Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

Chapitre V: Les lignes de Clebsch, Darboux et Segre, l'élément linéaire projectif et la forme f_2

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. (French). Paris: Gauthier-Villars & Cie, 1931. pp. [51]--77.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402562

CHAPITRE V.

LES LIGNES DE CLEBSCH, DARBOUX ET SEGRE, L'ÉLÉMENT LINÉAIRE PROJECTIF ET LA FORME F_3.

18. Quadriques, tangentes, lignes de Darboux. — Considérons de nouveau le développement

$$(1) \qquad z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + (3)$$

de l'équation d'une surface S, qui a été pour nous le point de départ dans le Chapitre IV; mais ici supposons que les x, y, z soient les coordonnées rectangulaires de la *géométrie métrique*. L'origine O est un point de S; le développement (1) est valable dans le voisinage de O.

Les sphères tangentes en O à S auront une équation

$$\frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 + z^2) - z = 0 \qquad (\lambda = \text{const.}),$$

et leur intersection avec S aura en O un point double, dont les tangentes ont les équations

$$z = 0, \qquad (\lambda - a)x^2 + (\lambda - c)y^2 = 2bxy.$$

Elles *coïncident seulement* si

$$(\lambda - a)(\lambda - c) - b^2 = 0.$$

Cette équation détermine deux valeurs de λ (en excluant le cas exceptionnel $a - c = b = 0$; dans ces cas, les deux valeurs de λ coïncident). Les deux sphères correspondantes sont *les sphères de courbure*, leurs rayons sont *les rayons de courbure;* les tangentes à leurs intersections avec S sont *les tangentes de courbure;* ces tangentes sont les deux droites définies par les équations

$$z = 0, \qquad by^2 + (a - c)xy - bx^2 = 0.$$

On en déduit que les directions de courbure sont *orthogonales*. Et en remarquant que $by^2+(a-c)xy-bx^2$ est *apolaire* à $ax^2+2bxy+cy^2$, on en déduit qu'elles sont aussi *conjuguées*. Si l'on choisit comme axes des x, y les tangentes de courbure, dans le développement on aura $b=0$. Une ligne de la surface, qui a pour tangente en chacun de ses points une tangente de courbure, est *une ligne de courbure*.

Nous voulons généraliser ces considérations à la géométrie projective. De la remarque que les homographies ne conservent pas les sphères, nous déduirons que nous ne pourrons pas parler de sphères dans la géométrie projective et que nous devrons considérer les quadriques les plus générales. Nous pourrions considérer les quadriques Q tangentes en O à S, c'est-à-dire les quadriques, dont l'intersection avec S a un point double en O. Mais cette considération laisse trop d'arbitraire aux quadriques Q. Et nous nous bornerons par conséquent à la considération des quadriques Q dont l'intersection avec S a un *point triple* en O. Si les droites $z=x=0$ et $z=y=0$ sont les tangentes asymptotiques, les coefficients a, c de (1) seront nuls; et, en écrivant aussi les termes de troisième ordre, nous aurons au voisinage de O :

$$(2)\qquad z=bxy+\frac{1}{6}(px^3+3qx^2y+3rxy^2+sy^3)+(4),$$

où (4) est une expression au moins du quatrième ordre en x, y. Les quadriques, dont nous avons parlé, auront une équation

$$(3)\qquad z-bxy+z(\lambda x+\mu y+\nu z)=0\qquad(\lambda,\ \mu,\ \nu=\text{const.})$$

et les trois tangentes en O à leur intersection avec S seront définies par les équations

$$(4)\qquad z=0,\qquad px^3+3qx^2y+3rxy^2+sy^3+6b(\lambda x+\mu y)xy=0.$$

Nous généraliserons la théorie des sphères de courbure en nous demandant si ces trois droites peuvent coïncider. Cela arrive évidemment seulement si

$$q+2b\lambda=(\sqrt[3]{p})^2\sqrt[3]{s},\qquad r+2b\mu=\sqrt[3]{p}(\sqrt[3]{s})^2;$$

et alors les trois tangentes coïncident avec la droite

$$(5)\qquad z=0,\qquad \sqrt[3]{p}\,x+\sqrt[3]{q}\,y=0.$$

En remarquant que $\sqrt[3]{p:q}$ a trois valeurs possibles, nous aurons défini par cette méthode *trois droites* (5) : *les tangentes de Darboux*. Elles sont définies par les équations

$$(5_1) \qquad z = 0, \qquad px^3 + sy^3 = 0.$$

Remarquons que la forme $px^3 + xy^3$, qui, égalée à zéro, définit les tangentes de Darboux, est *apolaire* à la forme xy, qui, égalée à zéro, définit les asymptotiques.

Nous avons *exclu ici que* $ps = 0$; nous nous occuperons plus loin de ce cas. Une ligne de la surface, dont toutes les tangentes sont pour la surface des tangentes de Darboux relatives au point de contact, seront appelées *lignes de Darboux* (*voir* Darboux [1]).

Pour les surfaces algébriques S, ces tangentes auraient été découvertes par Clebsch [1] (*voir* Colombo [1]) qui les avait définies par la méthode suivante. Considérons la surface cubique polaire de O par rapport à S; son intersection avec le plan $z = 0$ tangent en O à S est une cubique plane avec trois points d'inflexion. Les trois droites joignant O avec un de ces points sont les tangentes de Darboux.

Nous ne poursuivons pas maintenant l'analogie avec la géométrie métrique; nous n'appellerons pas « quadriques de Darboux » celles dont l'intersection avec S a en O un point triple à tangentes coïncidantes. Nous réservons le nom de *quadriques de Darboux en* O *aux quadriques dont l'intersection avec* S *a un point triple en* O, *dont les trois tangentes sont les trois droites* (5) *de Darboux*. En comparant les équations (4) et (5_1) nous voyons que pour une quadrique de Darboux

$$(6) \qquad q + 2b\lambda = 0, \qquad r + 2b\mu = 0.$$

Le paramètre ν reste arbitraire; *les quadriques de Darboux forment par conséquent un faisceau, à qui appartient le plan tangent* $z = 0$ (pour $\nu = \infty$) *pensé comme double*.

Considérons maintenant la polarité définie par une quadrique de Darboux. En faisant usage de coordonnées homogènes x, y, z, t, au point x', y', z', t' correspond le plan polaire

$$0 = zt' + z't + b(x'y + xy') + \lambda(zx' + z'x) + \mu(zy' + z'y) + 2\nu zz'.$$

où les λ, μ ont les valeurs (6). Pour un point A du plan tangent ($z' = 0$) le plan polaire α est indépendant de la valeur du paramètre ν;

il est par conséquent complètement déterminé. Dans cette polarité à chaque droite du plan tangent $z=0$ correspond une droite polaire sortant de O.

La droite polaire de la droite $z=t=0$ est la droite intersection des plans

$$by+\lambda z=0, \qquad bx+\mu z=0.$$

Par conséquent, si nous *choisissons comme plan* $t=0$ *un plan passant par la polaire de la droite* $x=y=0$, nous aurons $\lambda=\mu=0$; et d'après, (6), aussi $q=r=0$, de manière que le développement (2) se réduise à

$$(2_1) \qquad z=bxy+\frac{1}{6}(px^3+sy^3)+(4).$$

Nous avons ici exclu le cas $ps=0$. Si p et s sont toutes les deux nulles, alors les tangentes de Darboux sont *indéterminées. Si au contraire seulement un des coefficients* p, s *est nul, si par exemple* $p=0$, $s\neq 0$, *les tangentes de Darboux coïncident toutes les trois avec une tangente asymptotique* ($z=y=0$). Même dans ces cas on peut obtenir le développement (2_1) avec $ps=0$.

Les tangentes définies par $px^3-qy^3=0$, $z=0$, qui sont conjuguées aux tangentes de Darboux, ont été étudiées par C. Segre (6); nous les appellerons les « tangentes de Segre »; et nous appellerons *lignes de Segre* les lignes de la surface, dont toutes les tangentes sont des tangentes de Segre pour la surface.

