# APPENDICE IVª

## Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari.

Nota del Prof. ALESSANDRO TERRACINI della R. Università di Torino.

Di queste superficie mi occupai – da un punto di vista prevalentemente sintetico – in alcuni lavori (*), sui quali, per cortese invito del prof. FUBINI, riferisco qui brevemente.

1. – Prendiamo le mosse dall'osservazione di SEGRE (cfr. vol. I. § 49, p. 278) : se la rigata sghemba $(g)$ viene trasformata mediante una congruenza $W$ in una superficie $(\gamma)$ non rigata, le asintotiche $\gamma$ di questa superficie corrispondenti alle generatrici rettilinee di $(g)$ appartengono a complessi lineari. Invero, come ha osservato SEGRE, se $\gamma$ è una di queste asintotiche e $g$ è la corrispondente generatrice della $(g)$, la considerazione delle $\infty^1$ rette della congruenza che hanno i loro fuochi rispettivamente su queste due linee mostra che per ogni punto della curva $\gamma$, entro il cor-

(*) *Sulle congruenze* W *di cui una falda focale è una quadrica*, Scritti matematici offerti ad ENRICO D' OVIDIO, Torino, 1918 ; *Sulle superficie le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe*, Nota I, Atti della Soc. Nat. e Mat. di Modena, serie V, vol. V, 1919 ; *Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. LIX, 1924. In questi lavori si trovano varie citazioni. – Nella seconda di queste Note è data, per la prima volta, una rappresentazione parametrica per tutte le superficie con le asintotiche dei due sistemi in complessi lineari.

rispondente piano osculatore, passa una retta di una congruenza lineare fissa; ciò che è sufficiente a dedurne l'appartenenza di $\gamma$ a un complesso lineare.

Anche il teorema inverso, di Fubini (vol. I., p. 280) secondo il quale ogni superficie $(\gamma)$ con un sistema di asintotiche $\gamma$ in complessi lineari è trasformata per congruenze $W$ di $\infty^3$ rigate, è suscettibile di una dimostrazione geometrica, che riproduco qui per dare un'idea dell'apparato dimostrativo su cui poggia anche il seguito della teoria.

Chiamo $\Gamma$ il complesso lineare cui appartiene un'asintotica generica $\gamma$; e cerco se è possibile scegliere, entro ognuno degli $\infty^1$ complessi lineari $\Gamma$, una sua retta $g$ in modo che la superficie rigata $(g)$ che è luogo di $g$ venga a godere della proprietà che la congruenza lineare speciale delle rette ad essa tangenti nei punti di una sua generatrice generica $g$ sia sempre entro il corrispondente complesso lineare $\Gamma$.

Per maggior chiarezza, trasportiamo il problema nello $S_5$ della $\Phi$ rappresentativa delle rette nello spazio; e consideriamo, in esso, la linea $(P_\Gamma)$ luogo dei poli – rispetto a $\Phi$ – degli $\infty^1$ $S_4$ immagini dei complessi $\Gamma$. La ricerca della rigata $(g)$ si traduce nella ricerca di una linea $(g)$ tracciata su $\Phi$, tale che la retta ad essa tangente in un suo punto generico $g$ – retta polare dello $S_3$ immagine della congruenza lineare speciale testè nominata – passi per il polo $P_\Gamma$ dello $S_4$ immagine di $\Gamma$. Perciò tutto si riduce a far sì che le rette tangenti alla linea $(g)$ si appoggino tutte quante alla linea $(P_\Gamma)$ (in punti variabili). Ora, se per ogni punto della $\Phi$ si immaginano le rette che lo congiungono colle intersezioni del proprio $S_4$ tangente colla linea $(P_\Gamma)$, queste rette tangenti inviluppano sulla $\Phi$ uno o più sistemi $\infty^3$ di linee. Ciascuna di queste linee soddisfa alle proprietà richieste per la linea $(g)$, solo che si abbia cura di scartare da esse le rette della $\Phi$ appoggiata alla $(P_\Gamma)$.

