{1}{4}$; 3° la *directrice*, $\lambda = -\frac{1}{2}$; 4° la *normale projective*, $\lambda = 0$. *En effectuant une déformation projective*, on voit que l'*homographie fondamentale transforme chaque droite canonique du premier réseau dans la droite canonique du second réseau appartenant à la même valeur du paramètre* λ.

La correspondance entre le point $x(u, v)$ et la droite canonique de paramètre λ est *polaire* (dans le sens du paragraphe 53) si

$$(29)\qquad b_v - a_u - 2\lambda \frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

L'équation (29) *n'est pas invariante* pour une déformation projective. Dans le cas $\lambda = 0$ de la normale projective, l'équation (29) se réduit à la condition (6) pour un *réseau asymptotique*.

On voit que, en général, la correspondance entre le point x et une droite canonique *n'est pas* (pour aucune valeur de λ) *polaire*. C'est une autre droite qui a cette propriété. A cet effet, remarquons que, pour chaque choix du facteur de x, la forme [*voir* (I)]

$$(\star)\qquad 2(x, x_u, x_v)\, du\, dv = \pm 2 e^{\theta}\, du\, dv$$

est intrinsèque. En multipliant x par ρ, la forme ($\star$) se multiplie par le facteur ρ^3. On voit qu'on peut (¹) *normaliser* les coordonnées homogènes $x(u, v)$ par la condition que la forme ($\star$) soit égale à la forme invariante $2\beta\gamma\, du\, dv$. Le facteur de x étant quelconque, les *coordonnées normales* $X(u, v)$ sont évidemment

$$(30)\qquad X = \pm e^{-\frac{1}{3}\theta} \sqrt[3]{\beta\gamma}\, x.$$

Cela étant, appelons *polaire* du point x par rapport au réseau la droite (X_u, X_v). *Cette polaire est la plus simple droite intrinsèque et invariante dont la correspondance avec x est, pour chaque réseau, polaire dans le sens du paragraphe* 53. De (30), on obtient que la polaire joigne les points

$$(31)\qquad 3x_u + \left(\frac{\beta_u}{\beta} + \frac{\gamma_u}{\gamma} - \theta_u\right)x, \qquad 3x_v + \left(\frac{\beta_v}{\beta} + \frac{\gamma_v}{\gamma} - \theta_v\right)x.$$

On voit que la polaire n'appartient pas, en général, au faisceau canonique et qu'elle n'est pas invariante pour une déformation projective. En désignant par : 1° l la droite de Laplace (x_1, x_2) (*voir* § 51); 2° n la normale projective; 3° p la polaire (31), on vérifie aisément que les trois droites l, n, p appartiennent à un *faisceau;* si q est la droite de ce faisceau contenant x, on trouve aisément que le rapport anharmonique est $(q, l, n, p) = \frac{2}{3}$.

(¹) Rappelons que nous avons exclu les réseaux réglés.

La droite canonique (28) *coïncide avec la droite de Laplace si*

$$
(32)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(2\lambda+1)\frac{\beta_u}{\beta}+(4\lambda+1)\frac{\gamma_u}{\gamma}=\theta_u-3b,\\
&(4\lambda+1)\frac{\beta_v}{\beta}+(2\lambda+1)\frac{\gamma_v}{\gamma}=\theta_v-3a.
\end{aligned}\right.
$$

On peut démontrer que, pour chaque valeur de λ, *les réseaux satisfaisant à* (32) *dépendent de trois fonctions arbitraires d'un argument.* Deux cas particuliers sont intéressants :

1° Le cas $\lambda = 0$ de la *normale projective*. Alors les équations (32) deviennent

$$
\frac{\partial}{\partial u}\log(e^{-\theta}\beta\gamma)+3b=0,
$$

$$
\frac{\partial}{\partial v}\log(e^{-\theta}\beta\gamma)+3a=0.
$$

Il en résulte $a_u = b_v$, de manière que le réseau est asymptotique. D'après la remarque finale du paragraphe 53, ce sont les *projections des asymptotiques du point* O *des surfaces pour lesquelles toutes les premières normales projectives passent par* O. De (31), il résulte que la polaire coïncide aussi avec la droite de Laplace.

2° Le cas $\lambda = -\frac{1}{3}$ de l'*axe*. Les équations (32) s'écrivent

$$
(32')\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\beta_u}{\beta}-\frac{\gamma_u}{\gamma}=-3\theta_u+9b,\\
&\frac{\beta_v}{\beta}-\frac{\gamma_v}{\gamma}=3\theta_v-9a.
\end{aligned}\right.
$$

Elles expriment que toutes les lignes de Segre sont rectilignes. En effet, l'équation différentielle des lignes droites est (20). Les lignes de Segre satisfont à l'équation (21'). Par soustraction, on obtient l'équation

$$
(\bigstar)\qquad \begin{aligned}
&3\beta\,du^3+\left(9b-3\theta_u+\frac{\beta_u}{\beta}-\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)du^2\,dv\\
&+\left(-9a+3\theta_v+\frac{\beta_v}{\beta}-\frac{\gamma_v}{\gamma}\right)du\,dv^2-3\gamma\,dv^3=0.
\end{aligned}
$$

Pour les lignes de Segre, on a $\beta\,du^3-\gamma\,dv^3=0$, de manière que ($\bigstar$) soit satisfaite en vertu de (32'). Ce calcul montre d'ailleurs, par exemple, qu'il est impossible que toutes les courbes de Darboux d'un réseau soient rectilignes.