19. Nouvelles formes des équations des lignes de Darboux. — Commençons par des considérations corrélatives aux précédentes. Soit A un point (x, y, z, $t=1$) de la surface S. Le plan tangent en A à S aura les coordonnées

$$\begin{aligned}
\xi &= -\left[by+\frac{1}{2}(px^2+2qxy+ry^2)+(3)\right],\\
\eta &= -\left[bx+\frac{1}{2}(qx^2+2rxy+sy^2)+(3)\right],\\
\zeta &= 1,\\
\tau &= bxy+\frac{1}{3}(px^3+3qx^2y+3rxy^2+sy^3)+(4).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$(7) \qquad \tau=\frac{1}{b}\xi\eta+\frac{1}{6b^3}(p\eta^3+3q\eta^2\xi+3r\eta\xi^2+s\xi^3)+\dots,$$

qui est le développement corrélatif du développement (2). Par des considérations corrélatives aux précédentes, nous serons conduits aux droites définies par les

$$\tau = 0, \qquad p\eta^3 + s\xi^3 = 0,$$

qui, en coordonnées de points, ont les équations

$$z = 0, \qquad px^3 - sy^3 = 0;$$

les droites précédentes sont par conséquent les *tangentes de Segre*. Le développement corrélatif du développement (2) est

$$(7_1) \qquad \tau = \frac{1}{b}\xi\eta + \frac{1}{6b^3}(p\eta^3 + s\xi^3) + (4).$$

Revenons maintenant aux développements du paragraphe 18. Soient $x = z = 0$ la tangente à l'asymptotique $v =$ const., et $y = z = 0$ la tangente à la $u =$ const.

On aura par conséquent en O

$$x = y = z = 0, \qquad x_v = y_u = 0.$$

D'après (2) on aura aussi (en O)

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = 0, \qquad z_v = 0.$$

Les équations fondamentales (I) nous donneront (en O)

$$x_{vv} = \gamma x_u, \qquad y_{uu} = \beta y_v, \qquad z_{uu} = z_{vv} = 0,$$
$$z_{uuu} = \beta z_{uv}, \qquad z_{vvv} = \gamma z_{uv}.$$

Mais, d'après (2), on a (en O)

$$z_{uv} = b x_u y_v,$$
$$z_{uuu} = 3b x_u y_{uu} + p x_u^3 = 3b\beta x_u y_v + p x_u^3,$$
$$z_{vvv} = 3b x_{vv} y_v + s y_v^3 = 3b\gamma x_u y_v + s y_v^3.$$

En comparant avec les valeurs déjà obtenues, on déduit

$$(8) \qquad p x_u^3 = -2b\beta x_u y_v, \qquad s y_v^3 = -2b\gamma x_u y_v \quad \text{(en O)}.$$

On peut faire un calcul tout à fait analogue pour z_{uuv} et z_{uvv}; on trouve que

$$(8_1) \qquad 2b y_{uv} + q x_u y_v = 2b x_{uv} + r x_u y_v = 0.$$

de la (8_1) on déduit : *dans le cas du développement* (2_1) $(q = r = 0)$ *on a en* O :

$$(8_2) \qquad x_{uv} = y_{uv} = 0 \qquad (\text{si } q = r = 0).$$

Voilà une nouvelle interprétation des coordonnées, pour lesquelles le développement (2_1) est valable. Des équations (8) on déduit en O (où $x_v = y_u = 0$)

$$p\,dx^3 + s\,dy^3 = p\,x_u^3\,du^3 + s\,y_v^3\,dv^3 = -2b\,x_u\,y_v(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3).$$

Les directions de Darboux sont par conséquent définies en coordonnées curvilignes asymptotiques par l'équation

$$(9) \qquad \beta\,du^3 + \gamma\,dv^3 = 0.$$

Et ce résultat, qui est évidemment valable pour tout point de la surface, nous donne la signification géométrique du rapport $\beta : \gamma$.

20. Le théorème de Kloboučk et Bompiani et une nouvelle génération des quadriques de Darboux. Quelques quadriques remarquables. — Soient encore u, v des coordonnées asymptotiques. Soit O un point de la surface S; nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que $u = v = 0$ (en O). Nous indiquerons par γ la valeur de γ en O. Une courbe C de la surface S, sortant de O et tangente en O à l'asymptotique $u = 0$, aura une équation

$$(10) \qquad u = -\frac{h}{2}\gamma v^2 \quad (3) \qquad (h = \text{const.}),$$

où (3) représente des termes au moins de troisième ordre en O. Des formules du paragraphe 17 on peut déduire que si l'on change les paramètres asymptotiques, *la valeur de h ne change pas*; ce qui résulte aussi des considérations suivantes. Le plan osculateur en O $(u = v = 0)$ à C est le plan passant par les points

$$x, \qquad \frac{dx}{dv} = x_v + x_u\frac{du}{dv} = x_v,$$

$$\frac{d^2x}{dv^2} = x_u\frac{d^2u}{dv^2} + x_{uu}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2x_{uv}\frac{du}{dv} + x_{vv} = x_{vv} - h\gamma x_u$$
$$= \theta_v x_v + (1-h)\gamma x_u + p_{22}x.$$

(Ici on suppose que les x soient les coordonnées homogènes les plus générales.)

Ce plan est par conséquent le plan (x, x_u, x_v) tangent à S, et osculateur par exemple à l'asymptotique $u = 0$. Il est indéterminé seulement si $(1 - h)\gamma = 0$. Si $\gamma = 0$, de la $x_{vv} = \theta_v x_v + p_{22} x$ on déduit que l'asymptotique $u = 0$ a en O un point d'inflexion et que son plan osculateur en O est lui-même indéterminé. Nous négligeons ici ce cas. Si $h = 1$, *la courbe* C *a en* O *un point d'inflexion*, et naturellement son plan osculateur est indéterminé. On peut aussi calculer en O (pour $u = v = 0$), la dérivée troisième des x. On trouve

$$\frac{d^3 x}{dv^3} = \lambda x_u \quad \mu x_v + \nu x \quad \gamma(1 - 3h) x_{uv},$$

où les valeurs de λ, μ, ν ne nous intéressent pas. On en déduit :

Si $3h = 1$, *les points* $x, \frac{dx}{dv}, \frac{d^2x}{dv^2}, \frac{d^3x}{dv^3}$ *sont sur un même plan; c'est-à-dire le plan osculateur à* C *en* O *est stationnaire.*

Étudions maintenant le cas général. En remarquant que la courbe C et l'asymptotique tangente $u = 0$ ont en O le même plan osculateur, et que le point

$$\frac{d^2 x}{dv^2} - j \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \theta_v (1 - j) x_v + (1 - h - j)\gamma x_u \quad p_{22}(1 - j) x_u$$

appartient à leur tangente (x, x_v) en O seulement si $1 - h = j$, *on trouve* (§ 7 et 10) *que* $1 - h$ *est l'invariant de contact de la courbe* C *et de l'asymptotique tangente* $u = 0$. Voilà la signification géométrique de h; on peut en déduire, comme nous avons déjà dit, que *sa valeur ne change pas, en changeant les paramètres des asymptotiques.*

Une digression. — Soit Γ une courbe de la surface S. Considérons les tangentes aux asymptotiques $u =$ const. qui sortent des points de Γ. Elles forment une surface réglée R_u, qui contient la courbe Γ. Par la même méthode, en considérant les tangentes aux asymptotiques $v =$ const., qui sortent des points de Γ, nous obtiendrons une autre surface réglée R_v. Ces deux surfaces seront *les surfaces réglées asymptotiques* définies par Γ. Soient O un point de Γ, et r la génératrice par exemple de R_v sortant de O. Nous pourrons considérer la quadrique Q_v^0 osculatrice à R_v le long de r. Elle est la quadrique, qui passe par r et par les génératrices r' r'' de R_v infiniment voisines à r, c'est-à-dire par les tangentes aux asymptotiques $v =$ const., qui sortent de O et des points O', O'' infiniment voisins à O sur la courbe Γ. Sur Q_v^0 nous avons deux systèmes de génératrices : le système, auquel appartiennent r, r', r'', et le système des droites s, qui rencontrent r, r', r''. La surface R_v a deux systèmes d'asymptotiques : le premier est formé par ses génératrices r; le second est défini par la propriété qu'une droite tangente à une asymptotique du second système a avec R_v une intersection triple (§ 12), c'est-à-dire rencontre trois génératrices infiniment voisines de R_v. *Les tangentes aux asymptotiques du second système*, qui sortent d'un point de r sont par conséquent les droites qui rencontrent r, r', r'', c'est-à-dire *elles sont les génératrices s de la quadrique* Q_v^0.

