CAPITOLO IX.

QUADRICHE DI MOUTARD E CORRISPONDENZE Σ ($\breve{C}$).

§ 79. — Trasformazione delle equazioni fondamentali.

In questo Capitolo riprenderemo le ricerche geometriche iniziate al Cap. III relative all'intorno d'un punto; in particolare dimostreremo un teorema di Moutard relativo alle coniche osculatrici delle sezioni piane. Oltre diversi risultati nuovi dimostreremo del resto anche qualche fatto già stabilito al ricordato Cap. III coll'uso di coordinate particolari (asintotiche), dandone, a base delle formole dedotte al Cap. VI, l'espressione valida in coordinate curvilinee qualunque. Cominciamo con una *trasformazione delle equazioni fondamentali* (Cap. II § 14 A)

$$x_{rs} = \Sigma a^i_{rs} x_i + a_{rs} X + p_{rs} x ,$$

$$\xi_{rs} = - \Sigma a^i_{rs} \xi_i + a_{rs} \Xi + \pi_{rs} \xi \ (*)$$

e precisamente dimostriamo che esse *equivalgono alle*

$$d^2 x = \frac{\frac{1}{2} dF_2 + F_3}{F_2} dx + \varepsilon \frac{\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s - F'_3}{F_2} Dx + F_2 X + Px ,$$

(*) Supporremo al solito che il fattore delle coordinate x sia scelto in modo *qualunque*. Si avvertirà esplicitamente quando si vorranno usare coordinate e forme *normali*.

(1)

$$d^2\xi = \frac{\frac{1}{2}dF_2 - F_3}{F_2} d\xi + \varepsilon \frac{\Sigma \vartheta_{rs}\, du_r \delta^2{}_{us} + F_3'}{F_2} D\xi + F_2 \Xi + \Pi\xi \,,$$

dove, si ricordi

$$P = \Sigma p_{rs}\, du_r\, du_s \,, \quad \Pi = \Sigma \pi_{rs}\, du_r\, du_s \,,$$

$\delta^2 u_i$ sono i differenziali secondi contravarianti (Cap. II § 9 A), Du_i sono i differenziali coniugati (Cap. VI § 56),

$$Dx = x_1 Du + x_2 Dv \,, \quad D\xi = \xi_1 Du + \xi_2 Dv$$

e

$$F_3' = \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, Du_t \quad \text{(Cap. VI § 57).}$$

Infatti è evidente per la definizione stessa dei differenziali secondi controvarianti che le equazioni ricordate possono mettersi sotto la forma

$$d^2 x = \Sigma x_i \delta^2 u_i + \Sigma a_{rs}^i x_i\, du_r\, du_s + F_2 X + Px \,,$$

$$d^2\xi = \Sigma \xi_i \delta^2 u_i - \Sigma a_{rs}^i \xi_i\, du_r\, du_s + F_2 \Xi + \Pi\xi \,;$$

sicchè per provare le (1) occorre soltanto verificare le identità

(2) $$\Sigma x_i \delta^2 u_i = \frac{1}{2} \frac{dF_2}{F_2} dx + \frac{\varepsilon \Sigma \vartheta_{rs}\, du_r \delta^2 u_s}{F_2} Dx \,,$$

(2)bis $$\Sigma \xi_i \delta^2 u_i = \frac{1}{2} \frac{dF_2}{F_2} d\xi + \frac{\varepsilon \Sigma \vartheta_{rs}\, du_r \delta^2 u_s}{F_2} D\xi \,,$$

(3) $$\Sigma a_{rs}^i x_i\, du_r\, du_s = \frac{F_3}{F_2} dx - \varepsilon \frac{F_3'}{F_2} Dx \,,$$

(3)bis $$\Sigma a_{rs}^i \xi_i\, du_r\, du_s = + \frac{F_3}{F_2} d\xi - \varepsilon \frac{F_3'}{F_2} D\xi \,.$$

E ci basta dimostrare le (2) e (3), le $(2)_{\text{bis}}$ e $(3)_{\text{bis}}$ dimostrandosi in modo perfettamente simile.

Supposto $F_2 \gtrless 0$ (*) i punti dx e Dx sono linearmente indipendenti, essendo (Cap. VI, § 56, $(5)_{\text{bis}}$)

$$du\,Dv - dv\,Du = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}} F_2 \gtrless 0 \;;$$

e quindi i punti x_1, x_2 e dunque anche i primi membri delle (2) e (3) ne sono combinazioni lineari, cosicchè possiamo porre