Ritornando ora allo spazio ordinario, se da un punto $P$ scelto genericamente su una asintotica $\gamma$ della superficie $(\gamma)$ si conduce la retta $t$ del corrispondente complesso lineare $\Gamma$ appoggiata alla corrispondente retta $g$ di una, fissata arbitrariamente, tra le $\infty^3$ rigate sghembe $(g)$ ora costruite, è manifesto che questa retta è tangente, non solo alla $\gamma$ nel punto $P$, ma anche alla rigata $(g)$ nel punto $gt$. Al variare del punto $P$ su $\gamma$, e dell'asintotica $\gamma$ sulla $(\gamma)$, la $t$ descrive dunque una congruenza $W$ nelle condizioni richieste.

Dalla dimostrazione risulta anche che le $\infty^3$ rigate del precedente enunciato non dipendono dalla superficie $(\gamma)$ considerata in sè, ma solo dagli $\infty^1$ complessi lineari $\Gamma$ cui appartengono le sue asintotiche (fissati i quali la determinazione della $(\gamma)$ dipende ancora da una funzione arbitraria); e ancora che due qualunque fra quelle $\infty^3$ rigate sono trasformate l'una dell'altra per congruenze $W$ (corrispondendosi quelle loro generatrici che corrispondono a una stessa asintotica). – Ed è anche facile verificare che non esistono altre rigate di cui la $(\gamma)$ sia trasformata per congruenze $W$, salvo le $\infty^3$ testè determinate (almeno fintantochè si imponga che le generatrici rettilinee della rigata corrispondano proprio alle asintotiche $\gamma$). (*)

2. – Volendo costruire una superficie $(\gamma)$ le cui asintotiche $\gamma$ di un sistema, generalmente curve, appartengano a complessi lineari, si possono assegnare ad arbitrio gli $\infty^1$ complessi lineari $\Gamma$ (non speciali) cui debbono appartenere quelle asintotiche, e un'asintotica $\gamma_0$ appartenente a un complesso $\Gamma_0$ prescelto fra quegli $\infty^1$; con ciò la superficie $(\gamma)$ risulta pienamente determinata. Invero (adottando per brevità il linguaggio degli infinitamente vicini) considero la congruenza lineare in cui $\Gamma_0$ è segato dal complesso lineare $\Gamma_1$ ad esso infinitamente vicino entro la $\infty^1$ assegnata, e la rigata della congruenza formata dalle rette di questa che escono dai singoli punti di $\gamma_0$. Questa rigata ammette come asintotica $\gamma_0$; e le varie sue asintotiche curve appartengono ai vari complessi lineari del fascio $\Gamma_0 \; \Gamma_1$: essa possiede dunque un'asintotica $\gamma_1$ (infinitamente vicina a $\gamma_0$) nel complesso lineare $\Gamma_1$. Analogamente si passa da $\gamma_1$ a un'ulteriore asintotica $\gamma_2$; e $(\gamma)$ viene costruita

(*) Alle proprietà del testo aggiungiamo quella che due asintotiche $\gamma$ generiche sono tra loro proiettive. Se infatti chiamiamo $R(\gamma)$ la rigata delle tangenti, nei singoli punti di un' asintotica $\gamma$, alle asintotiche dell'altro sistema, rigata le cui generatrici appartengono a una congruenza lineare, dal fatto – subito verificato – che le asintotiche curvilinee di $R(\gamma)$ – fra cui appunto è la $(\gamma)$ – sono fra loro proiettive (corrispondendosi i punti su esse segati dalle generatrici) segue l'enunciato, appena si osservi che la $(\gamma)$ appare come l'inviluppo delle $\infty^1$ superficie $R(\gamma)$.

come luogo delle successive curve $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, ecc. che risultano effettivamente sue asintotiche (cfr. la fine del n. 3). Nè esistono altre superficie soddisfacenti alle condizioni richieste.

In questo modo, se gli $\infty^1$ complessi $\Gamma$ sono condotti ad arbitrio per le congruenze lineari speciali delle tangenti ad una rigata $(g)$ lungo le singole sue generatrici, si ottengono tutte le trasformate (non rigate) per congruenze $W$ della superficie $(g)$.