On peut en conséquence définir Q_v^0 *comme la surface engendrée par les tangentes aux asymptotiques de* R_v (du second système) *qui sortent d'un point de r*. De la même manière on peut définir une quadrique Q_u^0 (en partant de la surface R_u). *Chaque point* O *d'une ligne* Γ *tracée sur une surface* S *définit deux quadriques* Q_u^0, Q_v^0, *que nous appellerons les quadriques asymptotiques osculatrices à* Γ *en* O. Soient $u = u(w)$, $v = v(w)$ les équations paramétriques de Γ. La surface R_v est le lieu des points $\overline{x} = x_u + \lambda x$, où λ est un nouveau paramètre, et les u, v sont les fonctions précédentes du paramètre w. Les w, λ peuvent être considérées comme les coordonnées curvilignes sur R_v. L'équation des asymptotiques de R_v sera :

$$(\overline{x}, \overline{x}_w, \overline{x}_\lambda, d^2\overline{x}) = 0;$$

en la développant on trouve

$$(x_u + \lambda x,\ x_{uu}u' + x_{uv}v' + \lambda x_u u' + \lambda x_v v',\ x,\ d^2\overline{x}) = 0$$
$$\left(u' = \frac{du}{dw},\ u'' = \frac{d^2u}{dw^2},\ \dots\right),$$

c'est-à-dire

$$0 = \left[x,\ x_u,\ x_v(\beta u' + \lambda v') + x_{uv}v',\ 2x_v v'\, d\lambda + \left(\lambda\frac{d^2x}{dw^2} + \frac{d^2x_u}{dw^2}\right)dw\right]dw.$$

En annulant le facteur dw, on trouve les génératrices $w =$ const. de R_v, c'est-à-dire les droites $(x, \overline{x}_u)$. En annulant l'autre facteur, on trouve une équation (de Riccati) du type

$$\frac{d\lambda}{dw} = A\lambda^2 + B\lambda + C,$$

qui définit l'autre système d'asymptotiques de la surface R_v. Supposons qu'en O le paramètre w soit nul. La quadrique Q_v sera le lieu des points

$$x' = \bar{x} + \mu\left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial w} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \lambda}(A\lambda^2 + B\lambda + C)\right],$$

où $u = u(w)$, $v = v(w)$, $w = 0$, et μ est un nouveau paramètre. Remarquons que

$$x' = x_u + \lambda x + \mu[(x_{uu} + \lambda x_u)u' + (x_{uv} + \lambda x_v)v' + x(A\lambda^2 + B\lambda + C)].$$

Les quadriques de Darboux. — Supposons maintenant que la courbe Γ soit la courbe C définie par la (10). Posons $v = w$, de manière que $v' = 1$, $v'' = 0$. Dans le point O on aura aussi

$$u = v = w = 0, \qquad u' = 0, \qquad u'' = -h\gamma.$$

On trouve par la méthode précédente (en se rappelant les équations fondamentales I et I_1 du paragraphe 17) que la quadrique Q_v est le lieu des points

$$(11) \qquad x_u + \lambda x + \mu\left[(x_{uv} + \lambda x_v) + x\left(\frac{h-1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\theta_{uv}\right)\right]$$
$$= x\left[\lambda + \mu\left(\frac{h-1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}\theta_{uv}\right)\right] + x_u + \lambda\mu x_v + \mu x_{uv}.$$

Dans le cas du développement (2_1) on a en O

$$x = y = z = x_v = y_u = z_u = z_v = x_{uv} = y_{uv} = t_u = t_v = t_{uv} = 0,$$
$$t = 1, \qquad z_{uv} = b x_u y_v.$$

La quadrique Q_v sera le lieu des points de coordonnées

$$x' = x_u, \qquad y' = \lambda\mu y_v, \qquad z' = \mu b x_u y_v,$$
$$t' = \lambda + \mu\left(\frac{h-1}{2}\beta\gamma - \frac{\theta_{uv}}{2}\right),$$

et aura par conséquent l'équation

$$(11_1) \qquad 2(z't' - bx'y') + \frac{\theta_{uv} + (1-h)\beta\gamma}{b x_u y_v} z'^2 = 0$$

(θ_{uv}, β, γ, x_u, y_v sont les valeurs de ces quantités en O). On peut poser $t' = 1$, si l'on fait usage de coordonnées non homogènes. Nous avons obtenu le résultat :

La quadrique Q_v osculatrice d'une courbe $2u = -h\gamma v^2 + (3)$ tangente en $O(u = v = 0)$ à l'asymptotique $u = 0$ sortant de O a l'équation (11) *et est par conséquent une quadrique de Darboux.*

En remarquant que l'équation (11) ne change pas, si l'on échange β, u, x avec γ, v, y, on trouve :

La quadrique Q_u osculatrice à une courbe O tangente à la $v = 0$ et définie par la $2v = -h\beta u^2 + (3)$ [où (3) représente des termes au moins du troisième ordre en u] *coïncide avec la quadrique précédente. Chaque quadrique de Darboux peut par conséquent être engendrée par deux méthodes différentes, et est caractérisée par la valeur du paramètre h*, dont nous avons déjà donné la signification géométrique. Nous appellerons quelquefois h l'indice de la quadrique de Darboux. Quelques quadriques de Darboux sont particulièrement remarquables :

1° *La quadrique de Lie, qui correspond au cas où $h = 0$. Les courbes C et C' peuvent alors coïncider avec les asymptotiques $u = 0$ et $v = 0$.*

2° *La quadrique de Wilczynski et Bompiani* (¹) ($h = 1$) *qui correspond aux courbes ayant en O un point d'inflexion.*

3° *La quadrique de Fubini* ($3h = 1$) *qui correspond aux courbes ayant en O un plan osculateur stationnaire.*

4° *Le plan tangent double* ($h = \infty$).

On pourrait, si l'on veut, définir chacune des autres quadriques de Darboux en donnant le birapport avec trois des quatre quadriques précédentes.

Si nous écrivons les coordonnées d'un point de l'espace dans la forme

$$x' = x_0 x + x_1 x_u + x_2 x_v + x_3 x_{uv},$$

le point (11) sera défini par les

$$x_0 = \lambda + \mu \frac{(h-1)\beta\gamma - \theta_{uv}}{2},$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \lambda\mu, \qquad x_3 = \mu.$$

(¹) Bompiani [41] et [45]; M. Lane a remarqué que cette quadrique coïncide avec la *canonical quadric* de Wilczynski [15], p. 104-112.

et l'équation de la quadrique (11_1) engendrée par lui devient

$$2(x_0x_3 - x_1x_2) + [(1-h)\beta\gamma \quad \theta_{uv}]x_3^2 = 0. \tag{11_2}$$

Pour développer les considérations corrélatives, il suffira de considérer les coordonnées *non homogènes* ξ (§ 19) du plan tangent, pour lesquelles le développement (7_1) est valable, au lieu de considérer les coordonnées non homogènes x des points de la surface [satisfaisant à l'équation (2_1)]. Ces coordonnées ξ du plan tangent *ne sont pas les coordonnées correspondant* (selon nos définitions) aux coordonnées non homogènes x des points de la surface. Par la méthode du paragraphe 17, on trouve alors que, en partant des équations fondamentales pour les x, on obtient les équations fondamentales pour le ξ, en changeant β et γ en $-\beta$, $-\gamma$, en substituant à la fonction θ une *autre* fonction $\overline{\theta}$, et en substituant aux p_{ii} d'autres fonctions $\overline{\pi}_{ii}$ (qui ne sont pas données par les équations du paragraphe 17, lesquelles sont valables seulement dans le cas de coordonnées correspondantes). Pour obtenir la même quadrique de Darboux, on ne doit pas changer l'équation (10); et, en remarquant que β et γ ont changé leur signe, comme nous l'avons dit, on déduit que l'on doit changer le signe de h. On peut énoncer cette remarque de la manière suivante (Čech) : « *La quadrique de Darboux correspondant à une certaine valeur de* h *est corrélative à la quadrique de Darboux correspondant à* $-h$. La quadrique de Lie est corrélative à elle-même; les quadriques de Wilczynski-Bompiani et de Fubini sont corrélatives à deux autres quadriques de Darboux, qui ont par conséquent elles aussi une simple définition géométrique.

Remarque. — L'équation tangentielle de la quadrique (11_1) est

$$2\left(\tau'\zeta' - \frac{\xi'\eta'}{b}\right) - \frac{\theta_{uv} \quad (1-h)\beta\gamma}{b x_u y_v}\tau'^2 = 0. \tag{11_3}$$

L'équation que l'on obtient par les considérations corrélatives à celles qui nous ont conduit à l'équation (11_1) se déduit de cette dernière, en écrivant $\overline{\theta}$, $-\beta$, $-\gamma$, $-h$ au lieu de θ, β, γ, h et en substituant à b, x_u, y_v les $\frac{1}{b}$, $\eta_u = -bx_u$, $\zeta_v = -by_v$ (on le démontre tout de suite en considérant les premières équations du paragraphe 19).