60. Surfaces R_0. Cas où la transformation de Laplace est une déformation projective. — Posons

$$
(33)\qquad \xi_1=(x,\,x_u),\qquad \xi_2=(x,\,x_v),\qquad \xi_3=(x_u,\,x_v).
$$

Des équations (II), on obtient par différentiation

$$(34)\quad \begin{cases} \xi_{1u} = (\theta_u - b)\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_{1v} = a\xi_1 + b\xi_2 - \xi_3, \\ \xi_{2u} = \quad a\xi_1 + b\xi_2 + \xi_3, & \xi_{2v} = \quad \gamma\xi_1 + (\theta_v - a)\xi_2, \\ \xi_{3u} = -c\xi_1 + p\xi_2 + \theta_u\xi_3, & \xi_{3v} = -q\xi_1 + c\xi_3 + \theta_v\xi_3. \end{cases}$$

Une nouvelle différentiation donne encore

$$(34')\quad \begin{cases} \xi_{1uu} = \left(\theta_{uu} - b_u + \overline{\theta_u - b}^2 + \alpha\beta\right)\xi_1 + (\beta_u + \beta\theta_u)\xi_2 + \beta\xi_3, \\ \xi_{1vv} = (a_v + a^2 + b\gamma + q)\xi_1 + (b_v + b\theta_v - c)\xi_2 - (a + \theta_v)\xi_3, \\ \xi_{1uv} = (\theta_{uv} - b_v + a\theta_u - ab + \beta\gamma)\xi_1 \\ \qquad + (\beta_v + \beta\theta_v + b\theta_u - b^2 - a\beta)\xi_2 + (b - \theta_u)\xi_3, \\ \xi_{1vu} = (a_u + a\theta_u + c)\xi_1 + (b_u + a\beta + b^2 - p)\xi_2 + (b - \theta_u)\xi_3. \end{cases}$$

Les valeurs de ξ_{1uv} et de ξ_{1vu} sont nécessairement égales; cela donne les deux premières des équations

$$(35)\quad \begin{cases} c = \theta_{uv} + \beta\gamma - a_u - b_v - ab, \\ p = b_u + 2b^2 - \beta_v - \beta\theta_v + 2a\beta - b\theta_u, \\ q = a_v + 2a^2 - \gamma_u - \gamma\theta_u + 2b\gamma - a\theta_v; \end{cases}$$

la troisième peut s'écrire sans calcul ultérieur par raison de symétrie. On voit que, dans les équations (II), les quantités c, p, q sont complètement déterminées par θ, a, b, β, γ. Ces dernières quantités ([1]) définissent donc un réseau plan à des homographies près. Il est intéressant de remarquer que nous avons déjà obtenu un résultat équivalent sans aucun calcul des conditions d'intégrabilité. En effet, si pour les réseaux $x(u, v)$, $y(u, v)$ les quantités θ, a, b, β, γ sont les mêmes, l'équation (14') montre que les caractéristiques de la correspondance entre les deux plans sont indéterminées et que, par conséquent, comme nous l'avons remarqué au paragraphe 56, cette correspondance est homographique.

Supposons dorénavant $\beta \neq 0$, c'est-à-dire que les courbes $v = \text{const.}$

([1]) Elles sont encore liées par les conditions d'intégrabilité que l'on peut mettre sous la forme

$$\begin{gathered} A_{uu} + 2B_{uv} + 3BA_u + 6BB_v + 3BA_v + 3\beta_v A - \beta_{vv} - 2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u = 0, \\ B_{vv} + 2A_{uv} + 3AB_v + 6AA_u + 3\gamma B_u + 3\gamma_u A - \gamma_{uu} - 2\gamma\beta_v - \beta\gamma_v = 0 \end{gathered}$$

avec

$$A = a - \frac{1}{3}\theta_v, \qquad B = b - \frac{1}{3}\theta_u.$$

du réseau ne soient pas rectilignes. Alors, on peut éliminer ξ_2 et ξ_3 des équations (34) et (34'), ce qui donne

$$(36)\quad \begin{cases} \xi_{1uu} = \left(b + \dfrac{\beta_u}{\beta} + \theta_u\right)\xi_{1u} - \beta\xi_{1v} + (\ldots)\xi_1, \\ \xi_{1vv} = -\dfrac{k}{\beta}\xi_{1u} + (a + \theta_v)\xi_{1v} + (\ldots)\xi_1, \\ \xi_{1uv} = \left(\dfrac{\beta_v}{\beta} + \theta_v - a\right)\xi_{1u} + (\theta_u - b)\xi_{1v} + (\ldots)\xi_1. \end{cases}$$

Donc, *on passe du réseau* $x(u, v)$ *à la congruence* $\xi_1(u, v) = (x, x_u)$ *des tangentes aux courbes* $v =$ const. *en remplaçant les quantités* θ, a, b, β, γ *respectivement par* θ_1, a_1, b_1, β_1, γ_1, où

$$(36')\quad \begin{cases} \theta_1 = e^{2\theta}\beta, \quad a_1 = \dfrac{\beta_v}{\beta} + \theta_v - a, \quad b_1 = \theta_u - b, \\ \beta_1 = -\beta, \qquad \gamma_1 = -\dfrac{k}{\beta}. \end{cases}$$

En particulier, la congruence $\xi_1(u, v)$ est asymptotique si $a_{1u} = b_{1v}$, ou bien

$$(\star)\qquad \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\, \partial v} = a_u - b_v.$$

On peut donner une autre interprétation de l'équation ($\star$); à cet effet, considérons l'intersection z_1 de l'*axe* du réseau $x(u, v)$ avec la droite ξ_2, ainsi que l'intersection z_2 de la droite canonique de paramètre $-\frac{1}{6}$ avec la droite ξ_1; les expressions de z_1 et z_2 sont données par (28). Or, on voit aisément que l'équation ($\star$) exprime que la correspondance entre le point $x(u, v)$ et la droite (z_1, z_2) est polaire (*voir* § 53).

