APPENDICE III^a

ESPOSIZIONE DI ALCUNI RISULTATI DI GEOMETRIA PROIETTIVA DIFFERENZIALE NEGLI IPERSPAZI

Nota del Prof. ALESSANDRO TERRACINI della R. Università di Torino.

In queste pagine si espongono alcuni risultati della natura indicata nel titolo, ottenuti dal SEGRE, dal BOMPIANI e dal TERRACINI nei seguenti lavori:

C. SEGRE. — A – *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLII (1907).

B – *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi.* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XXX (1910).

C – *Aggiunta alla memoria: « Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi ».* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXX (1910).

D – *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti.* Rend. della R. Accademia dei Lincei, serie 5^a, vol. XXX (1° Sem. 1921).

E – *Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5^a, vol. XXX (1° Sem. 1921).

F – *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LVI (1921).

G – *Id. id.* Nota II. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LVII (1922).

E. Bompiani. — A – *Sull'equazione di Laplace.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXXIV (1912).

B – *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi.* Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge) vol. II (1913).

C – *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLVIII (1913).

D – *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLIX (1913).

E – *Sur les configurations de Laplace.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 156 (1913).

F – *Sullo spazio di immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve.* Rend. del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLVII (1914).

G – *Contributo allo studio dei sistemi lineari di rette nello spazio a quattro dimensioni.* Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lett. ed Arti, tomo LXXIII (1913).

H – *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXXVII (1914).

I – *Pour la géométrie de l'équation de Laplace.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 160 (1915).

J – *Sur les équations de Laplace à invariants égaux.* Comptes rendus de l'Ac. des Sciences, t. 160 (1915).

K – *Risoluzione geometrica del problema di Moutard sulla costruzione delle equazioni di Laplace ad integrale esplicito.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (1° Sem. 1915).

L – *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari od omogenee.* Note I e II. Rend. del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, vol. LII (1919).

M – *Sur les courbes quasi-asymptotiques des surfaces dans un espace quelconque.* Comptes rendus de l'Ac. des Sciences, t. 168 (1919).

N – *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XLVI (1922).

O - *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. XXX (2° Sem. 1921).

P – *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici.* Memorie della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. XIII (1921).

Q – *Sulla rappresentazione iperspaziale delle curve piane.* Rend. Lincei serie 5ª, vol. XXI (2° sem. 1922).

R – *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari.* Boll. Un. Mat. Italiana, anno IV (1926).

A. Terracini. — A - *Sulle V_k per cui la varietà degli S_h $(h+1)$ — seganti ha dimensione minore dell'ordinario.* Rend. del Circolo Matemat. di Palermo, tomo XXXI (1911).

B - *Sulle V_k che rappresentano più di $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti.* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XXXIII (1912).

C - *Sulle varietà di spazi con carattere di sviluppabili.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLVIII (1913).

D - *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà.* Nota I. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLIX (1913-1914).

E - *Id. id.* Nota II. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, volume LI (1916).

F - *Id. id.* Nota III. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LV (1919-1920).

G. - *Sulla varietà degli spazi tangenti a una data varietà.* Nota I e Nota II. Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIX (2º Sem. 1920).

H - *Su due problemi, concernenti la determinazione di alcune classi di superficie, considerati da G. Scorza e da F. Palatini.* Atti della Soc. dei Natur. e Matem. di Modena, serie 5ª, vol. VI (1921-1922).

I - *Sulle superficie i cui spazi osculatori presentano particolari incidenze coi piani tangenti o fra loro.* Atti della Società dei Natur. e Matem. di Modena, serie 5ª, vol. VI (1921-1922).

J - *Su una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Atti della Società dei Natur. e Matem. di Modena, serie 5ª, vol. VII (1922).

Avvertiamo una volta per tutte che nel seguito uno spazio di n dimensioni sarà designato talora con S_n, talora con $\lfloor n \rceil$; e, inoltre, che parlandosi di uno S_p tangente a una V_k in un suo punto x, con $p \gtrless k$ si intentenderà, se $p < k$ uno S_p per x e contenuto nello S_k ivi tangente alla V_k, e se $p > k$ uno S_p passante per tale S_k.

§ 1. — I successivi intorni di un punto su una varietà.

1. — Se (nello spazio a n dimensioni S_n) x è un punto generico di una varietà a k dimensioni V_k, si chiama *spazio r-tangente* alla V_k nel punto x lo spazio (minimo) cui appartengono x e i suoi punti derivati (rispetto ai k parametri essenziali

cui è riferita la V_k) fino a quelli di ordine r incluso (*). Gli spazi 2-tangenti si chiameranno brevemente *spazi osculatori*. Per $k = 1$ lo S_r r-tangente a una curva in un suo punto si chiamerà anche, secondo l'uso, S_r osculatore.

Gli spazi r-tangenti a una V_k possono coincidere con lo S_n ambiente; anzi ciò avviene sempre a partire da un certo valore di r. Se ciò non avviene, ogni iperpiano passante per lo spazio r-tangente nel punto x produce nella V_k una sezione per la quale il punto x ha molteplicità $r + 1$ almeno.

Lo spazio r-tangente in x si può anche definire come il minimo spazio cui appartengono gli S_r osculatori in tal punto alle curve generiche tracciate sulla V_k e passanti per esso. Però, per $r > 1$, tale spazio r-tangente, in generale, non è più riempito da quegli S_r osculatori.

Per esempio, si consideri una superficie generica (**) F di S_n, con $n \geq 5$, e lo spazio ad essa osculatore (2-tangente) in un suo punto generico x. Se τ_1, τ_2 sono i due parametri cui è riferita la F, posto $x^{(1)} = \dfrac{\partial x}{\partial \tau_1}$, ecc. (***), i piani osculatori in x alle linee della F passanti per x riempiono una V_4^2, quella che si ottiene come luogo degli S_3 che dal piano tangente in x proiettano il punto (variabile su una conica al variare del parametro ρ) $x^{(11)} + 2\rho x^{(12)} + \rho^2 x^{(22)}$. Anzi, ognuno degli S_3 ora nominati è riempito dai piani osculatori alle curve di F che passano per x con una tangente determinata (****). Tutto questo risulta subito osservando che il piano osculatore in x a una linea di F definita da $\tau_2 = \tau_2(\tau_1)$ è determinato dai punti

(*) Su questa definizione non tutti sono concordi: invece che di spazio *r-tangente* qualcuno parla di spazio *r-osculatore* (cfr. p. es. Bompiani C, n. 5), o di spazio $(r+1)$-*tangente* (così Del Pezzo: *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni*. Rendiconto della R. Acc. di Napoli, 1886). Cfr. poi anche Bompiani L.

(**) Il significato preciso di questa parola risulterà chiarito dal seguito.

(***) Notazioni e convenzioni analoghe manteniamo per il seguito.

(****) Cfr. per tutto ciò p. es. Segre A.

$$x, \quad x^{(1)} + \frac{d\tau_2}{d\tau_1} x^{(2)}, \quad x^{(11)} + 2\frac{d\tau_2}{d\tau_1} x^{(12)} + \left(\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\right)^2 x^{(22)} + \frac{d^2\tau_2}{d\tau_1^2} x^{(2)};$$

mantenendo fisso $\frac{d\tau_2}{d\tau_1}$, si ottengono i punti di uno S_3, ecc.

Più in generale (*), si trova che i piani osculatori alle curve di una V_k in un suo punto x costituiscono generalmente un cono, formato da ∞^{k-1} S_{k+1} passanti per lo S_k tangente alla V_k in x (in corrispondenza delle ∞^{k-1} rette tangenti alla V_k in x), avente l'ordine 2^{k-1}. Gli iperpiani tangenti a questo cono sono, fra tutti gli iperpiani tangenti alla V_k, quelli per cui il cono quadrico tangente nel punto x di contatto alla sezione che essi producono nella V_k ha una generatrice doppia. Queste generatrici, se $2k < n$, esauriscono la totalità delle rette tangenti in x alla V_k; se no, sono ∞^{n-k-2} e formano un cono d'ordine $\binom{k}{n-k-1}$.

2. — Le considerazioni accennate conducono ad estendere la definizione adottata per lo spazio r-tangente. Consideriamo, col Bompiani (C), un *elemento E_h d'ordine h di una curva,* vale a dire l'insieme di un suo punto e dei relativi S_1, $S_2, \ldots, S_h$ ivi osculatori alla curva: e poi la figura costituita dagli S_r osculatori in un punto x di una V_k alle curve della V_k aventi in comune un dato E_h (s'intende relativo al punto x): lo spazio (minimo) contenente tutti quegli S_r si può chiamare *r-tangente in x alla V_k secondo l'elemento E_h fissato.*

Per $h = r - 1$, quegli S_r costituiscono un sistema lineare intorno allo E_{r-1}, e riempiono generalmente uno S_{k+r-1}.

Per $h = r - 2$, se $r = 2$, si trova quanto si è detto alla fine del n. 1: se invece $r > 2$, gli S_r in questione descrivono un sistema lineare, intorno allo spazio $(r-1)$-tangente secondo lo E_{r-2} fissato, e, generalmente, entro un S_{2k+r-2}.

Per $h = r - 3$, se $r = 3$, il luogo degli S_3 è generalmente

(*) Cfr. il n. 13 di Del Pezzo citato in (*) a p. 734 e i n[i] 17-19 di Segre B.

un cono di dimensione $3k$, avente per vertice lo S_k tangente alla V_k in x, e d'ordine

$$\sum_{i=1}^{k} 3^{i-1} \binom{2k-i-1}{k-1}.$$

Se invece, sempre per $h = r - 3$, si ha $r = 4$, si ottiene generalmente uno S_{2k+1} — cono, di dimensione $3k + 1$, e d'ordine 2^{k-1}; se finalmente $r > 4$, gli S_r in questione riempiono una varietà lineare.

Più in generale, per ogni valore di $r - h$, sussiste il risultato che, a partire da un certo valore di r, quegli S_r riempiono una varietà lineare.

3. — Se anzichè una V_k si considera, nello S_n, una totalità ∞^k di iperpiani, si possono ripetere per questa le considerazioni duali di quelle dei n.[i] precedenti. Rileviamo in particolare che su un iperpiano generico della ∞^k si ha uno S_{n-1-k} *primo caratteristico*, o più brevemente *caratteristico* (cioè comune ad esso e ai suoi infinitamente vicini del primo ordine); e poi uno spazio *secondo* caratteristico (che può anche mancare) duale dello spazio 2-tangente a una V_k in un suo punto, ecc.

Data una varietà luogo V_k, il sistema di tutti i suoi iperpiani tangenti (cioè passanti per gli S_k tangenti) produce su ognuno di essi uno spazio (primo) caratteristico che giace sulla V_k ed è l'insieme dei punti nei quali l'iperpiano è tangente alla varietà (SEGRE B, n. 16): e viceversa (cioè dualmente), una infinità di iperpiani costituisce sempre l'insieme degli iperpiani tangenti per una varietà luogo (il luogo degli spazi caratteristici che possono ridursi a singoli punti). Donde segue (mediante proiezione in S_{k+1}) che, se una V_k è toccata da ogni suo S_k tangente in più di un punto, essa è toccata da ogni S_k tangente generico in tutti i punti di uno spazio (*): se gli S_k tangenti sono ∞^h, i loro spazi di contatto sono degli S_{k-h}.

(*) Questa proprietà non si estende agli spazi osculatori: la Sig.na M. CASTELLANI ha osservato che ogni S_5 osculatore generico di una superficie può avere più di un punto di osculazione, senza averne infiniti; e ha determinato quali sono le superficie in tali condizioni. (Sulle superficie i cui spazi osculatori sono biosculatori. Rend. Lincei (5) XXXI, 1922).