L'équation corrélative de la (11) est par conséquent

$$2\left(\tau'\zeta' - \frac{\xi'\eta'}{b}\right) + \frac{\bar{\theta}_{uv} + (1-h)\beta\gamma}{b x_u y_v}\tau'^2 = 0.$$

En comparant les deux dernières équations, on trouve que

$$\theta_{uv} + \bar{\theta}_{uv} + 2\beta\gamma = 0.$$

Remarquons encore que la dernière équation, pour $h = \infty$, se réduit à $\tau' = 0$; la quadrique se réduit à l'étoile P, pensée comme double.

21. Quelques remarques sur les surfaces réglées et sur la polarité fondamentale. — Des équations (8) du paragraphe 19 on déduit que dans le point O les équations $\beta = 0$ et $p = 0$ sont équivalentes, et que la même chose arrive pour les $\gamma = 0$ et $q = 0$. Dans le paragraphe 18 nous avons remarqué que, si $p = q = 0$, *les lignes de Darboux sont indéterminées* et que, si une seule des p, q est nulle, *les trois directions de Darboux coïncident avec une tangence asymptotique*. Dans le premier cas on a $\beta = \gamma = 0$ et les équations fondamentales nous démontrent que chacune des asymptotiques sortant de O a en O *un point d'inflexion*; dans le second cas, cela arrive pour une seule des asymptotiques.

Si β est identiquement nul, alors l'équation fondamentale $x_{uu} = \theta_u x_u + p_{11} x$ démontre que les asymptotiques $v = \text{const.}$ sont des droites; si $\gamma = 0$ identiquement, cela arrive pour les $u = \text{const.}$; *dans ces deux cas, la surface est réglée. Si β et γ sont tous les deux identiquement nuls*, alors la surface sera doublement réglée, c'est-à-dire *elle sera une quadrique*.

Nous étudierons à part les surfaces réglées dans un prochain chapitre; et en général nous considérerons comme singuliers les points où $\beta\gamma = 0$ en les excluant de nos considérations.

Soient x et ξ des coordonnées homogènes *correspondantes* d'un point et d'un plan tangent à notre surface S. Soit O un point de S; par β, γ, x, x_u, ξ, ..., nous indiquerons les valeurs en O de ces mêmes quantités. Soient u, v des coordonnées asymptotiques. Si x' est un point quelconque de l'espace, nous pourrons déterminer les x_i de manière que

$$x' = x_0 x + x_1 x_u + x_2 x_v + x_3 x_{uv} \tag{12}$$

(en sous-entendant, comme d'ordinaire, les équations analogues pour

y', x', t'); de même pour un plan quelconque ξ' nous pourrons déterminer les ξ_i, de manière que

$$\xi' = \xi_0 \xi + \xi_1 \xi_u + \xi_2 x_v + \xi_3 \xi_{uv}. \tag{12_1}$$

Les x_i et les ξ_i seront appelées les *coordonnées locales* du point x' ou du plan ξ' (par rapport au point O de S). Elles ne sont pas *intrinsèques* (c'est-à-dire indépendantes du choix des paramètres asymptotiques) Si $\beta\gamma \neq 0$, nous pourrions leur substituer les

$$\left\{\begin{array}{llll} y_0 = x_0, & y_1 = \sqrt[3]{\beta a_{12}} x_1, & y_2 = \sqrt[3]{\gamma a_{12}} x_2, & y_3 = a_{12} x_3; \\ \eta_0 = \xi_0, & \eta_1 = \sqrt[3]{\beta a_{12}}\, \xi_1, & \eta_2 = \sqrt[3]{\gamma a_{12}} x_2, & \eta_3 = a_{12} x_3, \end{array}\right. \tag{12_2}$$

qui sont intrinsèques. Le plan ξ' passe par x' seulement si $S\xi' x' = 0$, c'est-à-dire, d'après les équations (11), (11_1), (11_2), (15_1) du Chapitre IV, si

$$(\xi_0 x_3 + \xi_3 x_0) - (\xi_1 x_2 + x_1 \xi_2) + \Omega a_{12} x_3 \xi_3 = 0$$
$$(a_{12}\Omega = \theta_{uv} + \beta\gamma).$$

L'équation du plan ξ', en coordonnées locales de point, est par conséquent

$$\bar{\xi}_0 x_0 + \bar{\xi}_1 x_1 + \bar{\xi}_2 x_2 + \bar{\xi}_3 x_3 = 0,$$

où

$$\bar{\xi}_0 = \xi_3, \qquad \bar{\xi}_1 = -\xi_2, \qquad \bar{\xi}_2 = -\xi_1, \qquad \bar{\xi}_3 = \xi_0 + \Omega a_{12} \xi_3.$$

La corrélation $\xi'_i = x_i$ fera correspondre au point de cordonnées locales x_i le plan

$$\sum_i \bar{\xi}_i x_i = 0,$$

où

$$\bar{\xi}_0 = x_3, \qquad \bar{\xi}_1 = -x_2, \qquad \bar{\xi}_2 = -x_1, \qquad \bar{\xi}_3 = x_0 + \Omega a_{12} x_3.$$

Elle est donc la polarité par rapport à la quadrique qui, en coordonnées locales de point, a l'équation

$$2(x_0 x_3 - x_1 x_2) + \Omega a_{12} x_3^2 = 0 \qquad \left(\Omega = \frac{\theta_{uv} + \beta\gamma}{a_{12}}\right). \tag{13}$$

De la définition de cette corrélation on déduit très facilement que :

1° Cette corrélation est *intrinsèque* (ne change pas si l'on change les paramètres des asymptotiques);

2° Elle ne change pas non plus si l'on multiplie les x et le ξ par un même facteur.

La quadrique (13) aura par conséquent les mêmes propriétés; elle est donc définie complètement par la surface S et le point O. Supposons maintenant que $t=1$, et que la surface S soit définie, au voisinage de O, par l'équation (21); les coordonnées locales d'un point x', y', z', t' de l'espace seront données par les

$$x_0=t', \quad x_1=x':x_u, \quad x_2=y':x_v, \quad x_3=z':bx_uy_v.$$

On le démontre, en se rappelant qu'en O on a

$$x_v=y_u=z_u=z_v=t_u=t_v=x_{uv}=y_{uv}=t_{uv}=0;$$
$$z_{uv}=bx_uy_v.$$

La (13) devient alors

$$2(z't'-bx'y')+\frac{\theta_{uv}-\beta\gamma}{bx_uy_v}z'^2=0,$$

qui est précisément l'équation (11), où l'on a posé $h=0$.

La polarité que nous avons définie est la polarité par rapport à la quadrique de Lie (13) (Čech [3]). Elle est la polarité *fondamentale*, qui, dans la théorie des surfaces, est la transformation correspondant à la corrélation fondamentale dans la théorie des courbes (Chap. II et III).

22. L'élément linéaire projectif. — Dans la géométrie métrique on définit l'élément linéaire (de Gauss) d'une surface; il est égal à la distance ds de deux points O, O′ infiniment voisins sur la surface (on appelle parfois élément linéaire le carré ds^2 de cette distance). Mais la distance n'est pas un élément projectif. Pour donner une définition analogue dans la géométrie projective, nous lui substituerons un birapport.

Considérons les deux tangentes asymptotiques sortant de O, et celles qui sortent de O′. Ces droites déterminent quatre points sur l'intersection des plans tangents en O, O′. Nous allons calculer leur birapport, en supposant O, O′ infiniment voisins. Comme précédemment, nous indiquerons par β, γ, x, ..., les valeurs en O de ces quantités. *Nous laissons ici aux coordonnées curvilignes u, v la plus grande généralité.*

Soient u, v les coordonnées de O, et $u+du$, $v+dv$ celles de O′. Les tangentes asymptotiques sortant de O sont (§ 16) $p\pm q$, celles sortant de O' sont les droites $p' \pm q'$, où

$$p = (x,\ dx), \qquad q = (\xi,\ d\xi),$$

$$\begin{aligned} p' &= p + dp + \frac{1}{2} d^2 p + \frac{1}{6} d^3 p + \ldots \\ &= (x,\ dx) + (x,\ d^2 x) + \frac{1}{2}[(x,\ d^3 x) + (dx,\ d^2 x)] \\ &\quad + \frac{1}{6}[(x,\ d^4 x) + 2(dx,\ d^3 x)] \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(en n'écrivant pas l'équation analogue pour q').