Particulièrement intéressant est le cas où *le réseau* $x(u, v)$ *et la congruence* $\xi_1(u, v)$ *sont simultanément asymptotiques*. Alors, on a, outre ($\star$), $a_u = b_v$, d'où $\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\, \partial v} = 0$. Réciproquement, l'équation ($\star$) est une conséquence des équations

$$(\star\star)\qquad a_u - b_v = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Supposons les équations ($\star\star$) vérifiées. Le réseau $x(u, v)$ étant asymptotique, il existe une surface S dont les asymptotiques se projettent suivant ce réseau. En nous rappelant que l'élément linéaire projectif d'une surface est égal à celui de la projection de ces asymptotiques, la seconde équation (★★) nous dit que S *est une surface* R_0 (*voir* § 29); la congruence R_0 correspondante est formée par les tangentes aux asymptotiques $v =$ const. Nous avons donc le théorème suivant :

Soit $x(u, v)$ *un réseau asymptotique tel que la congruence* $\xi_1(u, v)$ *des tangentes aux courbes* $v =$ const. *soit asymptotique. Alors le réseau* $x(u, v)$ *est la projection des asymptotiques d'une surface* R_0, *la congruence* R_0 *correspondante étant formée des tangentes aux asymptotiques* $v =$ const.

Ce théorème exprime une réciprocité remarquable entre surfaces R_0 et congruences R_0. En effet, formons la figure corrélative à celle formée du réseau $x(u, v)$ et de la congruence $\xi_1(u, v)$ des tangentes aux courbes $v =$ const. Au réseau $x(u, v)$ correspond une congruence plane $\eta(u, v)$ et à la congruence $\xi_1(u, v)$ correspond un réseau plan $y_1(u, v)$. La relation entre x et ξ_1 peut s'exprimer par

$$S x \xi_1 = 0, \qquad S x_u \xi_1 = 0.$$

Donc, on a

$$S \eta y_1 = 0, \qquad S \eta_u y_1 = 0.$$

En différentiant la première de ces équations par rapport à u, on peut mettre la seconde sous la forme $S \eta y_{1u} = 0$. Donc, la congruence $\eta(u, v)$ se compose des tangentes aux courbes $v =$ const. du réseau $y(u, v)$. Si le réseau $x(u, v)$ et la congruence $\xi_1(u, v)$ sont asymptotiques, le réseau $y(u, v)$ et la congruence $\eta_1(u, v)$ le sont aussi. Donc, *la figure corrélative* (dans le plan) *de la projection asymptotique* [1] *d'une congruence* R_0 *est la projection des asymptotiques d'une surface* R_0. On peut donner une autre forme à ce résultat en remarquant que la figure corrélative à la *projection plane* s'obtient en formant *l'intersection avec un plan*. Pour la commodité du langage, prenons ce dernier plan à l'infini. Alors on peut évidemment énoncer le résultat suivant :

---

[1] Cela veut dire que les courbes de la congruence plane sont les projections de ces surfaces réglées de la congruence R_0 qui s'obtiennent en se déplaçant suivant les asymptotiques de la surface focale.

Soit $S(u, v)$ *une surface rapportée à ses asymptotiques. Si* S *est une surface* R_0, *les tangentes aux asymptotiques* $v =$ const. *formant la congruence* R_0, *et dans ce cas seulement, il existe une surface* $\Sigma(u, v)$ *en correspondance asymptotique avec* $S(u, v)$, *et telle que les droites qui joignent le point mobile sur* Σ *avec un point fixe* O *sont parallèles aux tangentes aux asymptotiques* $v =$ const. *de* S. *La surface* $\Sigma(u, v)$ *est aussi une surface* R_0, *la congruence* R_0 *étant encore formée des tangentes aux asymptotiques* $v =$ const.

Le « plan à l'infini » pouvant être choisi arbitrairement, on peut donc déduire d'une surface R_0 ∞^3 nouvelles surfaces R_0. L'application itérée de ce procédé (ou du procédé corrélatif) permet donc de déduire une famille de surfaces R_0 dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres.

Au paragraphe suivant, nous verrons que ces résultats s'étendent aux surfaces et congruences R.

Revenons au cas général. Les équations (36) montrent que l'élément linéaire projectif de la congruence $\xi_1(u, v)$ est

$$-\frac{\beta\,du^3 - \dfrac{k}{\beta}\,dv^3}{2\,du\,dv}. \tag{37}$$

Nous avons supposé que $\beta \neq 0$; supposons encore $\gamma \neq 0$, de manière que le réseau $x(u, v)$ ne soit pas réglé. Alors, par raison de symétrie, l'élément linéaire projectif de la congruence $\xi_2(u, v)$ est

$$-\frac{\dfrac{h}{\gamma}\,du^3 + \gamma\,dv^3}{2\,du\,dv}. \tag{37'}$$

Les quantités h, k sont définies par les (3). Étudions le cas où la correspondance [définie par l'égalité des paramètres u, v] entre les congruences $\xi_1(u, v)$, $\xi_2(u, v)$ est une déformation projective. La condition relative est l'égalité de (37) et de (37'), ce qui donne

$$h = k = \beta\gamma. \tag{$\bigstar$}$$

D'après (6'), le réseau $x(u, v)$ est asymptotique. Comme nous l'avons vu au paragraphe 53, nous pouvons choisir le facteur de x de manière que $a = b = 0$. Les équations ($\bigstar$) donnent alors, d'après (3), $c = \beta\gamma$, ce qui peut s'écrire, d'après (35_1), $\theta_{uv} = 0$. Donc, *la courbure de la forme* $2e^\theta\,du\,dv$ *est égale à zéro.* Pour la surface $z(u, v)$, dont les asymptotiques se projettent suivant le réseau $x(u, v)$, nous avons, d'après (5),

$$
(38) \qquad \begin{cases} z_{uu} = \theta_u z_u + \beta z_v + p z, & z_{vv} = \gamma z_u + \theta_v z_v + q z, \\ z_{uv} = c z + f y; \end{cases}
$$