§ 2. — Generalità sulle varietà rappresentanti sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali.

4. — Lo spazio osculatore a una superficie F nel suo punto x è individuato dai punti

$$x, \quad x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad x^{(11)}, \quad x^{(12)}, \quad x^{(22)}.$$

Perciò, se la dimensione dello spazio ambiente è almeno 5, quegli spazi osculatori hanno generalmente dimensione 5. Più in generale, se la dimensione dello spazio d'immersione è abbastanza elevata, gli spazi r-tangenti di una V_k hanno generalmente dimensione $\binom{k+r}{k} - 1$.

Ma può avvenire che quella dimensione si abbassi, per ogni punto generico della V_k, di i unità: ciò avviene quando il punto x è legato ai suoi successivi punti derivati fino all'ordine r incluso da i relazioni lineari omogenee linearmente indipendenti. In tal caso, le coordinate proiettive omogenee di un punto che descriva la V_k appaiono come soluzioni di un sistema lineare omogeneo alle derivate parziali di ordine r, costituito da i equazioni linearmente indipendenti; si dice allora che la V_k *rappresenta* quel sistema alle derivate parziali (o anche, talvolta, che la V_k è una V_k *integrale* di quel sistema). Così, p. es., le superficie dello spazio ordinario (non piani) rappresentano due distinte equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del 2° ordine, o, come diremo più brevemente, due equazioni di Laplace (*).

Benchè, in generale, una V_k non sia ancora proiettivamente determinata da un tale sistema alle derivate parziali, tuttavia l'introduzione di una V_k rappresentante un dato sistema può essere assai utile per lo studio del sistema stesso; come si vedrà nei n[i]. seguenti già per il caso $k = r = 2$.

(*) Useremo nel seguito questa locuzione, qualunque sia il numero delle variabili.

La particolarità sopra indicata non si può certo presentare per $r = 1$ (giacchè ciò equivarrebbe ad abbassare la dimensione della V_k) e perciò, per qualsiasi r, ogni sistema del tipo considerato rappresentato da una V_k deve essere tale che da esso non consegua nessuna equazione del primo ordine. Ciò porta intanto subito alla conseguenza

$$(1) \qquad i \leq \binom{k+r}{k} - (k+1) .$$

§ 3. — Superficie rappresentanti equazioni di Laplace.

5. — Fermiamoci sul caso $k = r = 2$. Allora sarà al massimo $i = 3$; Se il massimo è raggiunto, i tre punti $x^{(11)}$, $x^{(12)}$, $x^{(22)}$ si esprimono come combinazioni lineari di x, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, e perciò il piano di questi tre punti contiene ogni linea della superficie passante per x; la superficie in questione è dunque un piano. Se $i = 2$ si trova che la superficie sta in S_3, oppure è una superficie sviluppabile (cfr. più avanti il n. 10). Se poi $i = 1$, si hanno le superficie (che già comparivano in lavori precedenti) a cui è espressamente dedicata la nota A del SEGRE.

Sia Φ una tale superficie, e

$$(2) \qquad A\,x^{(11)} + B\,x^{(12)} + C\,x^{(22)} + D\,x^{(1)} + E\,x^{(2)} + F\,x = 0$$

la corrispondente equazione di Laplace (*).

Giova considerare, in relazione con essa, l'equazione differenziale

$$(3) \qquad C\,d\tau_1^2 - B\,d\tau_1\,d\tau_2 + A\,d\tau_2^2 = 0 .$$

(*) Nella Nota: *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 6ª, vol. III, 1926) il BOMPIANI ha trovato un significato, come limite di un birapporto, dell'invariante assoluto (rapporto dei due invarianti relativi) della (2); quando esso è $= 1$ si ha il teorema di KOENIGS sulle equazioni ad invarianti uguali.

Si ha intanto questa proprietà: le coppie di tangenti in un punto generico x alle sezioni iperpiane che hanno in x un punto doppio (anzichè essere tutte le ∞^2 coppie di tangenti in x a Φ) sono le ∞^1 coppie di un'involuzione, i cui raggi doppi sono definiti dalla (3). Perciò questi raggi doppi appaiono come tangenti in x alle sezioni iperpiane *cuspidate*.

Si chiamano poi *linee caratteristiche* della superficie Φ le linee integrali della (3): esse costituiscono un solo sistema quando la equazione (2) è parabolica. Ebbene, le tangenti alle caratteristiche di un sistema nei punti di una caratteristica dell'altro sistema costituiscono una sviluppabile. E, se i due sistemi di caratteristiche sono distinti, il verificarsi di una tale proprietà basta già per conchiudere che una superficie che possieda un doppio sistema di linee in quelle condizioni rappresenta un'equazione di Laplace (non parabolica). Se la (2) è parabolica, in ogni punto della Φ il piano tangente a questa coincide col piano osculatore alla linea caratteristica passante per quel punto (e viceversa). Insomma le linee caratteristiche di una superficie Φ si comportano come si comportano nello spazio ordinario due sistemi (distinti) di linee coniugate, oppure quello delle asintotiche di una superficie, secondo che la (2) è non parabolica, oppure è parabolica: perciò quelle linee spesso si chiamano *coniugate* oppure rispettivamente *asintotiche.*

6. — Se la (2) non è parabolica, alla corrispondente superficie Φ si può applicare la *trasformazione di Laplace* (come la si applica ai sistemi coniugati nello spazio ordinario). Precisamente, si costruiscano le ∞^1 sviluppabili circoscritte alla data superficie Φ lungo le ∞^1 caratteristiche del 1° sistema: il luogo dei loro spigoli di regresso sarà generalmente una superficie Φ_1, la quale sarà toccata dalle ∞^2 rette tangenti agli spigoli di regresso, vale a dire dalle rette tangenti alle caratteristiche del 2° sistema di Φ. Ebbene, la Φ_1 è ancora una superficie della specie Φ, *trasformata* di *Laplace* della data. Se la (2) si riduce alla forma canonica

$$x^{(12)} + a x^{(1)} + b x^{(2)} + c x = 0, \tag{2'}$$

e si assumono p. es. le linee τ_1 (cioè le linee su cui varia τ_1) come caratteristiche del primo sistema, il punto $x^{(2)} + a x$ descrive la Φ_1, e precisamente in modo che la retta che lo congiunge al punto x della Φ è tangente comune di queste due superficie nei punti considerati. Analogamente, il punto $x^{(1)} + b\,x$ descrive in generale un'altra superficie Φ_{-1} pure trasformata di Laplace della superficie Φ. Da Φ_1, operando analogamente, si ottengono in generale due superficie delle quali l'una coincide sempre con Φ, mentre l'altra è generalmente una nuova superficie Φ_2. Analogamente per Φ_{-1}. Così prende origine una successione, generalmente illimitata, di superficie

$$(4) \qquad \ldots . \Phi_{-2},\ \Phi_{-1},\ \Phi,\ \Phi_1,\ \Phi_2, \ldots .$$

ciascuna delle quali è trasformata di Laplace delle due che la comprendono.

7. — È particolarmente notevole il caso in cui la successione (4) si chiude (cioè non è proseguibile) da una parte almeno; giacchè allora l'equazione (2) corrispondente alla Φ si integra per quadrature.

Un criterio generale per sapere quando ciò avviene è dovuto al Bompiani (A). Partiamo dall'osservazione che gli S_h $(h < n)$ osculatori alle caratteristiche τ_2 di Φ nei punti di una caratteristica τ_1 riescono osculatori a una curva τ_1 della superficie Φ_h della successione (4). Allora, se questa successione si chiude, e Φ_{h-1} ne è l'ultima superficie non degenere, si presenta necessariamente o l'una o l'altra delle due seguenti circostanze:

1⁰) la sviluppabile circoscritta alla Φ_{h-1} lungo una generica linea τ_1 si riduce a un cono (il cui vertice, al variare di quella linea τ_1 descrive la curva che, come superficie degenere, chiude la successione di Laplace);

2⁰) le sviluppabili circoscritte alla Φ_{h-1} lungo le varie linee τ_1 hanno lo stesso spigolo di regresso (nel qual caso Φ_{h-1} è una sviluppabile il cui spigolo di regresso φ chiude la successione).

Nel secondo caso l'osservazione da cui siamo partiti prova che le linee τ_2 della Φ stanno entro altrettanti S_h osculatori alla φ; nel primo, la stessa osservazione dice che gli S_h osculatori alle linee τ_2 di Φ nei punti di una linea τ_1 passano per uno stesso punto.

Interpretando analiticamente quanto si è detto, si arriva al seguente *criterio di chiusura:* condizione necessaria e sufficiente affinchè la successione di Laplace relativa a un'equazione (2') si chiuda da una parte almeno dopo h trasformazioni è che $h+2$ soluzioni generiche di essa verifichino un'equazione del tipo

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1}\left(\alpha_0 \frac{\partial^h x}{\partial \tau_2^h} + \alpha_1 \frac{\partial^{h-1} x}{\partial \tau_2^{h-1}} + \ldots + \alpha_{h-1} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \alpha_h x\right) = 0 .$$

Precisamente, se è nulla l'espressione fra parentesi, la chiusura avviene (per la superficie rappresentante quell'equazione (2') che si ottiene, in S_{h+1}, in corrispondenza delle $h+2$ soluzioni considerate) nel secondo fra i due modi di cui sopra si è detto (*caso di* Goursat); se no, avviene nel primo (*caso generale*). È poi anche possibile la chiusura secondo il *caso misto* quando gli S_h delle singole linee τ_2 hanno in comune uno $S_{h-\mu}$ (e allora la successione si chiude dopo $h-\mu$ trasformazioni).

Il Bompiani (K) ha anche applicato le considerazioni che precedono al problema (di Moutard) di costruire le equazioni di Laplace con successione chiusa da entrambe le parti, problema già considerato da Darboux e dal Nicoletti.

8. — Insieme con le superficie rappresentanti equazioni di Laplace, si possono considerare delle *configurazioni di Laplace* (Bompiani E). Si chiama configurazione di Laplace una ∞^2 di spazi S_ν che si ripartiscano in due modi diversi negli S_ν di ∞^1 sviluppabili ordinarie (*), in modo che altrettanto sussista per gli $S_{\nu+1}$ che congiungono le coppie di S_ν infinitamente vicine in tali sviluppabili (condizione che generalmente — per $\nu > 0$ — è conseguenza della precedente). La sezione di una tale configurazione con uno $S_{n-\nu}$ è una superficie rappresentante un'equazione di Laplace.

(*) V. più avanti la nota a p. 744.

In base all'osservazione di cui al n. 7, in principio, posto $k+h=\nu<n-1$, lo spazio S_ν definito in un punto generico di una superficie Φ dagli S_k e S_h rispettivamente osculatori in esso alle linee τ_1 e τ_2 risulta osculatore a una linea τ_1 di Φ_k e a una linea τ_2 di Φ_{-h}: perciò quegli ∞^2 S_ν appartengono a una configurazione di Laplace. Se si tagliano questi ∞^2 spazi con lo $S_{n-\nu}$ che congiunge $n-\nu+1$ punti della piramide fondamentale di riferimento, si ottiene dunque una superficie della specie Φ. Ciò significa che se le x_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ sono soluzioni della (2'), i determinanti $p_{1,2,\ldots\nu,\alpha}$ di ordine $\nu+1$ formati con le prime ν orizzontali e poi con un'ulteriore orizzontale (p. es. con la α^{esima}) della matrice

$$\left| \; x_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2}, \ldots, \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial \tau_2^k}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1}, \ldots, \quad \frac{\partial^h x_i}{\partial \tau_1^h} \; \right|$$

— dove abbiamo scritto esplicitamente solo l'orizzontale i^{esima} fra le $n+1$ della matrice — sono soluzioni di un'altra equazione di Laplace (con le stesse caratteristiche della data). Così si trovano, in modo molto semplice, le proprietà che il Darboux, nel secondo volume delle sue *Leçons*, ha assegnato per le espressioni che egli chiama (h, k).