Alcune proprietà interessanti si legano alla considerazione delle due superficie rigate $(g')$ e $(g'')$ descritte dalle direttrici $g'$ e $g''$ delle $\infty^1$ congruenze lineari caratteristiche per gli $\infty^1$ complessi lineari $\Gamma$ relativi a una superficie $(\gamma)$ del tipo considerato. Secondochè $g'$ e $g''$ sono generalmente distinte o no, ho chiamata la superficie $(\gamma)$ *non speciale o speciale*. Ebbene, attraverso la rappresentazione iperspaziale, si trova anzitutto che le due rigate $(g')$ e $(g'')$ sono trasformate l'una dell'altra per congruenze $W$; e poi che, viceversa, si può partire da due rigate $(g')$ e $(g'')$ falde focali di una congruenza $W$, e fissare una corrispondenza arbitraria fra i punti di due loro generatrici corrispondenti prefissate, $g'$ e $g''$: allora esiste una (anzi due) superficie $(\gamma)$ ben determinata, con un sistema di asintotiche $\gamma$ in complessi lineari, per le quali le tangenti principali dell'altro sistema si appoggiano a generatrici corrispondenti delle rigate $(g')$ e $(g'')$, determinando fra $g'$ e $g''$ proprio la corrispondenza prefissata.

Ma la rappresentazione iperspaziale conduce a risultati notevoli anche per il caso delle superficie *speciali*. Per esse, si trova anzitutto che fra le trasformate per congruenze $W$ di una data rigata $(g)$ ve nè sono infinite di speciali, e che la determinazione dei relativi $\infty^1$ complessi lineari dipende da un'equazione di Riccati. Allora, se per ognuno di questi $\infty^1$ sistemi di complessi lineari si immagina la rigata $(g')$ luogo delle direttrici delle congruenze lineari speciali caratteristiche, due qualunque fra queste rigate $(g')$ sono ancora trasformate l'una dell'altra per congruenze $W$ (corrispondendosi le direttrici omologhe di una stessa generatrice $g$). Ancora: si parta da una rigata qualunque $(g')$, e poi si tracci, in modo generico, una rigata $(\mathrm{r}_0)$ contenuta in una (qualsiasi) congruenza lineare speciale avente per direttrice una generatrice prefissata $g'_0$ della $(g')$: esiste una superficie $(\gamma)$ speciale bene determinata, con un sistema di asintotiche $\gamma$ in complessi lineari, per la quale le tangenti principali dell'altro sistema si ripartiscono fra $\infty^1$ congruenze lineari speciali aventi per direttrici le singole generatrici della $(g')$, in modo che quelle corrispondenti alla $g'_0$ costituiscano precisamente la $(r_0)$.

3. - Per le superficie $(\gamma)$ con un sistema di asintotiche in complessi lineari ho anche studiate le trasformazioni per congruenze *W*.

Anzitutto, riprendendo l'osservazione iniziale del n. 2, al variare della linea $\gamma_0$ entro il complesso $\Gamma_0$, e restando fissi gli $\infty^1$ complessi lineari $\Gamma$, si ottengono infinite superficie, dipendenti da una funzione arbitraria, con le asintotiche di un sistema tutte appartenenti a quei complessi lineari. Ebbene, due qualunque fra quelle superficie sono falde focali di una congruenza *W*, corrispondendosi su esse le asintotiche appartenenti a uno stesso complesso lineare. Ma, di più, risulta subito che se l'insieme delle superficie testè nominate si amplia con l'aggiunta delle $\infty^3$ rigate che sono trasformate per congruenze *W* di una qualunque fra esse, tutte queste superficie sono ancora, a due a due, falde di congruenze *W*.