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} &\Sigma x_i \delta^2 u_i = \lambda dx + \lambda' Dx \;, \\ &\Sigma a_{rs}^i x_i du_r du_s = \mu dx + \mu' Dx \;, \end{aligned}$$

dove λ, λ', μ, μ' sono incognite da determinarsi. A tale fine moltiplicheremo le (α) per $d\xi$ oppure $D\xi$, osservando che

$$Sx_i d\xi = -a_{i1} du - a_{i2} dv \;,$$

$$Sx_i D\xi = -a_{i1} Du - a_{i2} Dv \;,$$

$$Sdxd\xi = -F_2 \;, \quad SDxD\xi = -\Sigma a_{ik} Du_i Du_k = \varepsilon F_2 \quad \text{(Cap. VI § 56, (5))},$$

$$SDxd\xi = -\Sigma a_{ik} du_i Du_k = 0 \;.$$

Troviamo così:

$$-\Sigma a_{ik} du_k \delta^2 u_i = -\lambda F_2 \;, \quad -\Sigma a_{ik} Du_k \delta^2 u_i = \varepsilon \lambda' F_2 \;,$$

$$-\Sigma a_{rs}^i a_{ik} du_k du_r du_s = -\Sigma a_{rsk} du_k du_r du_s = -F_3 = -\mu F_2 \;,$$

$$-\Sigma a_{rsi} Du_i du_r du_s = -F_3' = \varepsilon \mu' F_2 \;.$$

(*) Se $F_2 = 0$ le formole da dimostrarsi perdono ogni significato. Esse si possono in tal caso sostituire con altre formole analoghe. Cfr. più avanti il § 84.

Per dimostrare le (2) e (3), occorre vedere ancora che

$$\Sigma a_{ik}\, du_k\, \delta^2 u_i = \frac{1}{2}\, dF_2\,,$$

$$\Sigma a_{ik}\, Du_k\, \delta^2 u_i = -\,\Sigma \delta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\,.$$

Ora la prima di queste due identità è già scritta al Cap. II § 9; per dimostrare la seconda basta scriverla nella forma:

$$\delta^2 u(a_{11}Du + a_{12}Dv) + \delta^2 v(a_{12}Du + a_{22}Dv) = -\sqrt{|A|}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\,,$$

e osservare (§ 56 $(3)_{\text{quater}}$) che

$$du = -\frac{1}{\sqrt{|A|}}(a_{12}Du + a_{22}Dv)\,, \quad dv = \frac{1}{\sqrt{|A|}}(a_{11}Du + a_{12}Dv)\,.$$

Le formole (1) sono quindi dimostrate.

§ 80. — Il teorema di Moutard.

A) Un lemma.

Fissato un punto O *di una superficie non sviluppabile* S *e in* O *una tangente non asintotica* t *ad* S, *il luogo delle coniche osculatrici* (*) *in* O *delle sezioni di* S *mediante tutti i piani che passano per* t *è una quadrica non cono* (**) *che diremo la quadrica di Moutard appartenente alla tangente* t.

Ricordiamo dapprima il teorema (Cap. I § 8): Indicando con x le tre coordinate omogenee dei punti di una curva piana C

(*) a contatto cinquepunto.

(**) Se S fosse sviluppabile, la quadrica di Moutard sarebbe un cono.

e con ξ' le tre coordinate omogenee delle rette tangenti di essa, e scelti i fattori arbitrari delle x e ξ' in modo che sia identicamente

$$S\,(dx\,d^2\xi' - d^2x\,d\xi') = 0\,, \tag{1}$$

la polare del punto

$$r_0\,x + r_1 dx + r_2 d^2 x$$

rispetto alla conica osculatrice a C in x è

$$r_0\xi' + r_1 d\xi' + r_2 d^2\xi'\,.$$

Per il nostro scopo abbiamo bisogno di generalizzare questa proposizione alle curve piane nello spazio. La modificazione dell'enunciato è evidente: *Se con* x *indichiamo le quattro coordinate del punto mobile sulla curva piana* C, *e con* ξ' *le quattro coordinate di un piano scelto ad arbitrio* (*) *fra i piani tangenti* a C *in* x, *il piano*

$$r_0\,\xi' + r_1\,d\xi' + r_2\,d^2\xi'$$

contiene la polare del punto

$$r_0 x + r_1 dx + r_2 d^2 x$$

rispetto alla conica osculatrice a C *in* x *semprechè sia soddisfatta lungo* C *la* (1). Infatti, se il piano di C è un piano del tetraedro di riferimento, il teorema si riduce subito al precedente; d'altra parte l'enunciato è evidentemente indipendente dalla posizione del tedraedro di riferimento.

B) Dimostrazione del teorema di Moutard.

La proposizione ora enunciata, insieme colle formole (1) del § 79, permettono non soltanto di dimostrare il teorema di Moutard, ma anche di scrivere l'equazione della quadrica di Moutard in

---

(*) purchè diverso dal piano osculatore in x a C.

coordinate curvilinee qualunque. Precisamente dimostreremo che: *Se i differenziali* du_i *si riferiscono allo spostamento infinitesimo lungo la tangente* t, *il piano polare del punto*

$$y = \rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X$$

rispetto alla quadrica di Moutard appartenente a t *è il piano*

$$\eta = \sigma_0 \xi + \sigma_1 d\xi + \sigma_2 D\xi + \sigma_3 \Xi$$

dove

$$\sigma_0 = \rho_0 + \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2}\rho_1 + 2\frac{F'_3}{F_2}\rho_2 +$$

$$+\left(\frac{2}{3}\frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i}{F_2^2} - \frac{2}{9}\frac{F_3^2}{F_2^3} + 2\varepsilon\frac{F_3'^2}{F_2^3} + \frac{\Pi - P}{F_2}\right)\rho_3,$$