Il Bompiani (I) si è anche servito di considerazioni di questa natura per studiare le relazioni fra i casi di chiusura delle successioni di Laplace relative a una data equazione di Laplace e ad alcune sue trasformate: p. es., se la successione di Laplace relativa alla (2') si chiude da una parte dopo k_1 trasformazioni secondo il caso generale, o rispettivamente secondo il caso di Goursat, l'equazione di Laplace di cui le espressioni (h, k) sono soluzioni, secondo quanto si è detto sopra, si chiude ancora, secondo il caso generale, dopo k_1+h trasformazioni, o rispettivamente, secondo il caso di Goursat, dopo k_1-k trasformazioni. Se poi è invece $k+h=n-1$, e si considera l'equazione di Laplace di cui sono soluzioni i determinanti di ordine n estratti dalla matrice di sopra, la successione di Laplace relativa a questa equazione si chiude da una parte dopo k_1+h trasformazioni secondo il caso di Goursat, se quella relativa alle (2') si chiude da una parte dopo k_1 trasformazioni secondo il caso generale.

Con le trasformazioni di una equazione di Laplace dei tipi indicati si passa dunque da successioni di Laplace chiuse secondo il caso generale, o secondo quello di GOURSAT, a successioni chiuse nello stesso modo o nel modo opposto, dipendentemente dal tipo della trasformazione (*).

§ 4. — Varietà rappresentanti sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali aventi dimensione assai elevata.

9. — Si è visto alla fine del n. 4 che il numero i delle equazioni linearmente indipendenti del sistema alle derivate parziali d'ordine r rappresentato da una V_k non può superare il limite indicato nella (1). E al principio del n. 5 si è detto, per $k = r = 2$, a quali classi di superficie conducono i casi in cui è $i > 1$ ($i = 3$, $i = 2$).

Lo studio dei casi a cui si è condotti per i valori abbastanza grandi di i è stato eseguito da un lato per le superficie ed equazioni di ordine qualunque ($k = 2$, r arbitrario) (**), e da un altro lato per varietà di dimensione qualunque, e equazioni del 2º ordine (k arbitrario, $r = 2$) (***).

Nel primo caso riesce utile l'osservazione che, se le dimensioni degli spazi r-tangente e $(r+1)$-tangente in ogni punto generico di una superficie differiscono di una unità, e sono ρ, $\rho+1$, la superficie contiene ∞^1 curve negli $S_{\rho-r}$ di una svilup-

(*) A proposito delle superficie Φ ricordiamo anche la nota R del BOMPIANI, dove l'A. introduce la nozione dei *sistemi planari* di curve sopra quelle superficie. Si ottiene uno di quei sistemi prefissando genericamente per ogni punto della superficie un piano appartenente allo S_4 2-tangente ivi e imponendo alle curve della superficie che il piano osculatore in ogni loro punto sia sempre incidente in una retta al piano prefissato passante per esso. Questi sistemi planari dànno luogo a proposizioni notevoli nello studio delle corrispondenze puntuali fra due superficie Φ.

(**) V. BOMPIANI L.

(***) V. TERRACINI B, e, per $k = 3$, SEGRE C.

pabile ordinaria (eventualmente degenere) (*), ovvero la superficie sta in $S_{\rho+1}$.

In base ad essa si giunge facilmente al risultato che le superficie rappresentanti un sistema d'ordine r, con

$$i = \frac{r(r-1)}{2} + h \tag{5}$$

($h > 0$) equazioni linearmente indipendenti, o sono costituite da ∞^1 linee negli S_{r-h} di una ∞^1 sviluppabile ordinaria, oppure stanno in S_{2r-h}.

Quell'osservazione riesce utile anche per valori di i meno elevati di quanto indichi la (5): il Bompiani assegna, per $0 \geq h \geq -5$, le corrispondenti classi di superficie.

10. — Consideriamo invece, col Terracini, il caso di k arbitrario e $r = 2$. Allora, se

$$i = \frac{k(k-1)}{2} + l \tag{6}$$

con $l > 0$, si può affermare che la V_k sta su una varietà U_q luogo di $\infty^h S_p$, tale che gli S_q ad essa tangenti nei punti di uno S_p stanno in uno S_{2k-h-1}, essendo $0 \leq h \leq k-l$ (donde subito segue, per $k = 2$, quanto si è detto al principio del n. 5). La dimostrazione di questo teorema avviene attraverso la considerazione del sistema degli iperpiani passanti per gli S_{2k-1} osculatori della V_k: il luogo dei loro spazi secondi caratteristici (n. 3) è precisamente la varietà U_q di cui si parla nell'enunciato.

(*) Si dice che una ∞^1 di spazi S_h è una *sviluppabile ordinaria* quando due S_h infinitamente vicini stanno in uno S_{h+1}; essa è costituita dagli S_h osculatori a una curva, oppure (casi degeneri) dagli S_h che da uno spazio fisso S_g proiettano gli S_{h-g-1} osculatori a una curva di S_n $(0 \leq g \leq h-1)$. D'ora in poi, dicendo sviluppabile ordinaria senz'altro, s'intenderà di non escludere che essa sia eventualmente degenere.

Il teorema di cui ora si è detto riconduce tutte le V_k in questione entro classi molto ristrette. Però, per $k > 2$, queste classi comprendono anche alcune V_k che non rappresentano sistemi di equazioni così ampi come indica la (6); cosicchè si presenta il problema di severare quelle classi da tali V_k (p. es. per $k = 3$ bisogna scartare i coni proiettanti da un punto una superficie non rappresentante alcuna equazione di Laplace). Ritorneremo più avanti (n. 14) su tale argomento: per il momento ci limitiamo ad osservare che, se in relazione con ogni varietà V_k si considera la varietà W ricoperta dai suoi S_k tangenti (varietà W che, per V_k immerse in spazi sufficientemente ampi, ha in generale dimensione $2\,k$), la varietà W relativa a ogni V_k fra quelle indicate nella tesi del precedente teorema, ha certamente dimensione $\leq 2\,k - l$.

§ 5. — Alcuni altri particolari sistemi di equazioni di Laplace rappresentati da V_k.

11. — Prima di riferire alcuni altri risultati, introduciamo la nozione del sistema lineare delle *forme quadratiche associate* al sistema di equazioni di Laplace rappresentato da una V_k: ad esso si giunge introducendo accanto a ogni equazione una corrispondente forma quadratica (nelle variabili $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$), ottenuta sostituendo a ogni termine contenente una derivata secondo $x^{(ij)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ il suo coefficiente moltiplicato per $\theta_i \theta_j$. Tali forme associate uguagliate a zero in uno S_{k-1}, dove le θ si interpretino come coordinate proiettive omogenee, rappresentano altrettante *quadriche associate* (*). Si verifica senza difficoltà che i sistemi lineari di quadriche associate al sistema di equazioni di

(*) Terracini D. Analogamente si definiscono le forme (di grado superiore al secondo) associate a equazioni lineari omogenee alle derivate parziali di ordine più elevato. Altri preferiscono interpretare le θ come coordinate non omogenee in uno S_k e sostituire alle quadriche del testo dei coni quadrici di tale S_k. Cfr. p. es. Bompiani in D.

Laplace rappresentato da una data V_k sono tutti proiettivamente equivalenti fra loro, al variare del sistema di k parametri essenziali cui si riferiscano i punti della V_k.

Se il sistema delle quadriche associate contiene tutte le quadriche contenenti un iperpiano S_{k-2} fisso dello S_{k-1} (più eventualmente altre quadriche), la V_k integrale è una rigata *sviluppabile,* cioè toccata da uno stesso S_k tangente lungo ogni generatrice, come si vede subito osservando che il sistema parziale di equazioni di Laplace, le cui quadriche associate contengono lo S_{k-2} fisso $a_1(\tau)\,\theta_1 + a_2(\tau)\,\theta_2 \ldots + a_k(\tau)\,\theta_k = 0$, esprime che lo S_k tangente alla V_k non muta spostandosi lungo le linee

$$\frac{d\tau_1}{a_1} = \frac{d\tau_2}{a_2} = \ldots = \frac{d\tau_k}{a_k},$$

e applicando la proprietà accennata alla fine del n. 3.

Se poi, per $k > 2$, quel sistema non contiene altre quadriche (se cioè, per il numero i delle equazioni di Laplace linearmente indipendenti rappresentate dalla V_k, si ha $i = k$), allora la V_k integrale è necessariamente un cono generico, cioè un cono proiettante da un punto una V_{k-1} che non rappresenta nessuna equazione di Laplace (TERRACINI D n. 5, e BOMPIANI D n. 10.)

12. — La proposizione finale del n. precedente è stata estesa in sensi diversi dal BOMPIANI e dal TERRACINI.

Così il TERRACINI (D n. 7, e E n.[i] 2 - 4) ha studiato che cosa avviene quando, ferma restando l'ipotesi dell'esistenza di un sistema parziale ∞^{k-1} di quadriche associate contenenti uno S_{k-2} fisso, si assumono, per il numero i delle equazioni di Laplace linearmente indipendenti, dei valori superiori a k. Se (per $k > 3$) $i \leq 2k - 3$, la V_k integrale è ancora un cono, che questa volta proietta da un punto una V_{k-1} rappresentante $i - k$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti. Se poi $i = 6$ per $k = 4$, oppure per $k > 4$ è $2k - 2 \leq i \leq 3k - 4$, la V_k integrale è un cono nelle stesse condizioni ora dette, oppure una rigata sviluppabile con linea direttrice (*), oppure ancora, se $k = 4$, è costituita dai piani tangenti di una superficie, o da ∞^2 piani tangenti a una curva.

Un' altra estensione (Terracini D. n. 9, e Bompiani D. n. 14) consiste in ciò: se il sistema lineare delle quadriche associate è quello delle quadriche per uno S_{k-l-1} fisso $(0 < l < k-1)$, la V_k è uno S_{l-1} — cono generico (proiettante da uno S_{l-1} una V_{k-l} che non rappresenta nessuna equazione di Laplace) (**).

Il Bompiani (D) ha poi considerato altre estensioni del medesimo teorema finale del n. 11. Chiamiamo, come egli fa, *sistema a caratteristica* un sistema di equazioni di Laplace, le cui quadriche associate contengano uno stesso S_{k-2}, ammettendo però anche che possa essere $i < k$: il sistema è *parabolico* se quello S_{k-2} contato due volte fa parte del sistema delle quadriche associate (come avviene sempre per $i = k$). Per un tale sistema la V_k integrale, ammesso che non rappresenti ulteriori equazioni di Laplace, se $i > 2$ si compone di ∞^{k-1} coni generici, e se $i = 2$ è una ∞^{k-1} di rette i cui S_k tangenti nei singoli punti di una generatrice stanno in uno stesso S_{2k-2} (***) (eventualmente costituita da ∞^{k-2} superficie sviluppabili). Nel caso non parabolico, la V_k è una ∞^{k-i-1} di varietà V_{i+1} ciascuna delle quali è così fatta, che in essa vi sono ∞^1 varietà G_i e ∞^i linee γ tali che le tangenti alle linee γ nei punti di una G_i passano per un punto,

---

(*) Come si dirà al n. 26, una V_k rigata con S_k tangente fisso lungo ogni generatrice ha le sue rette tangenti a $k-1$ V_{k-1}, ciascuna delle quali può essere sostituita da una varietà di minor dimensione incontrata da quelle rette; qui ci si trova precisamente in presenza di questa particolarità.

