APPENDICE II[a]

I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie

DI ENRICO BOMPIANI

In un gruppo di lavori qui appresso elencati (*) ho cercato di dare un fondamento geometrico diretto alla teoria proiettiva delle curve e delle superficie (nello spazio ordinario).

(*) A – *Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme.* Rendic. R. Accad. dei Lincei, s. V., vol. XXXII, 1923.

B – *Nozioni di geometria proiettivo-differenziale relative ad una superficie dello spazio ordinario.* Ibidem, vol. XXXIII, 1924.

C – *Costruzione di invarianti proiettivo-differenziali di una superficie.* Ibidem s. VI, vol. II, 1926.

D – *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane.* Ibidem, volume III, 1926.

E – *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato.* Ibidem, vol. III, 1926 (2 Note).

F – *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario.* Atti R. Accad. Scienze di Torino, vol. LIX, 1924.

G – *Le forme di Fubini nella teoria proiettiva delle superficie.* Rendic. Istituto Lombardo, vol. LVII, 1924.

H – *Sulla geometria proiettivo-differenziale delle superficie.* Rendic. Semin. Matem. dell' Università di Roma, vol. II, 1923-24.

I – *Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario.* Bollettino Unione Matem. Ital., a. III, 1924.

Chi abbia letto il presente Trattato ha certo notato l'importanza che nello studio di tali enti assumono certe forme differenziali (arco proiettivo delle curve piane o sghembe; elemento lineare proiettivo di FUBINI; etc.) e come da esse dipenda la costruzione di invarianti numerici (p. es. curvatura proiettiva delle superficie) o geometrici (p. es. normale proiettiva di FUBINI) fondamentali per la teoria. L'introduzione di queste forme ha carattere analitico; la loro invarianza risulta da proprietà formali.

Se si confronta questa teoria con quella metrica delle curve o delle superficie (considerate o nel gruppo dei movimenti o nel gruppo delle applicabilità) si scorge subito una diversità profonda nel loro modo di sviluppo: chè infatti in quest'ultima le forme differenziali che stanno a base della trattazione hanno un significato geometrico immediato (che si riconduce in ogni caso all'invariante elementare « distanza di due punti » o « angolo di due direzioni »): ed è proprio questo significato che ne suggerisce e ne giustifica l'uso.

K – *Contributo alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie.* Ibidem, a. III, 1924.

L – *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari.* Ibidem, a. IV, 1925.

M – *Per lo studio proiettivo-differenziale delle singolarità.* Ibidem, a. V, 1926.

N – *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie.* Ibidem. a. V, 1926.

O – *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie.* Annali di Matematica, s. IV, t. I, 1923-24.

P – *Rappresentazione geodetico-proiettiva fra due superficie.* Ibidem, t. III, 1925-26.

Q – *Sul contatto di due curve sghembe.* Memorie Accad. Scienze di Bologna, s. VIII, t. III, 1925-26.

R – *Corrispondenza fra una superficie e le sue parallele.* Mathem. Zeitschrift. Bd. 24, H. 2, 1925.

Questi Lavori saranno citati includendone la lettera d'ordine nel testo fra [ ]. I richiami al vol. I del presente Trattato saranno fatti così: [G. P. D. pag. ...].

Non è così nella geometria proiettiva. E la differenza ha origine da una difficoltà sostanziale che si presenta in questa teoria e che conviene porre chiaramente in evidenza.

La domanda da esaminare è questa: quale può essere il significato proiettivo di una forma differenziale (del primo ordine)?

Sia data una varietà di elementi, « punti », individuati sulla varietà stessa per mezzo di un sistema di coordinate essenziali u_i $(i = 1, \ldots, n)$. Una forma differenziale (di qualsiasi grado e) del 1° ordine in queste coordinate acquista un valore ben determinato quando sia data un'n — upla di valori per le coordinate u_i (che in generale figurano nei coefficienti della forma) e un'n — pla di valori per i loro differenziali du_i. In termini geometrici, la forma acquista un valore ben determinato quando sia dato un punto P (u_i) e un punto P' $(u_i + du_i)$ della nostra varietà. Se la forma è invariante rispetto a determinate trasformazioni, cioè se essa ha un significato geometrico per la geometria della varietà relativa ad un determinato gruppo, ciò vuol dire che è possibile costruire un invariante (rispetto a quel gruppo) di due punti infinitamente vicini P e P'.

Se il gruppo considerato è quello metrico (fondamentale) la distanza fornisce l'invariante desiderato. Ma se il gruppo è quello proiettivo la nostra esigenza sembra contrastare col fatto che l'invariante elementare (birapporto) di questo gruppo acquista un senso solo per quattro (e non per due) elementi di una forma di prima specie.

A sciogliere questa apparente contraddizione (in cui risiede la difficoltà sopra accennata) intervengono alcuni *invarianti proiettivi infinitesimi* di contatto (fra curve o superficie) che dipendono effettivamente, per dirla in breve, da *due* soli elementi infinitamente vicini. Questi invarianti infinitesimi sono, a mio modo di vedere, la chiave di volta per la ricostruzione geometrica di tutta la teoria del Fubini; ma, anche prima di vedere che cosa precisamente essi siano, è facile intendere ch'essi hanno una portata che trascende di gran lunga questa teoria. È noto infatti che tutt'i gruppi che hanno un reale interesse geometrico si lasciano considerare come gruppi lineari (con certe varietà algebriche invarianti): or bene, i nostri invarianti (birapporti) infinitesimi forniscono per ciascuna di queste geometrie un metodo razionale per la costruzione delle forme differenziali invarianti che la caratterizzano (*).

Illustrerò la natura e l'ufficio di questi invarianti infinitesimi ricostruendo rapidamente la teoria delle curve e delle superficie. Data l'importanza di queste, esporrò altri due metodi, non di portata generale come il precedente, ma particolari a questi enti, per ottenere le forme fondamentali di FUBINI, la curvatura proiettiva, il fascio canonico etc.: il primo modella la teoria delle applicabilità proiettive su quella delle ordinarie applicabilità (in senso metrico) sostituendo alle geodetiche un sistema doppiamente infinito di curve proiettivamente invarianti della superficie; il secondo studia la geometria della superficie come ente dello spazio rigato e si giova della rappresentazione iperspaziale delle congruenze delle tangenti asintotiche sulla quadrica di S_5. E il Lettore avrà così occasione di riconoscere quale sia la fecondità e la generalità delle ricerche di geometria iperspaziale, qui riassunte nell'Appendice III, che, come sopra ho accennato, sintetizzano, per così dire, ogni ramo di geometria differenziale.

I. — Curve piane.

1. - Invariante di Segre.

Siano C e $\overline{C}$ due curve piane aventi in un punto O un contatto di ordine n, intero (≥ 1), e sia O punto ordinario per esse.

Si consideri una trasversale prossima ad O la quale seghi C, $\overline{C}$ e la tangente t comune in O rispettiv. nei punti P, $\overline{P}$, T (prossimi ad O). Sia M un punto preso a piacere sulla trasversale (diverso dai tre considerati) e si formi il birapporto $D = (P\overline{P}\,TM)$.

(*) Il FUBINI, nella sua idea primitiva, pensava al gruppo proiettivo ampliato; e perciò, abbandonati i punti e i birapporti si riferiva agli elementi (di ordine elevato il minimo possibile) della varietà studiata: cioè nel caso delle superficie ad x, y, z, p, q, r, s, t, ...

Si faccia ora tendere la trasversale (con una legge scelta a piacere) a passare per O, con la sola condizione che la posizione limite sia $\neq t$, e pure con legge arbitraria si faccia variare M su di essa, con la condizione che la posizione limite di M sulla posizione limite della trasversale sia $\neq O$.

Si deve a C. SEGRE (*) il seguente risultato: *il limite del birapporto* D *è un' invariante proiettivo delle due curve considerate in* O*: esso non dipende affatto dalle posizioni limiti della trasversale e del punto* M.

Se le equazioni delle due curve, riferite ad un qualsiasi sistema di coordinate proiettive non omogenee avente origine in O e la tangente t come asse x sono

$$(1) \qquad y = x^2 \Sigma a_i x^i \quad (a_0 \neq 0), \qquad (\overline{1}) \quad y = x^2 \Sigma \overline{a}_i x^i \quad (\overline{a}_0 \neq 0)$$

detto invariante vale $a_0 \mid \overline{a}_0$.

Questo *invariante di* SEGRE, come lo chiameremo, è dunque un *carattere proiettivo finito* relativo al contatto delle due curve; esso vale 1 se le due curve hanno un contatto d'ordine superiore al primo $(n > 1)$.

2. – Invariante assoluto di un' equazione di Laplace.

Di questo invariante di SEGRE vogliamo far subito un'applicazione di cui ci gioveremo in seguito.

Data l'*equazione di Laplace* (**)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} + c\, x = 0$$

è noto che $n+1$ soluzioni x_i indipendenti di essa si possono interpre-

---

(*) *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche etc.* Rend. Accad. dei Lincei, s. V, vol. VI, 1897.

(**) Si veda p. es. la Memoria *Sull'equazione di Laplace.* Rendic. Circ. Matem. di Palermo, t. XXXIV, 1912.

tare come coordinate proiett. omog. di un punto (di uno S_n) che descrive al variare di u, v una superficie Φ sulla quale le linee u ($v = \text{cost}$) e v($u = \text{cost}$) costituiscono un doppio sistema coniugato. Se da un punto P (x_i) di Φ si passa ai punti P^1 di coordinate $x_i^1 = \frac{\partial x_i}{\partial v} + a x$, e P^{-1} di coordinate $x_i^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial u} + b x_i$ questi punti descrivono a lor volta due superficie Φ^1 e Φ^{-1} (*trasformate di Laplace* di Φ) sulle quali le linee u ($dv = 0$) e v ($du = 0$) formano ancora doppi sistemi coniugati. Il piano tangente in P a Φ è osculatore alla linea u passante per P^1 su Φ^1 e alla linea v per P^{-1} su Φ^{-1}: sicchè in esso si può considerare una conica Γ^1 osculatrice in P^1 alla linea u e tangente in P^{-1} alla linea v e un'altra conica Γ^{-1} osculatrice alla v per P^{-1} e tangente alla u per P^1.

È pure noto che l'equazione di Laplace possiede due *invarianti relativi*

$$h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab - c\,, \qquad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab - c$$

e quindi un *invariante assoluto* h/k. Eccone il significato geometrico [E]:

L'invariante assoluto di un'equazione di Laplace è proprio l'invariante di Segre (relativo a P^1 *o a* P^{-1}*) delle due coniche bitangenti* Γ^1 *e* Γ^{-1}*. Se l'equazione ha invarianti (relativi) uguali le due coniche coincidono e si ha il teorema di Koenigs.*

3. – Invarianti di contatto fra curve piane [D].

Ritorniamo alla considerazione del birapporto D. L'equazione della trasversale r sia

$$x = \alpha(\varepsilon)\, y + \varepsilon \tag{2}$$

variabile con ε in modo che $\alpha_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon)$ sia finito; ha funzione α (che per semplicità si può supporre analitica) caratterizza la ∞^1 di rette in cui varia r. Il punto M appartenente ad r abbia coordinate x_0, y_0 (in generale funzioni di ε); e sia $\lim_{\varepsilon \to 0} M \neq O$.

Il calcolo effettivo di $D = D_0 + D_1 \varepsilon + D_2 \varepsilon^2 + \ldots$ fornisce i seguenti risultati:

A. CONTATTO DEL 1° ORDINE FRA C E $\overline{C}$.

1. - $\lim_{\varepsilon \to 0} D = a_0 / \overline{a}_0 \neq 1$: *invariante di Segre.*

2. - *Il termine del 1° ordine in* D *dipende dalla posizione limite di r (per $\varepsilon \to 0$), ma* **non** *da quella di* M.

Esiste quindi una retta r_0 *proiettivamente invariante determinata dagli intorni del 3° ordine di* O *su* C *e* $\overline{C}$ *per la quale è* $\mathrm{D}_1 = 0$. Eccone una costruzione: *si consideri una qualsiasi conica avente un contatto del 3° ordine con* C *in* O, *e una conica analoga per* $\overline{C}$: *le rette che da* O *proiettano gli ulteriori punti d'intersezione delle due coniche sono divise armonicamente da* t *e da* r_0.

3. - Si consideri il punto di contatto R_0 di r_0 con la curva inviluppo delle rette r: si può determinare una posizione $M_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} M$ su r_0 per la quale è $D_2 = 0$; si faccia variare R_0: le punteggiate descritte da R_0 ed M_0 (su r_0) sono proiettive.

Sicchè: *Gli intorni del 4° ordine di* O *su* C *e su* $\overline{C}$ *determinano sulla retta invariante* r_0 *una proiettività (non involutoria, nè parabolica): il punto unito* $\mathrm{O}_1 \neq \mathrm{O}$ *è quindi un punto proiettivamente invariante.*

Il birapporto di O, O_1 *e dei due punti ove la loro retta* r_0 *incontra le coniche osculatrici in* O *a* C *e a* $\overline{C}$ *è proprio l'invariante di Segre.*

4. - *Se si prendono come rette* r *quelle per* O_1 *ed* $\mathrm{M} \equiv \mathrm{O}_1$ *ogni termine dello sviluppo di* D *è un invariante per collineazioni rispetto a* C *e a* $\overline{C}$.

B. CONTATTO D'ORDINE INTERO > 1.

1. – L'invariante di SEGRE è $= 1$.

2. – *Il termine principale di* $\log D$ [infinitesimo di ordine $n-1$ in ε se il contatto è d'ordine n] *è un' invariante proiettivo dipendente esclusivamente dagli intorni di ordine* $n+1$ *di* O *sulle due curve* C *e* $\overline{C}$*:* contrariamente a quanto avveniva per il contatto semplice, esso **non** dipende affatto dalle posizioni limiti di r e di M.

3. – Procedendo come nel caso precedente (A, 2) si trova una *retta invariante* determinata dagli intorni di ordine $n+2$ di O sulle due curve.

4. – Invarianti proiettivi di una curva piana [D].

Se O è un punto regolare, non sestattico, di una curva piana C si consideri la conica Γ^2 osculatrice in O e la cubica Γ^3, nodata in O, a contatto 7-punto in O con C: posto $\overline{C} \equiv \Gamma^2$ e successivamente $\overline{C} \equiv \Gamma^3$ il risultato indicato al n° precedente in B. 2. fornisce *due invarianti infinitesimi* di C dipendenti rispett. dagli intorni di ordini 5 e 7 di O (e di gradi 3 e 5 in ε), cioè *due forme differenziali del 1° ordine* (nel differenziale del parametro che individua i punti della curva), o anche, integrando lungo C, due *invarianti integrali. Il primo invariante infinitesimo e il rapporto (finito) di convenienti potenze dei due forniscono,* a meno di fattori numerici inessenziali, ***l'* arco proiettivo** *e la* **curvatura proiettiva,** utilizzata da L. BERWALD e G. SANNIA per la riduzione a forma intrinseca ed invariante dell'equazione differenziale di una curva piana.

La retta invariante, di cui in B. 3., è la **normale proiettiva** a C in O.

Si hanno così con sole considerazioni geometriche tutti gli elementi occorrenti per lo studio di una curva piana (priva di singolarità).