On en déduit (§ 2) :

$$\mathrm{S}pp' = 0 + \ldots,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{S}qp' &= \frac{1}{2}\mathrm{S}(\xi,\ d\xi)[(x,\ d^3 x) + (dx,\ d^2 x)] \\ &\quad + \frac{1}{6}\mathrm{S}(\xi,\ d\xi)[(x,\ d^4 x) + 2(dx,\ d^3 x)] + \ldots \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{S}\xi\, d^2 x \\ \mathrm{S}\, dx\, d\xi & \mathrm{S}\, d\xi\, d^2 x \end{vmatrix} + \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{S}\xi\, d^3 x \\ \mathrm{S}\, d\xi\, dx & \mathrm{S}\, d\xi\, d^3 x \end{vmatrix} + \ldots \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{S}\xi\, d^2 x)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{S}\xi\, d^2 x\, \mathrm{S}\xi\, d^3 x + \ldots \end{aligned}$$

On calcule par la même méthode $\mathrm{S}q'p$, $\mathrm{S}p'p$.

Une tangente $p' + \sigma_i q'$ ($i = 1, 2, \sigma_i = \pm 1$) sortant de O' rencontre la tangente $\lambda_1 p + \lambda_2 q$ sortant de O, si

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{S}(p' + \sigma_i q')(\lambda_1 p + \lambda_2 q) = \lambda_2 \mathrm{S}p'q + \sigma_i \lambda_1 \mathrm{S}pq' \\ &= \lambda_2 \left[\frac{1}{2}\mathrm{S}\xi\, d^2 x + \frac{1}{3}\mathrm{S}\xi\, d^3 x\right] \\ &\quad + \lambda_1 \sigma_i \left[\frac{1}{2}\mathrm{S}\xi\, d^2 x + \frac{1}{3}\mathrm{S}x\, d^3 \xi\right] + \ldots, \end{aligned}$$

qui définit (pour $\sigma_i = \pm 1$) deux valeurs de $\lambda_1 : \lambda_2$. Le birapport cherché est le birapport que les deux droites $p \pm q$ forment avec les deux droites $\lambda_1 p + \lambda_2 q$ déterminés ici. Il est donc égal à

$$\left(\frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{S}\xi\, d^3 x - \mathrm{S}x\, d^3 \xi}{2\mathrm{S}\, dx\, d\xi}\right)^2.$$

Par conséquent nous appellerons *élément linéaire projectif* de la surface la fraction

$$(14) \qquad \frac{\mathrm{S}\xi\, d^3 x - \mathrm{S}x\, d^3 \xi}{2\mathrm{S}\xi\, d^2 x} = \frac{\mathrm{S}\, dx\, d^2 \xi - \mathrm{S}\, d\xi\, d^2 x}{2\mathrm{S}\xi\, d^2 x}.$$

Dans le calcul précédent l'on a exclu que

$$S\xi\, d^2x = -S\, d\xi\, dx = Sx\, d^2\xi = 0,$$

c'est-à-dire l'on a supposé que O, O' ne soient pas sur la même asymptotique. La dernière égalité (14) est équivalente à celle que l'on obtient en différentiant la

$$S\xi\, d^2x - Sx\, d^2\xi = 0$$

(qui, à son tour, est une conséquence différentielle de l'identité $S\xi\, dx - Sx\, d\xi = 0$).

Nous avons déjà introduit dans la théorie la forme

$$F_2 = S\xi\, d^2x = -S\, d\xi\, dx = Sx\, d^2\xi.$$

On remarque maintenant qu'il sera utile d'introduire *une nouvelle forme*

$$(15) \qquad F_3 = \frac{1}{2}(S\xi\, d^3x - Sx\, d^3\xi) = \frac{1}{2}(S\, dx\, d^2\xi - S\, d\xi\, d^2x).$$

L'élément linéaire sera égal à $F_3 : F_2$. De l'interprétation géométrique précédente on déduit que *l'élément linéaire est intrinsèque* (indépendant du choix des coordonnées curvilignes u, v), *et ne change pas, en changeant les coordonnées homogènes* x, ξ. En se rappelant les propriétés de F_2, on pourra par conséquent énoncer le théorème. *La forme* F_3 (de même que la F_2) *est presque intrinsèque* (peut changer seulement de signe, si l'on change les u, v). *La forme* F_3 (de même que F_2) reste *multipliée par* σ^2, *si l'on multiplie les* x, ξ *par un facteur* σ.

Nous allons calculer F_3 dans le cas où u, v soient les coordonnées asymptotiques. On a

$$\begin{aligned} S\, d\xi\, d^2x = S\, d\xi[(\theta_u x_u + \beta x_v + p_{11}x)\, du^2 + 2x_{uv}\, du\, dv \\ + (\theta_v x_v + \gamma x_u + p_{22}x)\, dv^2 + x_u\, d^2u + x_v\, d^2v] \\ = -a_{12}(du\, d^2v + dv\, d^2u) - \beta a_{12}\, du^3 \\ - \theta_u a_{12}\, dv\, du^2 - \gamma a_{12}\, dv^3 - a_{12}\theta_v\, du\, d^2v. \end{aligned}$$

On trouve une identité analogue pour $S\, dx\, d^2\xi$ de manière que

$$(15_1) \qquad F_3 = \frac{1}{2}(S\, dx\, d^2\xi - S\, d\xi\, d^2x) = a_{12}(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3).$$

Nous savons déjà que

$$F_2 = 2a_{12}\,du\,dv.$$

En coordonnées asymptotiques, l'élément linéaire est par conséquent égal à

$$(14_1)\qquad \frac{F_3}{F_2} = \frac{a_{12}(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3)}{2a_{12}\,du\,dv} = \frac{\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3}{2\,du\,dv}.$$

L'élément linéaire projectif s'annule sur les lignes de Darboux, de manière que $F_3 = 0$ *est l'équation de ces lignes en coordonnées curvilignes quelconques* (on se rappelle que $F_2 = 0$ est l'équation générale des asymptotiques). *Une transformation homographique laisse l'élément* $F_3 : F_2$ *inaltéré* (de même que les mouvements ne changent pas l'élément linéaire de Gauss). Puisque, en échangeant les x avec les ξ, les β, γ restent changés de signe, on en déduit que les *corrélations changent le signe de l'élément linéaire projectif*. Nous déduirons encore de l'équation (15) que F_3 *est apolaire à* F_2.

23. **Les formes normales.** — Nous pouvons généraliser par une autre méthode l'élément linéaire de la géométrie métrique. Nous ferons ici usage de coordonnées u, v asymptotiques. Commençons par une remarque élémentaire.

Soient données quatre droites $r_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$. Projetons d'une droite ρ leurs intersections avec un plan α. Nous obtenons quatre plans : leur birapport dépend en général du choix que l'on a fait pour la droite ρ et le plan α. Si les quatre droites, à moins de quantités infiniment petites d'un certain ordre, appartiennent à un même faisceau, la partie principale de ce birapport sera indépendante de ρ et de α; et on l'appellera le *birapport des quatre droites*. Nous allons calculer *le birapport des tangentes aux asymptotiques* $u =$ const. et $v =$ const. *sortant d'un point* $O\,(u, v)$ *de* S, *de la tangente à l'asymptotique* $v =$ const. *sortant du point* $O'\,(u + du, v)$ et *de la tangente à l'asymptotique* $u =$ const. *sortant du point* $O''\,(u, v + dv)$. Il s'agit des droites

$$(x, x_u),\quad (x, x_v),$$

$$(x, x_u) + (x, x_{uu})\,du = (1 + \theta_u\,du)(x, x_u) + \beta(x, x_v)\,du,$$

$$(x, x_v) + (x, x_{vv})\,dv = (1 + \theta_v\,dv)(x, x_v) + \gamma(x, x_u)\,dv.$$

La partie principale de leur birapport

$$\frac{\beta\,du}{1+\theta_u\,du}:\frac{1+\theta_v\,dv}{\gamma\,dv}$$

est $\beta\gamma\,du\,dv$. *La forme*

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv \tag{16}$$

est par conséquent le double du birapport des quatre tangentes asymptotiques considérées.