Però, è essenziale notare che due superficie $(\gamma)$ e $(\delta)$ ciascuna delle quali abbia le asintotiche di un sistema (rispettivamente $\gamma$ e $\delta$) appartenenti a complessi lineari possono essere le falde focali di una congruenza *W* (corrispondendosi appunto quei sistemi di asintotiche) in modo che i complessi lineari delle asintotiche corrispondenti siano generalmente distinti. Conviene pertanto distinguere in due classi le trasformazioni per congruenze *W* delle superficie in questione. Precisamente, un esame più accurato della questione mostra che, collocate in una *prima classe* le trasformazioni di cui si è detto al principio di questo n., conviene attribuire alla *seconda classe* non solo quelle per le quali asintotiche corrispondenti stanno in complessi lineari generalmente distinti; ma anche quelle che, pure appartenendo già alla prima classe, hanno tuttavia in comune con le trasformazioni ora nominate la particolarità che ciascuna delle rigate luoghi delle congiungenti punti corrispondenti di un'asintotica $\gamma$ e di un'asintotica $\delta$ sta in una congruenza lineare (anzichè in un complesso lineare, come avviene per le rimanenti trasformazioni della prima classe). Queste ultime trasformazioni appartengono dunque contemporaneamente a entrambe le classi.

Posta questa definizione, mentre per le trasformazioni della prima classe non vi è altro da aggiungere, si pone ancora il problema di assegnare tutte quelle della seconda classe. Orbene, esso viene completamente risoluto dalla seguente costruzione. Assegnata una superficie $(\gamma)$ con un sistema di asintotiche $\gamma$ in complessi lineari $\Gamma$, per trovare nel modo più generale una superficie $(\delta)$ che sia sua trasformata per congruenze $W$ della *seconda classe*, si assuma ad arbitrio, entro ogni complesso $\Gamma$, una congruenza lineare $C$, in modo che le $\infty^1$ congruenze lineari così ottenute siano caratteristiche per una $\infty^1$ di complessi lineari, e si tracci per ogni punto di ogni asintotica $\gamma$ la retta della corrispondente congruenza $C$. La congruenza così ottenuta è una congruenza $W$, e la sua seconda falda focale fornisce la superficie $(\delta)$ richiesta. Di più, le stesse considerazioni geometriche con le quali si dimostra tale teorema provano che nota $(\gamma)$, ogni superficie $(\delta)$ (la cui determinazione dipende da una funzione arbitraria) si ottiene con sole operazioni di derivazione.

Per le trasformazioni per congruenze $W$ delle superficie in questione si ha anche un teorema di permutabilità. Ad esso sono giunto ricostruendo anzitutto da un punto di vista geometrico il teorema di permutabilità per le corrispondenze $W$ in generale; ciò che avviene sfruttando sistematicamente la nozione di coppie di curve trasformate asintotiche l'una dell'altra, nozione già approfondita dal Bianchi e suscettibile essa stessa di una trattazione sintetica assai semplice. Nel caso particolare che qui ci interessa quelle considerazioni geometriche, opportunamente completate, conducono al seguente risultato. Se nel teorema di permutabilità si suppone di partire da tre superficie $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ aventi ciascuna un sistema di asintotiche in complessi lineari, *ognuna* delle $\infty^1$ superficie che sono contemporaneamente trasformate per congruenze $W$ della $(\alpha)$ e della $(\gamma)$ ha ancora un sistema di asintotiche in complessi lineari, se le trasformazioni fra $(\alpha)$ e $(\beta)$ e fra $(\beta)$ e $(\gamma)$ appartengono alla *medesima* classe; mentre nell'ipotesi opposta fra quelle $\infty^1$ superficie ve ne è *una e una sola* dotata di tale proprietà.

4. – Passiamo ora a considerare una superficie non rigata

$\Theta \equiv (\gamma, \gamma')$, le cui asintotiche dei due sistemi, rispettivamente $\gamma$ e $\gamma'$ stiano in complessi lineari, rispettivamente $\Gamma$ e $\Gamma'$. Ogni complesso $\Gamma$ è in involuzione con ogni complesso $\Gamma'$, perchè se le corrispondenti asintotiche $\gamma$ e $\gamma'$ escono dal punto $P$, la quadrica di LIE di $\Theta$ relativa al punto $P$ viene ad avere le sue due schiere contenute l'una in $\Gamma$ e l'altra in $\Gamma'$.