5. – Singolarità: punti di flesso [M].

Lo studio dei punti singolari è generalmente evitato nella geometria proiettivo-differenziale, mentre esso è proprio di sua pertinenza.

Studiare l'intorno di un dato ordine di un punto (singolare o no) di una curva vuol dire assegnare elementi geometrici (punti, rette, etc.) comuni a tutte le curve aventi in comune quell'intorno.

Per il flesso si hanno questi risultati:

Se O *è flesso di una curva* C, *le cubiche, a contatto 5-punto con* C *in* O, *dotate di cuspide hanno le tangenti cuspidali passanti per uno stesso punto* O_1 *della tangente in* O*: questo punto rappresenta l'intorno del 4° ordine del flesso su* C.

Le cubiche cuspidate aventi contatto del 5° ordine con C *in* O *hanno le loro cuspidi sopra una retta uscente da* O*: questa retta (insieme con* O_1*) rappresenta l'intorno del 5° ordine di* O *su* C.

V'è una cubica cuspidata avente contatto del 6° ordine con C *in* O*: la sua cuspide* O_2 *(sulla retta precedente) individua (con* O_1*) l'intorno del 6° ordine di* O *su* C.

Vale certo la pena (anche in vista della teoria delle superficie) di caratterizzare analogamente gli intorni di altri punti singolari.

II. — Curve sghembe.

1. – Invarianti di contatto.

La teoria (proiettiva) del contatto di due curve sghembe, analoga a quella per le curve piane, non è stata fatta. C. Segre (*) ha studiato il caso di due curve aventi in comune la tangente e il piano osculatore in un punto: si trova in questo caso un *inva-*

(*) *Sugli elementi curvilinei che hanno comune la tangente e il piano osculatore.* Rendic. Acc. dei Lincei, s. V, vol. XXXIII, 1924.

riante (di Segre) finito; ma questo risultato è prevedibile perchè, nell'ipotesi attuale e finchè non si esce dagl'intorni del 2° ordine delle due curve, si rimane sostanzialmente nel problema piano.

Nel caso generale del contatto di ordine n, intero ≥ 1, in O delle due curve C e $\overline{C}$ il procedimento da seguire per la ricerca degli invarianti di contatto è il seguente: Si seghino le due curve C, $\overline{C}$ e la tangente comune t con un piano ω prossimo ad O nei punti P, $\overline{P}$, T; poi si proiettino questi punti da una retta l per O e si consideri il birapporto D dei tre piani π, $\overline{\pi}$, τ così ottenuti e di un 4° piano arbitrario σ per l.

Lo studio di D, cioè della sua dipendenza da ω, l, σ fornirà gli invarianti di contatto delle due curve.

P. es.: Se $n = 1$, il $\lim D$ quando ω tende ad O non dipende affatto da σ, e non varia comunque varî l in un piano per t; ed è precisamente uguale al birapporto di questo piano, del piano principale (di Halphen) relativo alle due curve in O, e dei loro due piani osculatori [si ha quindi un *fascio* di birapporti].

Se questi coincidono (è il caso trattato dal Segre) l'invariante precedente conserva ancora senso, ma non dipende più affatto dalla retta l ed è uguale all'invariante di Segre relativo alle proiezioni delle due curve da un punto qualunque sul piano osculatore comune.

Ulteriori ricerche avranno certo interesse. Il fatto che si ottenga un fascio di birapporti (cioè due essenziali) in relazione ad ogni intorno di O sulle due curve dipende dall'altro (e serve a precisarlo in modo proiettivo) che l'aumento di un'unità nel loro ordine di contatto equivale a due condizioni indipendenti.

2. - Piano, retta e punto principali [Q].

Indipendentemente dalla ricerca precedente, possiamo subito introdurre due nuovi *invarianti geometrici* relativi a due curve a contatto d'ordine n in O.

Halphen ha scoperto il **piano principale** luogo di un punto tale che i coni proiettanti da esso le due curve abbiano un contatto d'ordine $n + 1$ lungo la generatrice per O.

Analogamente si prova che: *esistono in detto piano una* **retta principale** *e un* **punto principale** *tali che i coni proiettanti le due curve da un punto della retta o dal punto principale hanno lungo la generatrice per* O *un contatto d'ordine* $n + 2$ *o risp.* $n + 3$.

3. – Invarianti proiettivi di una curva sghemba [Q].

Si associ al punto *O* di *C* la cubica sghemba osculatrice Γ^3. Con essa e con le quadriche a contatto 7-punto in *O* con *C* (passanti inoltre per il *punto di Sannia*) si ottiene un ben determinato sistema di riferimento (tetraedro fondamentale e punto unità). L'**arco proiettivo** di *C* si ottiene da quello di una sua proiezione piana (p. es. sul piano osculatore); *la conoscenza del punto principale relativo a* C *e a* Γ^3 *in* O *equivale alla conoscenza delle due* **curvature proiettive** (di Sannia).

Sicchè anche in questo caso, come per le curve piane, si sono trovati in modo geometrico diretto tutti gli elementi fondamentali della teoria.

III. — Superficie. - Le forme fondamentali.

A. Metodo degli invarianti infinitesimi.

1. - Invarianti infinitesimi di contatto fra superficie.

Una sistemazione organica della teoria delle superficie deve fondarsi, come quella delle curve, sulla teoria del contatto di due superficie, cioè sulla determinazione degli invarianti proiettivi, finiti e infinitesimi, di contatto. La ricerca offre qui molto maggior varietà che nel caso delle curve, per le varie circostanze che possono presentare le due superficie anche quando sia fissato il loro ordine di contatto.

Ma qui, in vista del particolare risultato che si vuol raggiungere (ricostruzione geometrica delle forme invarianti di FUBINI) basterà occuparsi di un caso particolare della teoria stessa (corrispondente a quanto si è fatto per le curve piane in I-4).

2. – L'elemento lineare proiettivo di una superficie [F].

Considero una superficie σ non rigata e un suo punto O *generico* (cioè tale che nessuna delle tangenti asintotiche sia a contatto più che tripunto con σ). Quando occorrerà, mi servirò della rappresentazione parametrica $x_i\,(u, v)$ in cui le linee $u\,(dv = 0)$ e $v\,(du = 0)$ rappresentino le asintotiche e le x_i siano le coordinate *normali* di FUBINI soddisfacenti al sistema [G. P. D., pagine 89-90]

$$(4)\qquad \begin{cases} x_{uu} = \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\, x_u + \beta\, x_v + n\, x \\[2ex] x_{vv} = \dfrac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\, x_v + \gamma\, x_u + \nu\, x\,. \end{cases}$$

Questa scelta è fatta al solo scopo di rendere più brevi i calcoli, ma non è affatto necessaria: essa, com'è noto, dipende dalla normalizzazione delle forme fondamentali, che noi ritroveremo in modo affatto indipendente; sicchè anzi *le nostre costruzioni geometriche danno un procedimento diretto per raggiungere tale normalizzazione (delle forme e delle coordinate proiettive).*

Si consideri la quadrica Q di LIE [G. P. D., pag. 131] relativa ad O. Sia r una retta prossima ad O che seghi σ, Q e il piano τ tangente in O a σ rispettivamente nei punti O', O_Q, T prossimi ad O; e sia M un punto preso a piacere su r diverso dai precedenti. Come varia il birapporto $D = (O', O_Q, T, M)$ al variare di r e di M (su r)? Se O' tende ad O sopra una curva non tangente ad una asintotica in O si ha:

α. $\lim\limits_{O' \to O} D = 1$ (è l'analogo dell'invariante di SEGRE), *indipendentemente dalle posizioni limiti della retta* r *e del punto* M.

β. *Il termine principale di* $\log \mathrm{D}$ (**invariante proiettivo infinitesimo**) *è indipendente dalle posizioni limiti (per* $\mathrm{O}' \to \mathrm{O}$*) di* r *e di* M *e dipende soltanto dalla tangente in* O *alla curva sulla quale* O′ *tende ad* O*; esso vale*

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{du\, dv}$$

(ove du/dv *dà la tangente considerata), cioè fornisce un significato immediato dell'* **elemento lineare proiettivo di Fubini** (*).

γ. Se O' tende ad O sopra un'asintotica $\lim\limits_{O' \to O} D = 2/3$ per la quadrica di Lie; mentre è $= 1$ se ad essa si sostituisce una quadrica avente (per generatrici le tangenti asintotiche in O e) contatto del 3° ordine con l'asintotica.

3. – Le due forme normali di Fubini [F].

Pure con un birapporto infinitesimo si lascia esprimere la forma normale quadratica di Fubini.

Si consideri una qualsiasi curva di σ uscente da O in direzione du/dv e da un suo punto O' si conducano le asintotiche che taglieranno quelle per O in due punti O_1' e O_2'; della loro congiungente si considerino i punti C' e C'' d'intersezione con la quadrica di Lie e il birapporto $D' = (O_1' C' C'' O_2')$.

Il termine principale del birapporto D′ *quando* $\mathrm{O}' \to \mathrm{O}$ *è un invariante proiettivo infinitesimo che dipende solo dalla tangente in* O *alla curva descritta da* O′ *e vale*

$$\frac{1}{9} \beta \gamma\, du\, dv$$

cioè (a meno di un fattore numerico) fornisce il significato geometrico della forma quadratica normale di Fubini, $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$.

(*) Il Terracini, in una Nota Lincea in corso di stampa (1926_2) ne dà la seguente interpretazione: le due tangenti asintotiche in O e quelle in O' segano la retta comune ai loro piani in 4 punti; uno dei loro birapporti ha per termine principale, quando $O' \to O$, $4/9$ del quadrato dell'elemento lineare proiettivo.

Il risultato vale, con un semplice cambiamento del fattore numerico, quando invece della quadrica di Lie si prenda una qualsiasi quadrica contenente le tangenti asintotiche di σ in O. In particolare, se la quadrica si spezza si ha il seguente risultato espressivo:

Se da un punto generico (non appartenente a τ!) *si proiettano sul piano tangente* τ *le corde* $O O_1'$ *ed* $O O_2'$ *di* σ, *il termine principale del birapporto di queste due rette e delle tangenti asintotiche in* O *vale* $\frac{1}{4} \beta \gamma \, du \, dv$ *(qualunque sia il centro di proiezione).*

Questa semplicissima costruzione fornisce quindi direttamente la forma normale φ_2 e, insieme con la precedente, la forma cubica normale $\varphi_3 = 2 \beta \gamma (\beta du^3 + \gamma dv^3)$: ed è proprio questa semplicità che dà ragione dell'importanza e dell'opportunità della normalizzazione raggiunta dal Fubini per via analitica!

4. – Le prime forme elementari [N].

Chiamo così le forme monomie

$$\beta \frac{du^2}{dv}, \qquad \gamma \frac{dv^2}{du}$$

la cui invarianza si dimostra subito sottoponendo le (1) ad una qualunque delle operazioni che non mutano la superficie σ e le linee parametriche (asintotiche) su di essa. La considerazione di queste forme elementari è forse più vantaggiosa di quelle normali del Fubini: anche il loro significato geometrico è più semplice. Esso si ottiene pure da birapporti infinitesimi (nei quali non interviene la quadrica di Lie).

Si consideri un arco di curva $O O'$ *(di* σ*) uscente da* O (u, v) *in direzione* du/dv *e il punto d'intersezione* O_1' *dell'asintotica* u *uscente da* O *e dell'asintotica* v *uscente da* O'*: se* T *è il punto ove la* $O_1' O'$ *sega il piano tangente in* O *ed* M *è un punto qualsiasi di questa retta, il termine principale del birapporto* $(O_1' O' T M)$ *al tendere di* O' *ad* O *(purchè* M *non tenda ad* O*) vale* $\frac{1}{6} \beta \frac{du^2}{dv}$; *analogamente si ha l'altra forma elementare considerando invece* *di* O'_1 *il punto* O'_2 *intersezione dell' asintotica* v *per* O *con l' asintotica* u *per* O'.

La somma e il prodotto (dei termini principali) di questi due birapporti danno senz' altro l' elemento lineare proiettivo di Fubini e la forma quadratica normale (a meno di fattori numerici).

Il prodotto di una delle due forme elementari per il quadrato dell' altra fornisce i due invarianti, dipendenti ciascuno da *un solo* differenziale

$$d_1 s^3 = \beta^2 \gamma \, du^3, \qquad d_2 s^3 = \beta \gamma^2 \, dv^3 :$$

è conveniente assumere $d_1 s$ e $d_2 s$ (determinati a meno di una radice cubica dell' unità) come **elementi d' arco proiettivi delle asintotiche in** O.

Consideriamo ora il reticolato delle linee asintotiche su σ e in particolare una *maglia* di esso, definita dai vertici $O\ (u, v)$, $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$, $(u + du, v + dv)$. La differenza fra gli archi proiettivi di due lati opposti della maglia, p. es. di quelli situati su asintotiche u $(dv = 0)$ è l' invariante infinitesimo

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv = \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s} ;$$

sicchè :

Le linee di Segre sono le diagonali di un reticolato di asintotiche i cui lati contigui (infinitesimi) hanno archi proiettivi uguali (per le linee di Darboux, che costituiscono l' altro sistema di linee diagonali, i lati contigui sono uguali e di segno opposto). Le linee canoniche sono diagonali di un reticolato di asintotiche in cui in ogni maglia le differenze degli archi proiettivi delle coppie di lati opposti sono uguali (e di segno opposto, per le linee coniugate a quelle canoniche).

Anche del rapporto $\left(\frac{d_1 s}{d_2 s}\right)^3 = \frac{\beta}{\gamma} \frac{du^3}{dv^3}$ può darsi un significato molto semplice: *esso è il termine principale del birapporto dei punti* $O'_1\, O'_2$, *del punto ove questa retta incontra il piano tangente e di un quarto punto arbitrario su di essa (non tendente ad* O *con* O'*).*

Dal prodotto dei birapporti che definiscono $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$ e p. es. $\beta\, du^2/dv$ si ha il significato di $d_1 s^3$ (indipendente dalla curva scelta a definire quei birapporti).

5. – Alcuni elementi geometrici.

La conoscenza delle *forme* e, quindi, delle *coordinate normali* equivale geometricamente a fissare un tetraedro di riferimento relativo al punto O i cui vertici sono i punti x, x_u, x_v, x_{uv} che indicherò con O, O_1, O_2, O_3. Comunque si varî il fattore di proporzionalità delle x_i, cioè si assumano in loro vece le $y_i = \rho x_i$ con $\rho(u, v) \neq 0$ nel campo che si considera, i punti analoghi ad O_1, O_2 descrivono le due tangenti asintotiche uscenti da O, mentre la retta OO_3 è sempre la polare reciproca di $O_1 O_2$ rispetto alla quadrica di Lie, Q (precisamente: i lati $O_1 O_2$ e OO_3 del tetraedro sono fissati appena si assegnino i valori di ρ_u/ρ e di ρ_v/ρ, cioè il $d \log \rho$; per fissare O_3 bisogna assegnare ρ). Se le x sono coordinate normali di Fubini, il lato OO_3 è la *normale proiettiva* di Fubini. Essa è stata definita geometricamente in vari modi. Il seguente è dovuto al Terracini (*). È noto che esistono infinite omografie trasformanti la σ in una σ' avente un contatto del 3° ordine con σ in O (e tali che ciascuna tangente asintotica in O abbia per corrispondente sè stessa). Ogni tale omografia conserva anche l'intorno del 4° ordine di σ per una quaterna di direzioni di σ uscenti da O. Ad ogni retta uscente da O, considerata come retta unita in tali omografie corrisponde (in due modi diversi) un fascio di quaterne (associate) come le precedenti.