la dernière de ces équations montre que le facteur de z est choisi de manière que la droite (z, z_{uv}) passe par le centre de projection y. Le résultat devient peut-être plus clair si l'on transforme tout suivant le principe de dualité. Aux deux congruences $\xi_1(u, v)$, $\xi_2(u, v)$ correspondent alors (*voir* § 51) deux réseaux plans $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$ transformés de Laplace l'un de l'autre. Au réseau $x(u, v)$ correspond la congruence des droites (z_1, z_2). Au lieu du point $z(u, v)$, nous avons un plan $\xi(u, v)$ enveloppant une surface S pour laquelle u, v sont des paramètres asymptotiques. Les points x_1, x_2 sont les sections des tangentes asymptotiques $v =$ const., $u =$ const. à la surface S avec un plan fixe P que nous pouvons considérer comme le plan à l'infini. Les équations $(38_{1,2})$ deviennent

$$
(38') \qquad \xi_{uu} = \theta_u \xi_u + \beta \xi_v + p \xi, \qquad \xi_{vv} = \gamma \xi_u + \theta_v \xi_v + q \xi.
$$

Et le facteur de ξ est choisi de manière que la droite (ξ, ξ_{uv}) soit située dans le plan P. Soit $x_0(u, v)$ les coordonnées du point mobile sur S, leur facteur correspondant au facteur de $\xi(u, v)$ suivant la convention habituelle. Alors la droite (ξ, ξ_{uv}) coïncide avec la droite (x_{0u}, x_{0v}) qui est, par suite, contenue dans le plan P à l'infini. Cela exprime que les coordonnées $x_0(u, v)$ sont non homogènes. Donc, on déduit de (38') les équations (*voir* § 25)

$$
x_{0uu} = \theta_u x_{0u} - \beta x_{0v}, \qquad x_{0vv} = - \gamma x_{0u} + \theta_v x_{0v}.
$$

On voit que les formes fondamentales *affines* (§ 25) de la surface S sont

$$
2\, e^{\theta}\, du\, dv, \qquad - e^{\theta}(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3);
$$

l'élément linéaire projectif de S est

$$
-(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) : 2\, du\, dv.
$$

En comparant avec (37) et (★), on déduit que c'est l'élément linéaire projectif des réseaux $z_1(u, v)$, $z_2(u, v)$. Rappelons que les équations (★) disent que la courbure de $2 e^{\theta}\, du\, dv$ est égale à zéro. En définitive, nous avons le résultat suivant :

Dans l'espace affine, considérons une surface non réglée S (u, v) *rapportée à ses asymptotiques telle que la courbure de la forme quadratique* $e^{\theta}\, du\, dv$ *fondamentale de la géométrie affine* (§ 25) *soit égale à zéro* (¹). *Soient* $z_1(u, v)$, $z_2(u, v)$ *les intersections des*

(¹) C'est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre pour la surface S.

tangentes asymptotiques à S avec le plan à l'infini. En variant u et v, les points z_1, z_2 décrivent deux réseaux plans transformés de Laplace l'un de l'autre, la transformation de Laplace étant une déformation projective. Et réciproquement. On obtient d'autres réseaux plans en déformation projective avec les réseaux z_1, z_2 en projetant les asymptotiques de S d'un point quelconque dans un plan fixe.

61. **Congruences conjuguées à un réseau plan. Congruences W. Surfaces R.** — Soit $x(u, v)$ un réseau plan pour lequel nous ferons usage de nos notations habituelles. Rappelons, en particulier, que le réseau transformé de Laplace dans le sens de $u(v)$ est $x_1(u, v)[x_2(u, v)]$ où

$$(2) \qquad x_1 = x_u - bx, \qquad x_2 = x_v - ax.$$

Par chaque point $x(u, v)$, menons une droite $p(u, v)$ différente des tangentes (x, x_u), (x, x_v) aux courbes du réseau en x. En variant u, v, la droite p décrit une congruence plane. Désignons par $p_1(p_2)$ sa transformée de Laplace dans le sens de $u(v)$ [1]. Nous dirons que le réseau $x(u, v)$ et la congruence $p(u, v)$ sont *conjugués* si, outre la condition déjà mentionnée que la droite p passe par x, deux autres conditions analogues sont vérifiées : 1° la droite p_1 passe par x_2; 2° p_2 passe par x_1. D'ailleurs, nous verrons que *chacune de ces deux conditions entraîne l'autre.*

Nous pouvons écrire

$$(39) \qquad p(u, v) = (x, x_u + \tau x_v),$$

τ étant une fonction de u, v partout différente de zéro. Posons, comme au paragraphe 60,

$$(33) \qquad \xi_1 = (x, x_u), \qquad \xi_2 = (x, x_v), \qquad \xi_3 = (x_u, x_v),$$

de manière que

$$(39') \qquad p = \xi_1 + \tau\xi_2.$$

On en déduit, d'après (34),

$$(40) \qquad p_u = (\theta_u - b + a\tau)\xi_1 + (\beta + b\tau + \tau_u)\xi_2 + \tau\xi_3.$$

[1] La transformation de Laplace d'une congruence plane se définit corrélativement à celle d'un réseau plan.