Quindi i due sistemi lineari contenenti l'uno gli $\infty^1$ complessi $\Gamma$ e l'altro gli $\infty^1$ complessi $\Gamma'$ risultano involutorii; donde segue – essendosi escluse le rigate – che quei due sistemi lineari sono due reti involutorie $(K)$, $(K^1)$.

Possiamo allora distinguere i seguenti tre casi:

I. – Le due reti hanno rispettivamente per basi le due schiere di una quadrica $Q$ non degenere (caso generale).

II. – Delle due reti una ha per base due fasci di rette $M\sigma$, $N\tau$, l'altra i due fasci $M\tau$, $N\sigma$, dove $M$, $N$ sono due punti distinti, e $\sigma$, $\tau$ due piani distinti, tutti appartenenti a una retta $r$.

III. – Le due reti hanno per base uno stesso fascio di rette $M\mu$ contato doppiamente.

Le superficie in questione, corrispondenti ordinatamente ai tre casi, si chiameranno di *prima*, *seconda* e *terza specie*.

Ogni trasformata per congruenze $W$ (non rigata) di una quadrica non degenere è una superficie di prima specie, come risulta da una duplice applicazione dell'osservazione di SEGRE ricordata in principio. E, viceversa, ogni superficie di prima specie è trasformata per congruenze $W$ di una quadrica non degenere, $Q$; perchè ora la linea $(P_\Gamma)$ del n. 1 sta in un piano segante la $\Phi$ secondo una conica non degenere, che si può assumere come una delle $\infty^3$ linee $(g)$del l. c.; la quadrica in questione è quella della schiera rappresentata su $\Phi$ da quella conica.

Perciò, la ricerca delle superficie di prima specie è ricondotta a quella delle congruenze $W$ di cui una falda focale è una quadrica $Q$. Un teorema del BIANCHI assicura che tutte queste congruenze si ottengono conducendo le tangenti alle curve di un qualsiasi sistema *isotermo-coniugato* di quella quadrica. È pressochè immediata la seguente interpretazione di quel teorema, che fornisce già una costruzione assai semplice di tutte le superficie di prima specie: si parta da una quadrica $Q$ e la si trasformi in sè mediante una corrispondenza che muti in sè ciascun sistema di generatrici: le tangenti alle $\infty^1$ curve trasformate delle sezioni fatte con i piani di un fascio generico costituiscono una congruenza $W$, la cui seconda falda focale è la più generale superficie di prima specie.

Altre costruzioni per queste superficie ritroveremo più avanti. Qui osserviamo che se, in coordinate proiettive omogenee $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, la $Q$ è data parametricamente da

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u : v : uv : 1$$

mentre il sistema inviluppato su $Q$, cui si è accennato, è $\frac{du}{a(u)} + \frac{dv}{b(v)} = 0$, (*), si trova, in base a quanto si è detto per la superficie $\Theta$ richiesta (posto $a' = \frac{da}{du}$, ecc.)

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$$

$$= (b' - a')u + 2a : (b' - a')v - 2b : (b' - a)uv - 2(bu - av) : b' - a',$$

e per le coordinate $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ di un piano che descriva la superficie inviluppo

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 =$$

$$(a' + b')v - 2b : (a' + b')u - 2a : -(a' + b') : -(a' + b')uv + 2(av + bu).$$

Se $\Theta$ è una superficie di *seconda specie*, fissata p. es. una sua asintotica $\gamma$, la rigata descritta da una retta che tocchi $\Theta$ in un punto di $\gamma$ e sia incidente alla retta $r$ sta chiaramente in una

(*) In queste equazioni bisogna però supporre che nè $a(u)$ nè $b(v)$ siano polinomi quadratici, se non si vogliono ottenere delle rigate. La medesima avvertenza vale per le superficie di seconda e di terza specie.