Se le quaterne associate ad una retta per O *sono apolari alla terna di Segre* (e perciò basta che lo sia una) *quella retta è la normale proiettiva.*

Un'altra costruzione della normale proiettiva, data di recente

(*) *Sul significato geometrico della normale proiettiva.* Rend. Acc. dei Lincei, s. VI, vol. III, 1926.

dal FUBINI (**) la ricollega alla considerazione delle quadriche di LIE relative ad O e ai punti infinitamente vicini sulle asintotiche per O.

Passo a caratterizzare [B] il vertice O_3 del tetraedro fondamentale. Si considerino le due rigate costituite dalle normali proiettive uscenti dai punti delle due asintotiche per O. Il piano tangente ad una di esse in O tocca l'altra in un punto C ($\neq O$) della normale; sia M l'ulteriore punto d'incontro di questa normale con Q: *il vertice* O_3 *è il quarto armonico dopo* O, C, M.

La quadrica Q di LIE (osculatrice lungo la generatrice per O ad una qualsiasi delle rigate delle tangenti asintotiche di un sistema uscenti dai punti dell'asintotica dell'altro sistema passante per O) è un elemento essenziale nella determinazione sia degli invarianti infinitesimi (forme fondamentali) sia degli altri elementi geometrici (tetraedro relativo ad O). Il seguente teorema [B] dà una proprietà dei singoli punti di essa:

La quadrica di Lie è il luogo dei punti singolari della rete di complessi determinata dalla congruenza lineare speciale osculatrice in O *ad una delle asintotiche e dal complesso lineare osculatore alla rigata delle tangenti asintotiche dell'altro sistema nei punti dell'asintotica considerata.*

Ancora da essa si può far dipendere [B] la determinazione delle terne di DARBOUX e di SEGRE e delle due direttrici di WILCZYNSKI; per queste si ha il teorema [K]:

Si considerino i 4 punti ($\neq$ O) *in cui* Q *tocca il proprio inviluppo e i due lati, reciproci rispetto a* Q, *del quadrangolo (di Demoulin) da essi determinato; le due rette appoggiate ad essi, una per* O *l'altra nel piano tangente ivi* τ, *sono le direttrici di Wilczynski.*

Altri elementi geometrici atti a caratterizzare i successivi intorni di un punto O della superficie si troveranno applicando p. es. le considerazioni fatte in I. 5 alle sezioni di σ con piani passanti per una tangente asintotica: ma una ricerca in tal senso non è ancora compiuta.

(**) *Nuova trattazione elementare dei fondamenti etc.* Rend. Istit. Lombardo, vol. LIX, 1926.

B. METODO DEI SISTEMI ASSIALI

1. – Definizione dei sistemi assiali.

All'esposizione di questo metodo occorre premettere la definizione di sistema assiale di curve sopra una superficie [*A*, *O*]. Per ogni punto O di σ si dia una retta (non contenuta in τ); i piani osculatori alle curve del sistema passanti per O contengono la retta. Il *sistema assiale* si dirà *associato alla congruenza delle rette date (***assi***).*

Dualmente, a partire da una congruenza di rette contenute nei piani τ (ma non passanti per i relativi punti O di σ), si possono definire i **sistemi radiali** (in corrispondenza alle due interpretazioni della retta-asse e della retta-raggio).

Se le rette delle due congruenze di un sistema assiale e di un sistema radiale una passante per O, l'altra contenuta in τ, sono polari rispetto a Q i due *sistemi* si diranno *polari* [*G*].

Ad ogni forma lineare $l\,\overline{g}_1 \equiv l\,(h_1 du - h_2 dv)$ [ove l è un fattore numerico, ed h_1 e h_2 sono funzioni di u e v] *è associato un sistema assiale definito da*

$$\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) = -\beta\gamma\,(\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3) + \varphi_2\, l\,(h_1 du - h_2 dv)$$

e un sistema radiale (polare del precedente) definito da

$$\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) = \beta\gamma\,(\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3) + \varphi_2\, l\,(h_1 du - h_2 dv)$$

ove δ *indica differenziali controvarianti costruiti rispetto a* $\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv$ [il fattore $\beta\gamma$ è posto soltanto per dare a ciascun termine carattere invariantivo].

L'importanza di questi sistemi per la teoria delle superficie e delle loro corrispondenze apparirà in seguito.

2. – Un invariante fondamentale. Curve anarmoniche.

Un secondo metodo [*G*] per la ricostruzione delle forme normali del Fubini è basato sulla conoscenza di un sistema ∞^2 di curve di σ invarianti per applicabilità proiettive. L'ordinaria teoria dell'applicabilità si serve appunto del sistema ∞^2 delle geodetiche: ma mentre in questo caso il dato fondamentale è il ds^2, di significato noto, nel caso proiettivo è proprio la conoscenza di una forma (p. es. quadratica) che ci manca e che anzi vogliamo ricostruire. È insomma la stessa difficoltà segnalata fin dal principio e che si ripresenta sotto altra forma.

A risolverla ci gioviamo qui del fatto che una direzione di σ uscente da un suo punto O possiede un invariante proiettivo. Tale è infatti l'invariante assoluto della quaterna di rette costituita dalle tre tangenti di Darboux e dalla direzione du/dv in O. Questo invariante finito, del 1° ordine, vale, a meno di un fattore numerico inessenziale $I = \overline{\varphi}_3/\varphi_2^{3/2}$; e l'analogo, quando alle tangenti di Darboux si sostituiscano quelle di Segre è $I' = \varphi_3/\varphi_2^{3/2}$. *Di questi due invarianti finiti del 1° ordine si conosce dunque il significato geometrico.*

Chiamo **curve anarmoniche** quelle per le quali $I =$ costante. *La loro equazione differenziale è*

$$\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) = \frac{1}{3}\,\frac{\delta\overline{\varphi}_3}{\varphi_3}\,\varphi_2$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\log\beta\gamma^2}{\partial u}\,du - \frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}\,dv\right)\varphi_2 .$$

I piani cuspidali del cono inviluppato dai piani osculatori alle curve anarmoniche in O *passano per la retta di Segre relativa ad* O (cioè per la retta, trovata da Čech, per cui passano i piani osculatori alle curve di Segre in O).

3. – Le forme di Fubini [G].

Insieme ad I è naturalmente invariante $d\log I$ completamente definito appena si dia un elemento del 2° ordine di una curva O; si ha

$$d\log I = \frac{3\,\varphi_3}{\overline{\varphi}_3\cdot\varphi_2}\,\beta\gamma\,(dv\,\delta^2 u - du\,\delta^2 v) + \frac{\delta\,\overline{\varphi}_3}{\overline{\varphi}_3}.$$

Da questo invariante differenziale del 2° ordine si ricava un invariante del 1° ordine quando si calcoli per le curve di un sistema ∞^2 proiettivamente definito su σ (sostituendo ai δ^2 in $d \log I$ i loro valori tratti dall'equazione differenziale del sistema).

Tale è p. es. il *sistema assiale associato alla congruenza delle rette di Segre* (ritrovate or ora proprio in relazione ad I); indicando con $d_s \log I$ il valore di $d \log I$ calcolato per una di queste curve si ha

$$d_s \log I^{2/3} = \varphi_2 / \varphi_2$$

che dà *il significato geometrico dell'elemento lineare proiettivo di Fubini. Ma di più*

$$\left[\frac{d_s \log I^{2/3}}{I'}\right]^2 = \varphi_2\,, \quad \left[\frac{d_s \log I^{2/3}}{I'^{2/3}}\right]^3 = \varphi_3\,,$$

cioè *la considerazione degli invarianti geometrici* I *ed* I' *e del sistema assiale associato alla ongruenza delle rette di Segre (pure definito in modo geometrico, indipendentemente da qualsiasi considerazione analitica) fornisce direttamente sia l'elemento lineare proiettivo di Fubini sia le sue forme normali.* E l'opportunità della scelta di esse risulta di nuovo messa in luce dalla semplicità e naturalezza del loro significato.

4. – Altre forme invarianti del 1° ordine.

Con lo stesso metodo può ottenersi il significato di altre forme invarianti. Accenniamo brevemente ad alcune [*G*].

α) Sulle geodetiche di φ_2 è $d_g \log I = \delta \overline{\varphi}_3 / \overline{\varphi}_3$ e similmente per $d_g \log I'$; sicchè *calcolando* d log I *sopra un elemento di 2° ordine di una qualsiasi curva e sulla geodetica di* φ_2 *tangente si ha*

$$\left(\frac{\varphi_3}{\overline{\varphi}_3}\right)^2 = \frac{(d - d_g) \log I}{(d - d_g) \log I'}$$

invariante finito del 1° ordine (e non del 2°, come poteva attendersi).

β) Data la forma $l\,\overline{g}_1 \equiv l\,(h_1 du - h_2 dv)$ cioè un *sistema assiale* e il *sistema radiale polare*, si considerino i piani osculatori in O (u, v) alle curve di questi sistemi in direzione d, il piano normale (contenente la normale pr.) per d e il piano τ tangente in O a σ: *il birapporto di questi piani è l'invariante finito del 1° ordine* $\varphi_2 \,.\, l\,\overline{g}_1 / \overline{\varphi}_3$. Troveremo in seguito il significato di $l\,\overline{g}_1$.

IV. — Invarianti delle curve sopra una superficie.

1. - Curvatura proiettiva.

Data una curva C di σ uscente da un suo punto O le due forme normali, o l'elemento lineare proiettivo, ne costituiscono invarianti differenziali (infinitesimi) del 1° ordine [e con essi si può formare un invariante finito].

Vogliamo procurarci ora invarianti del 2° e del 3° ordine (cioè dipendenti dai differenziali 2ⁱ e 3ⁱ di u e v) che diremo **curvatura** e **torsione proiettiva** (della curva in O).

Sarà comodo porre $ds^2 = \varphi_2$ ed indicare con $\delta^2 u$, $\delta^2 v, \ldots$ i differenziali controvarianti rispetto a φ_2.

Si consideri [F] la tangente t in O a C e la proiezione sul piano tangente τ, fatta da un punto della normale proiettiva, di una corda OO' di C, e infine il birapporto D di queste due rette e delle due tangenti asintotiche.

La parte principale del log D *per* O'$\rightarrow$O *su* C *è*

$$\frac{\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)}{\varphi_2} + \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\varphi}_3}{\varphi_2}$$

ove $\overline{\varphi}_3 = 2\,\beta\gamma\,(\beta\,du^3 - \gamma\,dv^3)$; *questo invariante proiettivo infinitesimo, diviso per* ds, *fornisce un' invariante finito di* C *(***curvatura proiettiva***)*.

Proprietà caratteristica dei sistemi assiali di curve su σ è che la curvatura proiettiva è una funzione lineare dei parametri du / ds, dv / ds *della direzione che si considera uscente da* O.

La **curvatura asintotica** di Fubini di C in O è $\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v -$

$- dv\,\delta^2 u) / ds^3$. Il suo significato geometrico, facilmente ricavabile dal precedente, è questo:

*Su **C** e sulla geodetica di φ_2 tangente a* C *in* O *si prendano i punti* O′ *ed* O″ *e si proiettino le corde* OO′ *ed* OO″ *da un punto della normale proiettiva sul piano tangente: il log. del birapporto di queste due proiezioni e delle due tangenti asintotiche in* O, *diviso per* ds, *ha per limite, quando* O′ *ed* O″ $\to O$, *la curvatura asintotica di **C** in* O.

2. - Curvatura relativa di due curve.

Più in generale [*G*] date due curve tangenti in O, in direzione d, si consideri in $O' = O + dO$ il log. del birapporto delle tangenti alle due curve e delle tangenti asintotiche. Il suo termine principale è l'*invariante infinitesimo*

$$\frac{(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)_2 - (du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)_1}{du\,dv}$$

(ove gli indici 1 e 2 a numeratori stanno a distinguere gli elementi relativi alle due curve). Questo invariante infinitesimo, diviso per $ds = \sqrt{2\beta\gamma\,du\,dv}$, può dirsi **curvatura proiettiva relativa** delle due curve in O.

Se una di esse è l'estremale di φ_2 tangente all'altra si ha proprio la curvatura asintotica di Fubini.

Si hanno inoltre i teoremi [*G*]:

L'invariante infinitesimo precedente relativo ad una curva assiale e alla curva ad essa tangente del sistema radiale polare non dipende affatto dalla scelta di questi sistemi (cioè dalla forma $1\bar{g}_1$ *o dalla congruenza che li definisce) e vale* $2\bar{\varphi}_3/\varphi_2$; e si ha qui un nuovo mezzo per definire l'elemento lineare proiettivo di Fubini.

L'invariante infinitesimo relativo ad una curva di un sistema assiale in O *e alla curva, ivi tangente, del sistema assiale associato alla congruenza delle normali proiettive vale precisamente* $2\,1\bar{g}_1$

(forma che serve a defininire il primo sistema assiale). Si ha così il significato dell'*invariante integrale* $1\int \overline{g}_1$ lungo una curva di σ.

Altri risultati in [*G*].

3. – Le forme elementari e gli invarianti di curvatura [*N*].

La ricerca di un invariante di curvatura di una curva C equivale in sostanza a determinare una scelta intrinseca dei differenziali secondi sulla curva stessa. Nelle formole precedenti i differenziali secondi δ^2 sono appunto controvarianti rispetto alla forma quadratica $ds^2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$. Ma noi abbiamo in realtà *due* forme invarianti indipendenti, p. es. le due forme normali di Fubini, o se si vuole le due forme elementari. Sicchè appare più giustificato procedere in modo che tutt'e due queste forme giochino nella formazione dell'invariante cercato.

E si potrà procedere così: Si prendano su C due archi (infitesimi) OO' e $O'O''$ con la condizione che una delle forme elementari o una loro funzione assuma per essi lo stesso valore: si determini poi la variazione subita dall'altra forma, o da un'altra funzione delle due forme, per la sostituzione dell'arco $O'O''$ all'arco $O'O$; questa variazione è, data la sua definizione, un invariante (infinitesimo) di curvatura (da cui si passa subito ad un invariante finito).

Per esemplificare si considerino le due funzioni delle forme elementari

$$ds^2 = 2\beta\gamma\, du\, dv, \quad \text{e} \quad \frac{d_2 s}{d_1 s} \text{ ovv. } \log\left(\frac{d_2 s}{d_1 s}\right) = \frac{1}{3}\log\gamma/\beta + \log\frac{dv}{du}.$$

Se si pone la condizione che OO' e $O'O''$ abbiamo lo stesso ds la variazione δ subita da $d_2 s/d_1 s$ per il passaggio da OO' ad $O'O''$ è definita da

$$\frac{\delta}{ds}\log\left(\frac{d_2 s}{d_1 s}\right) = \frac{2}{3}\left(\psi_1\frac{du}{ds} - \psi_2\frac{dv}{ds}\right) + 2\beta\gamma\,\frac{du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u}{ds}$$

ove $\psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}$, $\psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}$ e δ^2 sono i *differenziali controvarianti rispetto a* φ_2.