La droite p_1 contient le point commun aux deux droites p et p_u; d'après les équations précédentes, c'est le point

$$(\star) \qquad \tau(x_u + \tau x_v) + (\beta + \overline{2b - \theta_u}\tau - a\tau^2 + \tau_u)x.$$

Dans le cas où la congruence $p(u, v)$ est conjuguée au réseau $x(u, v)$, la droite p_1 doit contenir, outre le point $(\star)$, le point x_2. On en déduit

$$(41) \qquad p_1 = a\tau\xi_1 + (\beta + \overline{2b - \theta_u}\tau + \tau_u)\xi_2 + \tau\xi_3.$$

Pour que la droite p_1 donnée par (41) soit effectivement la transformée de Laplace de p dans le sens de u, il faut et il suffit, d'après la définition géométrique de la transformation de Laplace, que la droite p_{1v} contienne le point $(\star)$ commun aux droites p et p_u. Or, de (41), on déduit, d'après les équations (34),

$$\begin{aligned} p_{1v} = {} & [\beta\gamma + (a_v + a^2 + \overline{2b - \theta_u}\gamma - q)\tau + \gamma\tau_u + a\tau_v]\xi_1 \\ & + [\beta_v + (\theta_v - a)\beta + (2b_v - ab + a\theta_u - \theta_u\theta_v - \theta_{uv} + 2b\theta_v + c)\tau \\ & \qquad + (\theta_v - a)\tau_u + (2b - \theta_u)\tau_v + \tau_{uv}]\xi_2 \\ & + (\tau_v + \overline{\theta_v - a}\tau)\xi_3, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, d'après (35),

$$\begin{aligned} p_{1v} = {} & [\beta\gamma + (\gamma_u - \overline{a^2 - a\theta_v})\tau + \gamma\tau_u + a\tau_v]\xi_1 \\ & + [b_v - a\beta + \beta\theta_v + (\beta\gamma - a_u + b_v + a\theta_u + 2b\theta_v - \theta_u\theta_v - 2ab)\tau \\ & \qquad + (\theta_v - a)\tau_u + (2b - \theta_u)\tau_v + \tau_{uv}]\xi_2 \\ & + (\tau_v + \overline{\theta_v - a}\,\tau)\xi_3. \end{aligned}$$

En écrivant que cette droite contient le point $(\star)$, on arrive à la condition

$$\tau\tau_{uv} - \tau_u\tau_v = \gamma\tau^2\tau_u + \beta\tau_v - \beta_v\tau - \gamma_u\tau^3 + (a_u - b_v)\tau^2.$$

Elle exprime l'incidence de p_1 et x_2; or, en l'écrivant sous la forme

$$(42) \qquad \frac{\partial^2 \log\tau}{\partial u\, \partial v} = \gamma\tau_u - \beta\left(\frac{1}{\tau}\right)_v - \gamma_u\tau - \frac{\beta_v}{\tau} + a_u - b_v = 0,$$

on reconnaît immédiatement que la condition pour l'incidence de p_2 et x_1 est la même; donc, (42) est la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau $x(u, v)$ et la congruence $p(u, v)$ soient conjugués. En posant

$$\tau = \frac{B}{A},$$

on peut l'écrire

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A_v}{A}+\gamma\frac{B}{A}+a\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B_u}{B}+\beta\frac{A}{B}+b\right),$$

ce qui exprime que la forme de Pfaff

$$(\star)\qquad \left(\frac{B_u}{B}+\beta\frac{A}{B}+b\right)du+\left(\frac{A_v}{A}+\gamma\frac{B}{A}+a\right)dv$$

est une différentielle exacte. Or, on peut remplacer A, B par ρA, ρB, ce qui ne change pas τ; cela revient à ajouter $d\log\rho$ à la forme de Pfaff ($\star$). ρ étant arbitraire, on voit qu'on peut supposer que la forme ($\star$) est identiquement nulle, ce qui donne

$$(43)\qquad B_u+\beta A+bB=0,\qquad A_v+\gamma B+aA=0.$$

La plus générale congruence conjuguée au réseau $x(u,v)$ est donc

$$p(u,v)=(x,\ Ax_u+Bx_v),$$

A, B *étant une solution du système linéaire* (43) ([1]).

Remarquons que les congruences conjuguées aux réseaux $x_1(u,v)$ transformés de Laplace de $x(u,v)$ dans le sens de u (et pareillement pour x_2) sont les congruences $p_2(u,v)$ transformées de Laplace de $p(u,v)$ dans le sens de v. En effet, la droite $p_2(u,v)$ contient le point $x_1(u,v)$ et sa transformée de Laplace dans le sens de u est simplement $p(u,v)$ qui contient le point $x(u,v)$ transformé de Laplace dans le sens de v de $x_1(u,v)$.

Supposons maintenant que le réseau $x(u,v)$ soit *asymptotique*. D'après le paragraphe **53**, on peut choisir le facteur de x de manière que $a=b=0$. Les équations (43) prennent la forme

$$B_u+\beta A=0,\qquad A_v+\gamma B=0.$$

En comparant avec les (20) du paragraphe **41**, on arrive au résultat suivant :

([1]) Pour que la congruence $p(u,v)$ ne soit pas dégénérée, il faut exclure les solutions de (43) pour lesquelles on ait

$$(\star)\qquad A_u+(\theta_u-2b)A=B_v+(\theta_v-2a)B.$$

Nous ne ferons pas ici l'étude de la question si les équations (43) et ($\star$) peuvent avoir une solution commune.

Soit S *une surface et* C *une congruence ayant* S *pour une nappe focale. Projetons simultanément* S *et* C *d'un point fixe* O *dans un plan fixe* P. *La projection asymptotique de* C ([1]) *est conjuguée au réseau projection des asymptotiques de* S *si la congruence* C *est* W *et dans ce cas seulement.*

La congruence C étant W, les asymptotiques de S et de la seconde surface focale S′ se correspondent. Désignons par $y(u, v)$ la projection des asymptotiques de S′. Comment s'obtient le point $y(u, v)$? D'après la propriété fondamentale des congruences dans l'espace, la droite $p(u, v)$ touche son enveloppe en y si l'on déplace x infiniment peu dans la direction conjuguée par rapport au réseau $x(u, v)$ à la direction de p. On a donc

$$\frac{1}{2}y = A x_u + B x_v + \nu x,$$

où ν s'obtient de l'équation (18′) en y remplaçant λ, μ, du, dv respectivement par A, B, — A, B. Ceci donne

$$\begin{aligned} 2AB\nu = &-(A_u + B_v)AB + A_v B^2 + B_u A^2 + \beta A^3 \\ &+ \gamma B^3 - (\theta_u - b)A^2 B - (\theta_v - a)AB^2. \end{aligned}$$

En y remplaçant A_v et B_u par leurs valeurs, on obtient

$$y(u, v) = 2(A x_u + B x_v) - (A_u + B_v + \theta_u A + \theta_v B)x.$$

On aurait pu calculer l'expression $y(u, v)$ d'une manière un peu différente. Évidemment les points $x(u, v)$, $y(u, v)$ coïncident avec

$$(p, p_u A + p_v B), \quad (p, p_u A - p_v B);$$

donc ces points divisent harmoniquement le couple des points (p, p_u), (p, p_v) (*cf.* Koenigs [6]).