Nous en déduirons que $2\beta\gamma\,du\,dv$ est *une forme intrinsèque* (indépendante du choix des paramètres asymptotiques) *et invariante* (qui ne change pas si l'on change les coordonnées homogènes x, ξ). D'après (14_1) *on trouve de plus qu'aussi les expressions*

$$\beta\frac{du^2}{dv},\qquad \gamma\frac{dv^2}{du} \tag{17}$$

$\left(\text{le produit desquelles est } \frac{1}{2}\varphi_2\right)$ *sont intrinsèques (et invariantes).*

Nous avions déjà énoncé dans la (15) du paragraphe 17 un résultat tout à fait équivalent à celui-ci. Considérons encore les équations fondamentales. Nous nous sommes occupés de la valeur de θ dans le paragraphe 17; dans les paragraphes 22 et 23, nous avons trouvé la signification des β, γ qui servent à calculer l'élément linéaire projectif et la forme φ_2. Les coefficients p_{11}, p_{22} sont moins importants pour le développement de la théorie (on peut les rendre nuls en faisant usage de coordonnées non homogènes). Nous nous bornerons ici à la remarque qu'on déduit des équations fondamentales

$$\begin{aligned} d^2x = {} & \frac{d^2u+\theta_u\,du^2+\gamma\,dv^2}{du}(x_u\,du)+\frac{d^2v+\theta_v\,dv^2+\beta\,du^2}{dv}(x_v\,dv)\\ & +2x_{uv}\,du\,dv+(p_{11}\,du^2+p_{22}\,dv^2). \end{aligned}$$

On peut en déduire non seulement la remarque que nous avons faite pour les expressions (17), mais encore le théorème que :

La forme $\mathrm{P} = p_{11}\,du^2+p_{22}\,dv^2$ (apolaire à F_2) *est intrinsèque*. Par la même méthode on démontre qu'aussi la forme $\Pi = \pi_{11}\,du^2+\pi_{22}\,dv^2$ est intrinsèque :

D'après (14_1) et (16) *on trouve que l'élément linéaire* $\mathrm{F}_3 : \mathrm{F}_2$ *est égal à* $\varphi_3 : \varphi_2$, *où* φ_2 *est définie par l'équation* (16) *et la forme* φ_3

est donnée par la

$$(16_1) \qquad \varphi_3 = \beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3).$$

Naturellement ce théorème perd toute signification dans le cas où $\beta\gamma = 0$, en particulier pour les surfaces réglées, dont nous parlerons dans un autre chapitre.

En remarquant que *l'élément linéaire et la forme φ_2 sont intrinsèques et invariants*, on déduit que *la forme φ_3 est elle-même intrinsèque et invariante.*

Nous trouvons donc dans la théorie projective des surfaces (non réglées) deux formes intrinsèques et invariantes : *les formes φ_2 et φ_3* [1]. A ces formes on peut arriver *par une méthode algébrique*, et l'on peut même les écrire *en coordonnées curvilignes u, v tout à fait générales*. Supposons d'abord les u, v asymptotiques.

Nous savons que les formes F_2, F_3 sont seulement presque intrinsèques (elles peuvent changer de signe en même temps); et nous savons aussi que, si l'on multiplie les x, ξ par un même facteur ρ, elles restent multipliées par ρ^2. On peut donc dire que, si l'on connaît des valeurs particulières

$$F_2 = 2a_{12}\, du\, dv,$$
$$F_3 = a_{12}(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)$$

de ces formes, leurs valeurs les plus générales seront σF_2, σF_3, où $\sigma(u, v) \neq 0$ est arbitraire. On en déduit que le rapport

$$\frac{(\sigma a_{12}\beta\, du^3)(\sigma a_{12}\gamma\, dv^3)}{(\sigma a_{12}\, du\, dv)^3} = \frac{\beta\gamma}{\sigma a_{12}}$$

est presque intrinsèque. Il est alors bien naturel de choisir σ de manière que ce rapport soit égal à 1 (si l'on exclut le cas où $\beta\gamma = 0$). Alors $\sigma a_{12} = \beta\gamma$; et les nouvelles valeurs σF_2, σF_3 des formes F_2, F_3 sont précisément φ_2, φ_3.

On pouvait faire ce calcul en coordonnées u, v tout à fait générales. Si

$$F_2 = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s,$$
$$F_3 = \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$$

$$(r, s, t = 1, 2;\; u_1 = u;\; u_2 = v;\; a_{12} = a_{21};\; a_{rst} = a_{srt} = a_{str} = \ldots),$$

---

[1] Les formes P, II, que nous venons d'avoir définies, sont intrinsèques, mais ne sont pas invariantes.

les conditions d'apolarité nous donnent

$$a_{22}a_{11i} + a_{11}a_{22i} - 2a_{12}a_{12i} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

On en déduit que le discriminant R de F_3 est égal à $I^2 A^3$, où

$$A = a_{11}\, a_{22} - a_{12} \neq 0$$

est le discriminant de F_2, et

$$I = \frac{1}{A^2} \begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221} \\ a_{112} & a_{121} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

est un invariant des formes F_2 et F_3. Le discriminant R est nul seulement si $I = 0$; dans ce cas F_3 est un cube parfait et la surface est réglée. Si $I \neq 0$ on peut multiplier F_2 et F_3 (c'est-à-dire les a_{rs}, a_{rst}) par un même facteur de manière que $I = -1$. *Les formes obtenues par cette méthode sont précisément nos formes* φ_2, φ_3. Pour le vérifier, supposons que $I = -1$, et que les u, v soient coordonnées asymptotiques. Alors $a_{11} = a_{22} = 0$ et les conditions d'apolarité nous donnent $a_{112} = a_{221} = 0$. De la $I = -1$ on déduit que $a_{111}\, a_{222} = a_{12}^3$, de manière que l'on peut poser

$$a_{111} = \beta^2\gamma, \qquad a_{222} = \beta\gamma^2, \qquad a_{12} = \beta\gamma.$$

On trouve les formes φ_2, φ_3. Pour des développements plus complets nous renvoyons à la *G. P. D.*

On peut se proposer le problème : *Peut-on choisir les coordonnées x, ξ de point et de plan de manière que les formes* F_2, F_3 *soient identiques aux formes* φ_2, φ_3 (en échangeant de plus u avec v, si cela est nécessaire)?

Choisissons les x d'une manière arbitraire; nous trouverons deux formes F_2, F_3; nous savons que

$$\frac{\varphi_2}{F_2} = \frac{\varphi_3}{F_3}.$$

Si $\sigma(u, v)$ est la valeur de ces rapports, substituons aux coordonnées x les $x\left(\sqrt{|\sigma|}\right)$, en échangeant de plus u avec v, si $\sigma < 0$. Les formes correspondant aux nouvelles coordonnées seront les formes φ_2, φ_3. *Les formes* φ_2, φ_3 *et les coordonnées x, ξ correspondantes seront appelées formes et coordonnées normales. La surface détermine complètement les formes normales* φ_2, φ_3, *pendant que les coordonnées normales x et ξ sont déterminées seulement à moins d'une* *transformation linéaire homogène à coefficients constants et à déterminant égal* à 1.

En coordonnées normales, on a (si u, v sont asymptotiques)

$$a_{12} = \beta\gamma.$$

Cette méthode de normaliser les coordonnées x, ξ n'est pas valable pour les surfaces réglées.

Nous voulons donner quelque développement pour le calcul des formes et des coordonnées normales.

Si nous posons (après avoir choisi à volonté les x)

$$(x, x_u, x_v, d^2 x) = b_{11}\,du^2 + 2 b_{12}\,du\,dv + b_{22}\,dv^2,$$

alors

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11} b_{22} - b_{12}^2|}} \Sigma b_{rs}\,du_r\,du_s \qquad (u = u_1,\ v = u_1),$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11} b_{22} - b_{12}^2|}} (x, x_u, x_v).$$

Nous trouvons facilement, d'après (15), que

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11} b_{22} - b_{12}^2|}} \Sigma b_{rst}\,du_r\,du_s\,du_t,$$

où les b_{rst} sont des fonctions rationnelles des x et de leurs dérivées (jusqu'au troisième ordre) symétriques en r, s, t. On en déduit que

$$I = \sqrt[4]{|b_{11} b_{22} - b_{12}^2|}\, L,$$

où L est une fonction rationnelle des x et de leurs dérivées jusqu'à celles du troisième ordre. Pour rendre $I = -1$, il faudra multiplier les x par le facteur

$$\sqrt[3]{|b_{11} b_{22} - b_{12}^2|}\ \sqrt{|L|}.$$

Voilà l'irrationalité dont dépendent les *coordonnées normales*. Au contraire *les formes normales*

$$\varphi_2 = -IF_2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = -IF_3$$

ne contiennent aucune irrationalité (elles sont rationnellement déterminées par la surface, ce qui n'arrive pas par exemple pour l'arc d'une courbe, ni dans la géométrie métrique, ni dans la projective).