(**) Per $l = k-1$ si ottengono ∞^1 di S_{k-1} sviluppabili ordinarie. E per $0 < l < k-1$, se oltre alle quadriche per lo S_{k-l-1} fisso, esistono altre quadriche associate, la V_k è una ∞^{k-1} di S_l lungo ciascuno dei quali essa è toccata da uno stesso S_k (Bompiani D. n. 13).

(***) Questo tipo di soluzioni manca fra quelli elencati dal Bompiani ed è invece assegnato (insieme con la esplicita rappresentazione analitica) al n. 4 di Terracini G. Il Bompiani considera poi ancora dei sistemi da lui chiamati *totalmente parabolici* che si ottengono raggruppando in modo opportuno più sistemi parabolici.

mentre gli S_i tangenti alle G_i nei punti di una linea γ appartengono a una sviluppabile ordinaria (*).

13. — La ricerca della V_k tali che per ogni loro punto vi sia uno spazio S_p $(1 \leq p \leq k)$ costituito di tangenti tripunte conduce pure a un particolare sistema di equazioni di Laplace, sistema avente come sistema di quadriche associate quello delle quadriche contenenti doppiamente uno S_{k-p-1}. Se la V_k non rappresenta ulteriori equazioni di Laplace, e $2 \leq p \leq k$, essa è necessariamente una ∞^{k-p} di S_p generica (cioè non rappresentante altre equazioni di Laplace se non quelle che traducono la proprietà sopra esposta (TERRACINI D. n. 10; cfr. anche BOMPIANI D n. 17).

Il TERRACINI (D. n. 11) ha anche considerato il caso in cui vi sono uno S_p, uno S_q, ecc. $(2 \leq p < k$, $2 \leq q < k$, ecc. con $p+q+ + \ldots \leq k)$ nelle condizioni di sopra, linearmente indipendenti tra loro — salvo, s' intende, la circostanza che essi escono da uno stesso punto della V_k — (cosicchè le quadriche associate alle equazioni di Laplace rappresentate dalla V_k contengono doppiamente uno S_{k-p-1}, uno S_{k-q-1} ecc.). Allora, se la V_k non rappresenta altre equazioni di Laplace, essa contiene necessariamente gli S_p, gli S_q, ecc. delle tangenti tripunte. In particolare, se $p+q=k$, il TERRACINI ha dimostrato che la V_k è una V_k di SEGRE, d'ordine $\dfrac{(p+q)!}{p!\,q!}$ di uno spazio $[pq+p+q]$ rappresentante, nel modo indicato dal SEGRE, le coppie di punti di uno S_p e di uno S_q.

(*) La memoria D. del Bompiani contiene poi anche lo studio di alcuni sistemi *a caratteristica* del terz' ordine analoghi ai precedenti, sistemi costituiti da equazioni del secondo e del terzo ordine, le cui forme associate (rispettivamente quadratiche o cubiche) contengono a fattore una stessa forma lineare. Il BOMPIANI si occupa particolarmente del caso in cui esiste una espressione A del tipo $a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \ldots + a_k x^k$ tale che alcune delle sue derivate prime siano combinazioni lineari della x e delle derivate prime di x (in modo però che questo sistema parziale risulti parabolico secondo la terminologia adottata) e tutte le derivate seconde della A siano combinazioni lineari della x e delle sue derivate prime e seconde.

Anche un'altra notevole categoria di V_k è stata caratterizzata in base al relativo sistema di equazioni di Laplace: quella delle V_k (estensione delle superficie con un doppio sistema di coni circoscritti) che ammettono una rappresentazione parametrica del tipo

$$x = \varphi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p) + \psi(\tau_{p+1} \ldots, \tau_k).$$

Per conchiudere che una V_k appartiene a tale categoria basta sapere che il sistema delle quadriche associate coincide con quello delle quadriche contenenti uno S_{k-p-1} e uno S_{k-q-1} con $p + q = k$), fra loro sghembi (TERRACINI D n. 12) (*).

§ 6. — La varietà degli spazi tangenti a un'altra varietà.

14. — Già si è accennato al n. 10 alla varietà W ricoperta dagli S_k tangenti a una varietà V_k. Se x è il punto che descrive la V_k, un punto generico y della W è dato da

$$y = x + \lambda_1 x^{(1)} + \ldots + \lambda_k x^{(k)}$$

al variare dei parametri $\tau_1, \ldots, \tau_k$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Siccome il sistema costituito dal punto y e dai suoi derivati primi rispetto ai $2k$ parametri ora nominati si riduce subito a

$$x, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \lambda_1 x^{(11)} + \ldots + \lambda_k x^{(1k)}, \ldots, \lambda_1 x^{(k1)} + \ldots, \lambda_k x^{(kk)},$$

è chiaro che se la V_k rappresenta $i > \frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, la varietà W ha dimensione minore di quella, $2k$, che le compete in generale per V_k immerse in spazi abbastanza elevati. Precisamente, se $i = \frac{k(k-1)}{2} + l$, la dimensione delle W è $\leq 2k - l$.

(*) Per $p = 1$ cfr. anche la fine del n. 12.

Tutto ciò è evidente; meno evidente è che viceversa, dal fatto che la W abbia dimensione $2k - l$, si può inferire che la V_k rappresenti proprio $i = \frac{k(k-1)}{2} + l$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, con una sola eccezione, e cioè che quella particolarità si presenta anche quando il sistema delle forme quadriche associate al sistema (meno ampio di quanto ora si è detto) di equazioni di Laplace rappresentato dalla V_k abbia un sistema apolare con matrice jacobiana nulla, di caratteristica $k - l$ (TERRACINI D n. 3) (*).

Questo teorema viene così a completare quello del n. 10 fornendo un mezzo (mediante la sua seconda alternativa) per scartare le V_k cui si è accennato nell'ultimo capoverso di quel n. La determinazione effettiva delle V_k, cui la seconda alternativa si riferisce, costituisce però un problema assai complesso. Per $k < 4$ abbiamo già precedentemente avuto occasione di dire che essa non ha luogo per $k = 2$, e conduce, per $k = 3$, ai coni generici: il caso $k = 4$ è stato trattato dal TERRACINI (E): per $l = 2$, la V_k è uno S_1 — cono generico: per $l = 1$, la V_k è un cono proiettante da un punto una V_3 che rappresenta nessuna, o una, o due equazioni di Laplace linearmente indipendenti; oppure è una generica sviluppabile con curva direttrice, o è formata dai piani tangenti a una superficie generica, o è una ∞^2 generica di piani tangenti a una curva; o è la V_4^6 di S_8 di SEGRE rappresentante le coppie di punti di due piani, o è costituita da superficie poste negli S_5 di uno S_2 — cono generico, o infine è una generica ∞^2 di piani con S_5 tangente fisso lungo ogni piano generatore.

Le varietà V_k, delle quali si è parlato in questo n., aventi cioè una varietà W di dimensione $2k - l$, si possono altresì

(*) Se, in quest' ultimo caso, i ha il valore minimo possibile cioè

$$lk - \frac{l(l-1)}{2} \quad (\text{con } l < k - 1),$$

la V_k è uno S_{l-1} — cono generico.

considerare come quelle per cui due S_k generici infinitamente vicini fra loro stanno sempre in uno S_{2k-l} (*).

15. — Supposto ora che la varietà W del n. precedente abbia dimensione $2k$, si conosce subito, in base a quanto si è osservato in principio del n. 14, che, per una qualsiasi V_k generica, la W_{2k} è toccata da uno stesso S_{2k} nei punti di ogni retta tangente alla V_k: dimodochè gli S_{2k} tangenti alla W_{2k} nei singoli punti di un suo S_k generatore sono ∞^{k-1}, o meno; anzi, in generale sono proprio ∞^{k-1}. D'altro lato, se la V_k rappresenta $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, la W_{2k} è toccata da uno stesso S_{2k} addirittura in tutti i punti di un suo S_k tangente generico (**). Il Terracini ha studiato (in G) i casi intermedi: vale a dire ha cercato di caratterizzare mediante il modo in cui sono costituiti i corrispondenti sistemi di equazioni di Laplace, le V_k $(k \geq 3)$ tali che entro ogni loro S_k tangente generico gli spazi, γ, di contatto della corrispondente W_{2k} coi singoli suoi S_{2k} tangenti abbiano dimensione g con $1 < g < k$. La proprietà richiesta si traduce in una proprietà del sistema delle quadriche associate, per il cui enunciato rimandiamo alle due Note ora citate. La determinazione effettiva dei sistemi di quadriche che godono di tale proprietà costituisce in generale un problema assai complicato; il Terracini lo ha risolto per $k \leq 4$ trovando che per $k = 4$ la soluzione è data dai sistemi lineari ∞^2 di quadriche contenenti un piano; dai sistemi lineari ∞^3 contenenti un sistema ∞^2 (e non più ampio) del tipo ora detto; dai sistemi lineari ∞^3 di quadriche per due rette sghembe oppure mutuamente tangenti lungo

---

(*) Il Bompiani al n. 29 di D. considera l'abbassamento di dimensione che ha luogo per la varietà ricoperta non più dagli S_k tangenti, ma dagli spazi osculatori di una classe di V_k da lui studiata in quella memoria, classe a cui si è accennato nella nota a pag. 748.

(**) In tal caso gli S_{2k} tangenti alla W_{2k} sono (al massimo) ∞^k. Si badi che possono tali S_{2k} essere ∞^k anche in altre ipotesi: ma allora i loro S_k di contatto con la W_{2k} non coincidono più con gli S_k tangenti alla V_k. Per $k = 2$ ciò avviene soltanto per le superficie di Veronese (Segre A n. 27).

una retta; dai sistemi lineari ∞^4 contenenti un sistema lineare ∞^3 di uno dei tipi precedenti; dai sistemi lineari ∞^4 che ammettono due rette sghembe polari fisse, oppure contengono tutte le coppie dei piani di un fascio (*). Per $k=3$ il TERRACINI ha determinato effettivamente non solo i tipi dei sistemi di quadriche associate, ma i tipi di V_3 che godono della proprietà richiesta (per $g=2$, il solo caso che si possa attualmente presentare): sono le V_3 che si ottengono per $k=3$, $i=2$ dalla fine del n. 12, e inoltre le V_3 rigate con S_4 tangente fisso lungo ogni retta generatrice.

§ 7. — Comportamento degli spazi osculatori a una varietà in relazione con le sue sezioni iperpiane.

16. — Quando di una V_k si considerano le sezioni iperpiane generiche, i loro spazi tangenti coincidono sempre con le traccie degli S_k tangenti alla V_k sull'iperpiano segante. Ma, se anzichè gli spazi tangenti si considerano gli spazi osculatori, le cose possono procedere in modo diverso. Indichiamo con S_ω lo spazio osculatore alla V_k in un suo punto x, e con $S_{\omega'}$ lo spazio osculatore nello stesso x alla V_{k-1} sezione della V_k con un iperpiano σ passante genericamente per x; allora $S_{\omega'}$ in generale, ma *non sempre*, esaurisce l'intersezione σS_ω, cosicchè $\omega' = \omega - 1$ non appena sia $\omega \leq \frac{(k-1)(k+2)}{2} + 1$, mentre per $\omega > \frac{(k-1)(k+2)}{2} + 1$, è $\omega' = \frac{(k-1)(k+2)}{2}$. Ma vi sono delle V_k *eccezionali*, tali che, per le loro sezioni iperpiane generiche, ω' ha un valore più piccolo di quelli ora indicati. Esse sono (TERRACINI D n. 8) le V_k rappresentanti un sistema di $i = \frac{k(k+3)}{2} - \omega$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, tale che la matrice jacobiana

(*) Dai sistemi lineari ∞^4 nominati vanno però esclusi quelli che eventualmente risultino dotati di retta base.

delle loro forme associate sia identicamente nulla di caratteristica $k-(\omega-\omega'-1)$.