Si le réseau $x(u, v)$ *est asymptotique, le réseau* $y(u, v)$ *est, lui aussi, conjugué à la congruence* $p(u, v)$ ([1]). En effet, $y(u, v)$ est la projection des asymptotiques de la surface S′, focale pour la congruence C, qui est W et dont la projection asymptotique est la congruence plane $p(u, v)$. *L'énoncé réciproque est aussi vrai*, mais nous omettrons ici la démonstration.

([1]) C'est naturellement la congruence plane qui s'obtient en projetant C *rapportée aux paramètres asymptotiques de la surface* S.

Les résultats qui précèdent permettent d'étendre les propositions sur les surfaces et congruences R_0 trouvées au paragraphe 10 aux surfaces et congruences R. On y arrive en supposant que le réseau $x(u, v)$ et la congruence $p(u, v)$ soient simultanément asymptotiques. Or nous avons vu que le réseau $y(u, v)$ est aussi conjugué à la congruence $p(u, v)$. Ce résultat admet son *corrélatif*, car les relations prescrites entre $x(u, v)$ et $p(u, v)$ sont toutes *symétriques*. Donc nous n'avons qu'à échanger $x(u, v)$ avec $p(u, v)$: le point $y(u, v)$ était le conjugué harmonique de $x(u, v)$ par rapport aux points (p, p_u), (p, p_v); la droite $q(u, v)$, qui lui correspondra par dualité, sera la conjuguée harmonique de $p(u, v)$ par rapport aux droites (x, x_u), (x, x_v), c'est-à-dire $q(u, v)$ est la tangente conjuguée

$$(x, \, \mathrm{A}x_u - \mathrm{B}x_v)$$

à la tangente $p(u, v)$ du réseau $x(u, v)$. Le réseau $y(u, v)$ était conjugué à la congruence $p(u, v)$; corrélativement, la congruence $q(u, v)$ est conjuguée au réseau asymptotique $x(u, v)$; c'est donc la projection d'une congruence W. Les deux tangentes conjuguées $p(u, v)$, $q(u, v)$ du réseau x sont donc les projections de deux tangentes conjuguées de la surface S, et toutes les deux congruences formées par ces tangentes sont W. Donc la surface S est une surface R (*voir* § 42). Donc : *Si* S *est une surface* R *et si* C *est une congruence* R *ayant* S *pour une surface focale, alors la projection des asymptotiques de* S *forme un réseau asymptotique* $x(u, v)$, *et la projection asymptotique de* C *forme une congruence asymptotique conjuguée au réseau* $x(u, v)$. *Et l'énoncé réciproque est aussi vrai.*

Donc *la projection des asymptotiques d'une surface* R *et la projection asymptotique d'une congruence* R *sont deux figures planes corrélatives.* C'est le même résultat que celui du paragraphe 60 relatif au cas R_0, et il conduit aux mêmes conséquences que *loc. cit.*

62. Les homographies locales d'une correspondance entre deux courbes planes. — Nous avons déjà, au paragraphe 55, commencé l'étude projective de la correspondance générale entre deux plans; en particulier, nous avons expliqué une notion importante, celle de

---

(1) En outre, on voit que le réseau $y(u, v)$ est alors lui aussi asymptotique.

caractéristiques. Au paragraphe 63, nous étudierons une autre notion importante de la théorie projective des correspondances entre deux plans, à savoir *l'homographie locale*. Mais il convient de commencer avec une correspondance entre deux courbes planes.

Considérons donc deux courbes planes en correspondance biunivoque : la courbe $x(t)$ du plan P et la courbe $y(t)$ du plan Q, les deux plans étant distincts ou non. Nous exclurons les points d'inflexion, de manière que

$$(x,\ x',\ x'') \neq 0, \qquad (y,\ y',\ y'') \neq 0.$$

Les points x, x', x'' sont donc linéairement indépendants, et chaque point du plan P en est une combinaison linéaire. En particulier nous avons une équation de la forme

$$x''' = a_0 x + a_1 x' + a_2 x''. \tag{44}$$

Pareillement

$$y''' = b_0 y + b_1 y' + b_2 y''. \tag{44'}$$

Or nous pouvons choisir les facteurs de coordonnées de manière qu'on ait

$$(x,\ dx,\ d^2x) = (y,\ dy,\ d^2 y), \tag{45}$$

la loi (45) étant intrinsèque. En particulier

$$(x,\ x',\ x'') = (y,\ y',\ y''),$$

d'où l'on déduit par différentiation

$$(x,\ x',\ x''') = (y,\ y',\ y''').$$

Or de l'équation (44) il résulte

$$(x,\ x',\ x''') = a_2(x,\ x',\ x''), \tag{46}$$

et l'équation analogue vaut pour y. Donc $a_2 = b_2$, ou bien

$$y''' = b_0 y + b_1 y' + a_2 y''. \tag{45''}$$

Appelons *première homographie locale* de la correspondance étudiée, l'homographie $H_1 = H_1(t)$ qui réalise un contact analytique du troisième ordre entre les deux courbes. Il doit donc exister une fonction $\rho(t)$ telle qu'on ait, pour la valeur considérée de t,

$$(47)\qquad H_1 x = \rho y,\qquad H_1 x' = (\rho y)',\qquad H_1 x'' = (\rho y)'',\qquad H_1 x''' = (\rho y)'''.$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer $\rho = 1$ (pour la valeur initiale de t, ce qui sera sous-entendu). Donc les trois premières équations (47) seront

$$(47')\qquad H_1 x = y,\qquad H_1 x' = y' + \rho' y,\qquad H_1 x'' = y'' + 2\rho' y' + \rho'' y.$$