24. Quelques remarques sur le voisinage d'un point d'une surface. — Dans la géométrie métrique, si l'on connaît le voisinage du premier ordre d'un point O d'une surface S, on peut définir une droite, la *normale* (métrique), qui n'appartient pas au plan tangent et est complètement déterminée par ce voisinage. Si un mouvement porte le voisinage (du premier ordre) de O sur S dans le voisinage (du même ordre) d'un autre point O′ d'une autre surface S′, il porte aussi la normale à S en O dans la normale à S′ en O′. Nous démontrerons que dans la géométrie projective, il n'y a rien de si simple. Si O est un point non singulier d'une surface non réglée S, nous savons que l'on peut choisir les coordonnées non homogènes x, y, z (en supposant $t = 1$) de manière que dans le voisinage de O

$$z = bxy + \frac{1}{6}(px^3 + sy^3) + (4).$$

Et, en coordonnées asymptotiques u, v, on a en O, d'après le paragraphe 19,

$$x = y = z = x_v = y_u = x_{uv} = y_{uv} = 0, \qquad z_{uv} = bx_u y_v.$$
$$px_u^2 = -2b\beta y_v, \qquad sy_v^2 = -2b\gamma x_u.$$

Si nous posons

$$z = \tau z', \qquad x = \rho x', \qquad y = \sigma y',$$

où

$$\rho = \frac{b}{\sqrt[3]{p^2 s}}, \qquad \sigma = \frac{b}{\sqrt[3]{ps^2}}, \qquad \tau = b\rho\sigma = \frac{b^3}{ps},$$

et écrivons de nouveau x, y, z au lieu de x', y', z', on trouve

$$z = xy + \frac{1}{6}(x^3 + y^3) + (4). \tag{18}$$

Le dernier changement des coordonnées n'a pas changé le tétraèdre de référence (mais seulement le point unité). On en déduit :

Dans le voisinage d'un point O *non singulier l'équation d'une surface* S *peut être toujours écrite dans la forme* (18). *Il suffit de prendre comme droites* $z = x = 0$ et $z = y = 0$ *les tangentes asymptotiques, comme droite* $x = y = 0$ *une droite quelconque passant par* O *et n'appartenant pas au plan* $z = 0$ *tangent en* O, *comme droite* $z = t = 0$ *sa polaire par rapport aux quadriques de Darboux*, et enfin de choisir d'une manière convenable le point unité. *La droite* $x = y = 0$ (et plus précisément le point $x = y = t = 0$) *reste arbitraire* (avec la seule condition de ne pas appartenir au plan tangent). On en déduit :

Même, si *l'on connaît le voisinage du troisième ordre d'un point* O *de* S, *on ne peut pas déterminer* (dans la géométrie projective) *la position d'une droite sortant de* O (*qui n'appartient pas au plan tangent en* O). Et alors on peut trouver tout à fait naturel de faire usage du voisinage du *quatrième ordre*. Nous allons démontrer que, *même par cette voie, on n'atteint pas le but*. Si nous indiquons par h, h' les valeurs de x_u, y_v en O (de manière que $z_{uv} = bhh'$ en O), des équations fondamentales on déduit (en se rappelant que $x_v = y_u = x_{uv} = y_{uv} = z_u = z_v = x = y = z = 0$ en O):

$$x : h = u + \frac{1}{2}(\theta_u u^2 + \gamma v^2)$$
$$+ \frac{1}{6}[(\theta_{uu} + \theta_u^2)u^3 + 3(\theta_{uv} + \beta\gamma)u^2 v$$
$$+ 3(\gamma_u + \gamma\theta_u)uv^2 + (\gamma_v + \gamma\theta_v)v^3] + \ldots,$$

$$z : bhk = uv + \frac{1}{6}(\beta u^3 + 3\theta_u u^2 v + 3\theta_v uv^2 + \gamma v^3)$$
$$+ \frac{1}{12}[(\beta\theta_u + \beta_u)u^4 + 2(\theta_{uu} + \theta_u^2 + \beta_v + \beta\theta_v)u^3 v$$
$$+ 3(2\theta_{uv} + \beta\gamma + \theta_u\theta_v)u^2 v^2$$
$$+ 2(\theta_{vv} + \theta_v^2 + \gamma_u + \gamma\theta_u)uv^3 + (\gamma\theta_v + \gamma_v)v^4] + \ldots;$$

d'où l'on déduit

$$z : bhk = \frac{x}{h}\frac{y}{k} - \frac{1}{3}\left[\beta\left(\frac{x}{k}\right)^3 + \gamma\left(\frac{y}{k}\right)^3\right]$$
$$+ \frac{1}{12}\left[(2\beta\theta_u - \beta_u)\left(\frac{x}{h}\right)^4 - 4(\beta_v + \beta\theta_v)\frac{x^3 y}{h^3 k}\right.$$
$$\left. - 6\theta_{uv}x^2y^2 - 4(\gamma_u + \gamma\theta_u)\frac{xy^3}{hk^3} + (2\gamma\theta_v - \gamma_v)\frac{y^4}{k^4}\right] + (5).$$

En posant $z' = lz$, $x' = x : h$, $y' = y : k$ en choisissant d'une manière convenable les constantes h, k, l, et en écrivant x, y, z au lieu de x', y', z' on obtient ($\beta\gamma \neq 0$) une équation

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$$
$$+ \frac{1}{12}(Px^4 + 4Qx^3y + 6Rx^2y^2 + 4Sxy^3 + Ty^4) + (5),$$

Une transformation de coordonnées x qui ne change pas les termes de second et de troisième ordre est le produit de transformation du type suivant :

(A) $$x = y', \qquad y = x', \qquad z = z';$$

(B) $$x = \varepsilon x', \qquad y = \varepsilon^2 y', \qquad z = z' \qquad (\varepsilon = \sqrt[3]{1});$$

(C) $$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{x + mz}{1 + lx + my + nz}, \\ y' &= \frac{y + lz}{1 + lx + my + nz}, \\ z' &= \frac{z}{1 + lx + my + nz} \end{aligned}\right.$$

(l, m, n const.).

Ces transformations changent les valeurs de P, Q, ... Et précisément nous trouvons dans les trois cas :

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{A}) & \mathrm{P}' = \mathrm{T}, \quad \mathrm{T}' = \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}' = \mathrm{S}, \quad \mathrm{S}' = \mathrm{Q}, \quad \mathrm{R}' = \mathrm{R}; \\
(\mathrm{B}) & \mathrm{P}' = \varepsilon \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}' = \varepsilon^2 \mathrm{Q}, \quad \mathrm{R}' = \mathrm{R}, \quad \mathrm{S}' = \varepsilon \mathrm{S}, \quad \mathrm{T}' = \varepsilon^2 \mathrm{T}; \\
(\mathrm{C}) & \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{P}' = \mathrm{P} + 4l, \quad \mathrm{Q}' = \mathrm{Q} - 2m, \quad \mathrm{R}' = \mathrm{R} + 2(n - lm), \\ \mathrm{S}' = \mathrm{S} - 2l, \quad \mathrm{T}' = \mathrm{T} + 4m. \end{array} \right.
\end{array}
$$

Les invariants du voisinage (de quatrième ordre) de O sont par conséquent les fonctions de j_0, $j_1 + j_2$, $j_1 j_2$, où

$$
j_1 = (\mathrm{P} + 2\mathrm{S})^3, \qquad j_2 = (\mathrm{T} + 2\mathrm{Q})^3
$$
$$
j_0 = (\mathrm{P} + 2\mathrm{S})(\mathrm{T} + 2\mathrm{Q}).
$$

On peut rendre (par une transformation C) par exemple $\mathrm{Q} = \mathrm{R} = \mathrm{S} = 0$; et les j se réduisent alors à P^3, T^3, PT. Les transformations de coordonnées, qui conservent nulles les valeurs de Q, R, S sont alors seulement les transformations A et B.

Pour une droite $x = rz$, $y = sz$ sortant de O, qui n'appartient pas au plan tangent $z = 0$, on aura les transformations

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{A}) & r' = s, & s' = r, \\
(\mathrm{B}) & r' = \varepsilon^2 r, & s' = s\varepsilon \quad (\textit{en général}).
\end{array}
$$

La droite est par conséquent déterminée complètement par les invariants

$$
\frac{r}{\mathrm{T}} + \frac{s}{\mathrm{P}}, \qquad \mathrm{T}^2 r + s \mathrm{P}^2,
$$

que nous pourrions appeler les coordonnées de la droite par rapport au voisinage considéré. Toute droite sortant de O qui n'appartient pas au plan tangent pourrait en conséquence être considérée comme l'analogue projectif de la normale métrique. Par cette méthode on ne peut pas généraliser la définition de normale.