congruenza lineare speciale di asse $r$, contenente i due fasci $M\sigma$, $N\tau$ (intersezione del complesso lineare $\Gamma$, contenente la $r$, col complesso lineare speciale di asse $r$); e viceversa. In altre parole, si può ottenere quella superficie come seconda falda focale di una congruenza rettilinea, tale che la prima falda degeneri nella retta $r$, e che le rigate della congruenza determinate dalle singole asintotiche della seconda falda siano in quelle congruenze lineari speciali di cui ora si è detto. Perciò si ottengono tutte le superficie di seconda specie partendo (in tutti i modi possibili) da $r$, $M$, $N$, $\sigma$, $\tau$, e determinando la $\Theta$ in modo che sussista la proprietà ora detta. Se si assume il tetraedro $X_1X_2X_3X_4$ di riferimento in modo che $X_1 \equiv M$, $X_2 \equiv N$, $X_1X_2X_3 \equiv \sigma$, $X_1X_2X_4 \equiv \tau$, si trova per la $\Theta$.

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (a' - b')\,u - 2a : (a' - b')\,v + 2b : 2uv : -2$$

con $a(u)$, $b(v)$ funzioni arbitrarie e

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = 2v : -2u : a' + b' : (a' + b')\,uv - 2(av + bu).$$

Per una superficie $\Theta$ di terza specie si può seguire un procedimento analogo che conduce a riguardare la $\Theta$ come seconda falda focale di una congruenza rettilinea con la prima falda degenerata in una qualsiasi retta $r$ del fascio $M\mu$, e tale che le rigate della congruenza determinate dalle singole asintotiche della seconda falda stiano in congruenze lineari speciali di asse $r$, le quali siano basi di fasci di complessi lineari appartenenti rispettivamente alle reti $(K)$, $(K')$. Ciò porta alle equazioni parametriche

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$$

$$= (a' - b')\,(u - v) - 2(a + b) : 2h\,(a' - b') : 2(u + v) : 4\,;$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 =$$

$$= 1 : \frac{v-u}{2h} : \frac{1}{2}(a' + b') : -\frac{1}{4}\{(a'+b')(u+v) - 2(a+b)\},$$

dove attualmente $X_1 \equiv M$, $X_1 X_2 X_3 \equiv \mu$, e $h$ indica una costante.

Alle superficie di tutte tre le specie si lega poi la considerazione di altre congruenze $W$: tali sono entrambe le congruenze direttrici di WILCZYNSKI (come risulta facilmente dalla rappresentazione iperspaziale). Ma, limitandoci a superficie di prima specie, si può affermare, di più, che ciascuna di quelle congruenze direttrici determina per sezione sulla quadrica $Q$ una corrispondenza che muta in sè ciascuna delle due schiere, e che, in conseguenza, per ogni raggio di una di quelle congruenze i fuochi, e anche i piani focali sono coniugati rispetto alla $Q$. Ancora per le superficie di prima specie è chiaro che le tangenti principali di un sistema nei punti di un'asintotica dell'altro sistema si appoggiano a una stessa coppia di generatrici della $Q$. Anzi, si possono assegnare ad arbitrio le due corrispondenze che in tal modo prendono origine entro ciascuna delle due schiere di $Q$, e, mediante le formole sopra indicate, si trova che la corrispondente superficie di prima specie è determinata, per quadrature, con una costante arbitraria.

5. – Ad alcuni sviluppi interessanti conduce anche il problema dell'esistenza e della costruzione di una superficie $\Theta \equiv (\gamma, \gamma')$ contenente due asintotiche $\gamma_0$ e $\gamma_0'$ assegnate. Si tratterà, naturalmente, di due curve uscenti da uno stesso punto $P_0$, aventi ivi il medesimo piano osculatore (ma, come si può supporre, non la stessa tangente) e appartenenti rispettivamente a due complessi lineari in involuzione $\Gamma_0$, $\Gamma_0'$. Limitiamoci per brevità alle superficie di prima specie. Per esse, conviene intanto adottare, qualora le si consideri come trasformate per congruenze $W$ di una data quadrica $Q$, una costruzione diversa da quella già ricordata: si assumano ad arbitrio le rette della congruenza che toccano $Q$ nei punti di due generatrici $g$, $g'$ di schiere diverse: allora la retta della congruenza $W$ uscente da un punto generico $M$ della $Q$ sarà la generatrice uscente da $M$ della schiera individuata dalle tre rette della congruenza che escono dagli ulteriori tre vertici del quadrilatero sghembo formato da $g$, $g'$ e dalle due generatrici di $Q$

uscenti dal punto $M$; la seconda falda focale della superficie così costruita dà ancora, nel modo più generale, una superficie di prima specie.