La dernière équation (47) sera, d'après (45),

$$H_1 x''' = (b_0 + \rho''')y + (b_1 + 3\rho'')y' + (a_2 + 3\rho')y''.$$

D'autre part, les équations (44) et (47') donnent

$$H_1 x''' = (a_0 + a_1\rho' + a_2\rho'')y + (a_1 + 2a_2\rho')y' + a_2 y''.$$

En comparant les deux valeurs de $H_1 x'''$, on obtient

$$\rho' = 0,\qquad \rho'' = \frac{1}{3}(a_1 - b_1)$$

et une autre équation qui détermine ρ'''. La première homographie locale $H_1(t)$ est donc complètement déterminée et l'on a pour elle

$$(48)\qquad H_1 x = y,\qquad H_1 x' = y',\qquad H_1\left(x'' - \frac{1}{3}a_1 x\right) = y'' - \frac{1}{3}b_1 y.$$

Les équations (48) supposent le choix des facteurs des coordonnées fait selon la condition (45). Mais on voit immédiatement qu'il suffit de supposer vérifiée la condition un peu plus générale

$$\frac{(y,\, y',\, y'')}{(x,\, x',\, x'')} = \text{const.}$$

D'après (46) et l'équation analogue pour y, cette condition peut s'écrire

$$(45')\qquad a_2 = b_2.$$

A la *seconde homographie locale* $H_2 = H_2(t)$ on arrive par la considération *corrélative*. Posons

$$\xi = (x,\, x'),\qquad \eta = (y,\, y').$$

Alors

$$(\star)\quad \xi' = (x, x''),\quad \xi'' = (x, x''') + (x', x'') = a_1(x, x') + a_2(x, x'') + (x', x'')$$
$$= a_1\xi + a_2\xi' + (x', x''),$$

de manière que

$$\xi''' = a'_1\,\xi + (a'_2 + a_1)\xi' + a_2\xi'' + (x', x''')$$
$$= a'_1\,\xi + (a'_2 + a_1)\xi' + a_2\xi'' - a_0(x, x') + a_2(x', x'')$$

et enfin

$$\xi''' = (a'_1 - a_1a_2 - a_0)\xi + (a'_2 + a_1 - a_2^2)\xi' + 2a_2\xi'';$$

pareillement on obtient, sous la supposition (45′),

$$\eta''' = (b'_1 - b_1a_2 - b_0)\eta + (a'_2 + b_1 - a_2^2)\eta' + 2a_2\eta''.$$

La condition corrélative à (45′) est donc satisfaite d'elle-même et nous obtenons

$$H_2\xi = \eta,\qquad H_2\xi' = \eta',\qquad H_2\xi'' = \eta'' + \frac{1}{3}(a_1 - b_1)\eta.$$

Cela peut s'écrire, en vertu de $(\star)$,

$$H_2(x, x') = (y, y'),\qquad H_2(x, x'') = (y, y''),$$
$$H_2\left[(x', x'') + \frac{2a_1}{3}(x, x')\right] = (y', y'') + \frac{2b_1}{3}(y, y').$$

On voit sans difficulté que ces équations reviennent aux suivantes :

$$(48')\qquad H_2x = y,\qquad H_2x' = y',\qquad H_2\left(x'' - \frac{2}{3}a_1x\right) = y'' - \frac{2}{3}b_1y.$$

En général, les deux homographies locales sont distinctes. Cependant, *il existe, pour chaque couple de courbes planes données,* ∞^3 *correspondances entre elles jouissant de la propriété que*

$$H_1(t) = H_2(t).$$

Toutes les correspondances avec cette propriété formant évidemment un *groupe*, on peut supposer que la courbe $y(t)$ soit une *conique*. On a alors, en choisissant convenablement le paramètre t, $y''' = 0$, c'est-à-dire $b_0 = b_1 = b_2 = 0$. Pour qu'il soit $H_1(t) = H_2(t)$, il faut et il suffit donc, d'après (48) et (48′), de choisir le paramètre t de manière qu'on ait, pour un choix convenable du facteur de x,

$$x''' = a_0x.$$

Or on démontre [1] que cela est possible pour chaque courbe plane en ∞^3 manières.

Les correspondances spéciales entre une courbe plane générale et une conique que nous venons de considérer peuvent être appliquées à transporter des notions projectives (par exemple celle du rapport anharmonique) du cas particulier d'une conique au cas d'une courbe plane quelconque. Mais nous nous bornerons à cette courte indication.

63. L'homographie locale d'une correspondance entre deux plans. — Considérons maintenant une correspondance entre deux plans $x(u, v)$, $y(u, v)$. Comme au paragraphe 55, nous choisirons les facteurs des coordonnées d'après la condition

$$(x,\ x_u,\ x_v) = (y,\ y_u,\ y_v). \tag{11}$$

Cela étant, nous appellerons l'*homographie locale* de la correspondance donnée l'homographie $H = H(u, v)$ pour laquelle

$$Hx = y, \qquad Hx_u = y_u, \qquad Hx_v = y_v.$$

Cette définition est, on le voit sans peine, intrinsèque et invariante par rapport au groupe de collinéations. Du reste, cela résulte aussi de la définition géométrique de H que nous donnerons tout de suite.