Se invece è $d_2 s / d_1 s$ che si assume costante sugli archi OO' ed $O'O''$ la variazione Δ subita dal ds della curva C in questo passaggio è definita da

$$2\frac{\Delta ds}{ds^2} = \frac{1}{3}\left(\psi_1 \frac{du}{ds} + \psi_2 \frac{dv}{ds}\right) + \beta\gamma \frac{du\,\Delta^2 v + dv\,\Delta^2 u}{ds^3}$$

ove

$$\Delta^2 u = d^2 u + \frac{1}{3}\frac{\partial \log \beta/\gamma}{\partial u} du^2\,; \quad \Delta^2 v = d^2 v + \frac{1}{3}\frac{\partial \log \gamma/\beta}{\partial v} dv^2.$$

Mentre la condizione d'invarianza nel 1° caso è $du\,\delta^2 v + dv\,\delta^2 u = 0$ (che in fondo equivale al Lemma di Ricci) nel 2° caso è invece $du\,\Delta^2 v - dv\,\Delta^2 u = 0$; ma, è bene ripeterlo, la scelta dell'una o dell'altra condizione è in nostro arbitrio.

4. - Metodo generale per la costruzione di invarianti. Trasporto proiettivo [C].

Oltre ai metodi precedenti per la costruzione di invarianti differenziali del 2° ordine v'è un metodo di portata più generale (in quanto può applicarsi anche a problemi diversi dall'attuale) fondato sulle osservazioni seguenti.

Sia dato un problema di variazione *relativo all'integrale* $\int f(u, v, v')\,du = \int ds$ e una forma quadratica in du, dv definita anche a meno d'un fattore (cioè un'equazione quadratica nei differenziali du, dv). In un punto O (u, v) si consideri una direzione d (du/dv) e un'altra direzione δ $(\delta u/\delta v)$. Si può definire come parallela a δ in $O' = O + dO$ in rapporto al problema di variazione assegnato quella direzione uscente da O' per la quale il (log. del) birapporto di essa, della estremale di $\int ds$ per OO' e delle due direzioni che annullano la forma quadratica (in O') è uguale al (log. del) birapporto delle analoghe direzioni in O.

Come si vede se il ds è il solito elemento lineare della geometria riemanniana e se l'equazione quadratica in du/dv è proprio $ds^2 = 0$ si ha senz'altro il trasporto parallelo di LEVI-CIVITA. Ma in molti casi, come appunto nella teoria proiettiva delle superficie, può essere necessario distinguere il problema di variazione, cioè lasciar libera la scelta della funzione f, dalla scelta dell'equazione quadratica; si ottiene così da due diversi punti di vista una maggior generalità: e nella scelta di f e nell'indeterminazione del fattore della forma quadratica.

Mettiamoci nel caso della geometria proiettivo-differenziale. Data σ risulta definito *(senza alcuna normalizzazione) l'elemento lineare proiettivo* di FUBINI (anche per le superficie rigate, finora escluse)

$$ds = \frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{du\, dv}$$

e così pure l'*equazione quadratica* $du \times dv = 0$ che rappresenta in ogni punto le tangenti asintotiche (mentre φ_2 e φ_3 esigono una normalizzazione).

Si possono perciò applicare le considerazioni precedenti alle *pangeodetiche* [estremali di $\int (\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)/du\,dv$] e a $du\,dv = 0$; e quindi si può definire il *trasporto proiettivo* di una direzione $\xi_1 = \dfrac{\delta u}{\delta s}$, $\xi_2 = \dfrac{\delta v}{\delta s}$ (v. le formole relative in [C]). È chiaro che, definito questo trasporto (ripetiamolo: *indipendente* da ogni normalizzazione) si può servirsene per la costruzione di invarianti proiettivi.

Così p. es. data una curva uscente da O in direzione d, se si fa il trasporto proiettivo di $d \equiv \delta$ secondo d cioè se si costruisce in $O' = O + dO$ la tangente alla pangeodetica uscente da O in direzione d, il log. del birapporto di questa, della tangente in O' alla curva e delle tangenti asintotiche (in O') diviso per il ds dà un invariante di 2° ordine relativo alla curva (che può dirsi *curvatura pangeodetica*) espressa da [C]:

$$\frac{2\beta\gamma(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)}{\varphi_3} + \frac{1}{2}(\psi_1 du - \psi_2 dv)\frac{\varphi_2}{\varphi_3} -$$

$$-\frac{1}{2}(\beta\psi_2 du^2 - \gamma\psi_1 dv^2)\frac{\varphi_2^2}{\varphi_3^2}$$

ove δ^2 indica di nuovo differenziali secondi controvarianti rispetto a φ_2 [ma va qui ripetuto che il servirsi nella scrittura, per brevità, delle forme normali φ_2 e φ_3 *non* implica affatto la loro conoscenza] e $\psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}$, $\psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}$.

Quanto s'è detto per l'elemento lineare proiettivo può ripetersi per i problemi relativi a $\delta\int\sqrt{\varphi_2} = 0$ e a $\delta\int\sqrt[3]{\varphi_3} = 0$ quando si sia trovato, come in III *A* o in III *B*, il significato di φ_2 e di φ_3; e così pure per le estremali delle forme elementari.

5. – La torsione proiettiva. – Sezioni piane.

Per definire un invariante del 3^0 ordine di C procediamo così. Si consideri un punto O' prossimo ad O su C e un punto O'' sulla sezione piana osculatrice in O a C, e si proiettino, da un punto della normale proiettiva su τ, le due corde OO' ed OO''. Se O' ed O'' tendono insieme ad O *il log. del birapporto delle due proiezioni e delle tangenti asintotiche in* O *(cioè l'angolo infinitesimo proiettivo delle due proiezioni), diviso per* ds $(=\sqrt{2\beta\gamma\,du\,dv})$ *è un invariante del* 3^0 *ordine di* C *che si dirà* **torsione proiettiva**; *esso vale:* S/ds^6 ove

$$S = \beta\gamma\,(du\,\delta^3 v - dv\,\delta^3 u)\varphi_2 - \frac{1}{2}\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\,\varphi_3 +$$

$$+ 3\beta\gamma\,(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v)\,\varphi_2 - \frac{1}{4}\varphi_3\overline{\varphi}_3 + \overline{\psi}_2\varphi_2^2 - \overline{\varphi}_4\varphi_2$$

$$\overline{\psi}_2 = \left(n + \frac{3}{2}\beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right) du^2 - \left(\nu + \frac{3}{2}\gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) dv^2$$

$$\overline{\varphi}_4 = \beta^2\gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du^4 - \beta\gamma^2 \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} dv^4 .$$

Un altro modo per giungere ad un invariante differenziale del 3^0 ordine, non essenzialmente diverso dal precedente, è questo: *La distanza proiettiva di* O′ *dal piano osculatore in* O, *quando si prenda come assoluto la quadrica di Lie, divisa per* $ds^{3/2}/\sqrt{3}$, *è l'invariante* $S/\varphi_3^{\frac{1}{2}}\varphi_2^{3/4}$. Il rapporto fra gli ultimi due invarianti dà un nuovo significato geometrico dell'invariante finito (del 1^0 ordine) $\varphi_3/\varphi_2^{3/2}$.

Si noterà che la (prima) curvatura proiettiva è invariante per applicabilità proiettive di σ (quindi anche per collineazioni) mentre la torsione proiettiva è invariante solo per collineazioni. Ciò è in completo accordo col fatto (e serve a chiarirlo) che le applicabilità proiettive operano su σ come collineazioni fino all'intorno del 2^0 ordine di un punto generico, ma non fino al 3^0.

L'equazione $S = 0$ *è l'equazione differenziale (intrinseca, cioè espressa con soli elementi relativi a* σ*) delle sezioni piane di* σ.

6. – La terza forma fondamentale di Fubini.

Chiamiamo così la forma normale quadratica di Fubini che uguagliata a zero fornisce le linee di curvatura proiettive di σ:

$$c_1 du^2 - c_2 dv^2 = \left(n + \beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right) du^2 - \left(\nu + \gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) dv^2 .$$

Ebbene [*F*]:

Il valore della terza forma fondamentale, relativo ad un punto e ad una direzione, si ottiene moltiplicando per ds^2 *la torsione proiettiva della linea assiale, associata alla congruenza delle normali proiettive* (III B, 1 per $l = 0$) *che esce dal punto nella direzione assegnata.*

V. — Invarianti proiettivi di una superficie.

1. - Osservazioni generali.

α) Sia dato un invariante del 1° ordine I_1 (dipendente cioè da u, v, du, dv) : se è dato un sistema ∞^1 di curve (dipendenti da un'equazione differenziale del 1° ordine) definito proiettivamente su σ si avrà un invariante I_0 relativo al punto u, v della superficie calcolando I_1 sulla curva del sistema che vi passa (o sulle curve che vi passano, nel qual caso si otterranno invarianti irrazionali dai quali si traggono facilmente invarianti razionali) : basterà sostituire in I_1 l'espressione (o le espressioni) di du/dv tratte dall'equazione differenziale.

Potranno servire allo scopo le linee asintotiche, le linee di Darboux e quelle di Segre, le linee di curvatura proiettiva etc. (purchè per il sistema adottato I_1 non perda senso o assuma semplicemente un valore numerico).

β) Analogamente da un invariante del 2° ordine I_2 (contenente u, v, du, dv, d^2u, d^2v) si trae un'invariante I_0 calcolandolo per gli elementi del 2° ordine delle curve di un sistema ∞^1 (come quelli già considerati) ; oppure γ) un invariante I_1 calcolandolo per le curve di un sistema ∞^2 proiettivamente definito su σ (p. es. per il sistema di linee assiali associato alle normali proiettive, o alle rette di Segre etc.) ; e dall'invariante I_1 si passa come s'è detto ad un invariante I_0.

Si hanno così *invarianti puntuali di una superficie* Gli invarianti ottenuti saranno tali per applicabilità proiettive o soltanto per collineazioni secondo che in essi si possono far figurare soltanto β e γ o invece anche n e ν (o c_1 e c_2).

2. - Invarianti dell'elemento lineare proiettivo.

Ad illustrare in modo concreto le considerazioni precedenti α), β), γ) vogliamo ritrovare [C], dandone il significato geometrico, alcuni *invarianti dell'elemento lineare proiettivo*, in base ai quali, come si sa dalla teoria svolta dal CARTAN e dal Čech, è possibile decidere dell'applicabilità proiettiva di due superficie.

Poniamo come prima $\psi_1 = \dfrac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}$, $\psi_2 = \dfrac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}$.

Calcolando, secondo α), l'invariante $\psi_1 \dfrac{du}{ds} - \psi_2 \dfrac{du}{ds}$ per le linee di DARBOUX e per le linee di SEGRE si ottengono invarianti (irrazionali, e da essi, con opportune combinazioni, invarianti razionali) che equivalgono alla conoscenza degli invarianti Φ, Ψ, Ψ' di Čech [G. P. D., pag. 333].

Calcolando, secondo β), la curvatura pangeodetica delle linee di SEGRE in un punto e facendone il prodotto si ha di nuovo l'invariante Ψ.

Secondo γ) la curvatura pangeodetica delle linee assiali associate alla congruenza degli spigoli di GREEN è un invariante del 1^0 ordine; il prodotto dei valori ch'esso assume per le linee di SEGRE è l'invariante Ψ'.

Ancora: la curvatura pangeodetica della estremale di φ_2 uscente da un punto in direzione canonica equivale (noti Ψ e Ψ') alla conoscenza di Φ.

Invece le curvature pangeodetiche delle linee canoniche e delle loro coniugate, secondo β), equivalgono alla conoscenza di Θ e Θ' (noti Φ, Ψ, Ψ' e i due invarianti H e K).

3. – Le forme elementari e gli invarianti precedenti.

Ma il metodo più regolare per l'acquisto degli invarianti e che ne dà un significato geometrico immediato è il seguente [N].

Consideriamo di nuovo gli elementi d'archi (proiettivi) di asintotiche definiti da

$$d_1 s^3 = \beta^2 \gamma \, du^3 , \quad d_2 s^3 = \beta \gamma^2 dv^3 .$$

La variazione subita da ciascuno di essi passando da un lato di una maglia asintotica all'opposto, riferita al prodotto dei due elementi iniziali è evidentemente un invariante della superficie; si hanno così i due invarianti (irrazionali) del 1^0 ordine

$$\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s\, d_2 s} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2 \gamma}} \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}, \quad \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s\, d_2 s} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\beta \gamma^2}} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}$$

da cui gli invarianti razionali

$$\Phi = \frac{2}{\beta\gamma} \psi_1 \psi_2 ; \quad \Psi = \frac{1}{\beta^2 \gamma} \psi_1^3 + \frac{1}{\beta \gamma^2} \psi_2^3 ; \quad \Psi' = \frac{1}{\beta^2 \gamma} \psi_1^3 - \frac{1}{\beta \gamma^2} \psi_2^3 .$$

La variazione subita dal 1^0 invariante spostandosi lungo l'asintotica v, riferita al suo elemento d'arco è l'invariante del 2^0 ordine:

$$\frac{d_2}{d_2 s} \left(\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s\, d_2 s} \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma^2}{\partial u\, \partial v} ;$$

analogamente si ha

$$\frac{d_1}{d_1 s} \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s\, d_2 s} = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta^2 \gamma}{\partial u\, \partial v} ;$$

e da essi

$$-K = \frac{1}{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u\, \partial v} = \left(\frac{d_1 d_2 d_1 s}{d_1 s} + \frac{d_2 d_1 d_2 s}{d_2 s} \right) \Big/ d_1 s\, d_2 s$$

$$-\frac{1}{3} H = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \log \beta/\gamma}{\partial u\, \partial v} = \left(\frac{d_1 d_2 d_1 s}{d_1 s} - \frac{d_2 d_1 d_2 s}{d_2 s} \right) \Big/ d_1 s\, d_2 s$$

(con $d_1 s\, d_2 s = \beta \gamma\, du dv$).

Cerchiamo ora la variazione subita dal 1^0 invariante $\dfrac{d_1 d_2 s}{d_1 s\, d_2 s}$ quando ci si sposti lungo l'asintotica u dell'elemento $d_1 s$. È naturalmente da porsi $d_1 d_1 s = 0$ il che fornisce

$$\frac{d_1^2 u}{d_1 s^2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{(\beta^2\gamma)^{2/3}}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial u}$$

e in conseguenza si ha

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial u^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial u}\right)\frac{1}{(\beta^2\gamma)^{2/3}} = \frac{d_1}{d_1 s}\left(\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s}\right)$$

e analogo invariante scambiando 1 e 2 (e così β e γ, u e v).