Ciò posto, il problema sopra enunciato si risolve così. Si dovranno fissare le due reti involutorie $(K)$, $(K')$ di complessi lineari, in modo che contengano rispettivamente $\Gamma_0$ e $\Gamma'_0$, e che si trovino nelle condizioni del caso I del n. 4: ciò si può fare in $\infty^4$ modi. Chiamando $Q$ la quadrica ricoperta dalle schiere basi di $(K)$ e di $(K')$, sia $M$ un suo punto di contatto con una tangente del fascio $M_0\mu_0$, e siano $g$, $g'$ le due generatrici per $M$, giacenti, la prima, con tutta la sua schiera $(g)$, nei complessi di $(K')$, la seconda, con la sua schiera $(g')$ in quelli di $(K)$. La congruenza lineare speciale delle rette tangenti alla $Q$ per es. lungo la $g$ viene a stare nel complesso $\Gamma_0$ (col quale ha in comune una schiera e poi ancora una retta); cosicchè esiste una rigata $E$, contenente come generatrice la retta $M P_0$, le cui singole generatrici toccano $Q$ in un punto di $g$ e sono osculanti di $\gamma_0$. Così esiste una rigata $E'$ che si comporta in modo analogo rispetto a $g'$, $\gamma'_0$. Ebbene, se si applica la costruzione sopra esposta, assumendo come rigate della congruenza $W$ circoscritte alla $Q$ lungo le rette $g$, $g'$ rispettivamente $E$, $E'$, la seconda falda focale è proprio una delle superficie richieste. Si ottengono dunque in tal modo $\infty^4$ superficie di prima specie che risolvono il problema posto, nè ve ne sono altre.

6. – Chiuderò osservando come anche l'identità già osservata nel testo (vol I, § 47 $B$) fra le superficie di prima specie e le superficie a curvatura nulla della metrica ellittica si giustifichi con semplici considerazioni geometriche.

Infatti, per dimostrare che le superficie $\Theta$ sono, nel senso ora detto, a curvatura nulla, basta dimostrare che le asintotiche dei due sistemi hanno torsione costante $\pm\frac{1}{R}$, essendo $\frac{1}{R^2}$ la curvatura dello spazio ellittico. Ora, se $P$, $P_1$ sono due punti infinitamente vicini di una di quelle asintotiche, e $\pi$, $\pi_1$ i corrispondenti piani osculatori, la quaterna di punti formata da $P$, $P_1$ e dalle due intersezioni della loro retta colla $Q$ è mutata dalla polarità nulla del complesso lineare cui appartiene quell'asintotica 22) nella quaterna di piani costituita da $\pi$, $\pi_1$ e dai piani tangenti alla $Q$ condotti per la stessa retta $PP_1 \equiv \pi\pi_1$; donde appunto segue la proprietà esposta.

Per stabilire l'inverso, si può partire dalla proprietà delle superficie a curvatura nulla in una metrica ellittica, che le tangenti principali di un sistema nei punti di un'asintotica dell'altro sistema sono parallele nel senso di Clifford. Applicando questa proposizione a un'asintotica $\gamma$ (per la quale quelle tangenti principali, formanti la rigata $R$ ($\gamma$), si considerino come congiungenti dei singoli punti di $\gamma$ con quelli giacenti sull'asintotica infinitamente vicina $\gamma_1$ nelle direzioni delle tangenti principali considerate) e all'asintotica $\gamma_1$, ne discende che p. es. l'asintotica $\gamma_1$ sta nel complesso lineare congiungente la congruenza lineare avente per direttrici le generatrici dell'assoluto a cui si appoggiano le rette di $R$ ($\gamma$) con l'analoga congruenza lineare infinitamente vicina a cui appartiene $R$ ($\gamma_1$).