Tali V_k non esistono per $k=2$; per $k=3$ sono i luoghi generici di piani entro S_n con $n \geq 6$ (luoghi generici nel senso che quelle V_3 non devono rappresentare altre equazioni di Laplace se non le ∞^2 che esprimono che le varietà stesse sono luoghi di piani). Per $k=4$, si ottiene un numero assai maggiore di tipi: la loro determinazione è stata iniziata dal TERRACINI (F), ma non ancora condotta a termine (*).

§ 8. — Le linee quasi asintotiche di una varietà.

17. — Su una superficie generica in S_n con $n>3$ non esistono linee asintotiche: in luogo di esse il BOMPIANI (**) ha introdotto delle linee *quasi-asintotiche.* Si chiama quasi-asintotica $\gamma_{p,q}$ ogni linea tracciata sulla superficie, tale che lo spazio congiungente lo S_q osculatore alla linea in un suo punto generico con lo spazio p-tangente alla superficie nel medesimo punto $(p<q)$ abbia sempre dimensione minore di quella che compete a una linea generica della superficie (vale a dire minore di quella dell'ultimo spazio nominato aumentato di $q-p$, purchè questa somma sia $\leq n$). Il concetto si estende poi subito a V_k qualunque.

Limitandoci per ora al caso delle superficie, su una superficie qualunque esistono sempre delle quasi-asintotiche, pur di fissare convenientemente gli indici p e q. Così, si trova subito che su una superficie di S_n esistono sempre ∞^{n-2} quasi-asintotiche $\gamma_{1,n-1}$. Viceversa, per $n=5$, $n=6$, l'esistenza di ∞^{n-2} quasi asintotiche $\gamma_{1,n-1}$ su una superficie permette di desumere che la superficie sta in uno S_n, come il BOMPIANI ha dimostrato in F, esprimendo anche la presunzione che altrettanto valga per tutti i valori

---

(*) Ciò avverrà in un' ulteriore Nota IV in continuazione delle D, E, F.

(**) Per il caso delle superficie rigate, in H: un cenno di questo e di un altro caso particolare si trova già in BOMPIANI B. Per il concetto di quasi-asintotiche in generale, dal punto di vista proiettivo, cfr. i lavori dello stesso BOMPIANI che saranno citati fra poco: non ci occupiamo qui delle proprietà metriche trovate dal BOMPIANI in altri lavori.

più elevati di n (*). Diverso è il caso di $n = 4$: vale il risultato precedente solo se si aggiunge l'ipotesi che la superficie in questione rappresenti un'equazione di Laplace: se essa non ne rappresenta nessuna, e possiede ∞^2 quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ è una superficie di Veronese, secondo quanto sarà detto or ora.

Il BOMPIANI (O, P) ha anche studiato il caso di una superficie possedente ∞^2 quasi-asintotiche $\gamma_{k-1,\,k+1}$: se gli spazi k-tangenti della superficie hanno la dimensione $\frac{k(k+3)}{2}$ (cioè se la superficie non rappresenta nessuna equazione alle derivate parziali di ordine k) essa è necessariamente la superficie razionale normale di ordine k^2, di uno spazio $\left[\frac{k(k+3)}{2}\right]$, che rappresenta, in modo ben noto, la totalità delle curve piane algebriche di ordine k (e quelle $\gamma_{k-1,\,k+1}$ appartengono ad S_k e sono le curve razionali normali C^k della superficie). Il BOMPIANI ha pure stabilito un teorema analogo relativo alle V_3 contenenti ∞^4 $\gamma_{k-1,\,k+1}$ quasi asintotiche.

Nel caso delle superficie razionali normali sopra accennato, quelle quasi asintotiche intervengono in modo notevole, insieme con gli spazi osculatori in punti o lungo le stesse curve, sul problema della effettiva costruzione della varietà rappresentativa della totalità delle curve piane con date singolarità, anche infinitamente vicine (BOMPIANI Q).

18. — Il teorema di KOENIGS, relativo alle proiezioni su un piano delle asintotiche di una superficie dello spazio ordinario, è stato esteso dal BOMPIANI (M), il quale ha dimostrato che, se una superficie possiede due sistemi ∞^1 di quasi-asintotiche $\gamma_{p,\,p+1}$, $\gamma_{q,\,q+1}$ i quali si proiettino (su uno spazio di dimensione $\leq p+q$) secondo un doppio sistema coniugato, questo è necessariamente a invarianti uguali.

(*) La dimostrazione per ogni valore di n è stata data dal BOMPIANI nel caso delle superficie rigate. E per queste egli ha anche trovato un altro criterio per l'appartenenza di una rigata ad un dato spazio, fondato sulla conoscenza di una sola quasi-asintotica (al n. 4 di F).

§ 9. — Altri notevoli sistemi di linee esistenti sulle superficie.

19. — Il Bompiani (N) ha cercato di estendere alle superficie degli iperspazi la nozione dei sistemi coniugati dello spazio ordinario. Sappiamo già che le linee coniugate di una superficie rappresentante un'equazione di Laplace costituiscono appunto una tale estensione. Ma qui si tratta di trovare dei sistemi di linee che esistano su tutte le superficie. Partiamo dall'osservazione che i piani tangenti a una superficie F nei singoli punti di un suo elemento E_ν d'ordine ν (cfr. il n. 2) appartengono a uno spazio di dimensione $\leq 2\nu + 2$.

Allora, se la dimensione n dello spazio ambiente è dispari ($n = 2\nu + 1$), si consideri un elemento E_ν di curva della superficie F passante genericamente per un suo punto x: i piani tangenti alla F nei punti di E_ν successivi a x determinano uno $S_{2\nu}$ che taglia il piano tangente in x lungo una retta tangente in x, *tangente coniugata di specie* ν *dell'elemento* E_ν. A ogni sistema ∞^1 di curve C tracciate su F si può così associare un sistema parimenti ∞^1 di curve K *suo coniugato di specie* ν, inviluppato dalle tangenti che sono coniugate agli elementi d'ordine ν delle curve del primo sistema. Si badi però che, per $\nu > 1$, in generale la relazione fra i due sistemi C e K non è involutoria. Invece la costruzione stessa prova che la notissima proprietà dei sistemi coniugati ordinari trova la sua estensione in quella che le tangenti coniugate di specie ν agli elementi E_ν di una curva della F sono tali che $\nu + 1$ consecutive non sono linearmente indipendenti. Anticipando la nozione del (primo) *indice di sviluppabilità* di una rigata, che sarà posta al n. 24 (massimo numero di generatrici consecutive fra loro in generale linearmente indipendenti) possiamo dire che la rigata di quelle tangenti coniugate ha indice di sviluppabilità ν (anzichè $\nu + 1$); e viceversa.

Il Bompiani ha particolarmente approfondito il caso del coniugio di 2ª specie: l'analogia coi sistemi coniugati ordinari continua anche in ciò che, assumendo come linee parametriche quelle di un doppio sistema coniugato di 2ª specie, le coordinate di un punto che descriva la superficie appaiono come soluzioni di un' equazione lineare omogenea alle derivate parziali del terz' ordine. È inoltre notevole il fatto che, dato il sistema K, mentre in generale esistono ∞^2 linee della superficie F tali che ∞^1 fra esse si possono assumere come linee C, se la F rappresenta un'equazione di Laplace esistono soltanto due sistemi ∞^1 di linee C (e viceversa). Se poi si suppone che sulla superficie F esista un sistema di linee K tale che risulti indeterminato il corrispondente sistema C, ne consegue che, o la superficie sta in S_4, oppure le K sono linee contenute in piani di una sviluppabile ordinaria; se invece il sistema delle linee C ha indeterminato il coniugato di 2ª specie, si arriva alla conclusione che la superficie sta in S_4, oppure rappresenta un' equazione di Laplace per cui le C sono caratteristiche, oppure infine che le linee C stanno negli S_3 di una sviluppabile ordinaria.

Negli spazi pari $S_{2\nu+2}$, assegnato ad arbitrio un sistema ∞^1 di curve C, non è più *in generale* possibile ottenere un coniugato di specie ν (da definirsi come sopra); così in S_6, su una superficie generica esistono (in tutto) ∞^2 curve C tali che ad ∞^1 di esse scelte come curve C si può associare un sistema ∞^1 di curve K loro coniugate di seconda specie. Questo risultato, e quello che gli corrisponde in S_5 sono stati invertiti dal Bompiani così: le superficie tali che per ogni loro sistema ∞^1 di curve C esista un coniugato di seconda specie, sono le superficie di S_5 e quelle contenenti ∞^1 linee nei piani di una sviluppabile ordinaria: le superficie con ∞^2 curve C, tali che ad ∞^1 fra esse si possa associare un sistema ∞^1 di linee K coniugate di seconda specie, sono le superficie di S_6 e quelle contenenti ∞^1 linee negli S_3 di una sviluppabile ordinaria.

20. — Nella sua Nota testè analizzata il Bompiani considera, per una superficie generica F dello S_5, le linee *autoconiugate di 2ª specie:* esse si ripartiscono in cinque sistemi ∞^1 (che si riducono a soli tre, se la F possiede un doppio sistema coniugato ordinario), e coincidono con le *linee principali* già studiate in altri lavori dal Segre e dallo stesso Bompiani. Tali linee, oltre che dal punto di vista ora detto, si possono anche considerare come le linee inviluppate su una superficie di S_5 dalle *tangenti principali,* vale a dire dalle rette definite in uno dei seguenti modi:

1) Fra gli ∞^1 S_4 che segano la F secondo una linea avente una cuspide nel punto x della F stessa (S_4 tangenti al cono V_4^2 di cui si è detto al n. 1 — v. la fine di quel n. —) ve ne sono cinque per cui x è un *tacnodo:* le relative tangenti sono le tangenti principali alla F in x (Segre B n. 24).

2) Fra le direzioni della F uscenti da x, quelle delle tangenti principali si possono caratterizzare come appartenenti a curve della F passanti per x e tali che i loro S_3 osculatori in x coincidano con gli S_3 2-tangenti (cfr. il n. 2) alla F in x secondo le tangenti stesse (Bompiani C n. 7).

Una linea principale della stessa F si può poi anche definire (Segre E) come una linea della F tale che lo spazio congiungente i piani tangenti alla F in due punti infinitamente vicini della linea stessa, x e $x + dx$ o sia uno S_3, oppure abbia, in x, con la linea stessa, contatto quadripunto (anzichè tripunto come avviene in generale).

Le linee principali sono indeterminate solamente sulla superficie di Veronese, e sulle sviluppabili di S_5 (Segre E).