In luogo di essi si possono prendere gli altri due:

$$\frac{1}{9}\frac{1}{\beta^2\gamma}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right)\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d_1}{d_1 s}\left(\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s}\right)^2 - \left(\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s}\right)^3$$

$$\frac{1}{9}\frac{1}{\beta\gamma^2}\left(\frac{\partial^2 \log \beta^2\gamma}{\partial v^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v}\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}\right)\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d_2}{d_2 s}\left(\frac{d_2 d_1 s}{d_1 s d_2 s}\right)^2 - \left(\frac{d_2 d_1 s}{d_2 s d_1 s}\right)^3$$

e da questi per somma e differenza si hanno gli altri due

$$\Theta = \frac{\psi_1^2}{\beta^2\gamma}\frac{\partial \log \psi_1/\beta\gamma}{\partial u} + \frac{\psi_2^2}{\beta\gamma^2}\frac{\partial \log \psi_2/\beta\gamma}{\partial v}$$

$$\Theta' = \frac{\psi_1^2}{\beta^2\gamma}\frac{\partial \log \psi_1/\beta\gamma}{\partial u} - \frac{\psi_2^2}{\beta\gamma^2}\frac{\partial \log \psi_2/\beta\gamma}{\partial v}.$$

Così apparisce chiara la formazione di questi invarianti: quelli del 1° ordine misurano la differenza degli archi (proiettivi) dei lati opposti di una maglia asintotica; quelli del 2° ordine non sono altro che le derivate di essi secondo le asintotiche passanti per il punto in cui si calcola l'invariante.

4. – Invarianti per collineazioni.

Agli invarianti precedenti (di cui altri significati possono trovarsi nei miei lavori) aggiungiamo ora alcuni invarianti per collineazioni [K]. Com'è noto la quadrica di LIE relativa al punto O e quella relativa ad un punto infinitamente vicino sopra un'asintotica si tagliano (oltre che nelle due tangenti asintotiche in O) in due rette appoggiate alla tangente all'asintotica considerata (sono due lati del quadrangolo di DEMOULIN).

Per ogni tangente asintotica si possono quindi considerare i quattro piani seguenti: il piano tangente, il piano normale (contenente la normale proiettiva) e i piani contenenti due lati del quadrangolo di DEMOULIN. Se si fa, per ciascuna tangente asintotica, il prodotto di due convenienti birapporti dei detti piani (allo scopo di ottenere invarianti razionali) si hanno i due *invarianti per collineazioni*

$$\frac{1}{\psi_2^2}\left\{\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial v}(\beta\psi_2)-\gamma\psi_1-2\nu\right\}, \qquad \frac{1}{\psi_1^2}\left\{\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial u}(\gamma\psi_2)-\beta\psi_2-2\nu\right\}.$$

Ciò vale se $\psi_1 \neq 0$ e $\psi_2 \neq 0$. Se p. es. $\psi_1 = 0$ ($\psi_2 \neq 0$), *nel qual caso le linee canoniche sono asintotiche di un sistema* ($dv = 0$), *i quattro piani relativi ad una tangente asintotica* ($dv = 0$) *formano gruppo armonico; se ciò avviene per tutt'e due le tangenti asintotiche è* $\psi_1 = \psi_2 = 0$ *la superficie è a linee canoniche indeterminate (e le linee di Darboux sono estremali di* φ_2*).* Le precedenti proprietà sono caratteristiche [K].

Invariante per collineazioni è il birapporto dei due fuochi della normale proiettiva e dei punti d'intersezione con la quadrica di LIE; esso vale [G]

$$\frac{K-1+2\sqrt{c_1 c_2}/\beta\gamma}{K-1-2\sqrt{c_1 c_2}/\beta\gamma}$$

ove $K = -\dfrac{1}{\beta\gamma}\dfrac{\partial^2 \log\beta\gamma}{\partial u\,\partial v}$ è la curvatura di φ_2 e c_1 e c_2 sono i coefficienti della 3ª forma fondamentale. Esso è armonico se e solo se $K = 1$.

È pure invariante il birapporto dei piani tangenti alle due rigate delle normali proiettive secondo le asintotiche uscenti da O in O e nel quarto vertice O_3 del tetraedro canonico (già definito geometricamente in III A, 5) e vale [G]:

$$c_1 c_2 / \beta^2 \gamma^2 (K - 1)^2.$$

Invarianti per collineazioni, dipendenti dalle derivate di u e di v si ottengono applicando i procedimenti esposti nel n⁰ precedente alle due *forme elementari invarianti per collineazioni* $u\,du^2$ e $v\,dv^2$: ad evitare errori è bene notare che queste forme sono invarianti per cambiamenti dei parametri sulle asintotiche, ma *non* per cambiamento del fattore di normalizzazione (cioè, a differenza delle forme elementari invarianti per applicabilità proiettive che si costruiscono partendo o dal sistema (1) o da uno qualsiasi dei suoi trasformati, le nuove forme vanno costruite in relazione al sistema (1) cui soddisfano le coordinate *normali* di FUBINI).

VI. — La geometria delle superficie nello spazio rigato. Metodo iperspaziale.

1. - Rappresentazione iperspaziale del complesso delle tangenti ad una superficie [E] (*)

La superficie σ può considerarsi, oltre che come luogo di punti o come inviluppo dei suoi piani tangenti, come l'insieme delle sue tangenti, cioè come un ente (complesso particolare di

---

(*) Vedi anche la mia Memoria già citata, *Sull'equazione di Laplace*, n. 17.

rette) dello spazio rigato. Quando si adotti questo punto di vista (*) l'ambiente naturale per lo studio di σ è la varietà (quadratica) delle rette di S_3, cioè una iperquadrica Ω (a 4 dimensioni) dello spazio lineare a 5 dimensioni S_5. I punti di Ω " rappresentano „ le rette dello spazio ordinario S_3: come si rappresenta una superficie σ (complesso delle sue tangenti) su Ω?

Questo complesso contiene ∞^2 fasci di rette: e poichè ogni fascio si rappresenta in una retta di Ω la superficie σ si rappresenta in una V_3 rigata (le cui generatrici appartengono ad Ω). Evidentemente ciò non basta a caratterizzare il nostro particolare complesso. Bisogna esprimere il fatto che le faccette (punto e piano) infinitamente vicine dei fasci sono in posizione congiunta o, ciò che fa lo stesso, che in ciascun fascio esistono due rette (le tangenti asintotiche) che appartengono anche a fasci infinitamente vicini. In S_5 (entro Ω): ogni retta g della V_3 è incontrata da *due* generatrici infinitamente vicine, cioè possiede due *fuochi* A e A^*: questi due fuochi rappresentano le tangenti asintotiche, siano a ed a^*, uscenti dal punto O di σ (rappresentato, come centro del fascio, in g). Quando O descrive σ (quindi g la V_3) A e A^* descrivono due superficie Φ e Φ^* le quali rappresentano le due congruenze delle tangenti asintotiche (del sistema cui appartiene a o rispettiv. a^*) di σ.

Per la natura stessa di V_3, cioè per il fatto che le sue rette si lasciano ordinare, in *due* modi diversi, in ∞^1 sviluppabili, circoscritte a Φ (o a Φ^*) e i cui spigoli di regresso stanno su Φ^* (o su Φ), risulta che 1°) *ciascuna superficie* Φ *e* Φ^* *possiede un doppio sistema coniugato ;* 2°) Φ *e* Φ^* *sono trasformate di Laplace una dell'altra.*

(*) Ad esso si riferisce il notevole lavoro di G. Thomsen: *Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung.* [Abhandlungen des Math. Seminars, Hamburg; vol. IV, 1925] ove, fra l'altro, il T. caratterizza le congruenze di *quadriche* (e non di *regoli,* come si farà appresso) che sono di Lie per una superficie. Sicchè, in termini iperspaziali, si tratta piuttosto dello studio di una superficie di S_9 che di una situata sopra una iperquadrica di S_5.

Qual'è il significato dei due sistemi coniugati esistenti su Φ e su Φ^*?

Sia a tangente all'asintotica u $(dv = 0)$ in O [e a^* all'asintotica v $(du = 0)$]. La sviluppabile tangente a quell'asintotica si rappresenta in una curva di Φ e (poichè due tangenti dell'asintotica u infinitamente vicine s'incidono) le tangenti a questa curva sono rette g di V_3; cioè questa curva appartiene al doppio sistema coniugato di Φ (essendo lo spigolo di regresso di una sviluppabile contenuta in V_3). Analogamente si vede che la rigata delle tangenti alle asintotiche $u\,(dv = 0)$ nei punti di una asintotica $v\,(du = 0)$ si rappresenta in una curva di Φ pure appartenente al doppio sistema coniugato. Sicchè:

Se i punti A *di* Φ *rappresentano le tangenti asintotiche alle linee del sistema* u (dv = 0) *di* σ, *su* Φ *rimane definito un doppio sistema coniugato* (u, v) : *le linee* u (dv = 0) *rappresentano le sviluppabili tangenti alle asintotiche* u *; le linee* v *rappresentano le rigate delle tangenti alle asintotiche* u *nei punti delle linee* v *di* σ.

Analoghe osservazioni per Φ^* *scambiando ovunque* u *e* v. Φ^* *è la trasformata di Laplace di* Φ *secondo le linee* u *(e così* Φ *è la trasformata di* Φ^* *secondo le linee* v*).*

Indichiamo ancora con Φ_1 la trf.^{ta} di Laplace di Φ secondo le linee v e con Φ_1^* la trf.^{ta} di L. di Φ^* secondo le linee u; sicchè

$$\Phi_1 \quad \Phi \quad \Phi^* \quad \Phi_1^*$$

sono 4 superficie consecutive nella successione delle trasformate di Laplace.

2. – Regoli di Lie.

Sulla quadrica di Lie, relativa al punto O di σ, distinguiamo due regoli: quello di cui fa parte a e l'altro cui appartiene a^*. Consideriamo p. es. il primo. Esso è individuato da a e dalle due tangenti asintotiche dello stesso sistema infinitamente vicine uscenti da punti della linea v per O. In S_5: i tre punti immagini delle tre tangenti ora nominate determinano il piano osculatore in A alla linea v di Φ; questo piano (o, se si vuole, la sua intersezione con Ω) rappresenta il regolo di Lie (e l'altro regolo appartenente alla stessa quadrica di Lie si ottiene in modo analogo ragionando su Φ^*; il che equivale a prendere il piano polare del precedente). Sicchè:

I regoli di Lie (di un sistema) relativi a σ *si rappresentano nei piani osculatori alle linee* v *di* Φ *(o alle linee* u *di* Φ^**).*

Se si osserva che il piano osculatore in A alla linea v di Φ è il piano tangente nel punto corrispondente A_1 alla trasformata Φ_1 si arriva alla seguente **condizione caratteristica** *per le congruenze di regoli che sono di Lie per una superficie*:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè ∞^2 *piani di* S_5 *rappresentino i regoli di Lie relativi ad una superficie* σ *è che* 1) *essi siano tangenti ad una superficie, sia* Φ_1, *possedente un doppio sistema coniugato;* 2) *le due trasformate successive in un senso (con le notazioni di prima, secondo le linee* u*), siano* Φ *e* Φ^*, *appartengano all'iperquadrica* Ω *delle rette. La terza trasformata* Φ_1^* *(nello stesso senso) rappresenta, con i suoi piani tangenti, i regoli dell'altro sistema.*

La condizione 2) relativa alla seconda trasformata Φ^* può esser sostituita da quest'altra: *gli* S_3 *osculatori alle linee* u *di* Φ_1 *siano tangenti ad* Ω.

3. – Rigate asintotiche lungo le linee di Darboux e di Segre.

Chiamiamo *rigata asintotica* una rigata le cui generatrici siano tangenti alle asintotiche (di un sistema) lungo una linea di σ. Se questa è un'asintotica dell'altro sistema i suoi regoli osculatori sono appunto i regoli di Lie.

Ora vogliamo prendere in esame le rigate asintotiche circoscritte a σ lungo le linee di Darboux o di Segre e caratterizzare la totalità ∞^2 dei loro regoli osculatori.

Per ciò ritorniamo alla superficie Φ (se le rigate in esame hanno per generatrici tangenti alle asintotiche u di σ) di S_5 e ricordiamo una proprietà generale delle superficie di S_5.

Ho definito (*) su queste certi sistemi doppi, *coniugati di* 2ª

(*) *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi.* Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XLVI, 1922. V. anche in questo Volume, Appendice III, § 9.

specie, con la seguente proprietà: *Le tangenti alle curve di un sistema nei punti di una linea dell'altro formano una rigata d'indice di sviluppabilità 2* (cioè due generatrici infinitamente vicine, ma non tre, sono linearmente indipendenti).

Una volta definito il coniugio di 2^a specie (in cui le linee dei due sistemi hanno ufficio differente, a differenza di quanto avviene per quello di 1^a specie) ci si può chiedere se esistano *direzioni autoconiugate* (di 2^a specie) o *principali*. E si trova (*) che: *sopra una superficie generica di* S_5 *esistono in ogni punto 5 direzioni autoconiugate; a meno che la superficie possegga un doppio sistema coniugato ordinario, nel qual caso in ogni punto esistono tre sole direzioni autoconiugate o principali.*

In questo caso le **linee principali**, *inviluppate dalle tangenti principali, hanno la seguente proprietà caratteristica: lo spazio* S_3 *osculatore ad una di esse in un punto è contenuto nello* S_4 *cui appartiene l'intorno del 2° ordine del punto della superficie* [con la mia terminologia, questo S_4 è 2-**osculatore** alla superficie nel punto e le linee prindipali sono **quasi-asintotiche** $\gamma_{2,3}$ sulla superficie].

La superficie Φ possiede appunto un doppio sistema coniugato; quindi tre sistemi di linee principali. E precisamente:

Le linee principali di Φ *(o di* Φ^**) rappresentano le rigate asintotiche (di un sistema) circoscritte a* σ *lungo le linee di Darboux. La loro proprietà caratteristica equivale al teor. di Čech per cui le due rigate asintotiche lungo una linea di Darboux hanno questa per linea flecnodale e ciascuna rigata è costituita dalle tangenti quadripunte dell'altra.*

Inoltre:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè ∞^2 *regoli di* S_3 *siano quelli osculatori alle rigate asintotiche lungo le curve di Darboux di una superficie* σ *è che i piani rappresentativi in* S_5 *siano osculatori alle linee principali di una superficie* Φ *che possegga un doppio sistema coniugato le cui tangenti in un sistema siano rette di* Ω.

Se in ogni punto A di Φ si costruisce la coniugata armonica di una tangente principale rispetto alle linee u e v (del doppio

(*) l. c. sopra.

sistema coniugato) queste tangenti inviluppano un nuovo sistema di linee (di cui tre per ogni punto) rappresentanti le *rigate asintotiche* (di un sistema; per avere quello dell'altro si operi allo stesso modo su Φ^*) *circoscritte a* σ *lungo le linee di Segre.*

4. – Nuove quadriche invarianti.

Se si approfitta del fatto (*) che i piani osculatori a curve (di Φ) uscenti da un punto secondo direzioni divise armonicamente dalle tangenti alle linee u, v stanno in uno stesso S_3, si conclude che il piano osculatore ad una linea principale in A e quello osculatore alla linea ora costruita (la cui tangente è coniugata armonica etc.) si tagliano in una retta: ma di più le tre rette relative al punto A (in relazione alle tre linee principali per A) stanno in un piano π. Analogamente si ottiene un piano π^* relativo al punto A^* di Φ^*. Interpretando tutto ciò nello spazio ordinario si ha il teorema:

In ogni punto O *di* σ *si consideri una linea di Darboux, la linea di Segre coniugata e i regoli osculatori in* O *alle rigate asintotiche (di un sistema; cui appartiene p. es.* **a**) *circoscritte lungo esse a* σ. *Questi due regoli hanno in comune, oltre alla generatrice* **a** *in* O *un'altra retta; le tre rette così si ottengono (variando la linea di Darboux in* O) *stanno con* **a** *in uno stesso regolo (e vi formano una quaterna equianarmonica); alla quadrica sostegno appartiene pure la tangente* **a***.