On peut donner aisément une définition géométrique de l'homographie $H(u, v)$. A ce but, considérons les courbes définies par l'équation différentielle

$$(y,\ dy,\ d^2y) = c(x,\ dx,\ d^2x), \tag{$\star$}$$

c étant une constante. Le lecteur définira sans peine les courbes ($\star$) par une propriété géométrique [*voir* (13)]. Or soit $x(t)$ une courbe du premier plan satisfaisant à l'équation différentielle ($\star$), et soit $y(t)$ la courbe correspondante du second plan. A la correspondance donnée entre les plans est subordonnée une correspondance entre les courbes $x(t)$ et $y(t)$; soient H_1, H_2 sa première et seconde homographie locale. Or des résultats du paragraphe 62 on déduit tout de suite que l'homographie H transforme chaque point de la tangente en x à $x(t)$ de la même manière que les deux homographies H_1 et H_2.

[1] *Voir* le Traité de M. Wilczynski, Chap. II, § 4.

Il faut naturellement supposer que les courbes $x(t)$, $y(t)$ n'aient pas une inflexion au point considéré. Ce qui précède suffit bien à caractériser géométriquement l'homographie H. Remarquons que parmi les courbes ($\star$), on a (pour $c = 1$) les *caractéristiques* de la correspondance. Dans des cas particuliers, on peut dire plus. Par exemple, si $x(t)$ est une caractéristique *double*, l'homographie H coïncide, à chaque point de $x(t)$, avec l'homographie H_2. Et si $x(t)$ est une caractéristique *triple*, alors, à chaque point de $x(t)$, toutes les trois homographies H, H_1, H_2 sont confondues. Nous nous bornons à énoncer ces résultats.

En faisant varier les paramètres u, v, on reconnaît que l'homographie H dépend en général de deux paramètres. Elle est *fixe* si la correspondance donnée est homographique et seulement dans ce cas. Mais il se peut que H dépende d'*un* seul paramètre. On peut démontrer que cela arrive lorsque, et seulement lorsque les caractéristiques de la correspondance sont *triples* et *rectilignes*. On peut construire explicitement toutes ces correspondances.

La notion d'homographie locale $H(u, v)$ permet de définir une classe de correspondances entre deux réseaux plans; cette classe semble tout aussi importante que la déformation projective. On peut la définir en demandant que *l'homographie locale porte les transformés de Laplace $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$ du réseau $x(u, v)$ dans les transformés de Laplace $y_1(u, v)$, $y_2(u, v)$ du réseau $y(u, v)$*; nous parlerons donc d'une *correspondance laplacienne* entre les deux réseaux. Faisons usage des notations habituelles pour le réseau $x(u, v)$ et écrivons a', b', β', γ', etc. pour le réseau $y(u, v)$ [on a $\theta' = \theta$ en vertu de (11)].

Les conditions pour une correspondance laplacienne sont donc, d'après (2) et (2'),

$$a' = a, \qquad b' = b. \tag{49}$$

D'après (14'), (49) est la condition pour que *les trois directions caractéristiques de la correspondance soient apolaires aux deux directions du réseau*. Une correspondance à trois familles distinctes de caractéristiques est donc laplacienne pour *un* seul couple de réseaux correspondants. S'il existe une famille *double* de caractéristiques, la correspondance n'est jamais laplacienne. S'il existe une famille *triple* de caractéristiques, la correspondance est laplacienne pour chaque réseau dont une famille se compose de caractéristiques. Enfin, une correspondance homographique est naturellement laplacienne pour chaque réseau.

Nous terminons par la remarque suivante, dont nous omettons la démonstration. On peut attacher à chaque réseau plan, d'une manière intrinsèque et invariante par rapport au groupe des collinéations, une *métrique de Weyl* pour laquelle les courbes du réseau sont minima; cette métrique est de Riemann (seulement) dans le cas d'un réseau *asymptotique*. La condition nécessaire et suffisante pour une correspondance laplacienne est alors l'invariance de la métrique de Weyl. En particulier, une correspondance laplacienne porte un réseau asymptotique en un réseau asymptotique, ce qui est d'ailleurs évident des équations (49) [*voir* (6)].

La théorie générale des réseaux appartenant à un espace quelconque est trop étendue pour que nous puissions ici citer les Mémoires et Notes relatives; nous renvoyons simplement aux Traités de MM. Tzitzéica et Eisenhardt. Le cas particulier des réseaux *plans* est ici pour la première fois l'objet d'une étude détaillée. Nous pouvons citer seulement deux Mémoires consacrés à la théorie générale des réseaux plans, à savoir Wilczynski [21] et Sannia [5]. Presque tous les théorèmes de ce Chapitre sont nouveaux (Čech); quelques-uns ont été déjà publiés sans démonstration (Čech [27], [28)]. Pour la notion de forme associée à un réseau ou à une congruence, *voir* Fubini (*G. P. D.*, § 17 A et [36], [39]), Terracini [19], Bompiani [36], [37], [40], [44]. La condition analytique (6) pour un réseau asymptotique est due à M. Koenigs [7]; *voir* aussi Eisenhardt [8], [9], Nelson [1], [2], Bompiani [13]. Des propriétés géométriques caractéristiques d'un réseau asymptotique, différentes de celle exposée au texte, ont été données par M. Koenigs [7] (*voir* Bompiani [11], Liebmann [1] et le Traité de M. Tzitzéica) et par Green [9], [11]. L'interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif d'un réseau plan exposée au paragraphe 54 est en relation étroite avec celle donnée par M. B. Segre [2] dans le cas d'une surface. Les caractéristiques d'une correspondance entre deux plans ont été étudiées par M. Borůvka [2], [3], [4]; *voir* déjà Kasner [1]. Pour le sujet traité au paragraphe 58, *voir* Čech [29]. Le théorème du paragraphe 61 relatif à la projection plane d'une congruence W a été donné sous une forme un peu différente par M. Eisenhardt [12]. La réciprocité entre les surfaces R et les congruences R a été reconnue par M. Demoulin [6] et étudiée de plus près par M. Jonas [4], mais sous une forme beaucoup plus compliquée de celle du texte.