21. — Oltre che nel modo accennato al n. 19, la nozione degli ordinari sistemi coniugati si può estendere anche in altri sensi, rinunciando però alla genericità della superficie entro lo spazio ambiente che si considera. Per es. il Bompiani (nella Nota II di L) ha considerato alcuni sistemi di curve di una superficie in relazione col fatto che esse rappresentino una o più equazioni lineari alle derivate parziali del terzo ordine. Così, se p. es. i punti $x^{(112)}$ e $x^{(122)}$ stanno sempre nello S_5 2-tangente alla superficie nel suo punto generico x, il doppio sistema $\tau_1 = \text{cost}, \tau_2 = \text{cost}$ viene a godere di proprietà che ricordano assai da vicino quelle degli ordinari sistemi coniugati: la rigata delle tangenti alle linee τ_2 nei singoli punti di una linea τ_1 ha indice di sviluppabilità uguale a 2 e analogamente scambiando τ_1 con τ_2 (d'accordo col n. 20).

§ 10. — Varietà luoghi di spazi.

22. — Fra le altre varietà sono state particolarmente studiate le varietà *luoghi di spazi*, cui si è già avuto occasione di accennare qua e là nei precedenti paragrafi, ricordando fra l'altro la nozione di ∞^1 di spazi *sviluppabile ordinaria*.

Per una qualsiasi V_{k+1} luogo di ∞^1 S_k, gli S_{k+1} tangenti nei singoli punti di uno S_k generatore corrispondono omograficamente ai loro punti di contatto. Però questa omografia può essere degenere, il che avviene quando esista uno spazio *singolare* o *focale* $[k_1]$ comune allo S_k generatore considerato e al suo successivo (cfr., anche per quel che segue Segre B n[i] 1-5). Se ciò avviene per ogni S_k generico delle ∞^1, questa si dice *sviluppabile*. Se poi ogni S_k generico della ∞^1 deve avere un $[k_1]$ singolare, poi ogni $[k_1]$ singolare, entro la relativa ∞^1, deve avere un $[k_2]$ singolare, ecc.... e così via fino a $[k_\nu]$ (senza che la ∞^1 sviluppabile di S_k sia un cono), questa varietà si ottiene partendo da ∞^1 di $[k_\nu]$ i cui spazi generatori non ammettano generalmente punti singolari, tirando in modo generico ∞^1 $[k_{\nu-1}]$ per gli spazi congiungenti due $[k_\nu]$ consecutivi, poi ∞^1 $[k_{\nu-2}]$ per gli spazi congiungenti due $[k_{\nu-1}]$ consecutivi, e così via. Da ciò risulta anche che per l'esistenza della ∞^1 di S_k devono valere le disuguaglianze

$$n-k \geq k-k_1 \geq k_1-k_2 > \ldots \geq k_{\nu-1}-k_\nu \geq k_\nu+1.$$

23. — Se ora prendiamo a esaminare più in generale una ∞^α di S_k $(\alpha \geq 1)$, la considerazione degli $S_{k+\alpha}$ tangenti nei punti di uno spazio generatore alla $V_{k+\alpha}$ luogo della ∞^α conduce alla seguente proprietà: in generale gli ∞^k $[k+\alpha]$ tangenti alla $V_{k+\alpha}$ nei singoli punti di un suo S_k generatore fissato G e gli $\infty^{\alpha-1}$ $[2k+1]$ ognuno dei quali congiunge G con uno S_k infinitamente vicino della ∞^α riempiono una medesima $V_{2k+\alpha}$ (cono di vertice G) il cui ordine è $\binom{k+\alpha-1}{k}$ e la classe è $\binom{k+1}{\alpha-1}$, oppure $\binom{\alpha}{k}$, secondo che $\alpha \leq k+1$, oppure $\alpha \geq k+1$: in generale, lo spazio di appartenenza di questa varietà è $\alpha k+\alpha+k$, se questo numero è $\leq n$.

Quanto all'esistenza di punti *singolari* o *focali* (comuni a due S_k infinitamente vicini) sugli S_k generici dell'∞^α, in generale, essi esistono solo quando $2k+\alpha > n$; e formano allora una varietà di dimensione $2k+\alpha-n-1$ e d'ordine $\binom{n-k}{\alpha-1}$, a meno che sia $k+\alpha > n$, nel qual caso abbracciano tutto lo spazio generatore (cfr. per tutto ciò SEGRE B, n. 6-12) (*).

24. — Particolarmente sono stati studiati i sistemi di rette. Per essi, quanto si è detto or ora porta alla conclusione che per una ∞^α di rette, in generale, soltanto se $\alpha > n-2$ esistono su ogni retta generatrice dei punti singolari, abbracciando tutta la retta se $\alpha > n-1$, ed essendo invece in numero di $n-1$ se $\alpha = n-1$ (**).

Ma a risultati aventi una maggior portata si giunge introducendo col BOMPIANI (***) il concetto di *indici di sviluppabilità* di una superficie rigata. Come già si è accennato, si dice che una superficie rigata ha ν come *primo indice di sviluppabilità* quando ν generatrici consecutive sono in generale linearmente indipendenti, mentre non lo sono $\nu+1$. Se non è $n=2\nu-1$, la ∞^1 degli $S_{2\nu-1}$ ciascuno dei quali contiene ν generatrici consecutive della rigata risulta una sviluppabile ordinaria, e le generatrici della rigata risultano immerse negli S_ν di questa sviluppabile (intersezioni di ν $S_{2\nu-1}$ consecutivi). Allora la generatrice generica, immersa in uno S_ν della sviluppabile, incontra certo lo $S_{\nu-1}$ della sviluppabile stessa contenuto in tale S_ν: ma può avvenire che incontri

---

(*) Per una ∞^α di S_k si possono anche considerare punti singolari o fochi di ordine superiore: così i fochi di 2° ordine, punti d'incontro di tre spazi successivi. Per es. per un sistema di ∞^2 piani in S_4, su ogni piano di Σ vi sono in generale 5 fochi di 2° ordine, mentre i fochi di primo ordine costituiscono su ognuno di quei piani una conica: e, se queste coniche non sono tutte degeneri, solamente i sistemi ∞^2 di piani costituiti dai piani delle coniche di una F^4 proiezione della superficie di Veronese, o della F^3 rigata di S_4 son tali che tutti i punti delle coniche focali sono fochi di 2° ordine (SEGRE D). Per altre questioni dello stesso tipo v. SEGRE F.

(**) Cfr. SEGRE: *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori*. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo II, 1888.

(***) H., cfr. anche B.

lo spazio $[\nu_1]$ della sviluppabile stessa essendo $\nu_1 < \nu - 1$. Comunque sia $\nu_1 \leq \nu - 1$ (per le generatrici generiche) si dice che ν_1 è il *secondo indice di sviluppabilità* della rigata considerata, ponendo $\nu_1 = -1$ quando gli S_ν della sviluppabile costituiscono un cono il cui spazio vertice è incontrato da tutte le generatrici della rigata. Se invece $n = 2\nu - 1$ si sostituisca alla ∞^1 di $S_{2\nu-1}$ testè considerata, la ∞^1 di $S_{2\nu-2}$ che nasce nel seguente modo: congiungendo lo $S_{2\nu-3}$ di $\nu - 1$ generatrici consecutive a una prefissata genericamente g con un punto arbitrario di g si ha uno $S_{2\nu-2}$, che taglia la consecutiva di g in un punto: questo è congiunto allo $S_{2\nu-3}$ delle $\nu - 1$ generatrici consecutive alla consecutiva di g mediante uno $S_{2\nu-2}$, ecc. ecc. Si ha così una ∞^1 di $S_{2\nu-2}$ sviluppabile, sulla quale si può ragionare come sopra, con l'avvertenza che essa non è più univocamente determinata dalla rigata, bensì può variare in un sistema ∞^1 dipendentemente dalla scelta del punto arbitrario di g, di cui si è detto: come valore di ν_1, *secondo indice di sviluppabilità* della rigata, si assume il più piccolo fra i valori di ν_1 relativi alle singole ∞^1 di $S_{2\nu-2}$ sviluppabili.

Da quanto precede si può anche conchiudere che la più generale rigata di S_n avente indici di sviluppabilità ν e ν_1 è tale che le sue generatrici sono negli S_ν di una sviluppabile ordinaria e ne incontrano i $[\nu_1]$ (dove di queste sviluppabili ve ne sono certo ∞^1 se $n = 2\nu - 1$, e $\nu_1 = \nu - 2$).

Passiamo ora a un sistema ∞^α di rette con $\alpha \geq 1$: se $\alpha < n - 1$, quanto si è detto in principio di questo n. non informa per nulla sul modo di costituzione della rigata. Invece il Bompiani (H) ha ricercato, entro il sistema ∞^α, le rigate coi minimi indici di sviluppabilità (analoghe dunque alle superficie rigate sviluppabili contenute in una generica congruenza di rette). Il risultato è questo (valido per ∞^α generiche): se $n - \alpha$ è dispari, i minimi indici di sviluppabilità per una superficie rigata del sistema sono $\frac{n - \alpha + 1}{2}$, $\frac{n - \alpha - 1}{2}$; ogni elemento (*)

(*) Intendiamo qui come elemento di ordine h di una superficie rigata l'insieme di $h + 1$ sue generatrici consecutive.

$E_{\frac{n-\alpha-1}{2}}$ (entro il sistema) determina α di queste rigate (cosicchè vi sono α sistemi $\infty^{(\alpha-1)\frac{n-\alpha+1}{2}}$ di tali rigate): se $n-\alpha$ è pari, i minimi indici per una superficie rigata del sistema sono $\frac{n-\alpha}{2}+1$, $\frac{n-\alpha}{2}-1$: ogni elemento $E_{\frac{n-\alpha}{2}}$ determina ∞^1 fra queste rigate (cosicchè vi sono $\infty^{(\alpha-1)\left(\frac{n-\alpha}{2}+1\right)+1}$ di queste rigate).

25. — Il Bompiani ha approfondito lo studio delle quasi-asintotiche di una superficie rigata ponendole in relazione coi suoi indici di sviluppabilità (*). Si dice che una rigata *presenta il caso normale* quando i suoi indici di sviluppabilità hanno i massimi valori compatibili con la dimensione dell'ambiente: cioè, se n è pari,

$$\nu=\frac{n}{2},\quad \nu_1=\nu-1,$$

e, se n è dispari,

$$\nu=\frac{n-1}{2},\quad \nu_1=\nu-2.$$

Allora, per una rigata che presenti il caso normale si hanno, fra l'altro, le seguenti proprietà. Esistono ∞^{n-2h} $\gamma_{h,\,n-h}$: una di esse risulta determinata da un suo elemento E_{n-2h-1}. In ogni rigata immersa in uno spazio di dimensione pari $n=2\nu$ esiste, in generale, una sola $\gamma_{\nu,\,\nu}$. Ogni rigata appartenente a uno spazio di dimensione dispari $2\nu-1$ possiede in generale ∞^1 $\gamma_{\nu-1,\,\nu}$, che segano le generatrici in punteggiate proiettive.

Se poi il primo indice di sviluppabilità è ν, con ν qualunque, e il secondo è ν_1, la rigata possiede una $\gamma_{\nu_1+1,\,\nu}$ (o ∞^1 di queste curve se $n=2\nu-1$, $\nu_1=\nu-2$) coincidente con lo spigolo di

(*) Per una rigata una $\gamma_{h,\,l}$ si può anche definire come una curva tale che per lo S_{l-h} osculatore alla curva in ogni suo punto generico si possa condurre uno S_{l-1} appoggiato ad $l+1$ generatrici consecutive della rigata. Cfr. anche i §§ 112-113.

regresso della sviluppabile di cui si è detto nella prima metà del n. 24; mancano però tutti i sistemi $\gamma_{h,l}$ con $l \leq n - \nu$, i quali vengono assorbiti dalla $\gamma_{\nu_1+1,\nu}$ ora detta.