Questa quadrica e quella di Lie relativa ad O *si segano ulteriormente (cioè oltre che in* **a** *e* **a***) *in due rette.*

Un'altra quadrica, pure invariante per applicabilità proiettive di σ, si ottiene scambiando **a** ed **a*** nelle costruzioni precedenti. Queste due quadriche coincidono (fra loro e con quella di Lie) se e solo se σ è una *superficie di coincidenza.* [G. P. D., pag. 157].

(***) *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* Atti Accad. Torino, vol. XLVIII, 1913; n. 7.

5. - Il fascio canonico.

Possiamo giovarci dei piani π e π^* costruiti per dare una nuova costruzione del fascio canonico. Si prova infatti che il piano π incontra la retta $A^* A_1^*$ in un punto $\overline{A}^*$; e così il piano π^* incontra la retta $A A_1$ in un punto $\overline{A}$. La proiettività $A A_1 \overline{A} \ldots \barwedge A^* A_1^* \overline{A}^* \ldots$ determina una quadrica, il cui S_3 ambiente, come si prova facilmente, è quello dei due piani di Ω passanti per la retta $A \overline{A}$. *Le due generatrici di questa quadrica situate nei due piani ora detti (e diverse dalla* $A A^*$*) rappresentano (con i loro punti) il* **fascio canonico** *di* σ *relativo al punto* O *e il suo polare rispetto alla quadrica di Lie (in* O*): i punti in cui esse tagliano la* $A A^*$ *rappresentano la tangente canonica e la sua coniugata; e quelli in cui tagliano la* $A_1 A_1^*$ *rappresentano le direttrici di Wilczynski,* etc.

Ritengo che le considerazioni precedenti siano atte a dare un'idea della fecondità del metodo iperspaziale per lo studio di una superficie σ dello spazio ordinario. È chiaro che le configurazioni di cui ci siamo serviti non sono che le più immediate per lo studio di σ; ma *tutta la successione delle trasformate di Laplace di* Φ *e* Φ^*, *i loro sistemi coniugati e i piani ad essi osculatori, gli* S_4 *2 - osculatori a queste superficie,* etc., *forniscono configurazioni geometriche naturalmente legate a* σ *e invarianti per applicabilità proiettive di essa. Ogni particolarità relativa a detta successione (p. es. l'esser terminata da una parte o da tutt'e due; l'esser periodica* etc.*) dà luogo a particolarità di* σ *e mette in luce famiglie di superficie notevoli rispetto al gruppo delle applicabilità proiettive.*

Alcune di queste famiglie, le prime che si sono presentate, ritroveremo in seguito da questo punto di vista.

Ma di più questo metodo iperspaziale fornisce in modo del tutto spontaneo alcuni invarianti fondamentali della teoria. È appunto di questi che vogliamo occuparci.

6. - Determinazione iperspaziale delle forme elementari $[E]$ (*).

Lo spazio S_4 2-osculatore in A a Φ è tangente in A^* ad Ω; e viceversa lo S_4^* 2-osculatore in A^* a Φ^* è tangente ad Ω in A.

Si consideri ora un punto $A' \neq A$ di Φ e la *maglia* formata dalle linee (u, v) di Φ passanti per A e A': precisamente sia A_1' (o A_2') il punto d'intersezione della linea u (o v) uscente da A con la linea v (o u) uscente da A'.

La retta $A'A_1'$ tagli lo S_4^* nel punto T_1^* e sia M un punto generico di essa. Si faccia poi tendere A' ad A sopra una curva avente in A la direzione du/dv.

Il termine principale del birapporto $(A_1' A' T_1^* M)$ *quando* $A' \rightarrow A$ *come s'è detto (mentre* M *tende ad un punto qualsiasi della tangente in* A *alla linea* v, *purchè* $\neq A$*), vale* $1/12$ *del quadrato della* **forma elementare** $\beta\, du^2/dv$.

Operando analogamente sul punto A^* di Φ^* si ha il significato di $\gamma\, dv^2/du$.

Da queste due forme si hanno subito quelle di Fubini (III A, 4; pag. 684); ma anche la forma quadratica normale ha un significato iperspaziale molto semplice.

Si consideri la retta $A_1'A_2'$ e siano T e T^* i suoi punti d'intersezione con S_4 ed S_4^*.

Il termine principale del birapporto $(A_1'\, A_2'\, T^*\, T)$, *quando* $A' \rightarrow A$ *come s'è detto, vale* $1/24$ *della forma normale* $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$.

Infine ecco il significato del rapporto degli elementi d'arco proiettivi delle asintotiche uscenti da O.

Se la retta $A'A_1'$ *incontra lo* S_4 *in* T_1 *ed* M *è un punto generico di essa, non tendente ad* A *quando* $A' \rightarrow A$, *si ha*

$$\lim_{A' \rightarrow A} (T_1 A' A_1' M) = -\beta\, du^3/\gamma\, dv^3 = -(d_1 s/d_2 s)^3.$$

Questi risultati si enunciano facilmente nello S_3 di σ.

(*) Nota II.: *Ancora sulla geometria delle superficie* etc. [Rend. Lincei, 1926_2].

7. – Invarianti e classi di superficie invarianti.

Dalle coordinate x_i del punto O di σ si passa a quelle p_i del punto A di Φ con le posizioni

$$p_1 = x_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad p_2 = x_1 \frac{\partial x_3}{\partial u} - x_3 \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$p_3 = x_1 \frac{\partial x_4}{\partial u} - x_4 \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad p_4 = x_1 \frac{\partial u_4}{\partial u} - x_4 \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$p_5 = x_4 \frac{\partial x_2}{\partial u} - x_2 \frac{\partial x_4}{\partial u}, \quad p_6 = x_2 \frac{\partial x_3}{\partial u} - x_3 \frac{\partial x_2}{\partial u}$$

in modo che l'equazione di Ω è $p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$.

L'equazione di Laplace cui soddisfa Φ, o meglio il suo sistema coniugato, è

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} + \beta \gamma \right) p = 0 .$$

Essa ha gli invarianti relativi

$$h = - \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} + \beta \gamma , \quad k = \beta \gamma$$

quindi l'invariante assoluto

$$h / k = - \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} + 1 .$$

Analogamente dall'equazione relativa a Φ^* si ricava l'invariante assoluto (ove $h^* = k$)

$$k^* / h^* = - \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} + 1 .$$

Di questi due invarianti (del 2° ordine) di σ *si ha il significato geometrico come invarianti di contatto (di coniche) secondo quanto è stato detto in* I, 2 (pag. 675).

Da essi si hanno per somma e per differenza i due invarianti

$$\frac{h}{k}+\frac{k^*}{h^*}=-\frac{1}{\beta\gamma}\,\frac{\partial^2\log\beta\gamma}{\partial u\,\partial v}+2\,;$$

$$\frac{h}{k}-\frac{k^*}{h^*}=-\frac{1}{\beta\gamma}\,\frac{\partial^2\log\beta/\gamma}{\partial u\,\partial u}$$

che sono due degli invarianti fondamentali dell' elemento lineare proiettivo (il primo, diminuito di 2, è la curvatura proiettiva media di σ *secondo Fubini).*

S' intende che: gli invarianti assoluti delle successive trasformate di Laplace di Φ e di Φ^* danno pure invarianti di σ per applicabilità proiettive; così p. es. indicando h_1 e $k_1\,(=h)$ gli invarianti relativi a Φ_1, si ha l' invariante

$$\frac{h_1}{k_1}=-\frac{1}{h}\,\frac{\partial^2\log h}{\partial u\,\partial v}+2-\frac{k}{h}$$

cioè l' invarianza di $-\dfrac{1}{h}\,\dfrac{\partial^2\log h}{\partial u\,\partial v}$.

Più interessante è vedere come, da queste considerazioni iperspaziali, vengano naturalmente messe in luce alcune classi di superficie.

1) Se $h=0$ le asintotiche di un sistema su σ appartengono a complessi lineari (v. *Sull' equazione di Laplace*, n. 17) e si ritrova così l' equazione caratteristica di Čech [G. P. D., p. 113].

2) Se $h+k^*=0$, cioè se gli invarianti assoluti di Φ e di Φ^* sono uguali e di segno opposto si ha pure un' altra classe di superficie studiata da Čech [G. P. D., pag. 151].

3) Se $h=k^*$, cioè se gli invarianti assoluti di Φ e di Φ^* sono uguali, la superficie è isotermo-asintotica.

4) Se $h=k$, cioè se Φ è ad invarianti (relativi) uguali è $\beta=U\,.\,V\neq 0$ e (con le eventuali trasformazioni $U\,du=d\overline{u}$, $V dv=d\overline{v}$, $\overline{\gamma}=V^2U\gamma$ può farsi $\overline{\beta}=1$ cioè) le forme normali

possono ridursi al tipo $\varphi_2 = 2\bar{\gamma}\, d\bar{u}\, d\bar{v}$, $\varphi_3 = \bar{\gamma}\, d\bar{u}^3 + \bar{\gamma}^2 d\bar{v}^3$ quindi σ è una superficie R_0 [G. P. D., pag. 361].

5) Se $h_1 = k$ cioè se Φ e Φ_1 hanno gli stessi invarianti (scambiati di posto) si hanno le superficie caratterizzate da

$$-\frac{1}{\beta^2}\,\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\, \partial v} + \frac{\gamma}{\beta} = U(u)\,.\,V(v)\,.$$

6) Se $h_1 = k_2$, cioè se Φ_1 ha invarianti relativi uguali si hanno le superficie caratterizzate da

$$-\beta\,\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\, \partial v} + \beta^2 \gamma = U(u)\,.\,V(v)\,.$$

7) Se $h_1 = 0$ si hanno le superficie caratterizzate da

$$\frac{\partial^2 \log (h\beta^2)}{\partial u\, \partial v} = \beta\gamma\,.$$

E così via. Le superficie delle ultime tre classi (che involgono la prima trasformata Φ_1 di Φ) non sono state ancora studiate (*).

(*) Ad un'altra classe di superficie, pure invariante per applicabilità proiettive, si arriva ponendosi la domanda seguente [I]: Dato un sistema assiale (∞^2) di linee sopra una superficie non rigata, contiene esso un doppio sistema coniugato (∞^1)? La risposta è in generale negativa; può contenerne al più uno o due; a meno che tutte le linee del sistema assiale si possano distribuire in ∞^1 sistemi coniugati, nel qual caso la superficie ha curvatura $K = -\dfrac{1}{\beta\gamma}\,\dfrac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v} = -8$, e la congruenza cui quel sistema assiale è associato è necessariamente quella degli spigoli di GREEN (e quindi quel sistema è unico).

Se invece la superficie è rigata esistono infiniti sistemi assiali (dipendenti da una funzione arbitraria) le cui curve si possono distribuire in ∞^1 doppi sistemi coniugati (e gli assi per ciascun punto stanno in un piano che, al variare del punto sulla generatrice per esso, inviluppa una cubica sghemba).

Se poi la superficie è una quadrica, basta che un sistema assiale contenga un doppio sistema coniugato affinchè tutte le sue curve si possano distribuire in ∞^1 sistemi coniugati. L'esistenza di tre tali sistemi (i cui assi in un punto non siano complanari) è caratteristica delle quadriche.

8. - Sistemi di curve invarianti.

I sistemi assiali di curve sopra una superficie σ, le estremali di φ_2 e delle forme elementari, le linee anarmoniche soddisfano tutti ad equazioni del tipo

$$du\, d^2 v - dv\, d^2 u = a\, du^3 + b\, du^2 dv + c\, du\, dv^2 + e\, dv^2$$

o, introducendo i differenziali controvarianti δ rispetto a φ_2

$$(1)\qquad \begin{aligned} \beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) &= \theta_1 \beta^2\gamma\, du^3 + \theta_2 \beta\gamma^2 dv^2 + l\overline{g}_1 \cdot \varphi_2 \\ &= \theta_1 d_1 s^3 + \theta_2 d_2 s^3 + l\overline{g}_1 \cdot \varphi_2 \end{aligned}$$

ove θ_1 e θ_2 sono invarianti (finiti) ed $l\overline{g}_1 = lh_1 du - lh_2 dv$ è una forma differenziale invariante di 1^0 ordine.

Questi sistemi di curve molto generali, la cui equazione è stata indicata da FUBINI, si lasciano tutti caratterizzare geometricamente rimanendo nello S_3 di σ: mi sembra opportuno premettere a questa caratterizzazione la loro genesi iperspaziale.

In ogni punto A di una superficie Φ dotata di un doppio sistema coniugato (non necessariamente appartenente ad S_5) si dia un piano situato nello S_4 2 - osculatore in A ma non incidente (in una retta) il piano tangente in A a Φ. Rimane allora definito $[L]$ su Φ un sistema ∞^2 di curve dotato della seguente proprietà: *i piani osculatori alle curve passanti per* A *tagliano in rette il piano dato* **(piano d'appoggio)** *per* A.

Un tal sistema di curve si dirà **sistema planare**. Sia ora Φ la superficie di Ω che rappresenta le tangenti asintotiche a di σ [E, Nota II.]. Al piano d'appoggio generico in A corrisponde, nello S_3 di σ, un regolo, o se si vuole una **quadrica d'appoggio,** diciamola Q, contenente le due tangenti asintotiche a ed a^* uscenti da O (A è generica nel senso di non contenere altra tangente asintotica di σ infinitamente vicina ad a). Al piano osculatore ad una curva di Φ in A corrisponde il regolo osculatore lungo a alla rigata delle tangenti alle asintotiche u lungo una curva di σ: diciamo la quadrica, cui detto regolo appartiene, ***quadrica asintotica osculatrice del 1º sistema*** in O alla curva (una quadrica del 2º sistema si otterrebbe scambiando le asintotiche u con le v).

Ad un sistema planare di curve su Φ corrisponde su σ un sistema ∞^2 di curve così definite:

Sia data in ogni punto O *di* σ *una (generica) quadrica* Q *contenente le tangenti asintotiche in* O. *Le quadriche asintotiche osculatrici del 1° sistema in* O *alle curve in esame segano ulteriormente (cioè fuori delle tangenti asintotiche in* O*)* Q *in rette.*

In altri termini: *ciascuna di queste quadriche sega* Q *in un* **quadrilatero d'appoggio** *di cui fanno parte le tangenti asintotiche in* O.

La trasformazione di Laplace che porta da Φ a Φ^* fa corrispondere ad un sistema planare di Φ un sistema planare di Φ^*; cioè in S_3:

Le quadriche asintotiche del 2° sistema osculatrici in O *alle curve ora definite tagliano in quadrilateri sghembi una stessa quadrica* Q*, *completamente individuata da* Q.

Insomma nella definizione di questi sistemi di curve si possono scambiare i due sistemi di asintotiche purchè alla quadrica d'appoggio Q (in ogni punto O) se ne sostituisca un'altra, ben determinata, Q^*.

I sistemi definiti dalle precedenti proprietà sono rappresentati su σ *da un'equazione differenziale del tipo* (1).