Si $\mathrm{P} = \mathrm{T}$, il y a une exception; on ne peut pas distinguer la droite $x = rz$, $y = sz$ de la droite $x = sz$, $y = rz$. Seulement la position d'une droite, pour laquelle $r = s$, peut être déterminer par le voisinage du quatrième ordre par une méthode projective.

Ces droites, pour lesquelles $r = s$, jouent un rôle très important dans la géométrie projective. Elles forment le *faisceau canonique*, dont nous nous occuperons plus loin.

25. Les équations fondamentales de la géométrie affine. — Les coordonnées non homogènes sont particulièrement utiles pour les problèmes, où il y a un plan (que l'on choisit comme plan $t = 0$), qui joue un rôle important. Cela arrive dans la géométrie affine, dans laquelle ce plan est le plan à l'infini.

Et dans cette géométrie on peut supposer $t = 1$ pour les points qui ne sont pas à l'infini.

En remarquant que $t = 1$ doit satisfaire aux équations fondamentales, on déduit que $p_{11} = p_{22} = 0$, de manière que les équations fondamentales deviennent :

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v, \qquad x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v.$$

Toutes les surfaces qui sont lieu d'un point, dont les coordonnées (non homogènes) satisfont à ces équations, sont identiques dans la géométrie affine (on passe de l'une à l'autre par une affinité, c'est-à-dire une transformation linéaire à coefficients constants sur les x, y, z). On en déduit que *dans la géométrie affine une surface est déterminée par les formes qui, en coordonnées u, v asymptoptiques, sont définies par les*

$$F_2 = 2a_{12}\,du\,dv, \qquad F_3 = a_{12}(\beta\,du^3 + \gamma\,dv^3.)$$

(On se rappelle que $\theta = \log|a_{12}|$).

La forme $P = p_{11}\,du^2 + p_{22}\,dv^2$ est identiquement nulle.

Nous voulons maintenant déterminer les coordonnées du plan tangent correspondant aux coordonnées x, y, z, $t = 1$ de point. Les équations

$$S\xi x = S\xi x_u = S\xi x_v = 0$$

nous donnent

$$T = -(\xi x + \eta y + \zeta z);$$

$$\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u = 0,$$

$$\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v = 0.$$

Les deux dernières, comparées aux équations

$$S\xi_{uv} x_u = S\xi_{uv} x_v = 0,$$

qui se réduisent aux équations

$$\xi_{uv} x_u + \eta_{uv} y_u + \zeta_{uv} z_u = \xi_{uv} x_v + \eta_{uv} y_v + \zeta_{uv} z_v = 0,$$

nous démontrent que l'on peut trouver une fonction λ de manière que

$$\xi_{uv} = \lambda\xi, \qquad \eta_{uv} = \lambda\eta, \qquad \zeta_{uv} = \lambda\zeta.$$

On en déduit

$$\lambda a_{12} = \lambda S\xi x_{uv} = S x_{uv}\xi_{uv};$$

c'est-à-dire, d'après la (15_1) du paragraphe 17,

$$\lambda = \beta\gamma + \theta_{uv}.$$

Les coordonnées ξ, y, ζ satisfont à une équation de Moutard :

$$\varphi_{uv} = \lambda\varphi.$$

Des équations $S\xi x_u = S\xi_u x_u = S\xi x_v = S\xi_v x_v = 0$ on déduit

$$x_u = \rho(\xi, \xi_u), \qquad x_v = -\sigma(\xi, \xi_v) \qquad (x = x, y, z),$$

où ρ, σ sont des facteurs de proportionnalité, (ξ, ξ_u) et (ξ, ξ_v) sont les mineurs des matrices

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}.$$

Les conditions d'intégrabilité démontrent que $\rho = \sigma = \text{const.}$ Et l'on reconnaît par conséquent que *les* ξ, η ζ *sont les coordonnées de Lelieuvre*, qui sont connues même dans la géométrie métrique, et auxquelles on arrive en conséquence par la méthode la plus naturelle, en cherchant les coordonnées de plan tangent, correspondant selon nos définitions aux coordonnées non homogènes de point. Le théorème de Kœnigs, dont nous nous occuperons plus loin, nous donnera une simple interprétation géométrique de la précédente équation de Moutard.

26. **Les équations fondamentales en coordonnées curvilignes générales.** — Soient $u = u_1$, $v = u_2$ des coordonnées curvilignes tout à fait quelconques; posons

$$F_2 = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s, \qquad F_3 = \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t.$$

Nous ferons usage des notations du calcul absolu (tensoriel par rapport à la forme F_2). Les conditions d'apolarité sont, avec ces notations,

$$\sum_{r,s} a^{rs} a_{rst} = 0 \qquad (t = 1, 2).$$

Les équations différentielles fondamentales deviennent :

$$x_{rs} = \sum_{h,k} a_{rsk} a^{hk} x_k + a_{rs} X + p_{rs} x \qquad (r, s = 1, 2),$$

où $X = \frac{1}{2}\Delta_2 x$, et $\Sigma p_{rs}\, du_r\, du_s$ est la forme P(§ 23) apolaires à F_2. Pour le démontrer, il suffit de remarquer que ces équations se réduisent aux équations (I) du paragraphe 17, si les u, v sont asymptotiques (si $a_{11} = a_{22} = 0$), et qu'elles sont par conséquent valables en tout cas, puisqu'il s'agit d'équations covariantes. Par la même méthode on démontre que

$$\xi_{rs} = -\sum_{h,k} a_{rsh} a^{hk} \xi_k + a_{rs}\Xi + \pi_{rs}\xi$$

$$\left(\Xi = \frac{1}{2}\Delta_2 \xi\right).$$

La forme

$$\mathrm{P} = \mathrm{II} = \Sigma(p_{rs} - \pi_{rs})\, du_r\, du_s$$

est déterminée complètement par les formes F_2 et F_3. Mais pour la déduction directe et l'étude approfondie de toutes ces équations, nous renvoyons à la *G. P. D.*

Pour les quadriques de Darboux, *voir* Lie [4], Darboux [1], Demoulin [3], [4], Wilczynski [15], Green [11], Franck [1], [2], Scheffers [1], Klobouček [1], Lane [6], Bompiani [41], [45], Fubini [38], Čech [25]. Pour la polarité fondamentale, *voir* Green [20], Čech [3], [14], Kanitani [4] et Fubini [30]. Il existe des couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie; *voir* Demoulin [9], Tzitzéica [25], Godeaux [2], [3], [4], [8], Thomsen [5]. Une généralisation des quadriques de Lie a été donnée par M. Godeaux [1], [7]. M. Thomsen [1], [2], [3] a basé sa nouvelle méthode de la théorie projective des surfaces sur la considération des quadriques de Lie; *voir* Bompiani [31], [32].

Les formes F_2, F_3, l'élément linéaire projectif, les formes normales et les coordonnées normales ont été introduites par M. Fubini [2], [3], [5], [8], [11]; *voir* aussi Sannia [3] et Čech [10], [14]. Les invariants différentiels de l'élément linéaire projectif ont été étudiés par MM. Cartan [4] et Čech [18]; *voir G. P. D.*, Chap. VI; *cf.* aussi Bortolotti [3]. L'interprétation géométrique de l'élément linéaire projectif exposée dans le texte est due à M. Terracini [15]; celle de la forme φ_2 à M. Fubini [36] D'autres interprétations géométriques de ces formes, ainsi que des formes φ_3, $\beta \dfrac{du^2}{dv}$, $\gamma \dfrac{dv^2}{du}$ ont été données par M. Bompiani [22], [24], [32], [34], [40]; *voir* aussi Čech [12], [28], Wilczynski [37], B. Segre [2]. M. Bompiani [22], [24], [26], [31], [34] a donné aussi des interprétations géométriques des nombreux invariants différentiels (*voir* aussi l'Appendice II, écrite par M. Bompiani, de la *G. P. D.*).

Pour le sujet traité au paragraphe 24, *voir* Darboux [1], Wilczynski [15], [16], Green [11], Eula et Franceschi [1], Fubini [32], [44], [45], Lane [10], [16], Stouffer [5].

Nous ne pouvons pas citer ici les Mémoires consacrés à la géométrie affine; nous renvoyons simplement au deuxième volume du Traité de M. Blaschke.

Le lecteur trouvera la théorie complète de ces formes (en coordonnées curvilignes quelconques) et leurs applications les plus importantes dans la *G. P. D.* (*loc. cit.*). Dans le Chapitre XII du même livre, il trouvera les généralisations aux hypersurfaces. Ici nous avons exposé seulement la partie la plus élémentaire de la théorie.