Mediante gli indici di sviluppabilità finora considerati il Bompiani ha dato la rappresentazione analitica di una *rigata qualsiasi* mediante un sistema di due equazioni differenziali lineari omogenee. Se la rigata è generata come luogo delle congiungenti i due punti $x(t)$, $y(t)$ tale sistema è (posto $x' = \frac{dx}{dt}$, ecc.) del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} a_{10}x + a_{11}x' + \ldots + a_{1\nu}x^{(\nu)} + b_{10}y + b_{11}y' + \ldots + b_{1\nu_1}y^{(\nu_1)} = 0, \\ a_{20}x + a_{21}x^{(1)} + \ldots + a_{2,\nu-1}x^{(\nu-1)} + b_{20}y + b_{21}y' + \ldots + \\ + b_{2,n-\nu+1}y^{(n-\nu+1)} = 0, \end{array}\right.$$

dove le a e b sono funzioni di t. Viceversa, assegnato ad arbitrio un sistema del tipo indicato, gli corrisponde una classe di rigate proiettivamente identiche con gli indici di sviluppabilità ν e ν_1.

§ 11. — Luoghi di spazi con carattere di sviluppabili.

26. — La nozione di sviluppabile ordinaria si può estendere in modi diversi; ad alcuni di questi si è già accennato nei numeri precedenti.

Un altro modo deriva dalla considerazione delle V_k con meno di $\infty^k S_k$ tangenti (Segre B n[i] 28-31): già sappiamo dal n. 3 che allora la V_k è un luogo di spazi (di dimensione ≥ 1) con uno S_k tangente fisso lungo ogni spazio generatore (*). Nel caso più semplice, in cui la V_k è una ∞^α di rette, con $S_{\alpha+1}$ tangente fisso lungo ogni retta generatrice, esistono α varietà V_α a cui le generatrici sono tangenti, ognuna delle V_α potendo essere sostituita da una varietà di minor dimensione incontrata (senza contatto)

(*) Tali V_k sono spesso ancora designate come *sviluppabili:* così anche noi abbiamo parlato, in questo senso, di rigate sviluppabili p. es. al n. **11**.

dalle ∞^α rette (*). La ricerca di tali ∞^α di rette si può far dipendere (in generale) da quella di una delle α V_α di cui ora si è detto: se con $x(\tau_1, \ldots, \tau_\alpha)$ si designa nel modo consueto un punto che descriva una di queste V_α, in modo che le linee τ_1 siano su tale V_α inviluppate dalle tangenti che descrivono la ∞^α di rette in questione, occorre e basta che stiano in un $S_{\alpha+1}$ i punti:

$$x, \; x^{(1)}, \ldots, \; x^{(\alpha)}, \; x^{(11)}, \; x^{(12)}, \ldots, \; x^{(1\alpha)},$$

e perciò la V_α rappresenta le $\alpha - 1$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti in cui si traduce l'imposizione di tale proprietà (**). Questa V_α si può caratterizzare geometricamente dicendo che il sistema lineare di coni quadrici tangenti in un suo punto generico x alle sezioni della V_α con gli iperpiani che ivi la toccano è tale che una retta della stella ha lo stesso $S_{\alpha-1}$ polare rispetto a tutti i coni (***); oppure che essa possiede un sistema $\infty^{\alpha-1}$ di linee tali che gli S_α tangenti ad essa nei punti di una tale linea sono gli S_α di una sviluppabile ordinaria. Inoltre gli $S_{\alpha+1}$ di una tale sviluppabile sono appunto gli $S_{\alpha+1}$ tangenti fissi lungo le singole ∞^α generatrici alla $V_{\alpha+1}$ di cui nella prima parte di questo n.; dimodochè, come ora risulta da quanto si è detto più sopra, se una $V_{\alpha+1}$ rigata è tale che lungo ogni sua generatrice esiste uno $S_{\alpha+1}$ tangente fisso, gli ∞^α $S_{\alpha+1}$ tangenti si distribuiscono in generale (in α modi diversi) in $\infty^{\alpha-1}$ sistemi semplicemente infiniti, composti degli spazi $S_{\alpha+1}$ di una sviluppabile ordinaria.

(*) Più in generale, se lungo ogni retta generatrice vi è uno S_c tangente, con $2 \leq c \leq \alpha + 1$, vi sono $c - 1$ varietà V_α toccate dalle generatrici (con un'avvertenza analoga a quella del testo).

(**) Il sistema costituito da queste equazioni è di quelli che al n. 12 si sono chiamati a caratteristica (generalmente si tratterà di sistemi non parabolici). Il secondo modo di caratterizzare tale V_α fra i due che stiamo per esporre è appunto da raffrontare con la fine del n. 12.

(***) Ogni V_{n-2} di S_n si trova, come facilmente si vede, in queste condizioni, e quindi si può assumere come una delle V_α considerate nel testo.

27. — Altri modi di generalizzare la nozione di superficie sviluppabile conducono alle seguenti proposizioni.

Una V_{n-1} dello S_n tale che ogni suo punto sia *parabolico* vale a dire tale che il suo cono quadrico delle tangenti tripunte abbia sempre una generatrice doppia, contiene ogni tale retta e ha lungo essa un iperpiano tangente fisso (SEGRE B n. 27).

Se entro una $V_{\alpha+1}$ rigata ogni superficie rigata ha il primo indice di sviluppabilità ν (con $\nu \leq \alpha - 1$), la ∞^α si compone di $\infty^{\nu-1}$ coni aventi i loro vertici sopra uno $S_{\nu-1}$, oppure appartiene ad uno spazio di dimensione $\leq 2\nu$ (BOMPIANI H n. 17).

Al BOMPIANI (H n. 18) è anche dovuto un risultato più generale: consideriamo una $V_{\mu+1}$ rigata, e conveniamo di dire che essa ha indice di sviluppabilità ν quando è fisso lo spazio ν-tangente nei punti di una generatrice generica e non lo spazio $(\nu - 1)$-tangente (*). Allora, in uno spazio ambiente di dimensione maggiore di

$$\frac{(\mu+1)\ldots\ldots(\mu+\nu-1)\,(\mu+2\nu)}{\nu!} - 1$$

una $V_{\alpha+1}$ rigata tale che ogni $V_{\mu+1}$ rigata in essa contenuta abbia indice di sviluppabilità ν $\left[\text{con } \alpha \geq \mu + \binom{\mu+\nu-1}{\nu-1}\right]$ è composta di rette uscenti dai punti di uno spazio avente la dimensione

$$\binom{\mu+\nu-1}{\nu-1} - 1.$$

28. — Un altro indirizzo nelle ricerche di cui ci stiamo occupando è il seguente. Come deve essere costituito un sistema Σ di $\infty^\alpha S_k$ $(\alpha > 1)$ affinchè uno S_k generico di Σ incontri sempre in uno S_l (con $l \geq 0$) tutti gli S_k del sistema che gli sono infinitamente vicini? Se lo S_l singolare di ogni S_k è fisso per tutte le ∞^1 contenute nello ∞^α passanti per esso, il SEGRE (B n. 26) ha

(*) Per $\mu = 1$ la definizione si riduce a quella già nota per il primo indice di sviluppabilità di una superficie rigata.

trovato che la varietà luogo di tutti gli S_l così ottenuti risulta tale che tutti gli S_k della ∞^α le sono tangenti, a meno che lo S_l non sia lo stesso per tutti gli S_k; e viceversa.

La determinazione dei sistemi Σ in questione nel caso di $\alpha = 2$ è stato compiuto dal SEGRE (B, n.[i] 32-35) per le ∞^2 di piani, e per le ∞^2 di S_k qualunque dal TERRACINI (C). Occorre e basta che sia verificata una delle seguenti condizioni:

1) gli S_k di Σ stanno in uno spazio di dimensione $2k-l$, oppure passano tutti per uno stesso S_l, oppure ancora essi tagliano in S_{l+1} uno S_{l+2} fisso;

2) gli S_k di Σ sono tangenti ciascuno lungo uno S_l ad una U_{l+1} luogo di ∞^1 S_l $(l < k-1)$;

3) gli S_k di Σ si ottengono considerando una ∞^2 di S_m $(l \leq m \leq k;\ l < k-1)$ tale che la U_{m+2} loro luogo ammetta lungo ciascuno di essi uno S_{k+m-l} tangente fisso, e conducendo uno S_k generico per ogni S_m della ∞^2 entro il corrispondente S_{k+m-l} tangente.

Al TERRACINI è pure dovuta la determinazione dei sistemi Σ in questione costituiti da piani, per α qualunque (i sistemi di rette si trattano in modo ovvio). Supposto $l=0$ (se $l=1$ si hanno soltanto delle soluzioni banali) e lasciando ormai da parte il caso $\alpha=2$, e i casi in cui per ogni piano è fisso il punto in cui è incontrato dai piani infinitamente vicini, oppure lo S_4 che lo congiunge con tali piani (la prima di queste ipotesi è già stata considerata più sopra, e la seconda si riduce alla prima per dualità in S_5), si ha che per $\alpha > 3$ i sistemi Σ sono costituiti da piani che incontrano in rette un piano fisso: per $\alpha = 3$ si hanno anche i sistemi ∞^3 di piani di una quadrica generale V_4^2 dello S_5, e i sistemi dei piani che passano per le singole rette di una ∞^2 ricoprente una U_3, dotata di S_3 tangente fisso lungo ogni generatrice, e sono situati entro i corrispondenti S_3 tangenti.

Consideriamo ancora il caso in cui α è abbastanza grande $(\alpha \geq k+1)$ e k qualunque (TERRACINI C n.[i] 7-10), e supponiamo che gli S_l d'intersezione di uno S_k di Σ con gli infinitamente vicini siano sempre distribuiti, per così dire, in modo uniforme sopra quello S_k, cioè che per un punto generico di tale S_k passino $\infty^{\alpha-k-1+l}$ S_k di Σ ad esso infinitamente vicini, i quali non seghino generalmente tale S_k in uno spazio di dimensione $> l$; allora si trova che gli S_k di Σ stanno in una varietà Γ_{2k-l} di dimensione $2k - l$, e che essi (anche se non sono infinitamente vicini) si segano a due a due generalmente in uno S_l (in modo però che per un punto generico di uno S_k della Γ passano $\infty^{\alpha-k+l}$ S_k della Γ, i quali generalmente non incontrano quello S_k in uno spazio di dimensione $> l$). Supponiamo, per semplicità, che sia $l = 0$: il TERRACINI ha trovato che la varietà Γ sta necessariamente in uno spazio di dimensione $\leq \frac{k(k+3)}{2}$; e che, se la dimensione dello spazio ambiente raggiunge questo massimo, oppure almeno supera $\frac{k(k+1)}{2} + 1$, la Γ in questione è necessariamente quella che rappresenta nel noto modo di GRASSMANN la totalità delle rette di uno spazio di $k + 1$ dimensioni (cosicchè è proprio $\alpha = k + 1$), oppure è una sua proiezione.

§ 12. — Un tipo particolare di luoghi di spazi.

29. — L'ultimo risultato citato risolve, in un caso particolare, il problema della determinazione di una ∞^{α} di S_k che ricoprano una varietà di dimensione $< \alpha + k$. In generale, questo problema sembra offrire notevoli difficoltà. Già per gli stessi sistemi di rette, dopo il caso banale di $\alpha = 2$, e quello di $\alpha = 3$, nel quale si trova facilmente che, se per ogni punto di una V_3 passano ∞^1 rette della V_3 stessa, questa è una quadrica non degenere dello S_4, oppure si compone di ∞^1 piani (*), per $\alpha = 4$ la soluzione completa non è più nota: il TOGLIATTI (**) ha trovato che se una V_4 è ricoperta da ∞^4 rette (e non da ∞^5) essa è luogo di ∞^2 piani,

---

(*) SEVERI: *Intorno ai punti improprii...*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XV, 1901, n. 10.