Sicchè dare la (1) equivale geometricamente ad assegnare in ogni punto O di σ una quadrica Q (o Q^*) nel modo detto. Ora vogliamo effettivamente *costruire* Q *a partire da* θ_1, θ_2, $l\overline{g}_1$ e di più, *per ogni tangente* du/dv, *costruire la quadrica asintotica osculatrice* del 1° sistema alla curva di (1) che ha quella tangente, o se si vuole, il relativo quadrilatero d'appoggio (*).

Poniamo

(*) Le quadriche asintotiche osculatrici del 1° e del 2° sistema relative alla curva (1) uscente da O in direzione du/dv si tagliano (fuori delle tangenti asintotiche) in una conica per O: *il luogo di queste coniche al variare di* θ_1, θ_2, $l\overline{g}_1$, *(fissata* du/dv*) é una ben determinata quadrica* (formante fascio con la quadrica di Lie e col piano tangente contato due volte). Le due quadriche osculatrici si toccano in tutti i punti delle due tangenti asintotiche uscenti da O se e solo se la tangente du/dv è una tangente di Darboux. La quadrica luogo ora determinata è indipendente dalla tangente du/dv se è solo se $\psi_1 = \psi_2 = 0$ cioè per le superficie a linee canoniche indeterminate.

$$T = |X, x, x_u, x_v|, \quad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|, \quad N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|,$$

$$\Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|$$

ove i secondi membri indicano determinanti costruiti con le coordinate normali x_i (v, v) di O e con quelle X_i di un punto generico di S_3; e inoltre $\boldsymbol{H} = -\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} + \beta\gamma\right) \Big/ \beta\gamma = K - 1$ e, come prima, $\psi_1 = \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}$, $\psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v}$.

In relazione al sistema (1) giova considerare la retta di equazioni

$$\text{2)} \qquad N_1 = \left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right) T, \quad N_2 = -(lh_2 + \psi_2)\, T$$

definita dalla sola forma $l\bar{g}_1$; la diremo **retta invariante**; i i piani di cui si sono scritte ora le equazioni passano per essa e rispettivamente per la tangente asintotica a od a^*. (Un'altra retta invariante si avrebbe riferendosi a Q^* invece che a Q).

Consideriamo separatamente dal caso generale i casi $\theta_1^2 = 1$ nei quali si spezza Q (e analogamente $\theta_2^2 = 1$ nei quali si spezza Q^*).

α) I sistemi per i quali $\theta_1 = -1$ (o $\theta_2 = +1$).

Se $\theta_1 = -1$, Q si spezza nel piano tangente $T = 0$ e nel piano

$$(3) \qquad \begin{aligned} &-2(lh_2 + \psi_2) N_1 + 2\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right) N_2 + \\ &+ \left[2\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)(lh_2 + \psi_2) - \beta\gamma(\boldsymbol{H} + \theta_2)\right] T = 2\Omega. \end{aligned}$$

Le quadriche asintotiche osculatrici del 1° sistema alle curve del sistema (1) *per* $\theta_1 = -1$ *toccano il piano* (3) *nei punti della conica sua intersezione col cono quadrico*

$$(4) \quad \left[\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right) T - N_1\right]^2 + \beta T\, [(lh_2 + \psi_2)\, T + N_2] = 0\,;$$

il punto di contatto della quadrica relativa alla tangente du / dv *appartiene alla generatrice del cono complanare con la retta invariante e con la coniugata armonica di detta tangente (rispetto a quelle asintotiche).*

Dalle equazioni (3) e (4) si ha ancora:

Se nel sistema (1) *si lasciano fissi* $\theta_1 = -1$ *ed* $l\bar{g}_1$, *i piani* (2) *formano fascio intorno alla polare della retta invariante rispetto alla quadrica di Lie, e le coniche luogo dei punti di contatto in essi si distribuiscono sul cono* (4).

Conclusioni analoghe per $\theta_2 = +1$ si hanno per Q^*.

Si può aggiungere che se $\theta_1 = -1$ (o $\theta_2 = +1$) il cono di 3ª classe inviluppato dai piani osculatori in O alle curve del sistema (1) si spezza in un piano e in un cono quadrico [G, n. 3]; se $\theta_1 = -1$ e $\theta_2 = 1$ si hanno i sistemi assiali dei quali qui risultano nuove proprietà.

β) I sistemi per i quali $\theta_1 = +1$ (o $\theta_2 = -1$).

Per $\theta_1 = 1$, Q si spezza nei due piani (2).

Le quadriche asintotiche del 1° sistema osculatrici in O *alle curve integrali di* (1) *per* $\theta_1 = 1$ *passano tutte per uno stesso punto* P *(dipendente da* θ_2*) della retta invariante; viceversa se ciò accade è* $\theta_1 = 1$. *Il punto appartiene alla quadrica di Lie relativa ad* O *se e solo se* $\theta_2 = 0$.

I piani in P *tangenti a queste quadriche inviluppano un cono la cui traccia su* $T = 0$ *non dipende affatto da* θ_2 *(ma solo da* $l\bar{g}_1$*) ed è la conica di equazione*

$$4\,(lh_2 + \psi_2)\,N_1^2 - 4\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)N_1 N_2 + \beta N_2^2 + 4\,\Omega N_1 = 0$$

passante per O.

Il piano tangente in P *alla quadrica relativa alla tangente* du / dv *tocca questa conica nel punto* $\neq O$ *in cui essa è incontrata dalla quarta armonica dopo* **a**, *la tangente data ed* a*.

γ). Il caso generale $\theta_1^2 \neq 1$ (o $\theta_2^2 \neq 1$).

Per un punto generico dello spazio passano le quadriche asintotiche del 1° sistema osculatrici in O a curve del sistema (1) relative a tre direzioni du/dv.

Il luogo dei punti per i quali queste direzioni costituiscono una terna apolare alle tangenti asintotiche in O *è la retta invariante* (2).

Caratterizzata così la retta invariante caratterizziamo Q. Il loro punto d'intersezione $\neq O$ dipende solo da $\overline{lg}_1$ e da θ_2; cioè

Tutte le quadriche d'appoggio Q *relative agli infiniti sistemi* (1) *che si ottengono variando* θ_1 *(fissi* $\overline{lg}_1$ *e* θ_1*) passano per uno stesso punto della retta invariante* (relativo alla terna $du^3 = 0$).

Il luogo del punto ora determinato al variare di $\overline{lg}_1$ *è una nuova quadrica* $\tilde{Q}$ *caratterizzata solo da* θ_2, *di equazione*

$$N_1 N_2 = \left\{ \Omega + \frac{1}{2} \beta \gamma (\boldsymbol{H} + \theta_2) T' \right\} T ;$$

essa appartiene al fascio formato dalla quadrica di Lie (con la quale coincide se e solo se $\theta_2 = 0$) e dal piano tangente in O contato due volte ed è individuata dal suo ulteriore punto d'intersezione ($\neq O$) con la normale proiettiva: infatti il birapporto dei punti OO_3 (vertici del tetraedro fondamentale; v. pag. 687) e dei punti d'intersezione della OO_3 con $\tilde{Q}$ e con la quadrica di Lie vale $1 + \theta_2 / \boldsymbol{H}$, cioè si sa costruire appena dato θ_2 (poichè $\boldsymbol{H}$ dipende solo dalla curvatura proiettiva K di σ in O) (*).

Ad un'altra quadrica invariante $\tilde{Q}^*$, individuata in modo analogo da θ_1 soltanto, si arriva operando su Q^*.

Ora siamo in grado di dare la costruzione della quadrica d'appoggio Q in O relativa al sistema (1).

Si costruisca, data $\overline{lg}_1$, *la retta invariante* c, *dato* θ_2, *la quadrica* $\tilde{Q}$ *nel modo ora detto. Poi nel fascio determinato dai piani*

(*) La quadrica $\tilde{Q}$ si può anche caratterizzare (indipendentemente dal suo punto d'incontro con la normale proiettiva) così: essa è asintotica osculatrice del 1° sistema alla curva del sistema (1) uscente da O in direzione $du = 0$. Sicchè per costruire $\tilde{Q}$ basta conoscere l'elemento del 2° ordine di questa curva in O. Questa curva ha per piano osculatore in O, come l'asintotica v, il piano ivi tangente a σ e l'invariante proiettivo di contatto di queste due curve (v. pag. 679) vale $1 - \theta_2$. In particolare esse si osculano se $\theta_2 = 0$; se invece $\theta_2 = 1$ la curva in esame del sistema (1) ha un flesso in O.

asintotici (2) *per la retta invariante e da* $\tilde{Q}$ *si costruisca la quadrica avente con* $\tilde{Q}$ *in O l'invariante di contatto* (*) $\frac{\theta_1+1}{\theta_1-1}$: *questa è* Q.

Passiamo alla costruzione della quadrica asintotica del primo sistema osculatrice alla curva di (1) uscente da O in direzione du/dv: basterà deterninarne il quadrilatero d'appoggio su Q, o, ciò che fa lo stesso, il punto di contatto, non appartenente alle tangenti asintotiche, con Q. Essa è fornita dai teoremi seguenti:

Il luogo dei punti di contatto con Q *delle quadriche osculatrici in* O *alle curve di* (1) *è la cubica sghemba intersezione residua (tolta la retta invariante) di* Q *con il cono di equazione*

$$\left[\left(lh_1+\frac{\psi_1}{2}\right)T-N_1\right]^2+\frac{\beta}{2}(1-\theta_1)\left[(lh_2+\psi_2)T+N_2\right]T=0$$

dipendente solo da $\lg_1$ *e da* θ_1 (su di esso stanno quindi le ∞^1 cubiche ottenute variando θ_2; mentre le ∞^2 cubiche ottenute variando θ_1 e θ_2 si distribuiscono sopra un fascio di coni bitangenti etc.).

Il punto di contatto relativo alla tangente du/dv *si ottiene segando la cubica col piano della retta invariante e della tangente coniugata armonica di quella data (rispetto ad* a *ed* a*),

Aggiungiamo infine le seguenti osservazioni.

Per i sistemi (1) *caratterizzati da* $\theta_1=-\theta_2$ *e per essi soli si ha* $\tilde{Q}\equiv\tilde{Q}^*$; *e queste due quadriche coincidono con la quadrica di Lie se e solo* $\theta_i=0$.

I sistemi per i quali $\theta_1=\theta_2$ *son caratterizzati dal fatto che una retta arbitraria per* O *taglia la quadrica di Lie e le due quadriche* $\tilde{Q}$ *e* $\tilde{Q}^*$ *in punti formanti con* O *un gruppo armonico.*

Si ha p. es. $\theta_i=0$ per le curve anarmoniche e per le estremali delle forme elementari (pag. 684) [N].

(*) Due superficie aventi in un punto O le stesse tangenti asintotiche hanno un *invariante proiettivo di contatto* (limite di un birapporto) del tutto analogo all'invariante di SEGRE per due curve piane (I, 1; pag. 674). Se nell'intorno di O sono rappresentate dalle equazioni $z=axy+\ldots\ldots$, $z=a'xy+\ldots\ldots$, detto invariante vale a/a'. [F].

VII. — Corrispondenze puntuali fra superficie.

A. TEOREMI GENERALI [*A*, *O*].

1. - Corrispondenza cremoniana fra stelle di piani.

Le applicabilità proiettive (di FUBINI) di una superficie σ costituiscono una delle scoperte più notevoli in questo campo, poichè di esse non si aveva idea prima delle ricerche del FUBINI stesso. Esse sono ben caratterizzate dal fatto di agire, fino all'intorno del 2^0 ordine di un punto generico O di σ, come collineazioni.

A ben rilevare la posizione ch'esse assumono fra le corrispondenze puntuali fra due superficie, cioè a riconoscere quali particolari caratteri deve possedere una tal corrispondenza per essere un'applicabilità proiettiva, giova prendere in esame le *proprietà relative al 2° ordine di una corrispondenza puntuale qualsiasi.*

Siano O ed $\overline{O}$ dei punti (regolari) generici di σ e $\overline{\sigma}$ poste in corrispondenza puntuale (biunivoca, e regolare fino all'intorno del 2^0 ordine, in due campi sufficientemente limitati entro i quali cadono O ed $\overline{O}$).

La corrispondenza puntuale subordina: 1) una corrispondenza proiettiva fra gli intorni del 1^0 ordine (fasci di tangenti) di O ed $\overline{O}$, 2) una corrispondenza fra i piani delle due stelle di centri O ed $\overline{O}$ quando si assumano come corrispondenti piani contenenti intorni del 2^0 ordine (di curve) corrispondenti in O ed $\overline{O}$.

La corrispondenza fra due le stelle di piani $\{O\}$ *ed* $\{\overline{O}\}$ *è Cremoniana del 3° ordine; i suoi piani fondamentali, p. es. in* $\{O\}$, *sono il piano tangente* τ *in* O *e due piani generalmente determinati e distinti dal precedente che si tagliano in una retta che si dirà* **asse della corrispondenza** *relativo al punto* O *(e così si ha un* **asse** *relativo ad* $\overline{\mathrm{O}}$*).*

Questi due piani fondamentali ($\neq \tau$) *sono i piani osculatori in* O *alle curve corrispondenti a quelle che hanno un flesso in* $\overline{\mathrm{O}}$.

Uno di essi viene a coincidere con τ *se ad una tangente asintotica in* O *corrisponde una tangente asintotica in* $\overline{\mathrm{O}}$*; ma esso diviene indeterminato se alle curve di* σ *che hanno quella per tangente di flesso corrispondono su* $\bar{\sigma}$ *curve aventi pure un flesso (in* $\overline{\mathrm{O}}$, *e per tangente di flesso la corrispondente tangente asintotica) ; in termini infinitesimali : se ai tre punti infinitamente vicini comuni ad una tangente asintotica e a* σ *corrispondono tre punti situati sulla corrispondente tangente asintotica (e su* $\bar{\sigma}$*).*

2. – Corrispondenze proiettive fra stelle di rette.

Vogliamo ora considerare un'altra corrispondenza fra le stelle di rette uscenti da O e da $\bar{O}$, così definita.

Nella corrispondenza Cremoniana precedente ai piani di un fascio per O corrispondono, in $\bar{O}$, i piani di un inviluppo cubico $\bar{\Gamma}^3$: *facciamo corrispondere alla retta asse del fascio di piani per* O *la retta per cui passano i tre piani cuspidali di* $\bar{\Gamma}^3$.

La corrispondenza così stabilita fra la stella di rette di centro O *e la stella di centro* $\overline{\mathrm{O}}$ *è una proiettività generalmente non degenere ;* sia ω.

Analogamente esiste una proiettività, $\bar{\omega}$, che fa passare da una retta asse di un fascio di piani per $\bar{O}$ alla retta appartenente ai tre piani cuspidali dell'inviluppo cubico corrispondente.

Il prodotto delle due proiettività ω *ed* $\bar{\omega}$ *è un'omologia nella stella di centro* O *in cui sono unite tutte le tangenti in* O *a* σ: *l'ulteriore retta unita è l'asse della corrispondenza in* O.

L'omologia diviene speciale se ad una tangente asintotica in O *corrisponde una tangente asintotica in* $\overline{\mathrm{O}}$.

Le due proiettività ω *ed* $\bar{\omega}$ *sono una inversa dell'altra in uno di questi due càsi :* 1°) *quando ad una tangente asintotica in* O *corrisponde una tangente asintotica in* $\overline{\mathrm{O}}$ *e ai tre punti (infinitamente vicini) comuni a quella e a* σ *corrispondono i tre punti analoghi su questa ;* 2°) *quando si corrispondono tutt'e due le tangenti asintotiche.*

3. – Sistemi assiali corrispondenti.

Altra caratterizzazione delle corrispondenze, in relazione alle proprietà del 2^0 ordine, si ha dalla considerazione dei sistemi assiali (III B 1). Precisamente:

In una corrispondenza puntuale generica tra σ e $\bar{\sigma}$ vi è uno ed un solo sistema assiale di σ cui corrisponda un sistema assiale di $\bar{\sigma}$: l'asse del sistema in un punto O è precisamente l'asse della corrispondenza relativo ad O.

Fanno eccezione i casi seguenti: Se su σ e $\bar{\sigma}$ si corrispondono le asintotiche di un sistema, o di tutti e due i sistemi, non esistono in generale sistemi assiali corrispondenti. Però nel 1° caso se ai tre punti comuni ad una tangente asintotica e a σ corrispondono i tre punti comuni alla tangente asintotica corrispondente e a σ gli assi relativi ad O e ad $\bar{O}$ risultano indeterminati e descrivono due fasci proiettivi (di centri O ed $\bar{O}$); nel 2° caso se la circostanza ora rilevata si presenta per tutt' e due i sistemi di asintotiche ad ogni sistema assiale di σ corrisponde un sistema assiale di $\bar{\sigma}$ e la corrispondenza è un'applicabilità proiettiva.

Quest'ultima affermazione è il teor. di Čech sulle applicabitità proiettive. Di queste si può dare la caratterizzazione seguente: *Se su due superficie σ e $\bar{\sigma}$ si corrispondono le linee di Darboux (e di conseguenza le asintotiche) e se ad* **un** *sistema assiale di σ corrisponde un sistema assiale di $\bar{\sigma}$ la corrispondenza è un'applicabilità proiettiva* (*).

(*) Per le proprietà metriche delle corrispondenze, con particolari applicazioni alla rappresentazione conforme, e alla corrispondenza fra superficie parallele vedansi le Note [A, O, R]. Nello studio delle corrispondenze puntuali fra superficie si può dare un teorema, più generale del precedente, per i sistemi definiti al n. 8 del Cap. VI; ritornerò su di essi nel caso delle corrispondenze asintotiche (v. l'ultimo n. di questo capitolo).

B. CORRISPONDENZE PARTICOLARI.

1. – Le corrispondenze proiettivo-conformi e proiettivo-simili.

Dopo le applicabilità proiettive di Fubini, le corrispondenze più semplici sono quelle che conservano l'elemento lineare proiettivo a meno di un fattore. Precisamente, se punti corrispondenti di due superficie σ e $\bar{\sigma}$ hanno le stesse coordinate u, v, noi studiamo quelle corrispondenze per le quali i loro elementi lineari proiettivi E ed $\bar{E}$ (di Fubini) sono legati da una relazione del tipo $\bar{E} = \rho E$ ove $\rho(u, v)$ è finita e differente da zero nel campo che si considera. È chiaro che dovendosi avere per $E = 0$, $\bar{E} = 0$ e viceversa si corrispondono su σ e $\bar{\sigma}$ le linee di Darboux (e di Segre) e di conseguenza le asintotiche. Dall'ultimo teorema precedente sappiamo che, se $\rho \neq 1$, non vi sono sistemi assiali corrispondenti su σ e $\bar{\sigma}$.

Queste corrispondenze, che appare giustificato di chiamare **proiettivo-conformi**, si possono caratterizzare col seguente teorema:

In ogni corrispondenza fra σ *e* $\bar{\sigma}$ *che conservi le asintotiche* (**corrispondenza asintotica**) *esiste* **un** *sistema assiale di curve di* $\bar{\sigma}$ *tale che alla sua retta asse in* $\bar{O}$ *corrisponde in* O *un inviluppo cubico i cui piani cuspidali passano per la normale proiettiva (in* O*). Se e solo se la corrispondenza è* **proiettivo-conforme** *i tre piani cuspidali detti contengono le tangenti di Segre (in* O*).*

Analogamente possiamo classificare le corrispondenze, che diremo **proiettivo-simili**, per cui $\rho =$ costante.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la corrispondenza sia **proiettivo-simile** *è che il sistema assiale del teorema precedente sia quello associato alle normali proiettive di* $\bar{\sigma}$.

(Si capisce che nei teoremi ora dati si può scambiare ovunque σ con $\bar{\sigma}$).

Varrebbe la pena di approfondire queste trasformazioni anche perchè, data la relativa ristrettezza delle famiglie di superficie che ammettono applicabilità proiettive (non collineazioni) sarebbe interessante stabilire la generalità delle superficie che ammettono trasformazioni proiettivo-conformi o proiettivo-simili. Queste si presentano spontaneamente nella ricerca seguente.

2. – Le corrispondenze geodetico-proiettive [P].

Diremo due superficie σ e $\bar{\sigma}$ in **corrispondenza geodetico-proiettiva** se su di esse si corrispondono le pangeodetiche (estremali dell'elemento lineare proiettivo di Fubini). È chiaro che se σ e $\bar{\sigma}$ sono in corrispondenza proiettivo-simile su di esse si corrispondono le pangeodetiche. È la domanda inversa che interessa, e precisamente interessano quei casi che, per analogia col problema dell'ordinaria rappresentazione geodetica, si possono chiamare di Liouville. Si hanno i teoremi:

Se due superficie non rigate sono in corrispondenza geodetico-proiettiva, o i loro elementi lineari differiscono (al più) per un fattore costante (corrispondenza proiettivo-simile) oppure tutt'e due le superficie sono a linee canoniche indeterminate e i loro elementi lineari possono ridursi ai tipi

$$F_3 / F_2 = \frac{(dU + dV)\, dU\, dV}{dU^2 + dU\, dV + dV^2}\,; \quad \bar{F}_3 / \bar{F}_2 = \frac{hk(h\, dU + k\, dV)\, dU\, dV}{h^2 dU^2 + hk\, dU\, dV + k^2 dV^2}$$

con h *e* k *costanti.*

In tal caso le due superficie possono rappresentarsi (per punti) su due piani in modo che alle loro pangeodetiche corrispondano le rette dei due piani; le corrispondenze geodetico-proiettive fra le due superficie hanno per immagini le omografie fra i piani rappresentativi.

Non esistono rappresentazioni geodetico-proiettive di una superficie rigata sopra una non rigata.

Se le due superficie sono rigate (e se non sono in corrispondenza proiettivo-simile, caso banale) i loro elementi lineari proiettivi sono riducibili ai tipi

$$[u + N(v)]^2 v'^2 du\,, \qquad \frac{[u + N(v)]^2 v'^2 du}{v^3 + [u + N(v)]\, v^2 v'}$$

ove dv = 0 *rappresenta le generatrici rettilinee (corrispondenti) mentre* du = 0 *rappresenta le asintotiche (curvilinee) di* σ *e* $uv + F(v) = \text{cost.}$, *con* $dF = N dv$, *le asintotiche di* $\bar{\sigma}$ *(non corrispondenti alle precedenti).*

Le geodetiche proiettive di una tal superficie (σ *e* $\bar{\sigma}$) *punteggiano proiettivamente due generatrici rettilinee. Esse si ottengono tutte, nel piano rappresentativo cartesiano* (u, v) *imprimendo alle immagini delle asintotiche di* $\bar{\sigma}$ *una traslazione parallela all'asse* u.

La costruzione di queste rigate dipende dall'integrazione di un'equazione differenziale lineare ordinaria del 4° ordine.

Appartiene a questa classe di rigate (e sono tutte applicabili proiettivamente su di essa quelle per cui $N = \text{cost.}$) la rigata cubica di CAYLEY. Essa e le sue geodetiche proiettive si costruiscono così:

Data una cubica sgemba C, *un suo punto* O *e la tangente ivi* t, *si congiunga un punto variabile su* C *con l'intersezione del piano in esso osculatore con* t. *Su questa rigata le geodetiche proiettive sono (le cubiche) segate dai coni quadrici osculatori lungo* t *al cono che da* O *proietta* C.

3. – Le corrispondenze asintotiche.

Più generali delle corrispondenze precedenti sono quelle che fanno corrispondere su due superficie σ e $\bar{\sigma}$ le loro asintotiche (se di più si corrispondono le linee di DARBOUX si hanno le corrispondenze proiettivo-conformi del n. 1).

Le due forme quadratiche normali φ_2 e $\bar{\varphi}_2$ di σ e $\bar{\sigma}$ differiscono per un fattore ($\neq 0$) sicchè potrà scriversi $\bar{\varphi}_2 = e^{2h}\varphi_2$ con $h = h(u, v)$. Perciò lo studio delle corrispondenze asintotiche equivale allo studio su σ delle metriche (quadratiche) conformi a φ_2 o, se si vuole, di un'equazione (e non di una forma) quadratica.

E si ha [B]:

Le estremali di una qualsiasi metrica $e^{2h}\varphi_2$ *sono definite dall'equazione differenziale*

$$\beta\gamma\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) = \left(\frac{\partial h}{\partial u}\,du - \frac{\partial h}{\partial v}\,dv\right)\varphi_2$$

(i δ^2 essendo eseguiti rispetto a φ_2). I piani ad esse osculatori in un punto O *di σ inviluppano un cono di 3^a classe i cui piani cuspidali tagliano il piano τ tangente a σ in* O *nelle tre tangenti di Segre e passano per una retta, che dirò* **pseudo-normale** *relativa ad* O *e alla forma* $e^{2h}\varphi_2$ (per $h=$ cost. si ha la normale proiettiva di Fubini), congiungente i punti x ed $x_{uv}+h_v x_u+h_u x_v$.

Le sviluppabili della congruenza di pseudo-normali (qualunque sia h*) segano su σ un doppio sistema coniugato cioè ogni congruenza di pseudonormali è coniugata a σ. Viceversa ogni congruenza coniugata a σ determina, a meno di un fattor numerico, una metrica* $e^{2h}\varphi_2$ *per la quale la congruenza è quella delle pseudo-normali.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la pseudonormale relativa ad un punto generico O *di σ appartenga al piano canonico in* O *è che sia*

$$h(u,v)=\int\theta\left(\frac{\partial\log\beta\gamma^2}{\partial u}\,du+\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}\,dv\right)=\int\theta\,(\psi_1 du+\psi_2 dv)$$

ove θ è un qualunque fattore integrante di $\psi_1 du+\psi_2 dv$ (per $\theta=0$ si ha la normale proiettiva).

Dal confronto dell'equazione di queste estremali con l'equazione delle linee anarmoniche risulta che:

Proprietà caratteristica delle superficie isotermo-asintotiche è che le loro curve anarmoniche sono geodetiche di una metrica conforme a φ_2.

Ad altre proprietà notevoli delle corrispondenze asintotiche si arriva considerando sulle due superficie i sistemi (invarianti per applicabilità proiettive) studiati al n^0 8 del capitolo precedente. Si ha per essi il seguente teorema generale:

In una corrispondenza asintotica fra σ e $\overline{\sigma}$ ad ogni sistema definito su σ dall'equazione differenziale

$$(1)\quad \beta\gamma\,(du\,\delta^2 v-dv\,\delta^2 u)=\theta_1\beta^2\gamma\,du^3+\theta_2\beta\gamma^2 dv^3+l\,(h_1 du-h_2 dv)\,\varphi_2$$

corrisponde su $\overline{\sigma}$ un ben determinato sistema

$$(\overline{1})\quad \overline{\beta}\overline{\gamma}(du\,\overline{\delta}^2 v-dv\,\overline{\delta}^2 u)=\overline{\theta}_1\overline{\beta}^2\overline{\gamma}\,du^3+\overline{\theta}_2\overline{\beta}\overline{\gamma}^2 dv^3+\overline{l}\,(\overline{h}_1 du-\overline{k}_2 dv)\overline{\varphi}_2$$

(ove i $\overline{\delta}^2$ sono ora differenziali controvarianti rispetto alla forma

$\overline{\varphi}_2 = 2\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\,du\,dv$ *di* $\overline{\sigma}$*); e le equazioni che determinano la corrispondenza fra questi sistemi sono*

$$\overline{\beta}\,\overline{\theta}_1 = \beta\,\theta_1, \quad \overline{\gamma}\,\overline{\theta}_2 = \gamma\,\theta_2\,; \quad \overline{l}\,\overline{h}_1 = l h_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \overline{\beta}\,\overline{\gamma}/\beta\gamma}{\partial u}\,,$$

$$\overline{l}\,\overline{h}_2 = l h_2 - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \overline{\beta}\,\overline{\gamma}/\beta\gamma}{\partial v}\,.$$

Risulta dalle due prime di queste relazioni che i sistemi (1) per i quali $\theta_1 = 0$ oppure $\theta_2 = 0$ oppure $\theta_1 = \theta_2 = 0$ formano tre sottoclassi invarianti per qualsiasi trasformazione asintotica di una superficie. Ricordando le caratterizzazioni geometriche, già indicate, di queste sottoclassi si ha in particolare per l'ultima:

Ogni sistema (1) *di* σ *per cui le quadriche invarianti* $\tilde{Q}$ *e* $\tilde{Q}^*$ *coincidono in ogni punto con la quadrica di Lie ha per corrispondente su un* $\overline{\sigma}$ *sistema dotato della stessa proprietà.* (*)

La corrispondenza di particolari sistemi (1) e $(\overline{1})$ su σ e $\overline{\sigma}$ dà modo di caratterizzare particolari tipi di corrispondenze; p. es.:

Se esiste su σ un *sistema per cui* $\theta_1 = -\theta_2$, *cioè per cui le due quadriche invarianti* $\tilde{Q}$ *e* $\tilde{Q}^*$ *coincidano in ogni punto cui corrisponda su* $\overline{\sigma}$ *un sistema dotato della stessa proprietà (cioè* $\overline{\theta}_1 = -\overline{\theta}_2$*) la corrispondenza è necessariamente proiettivo-conforme* (cioè $\overline{\beta}/\beta = \overline{\gamma}/\gamma$).

Analogamente: se su σ e $\overline{\sigma}$ si corrispondono due sistemi (uno di σ e uno di $\overline{\sigma}$) per i quali $l(h_1 du - h_2 dv) \equiv \overline{l}(\overline{h}_1 du - \overline{h}_2 dv)$ le due forme quadratiche φ_2 e $\overline{\varphi}_2$ differiscono soltanto per un fattore costante $(\overline{\beta}\,\overline{\gamma} = k\,.\,\beta\gamma)$.

E infine: se ad un sistema (1) le cui curve tangenti alle asintotiche u hanno un flesso nel punto di contatto corrisponde un sistema dotato della stessa proprietà $(\theta_1 = \overline{\theta}_1 = 1)$ è invariante nella corrispondenza la prima forma elementare $(\overline{\beta} = \beta)$.

(*) A questo tipo appartengono le estremali, sopra studiate, di $e^{2h}\,.\,\varphi_2$; la corrispondenza fra le congruenze di pseudo-normali segue dal fatto che $l(h_1 du + h_2 dv)$ e $\overline{l}\,(\overline{h}_1 du + \overline{h}_2 dv)$ sono (o non sono) insieme differenziali esatti.