(**) *Sulle varietà a k dimensioni contenenti* ∞^k *rette.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LVII, (1921).

oppure è luogo di ∞^1 quadriche V_3^2 non degeneri di S_4, oppure appartiene al massimo a uno S_7; e se lo spazio d'appartenenza ha proprio dimensione 7, quella V_4 si ottiene come sezione mediante uno S_7 della V_6^5 di S_9 che rappresenta, al modo di GRASSMANN, le rette di uno S_4 (*).

30. — Il problema di cui si è detto al principio nel n. precedente è stato particolarmente studiato nel caso in cui gli ∞^α S_κ in questione sono gli S_h $(h+1)$ — seganti di una varietà G_p. Lasciando da parte il caso in cui G è una curva, che conduce solo a soluzioni banali, il caso in cui G è una superficie è stato trattato in modo completo da F. PALATINI (**) e dal TERRACINI (H). Le superficie per le quali la varietà M ricoperta dagli S_h $(h+1)$ — seganti ha dimensione minore di quella che compete all'analoga varietà relativa ad una superficie generica immersa nel medesimo spazio ambiente sono le superficie luoghi di ∞^1 linee situate in altrettanti S_q per uno S_{q-1} fisso, con $q \leq h$, immerse in S_n, con $n \geq 2h + q + 2$ (per le quali la varietà degli S_h $(h+1)$ — seganti ha dimensione $2h+q+1$), e le superficie algebriche razionali dello S_{3h+2} rappresentabili in un piano mediante il sistema lineare delle curve d'ordine $2h$ aventi in comune un punto $2(h-1)^{\text{plo}}$ ed $(h-1)$ punti doppi, o anche, per $h=4$, mediante il sistema lineare di tutte le quartiche (per tutte queste superficie la varietà degli S_h $(h+1)$ — seganti ha dimensione $(3h+1)$.

Il fatto che per $h=1$ si ottenga dal teorema ora enunciato, insieme coi coni, la superficie di Veronese (in accordo con un risultato precedentemente ottenuto dal SEVERI, loc. cit., v. il n.° 8) paragonato con quello che questa superficie è pure caratterizzata

---

(*) In un certo senso analoga alla questione di cui si è detto in questo n. è la ricerca delle superficie contenenti almeno ∞^2 linee di tipo prestabilito: p. es. ∞^2 linee piane, ciò che conduce a una notissima proprietà delle superficie di Veronese (che la caratterizza insieme con pochi altri tipi di superficie), oppure ∞^2 linee spaziali, caso a cui sono dedicate le due Note di SEGRE F e G.

(**) *Sulle superficie algebriche i cui S_h $(h+1)$ — seganti non riempiono lo spazio ambiente,* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, volume XL, (1906).

dall'essere in S_n, con $n \geq 5$, la sola superficie non cono i cui piani tangenti si incontrano a due a due (*) rientra nel teorema dovuto al TERRACINI (A), che pone in relazione l'eventuale abbassamento di dimensione della varietà degli S_h $(h+1)$ — seganti di una varietà G_p immersa in uno spazio di dimensione $n \geq (h+1)p+h$ con l'esistenza di $h+1$ qualsiansi suoi S_p tangenti in uno spazio di dimensione minore dell'ordinario; in quanto questa dimensione e quella si riducono, l'una in conseguenza dell'altra, a $(h+1)p+h-i$ (con $i < 0$) (**). In tal caso, di più, lo spazio $[(h+1)p+h-i]$ di $h+1$ qualsiansi S_p tangenti della G_p in questione è tangente alla G_p in tutti i punti di una certa varietà di dimensione

$$\geq \frac{i + \frac{i}{h}}{h+1}.$$

31. — Per $p=2$, $h=1$ quanto or ora si è detto conduce alle superficie (che sono poi coni o superficie di Veronese) tali che lo S_4 di due loro piani tangenti generici risulti tangente alla superficie stessa in ∞^1 altri punti. Lo SCORZA (***) e il TERRACINI (H) hanno anche studiato le superficie, immerse in S_n, con $n \geq 6$, (non coni) tali che lo S_5 individuato da due loro piani tangenti generici contenga necessariamente i piani tangenti in ∞^1

(*) In questo ordine di idee, citiamo il teorema più generale secondo il quale la sola superficie non rigata di S_n, con $n \geq 5$, i cui piani tangenti si appoggino ad almeno ∞^1 piani, senza appoggiarsi di conseguenza ad una retta è la superficie di Veronese (V. TERRACINI J, e per un caso particolare COMESSATTI: *Intorno alle superficie algebriche irregolari...*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XLVI 1922).

(**) Perciò la determinazione che lo SCORZA ha compiuto delle V_3 e delle V_4 con gli S_3, o rispettivamente S_4 tangenti mutuamente secantisi (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXV, 1908, e tomo XXVII, 1909) fornisce le V_3 e V_4 per cui la varietà delle corde ha dimensione minore dell'ordinario (la ricerca, per quanto riguarda la V_4, non è però condotta completamente a termine).

(***) *Un problema sui sistemi lineari di curve appartenenti a una superficie algebrica.* Rend. del R. Ist. Lombardo, serie II, vol. XLI, 1908.

punti, e hanno trovato, come tali, le sviluppabili, i luoghi di ∞^1 linee (eventualmente rette) in altrettanti piani per una retta fissa, e infine le superficie situate su un cono V_3^4 di Veronese.

32. — Il TERRACINI (I) ha anche considerato, in relazione con una superficie F, le varietà, rispettivamente Φ_t e H_s, costituite dagli S_3 che ne congiungono i singoli punti ai singoli piani tangenti, e dagli S_5 che ne congiungono le coppie di piani tangenti, allo scopo di studiarne gli eventuali abbassamenti di dimensione e anche alcune altre particolarità che esse possono presentare, come ora si dirà; particolarità tutte che stanno in stretta relazione con i problemi di determinare le superficie F per le quali hanno una intersezione di dimensione maggiore dell'ordinario:

a) un piano tangente e uno S_4 osculatore generici;
b) un piano tangente e uno S_5 osculatore generici;
c) due S_4 osculatori generici;
d) due S_5 osculatori generici.

In base all'osservazione che, se gli spazi r-tangenti generici di una superficie F sono degli S_d, e se essi incontrano uno S_p fisso in spazi di dimensione $i \geq d - r$, la F sta, con lo S_p, in uno spazio di dimensione $d + p - i$ (cosicchè tutti gli S_d generici di questo spazio ambiente segano lo S_p in S_i), è chiaro che, detta i la dimensione dell'intersezione considerata nei precedenti problemi *a*), *b*), *c*), *d*), nei casi *a*) e *b*) è necessariamente $i = 0$, mentre il problema *c*) si spezza in due problemi c_1), c_2), secondo che si supponga $i = 1$, $i = 0$; e il problema *d*) in tre problemi d_1), d_2), d_3) secondo che si supponga $i = 2$, $i = 1$, $i = 0$. Quanto alla dimensione dello spazio ambiente, essa deve essere supposta ≥ 7 nel problema *a*), ≥ 8 nel problema *b*), $\geq 9 - i$ nel problema *c*), e $\geq 11 - i$ nel problema *d*).

Allora le superficie che risolvono il problema *a*) sono anche le sole superficie di S_n, con $n \geq 7$, per cui la dimensione t della varietà Φ ha dimensione < 7 (e precisamente dimensione 6). Inoltre le superficie di S_n, con $n > 7$ per cui la varietà Φ_7 è toccata da uno stesso S_7 nei singoli punti di ogni S_3 generatore sono le superficie che risolvono il problema *b*), e inoltre le superficie di quegli spazi che rappresentano una equazione di Laplace senza essere soluzioni del problema *a*).

Quanto alla varietà H, le superficie F non sviluppabili di S_n per le quali essa ha dimensione $e < 9$ sono (*) le superficie che risolvono il problema c_1), e per esse $e = 7$, e le superficie che risolvono il problema c_2) oppure il problema d_1) e per esse $e = 8$. Che se poi la H_9, in S_n, con $n \geq 10$, ha da essere toccata da uno stesso S_9 nei singoli punti di ogni suo S_5 generatore, le corrispondenti superficie sono quelle che risolvono il problema d_2), e inoltre le superficie di quegli spazi che rappresentano una equazione di Laplace senza essere soluzioni del problema c).

Finalmente, quanto alla soluzione effettiva dei problemi a), b), c), d), essa è fornita (salvo una limitazione che sarà detta più avanti, per quanto riguarda il problema d)), dalle seguenti superficie.

Problema a), $n \geq 7$. Luoghi (non degeneranti in coni) di ∞^1 linee (eventualmente rette) in altrettanti piani per una retta fissa.

Problema b), $n \geq 8$. Luoghi di ∞^1 linee (eventualmente piane, ma non rette) in altrettanti S_3 per un piano fisso, non rappresentanti equazioni di Laplace, e le superficie algebriche razionali di S_9 o di S_8 rappresentabili su un piano mediante sistemi lineari di cubiche.

Problema c_1), $n \geq 8$. Il problema coincide col problema a), salvo la diversa limitazione per la dimensione dello spazio ambiente.

Problema c_2), $n \geq 9$. Luoghi di ∞^1 linee (eventualmente rette) in altrettanti piani di una sviluppabile ordinaria con un punto fisso, non costituenti però una sviluppabile; e luoghi di ∞^1 linee in altrettanti S_3 per un piano fisso che rappresentano una (sola) equazione di Laplace.

Problema d_1), $n \geq 9$. Il problema coincide col problema b), salvo la diversa limitazione per la dimensione dello spazio ambiente.

Problema d_2), $n \geq 10$. Luoghi di ∞^1 linee (eventualmente piane, ma non rette) situate in altrettanti S_3 di una sviluppabile ordinaria con retta fissa, o di ∞^1 linee (eventualmente appartenenti a S_3, o a S_2, ma non rette) situate in altrettanti S_4 per uno S_3 fisso, con la restrizione, in entrambi i casi, che quelle superficie non rappresentino equazioni di Laplace; infine le superficie (non

(*) Prescindendo, s' intende, dalla soluzione triviale della superficie di S_8.

coni) situate su un cono V_3^9 proiettante da un punto la superficie algebrica razionale, rappresentata su un piano mediante il sistema lineare delle curve di terzo ordine.

Problema d_3), $n \geq 11$. Però il problema non è stato risoluto se non per $n \geq 13$, ottenendosi in tali spazi: le superficie situate su un cono proiettante da un punto una superficie di S_{n-1} rappresentante una (sola) equazione di Laplace senza che esse rappresentino alcuna equazione di Laplace; le superficie luoghi di ∞^1 linee giacenti in altrettanti S_4 di una sviluppabile con piano fisso, oppure in altrettanti S_5 per uno S_4 fisso, purchè, in entrambi i casi, esse non rappresentino equazioni di Laplace, e senza escludere che quelle linee eventualmente appartengano a spazi di dimensione minore, purchè sempre > 1; le superficie luoghi di ∞^1 linee in altrettanti S_6 per uno S_5 fisso, colla condizione che le tangenti a quelle linee incontrino lo S_5 fisso in punti appartenenti a una medesima superficie di Veronese (ma non tutti giacenti su una curva), e infine le superficie di S_{14} o di S_{13} algebriche razionali rappresentabili su un piano con un sistema lineare ∞^{14} o ∞^{13} di curve del quarto ordine.