(2)

$$\sigma_1 = \rho_1 - \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2^2}\rho_3, \quad \sigma_2 = \rho_2 + 2\varepsilon\frac{F'_3}{F_2^2}\rho_3, \quad \sigma_3 = \rho_3,$$

e inversamente

$$\rho_0 = \sigma_0 - \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2}\sigma_1 - 2\frac{F'_3}{F_2}\sigma_2 +$$

$$+\left(-\frac{2}{3}\frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i}{F_2^2} - \frac{2}{9}\frac{F_3^2}{F_2^3} + 2\varepsilon\frac{F_3'^2}{F_2^3} + \frac{P - \Pi}{F_2}\right)\sigma_3,$$

$(2)_{bis}$

$$\rho_1 = \sigma_1 + \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2^2}\sigma_3, \quad \rho_2 = \sigma_2 - 2\varepsilon\frac{F'_3}{F_2^2}\sigma_3, \quad \rho_3 = \sigma_3.$$

Prima di passare alla dimostrazione delle (2) (*) osserviamo che,

---

(*) le $(2)_{bis}$ sono conseguenza immediata delle (2).

se escludiamo il caso $J = 0$ delle rigate, la prima riga delle (2) e $(2)_{\text{bis}}$ può scriversi più semplicemente (*)

$$
(2)_{\text{ter}} \qquad
\begin{aligned}
\sigma_0 = \rho_0 &+ \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2}\rho_1 + 2\frac{F'_3}{F^2}\rho_2 + \\
&+ \left(\frac{1}{3}\frac{dJ}{J}\frac{F_3}{F_2^2} - \frac{2\varepsilon}{3}\frac{\Sigma\psi_i Du_i . F'_3}{F_2^2} - \frac{16}{9}\frac{F_3^2}{F_2^3} + J + \right. \\
&\left. + \frac{\Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J^r}{J} + \psi^r\right) a_{rst}\, du_s\, du_t}{F_2}\right)\rho_3 , \\
\rho_0 = \sigma_0 &- \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2}\sigma_1 - 2\frac{F'_3}{F_2}\sigma_2 + \\
&+ \left(-\frac{1}{2}\frac{dJ}{J}\frac{F_3}{F_2^2} + \frac{2\varepsilon}{3}\frac{\Sigma\psi_i Du_i . F'_3}{F_2^2} - \frac{16}{9}\frac{F_3^2}{F_2^3} + J - \right. \\
&\left. - \frac{\Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J^r}{J} + \psi^r\right) a_{rst}\, du_s\, du_t}{F_2}\right)\sigma_3 .
\end{aligned}
$$

Inoltre segue subito dal teorema che dimostreremo che il punto

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X$$

sta sulla quadrica di Moutard se

$$2\rho_0\rho_3 - F_2(\rho_1^2 - \varepsilon\rho_2^2) + \frac{4}{3}\frac{F_3}{F_2}\rho_1\rho_3 + 4\frac{F'_3}{F_2}\rho_2\rho_3 +$$

(*) Basta ricordare dal Cap. VI le formole § 57 (4), § 58 (1) e $(3)_{\text{ter}}$.

2_{quater}

$$+\left(\frac{2}{3}\frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i}{F_2^2}-\frac{2}{9}\frac{F_3^2}{F_2^3}+2\varepsilon\frac{F_3'^2}{F_2^3}+\frac{\Pi - P}{F_2}+\right.$$

$$\left.+\, SX\Xi\right)\rho_3^2=0 \quad (*).$$

C) **Dimostrazione.**

Veniamo alla dimostrazione del teorema di Moutard. Nell'applicare il lemma del § 80 A al caso di una curva piana C tracciata sulla superficie S possiamo scegliere per il piano ξ' il piano tangente a S, prendere cioè ξ' proporzionale a ξ. L'identità (Cap. II § 13 B)

$$S\left[dxd^2(\rho\xi)-d^2xd(\rho\xi)\right]=2\rho F_3-3d\rho F_2$$

dimostra subito che la (1) è soddisfatta ponendo

$$\xi'=e^{\frac{2}{3}\int\frac{F_3}{F_2}}\,.\,\xi\,.$$

Il lemma ci dice pertanto che la polare del punto

$$y=r_0x+r_1dx+r_2d^2x$$

(*) Se $J\neq 0$, ciò può scriversi

$$2\rho_0\rho_3-F_2\left(\rho_1^2-\varepsilon\rho_2^2\right)+\frac{4}{3}\frac{F_3}{F_2}\rho_1\rho_3+4\frac{F_3'}{F_2}\rho_2\rho_3+$$

$$+\left(\frac{1}{3}\frac{dJ}{J}\frac{F_3}{F_2^2}-\frac{2\varepsilon}{3}\frac{\Sigma\psi_i\, Du_i\,.\,F_3'}{F_2^2}-\frac{16}{9}\frac{F_3^2}{F_2^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J^r}{J}+\psi^r\right)a_{rst}\, du_s\, du_t}{F_2}-K\right)\rho_3^2=0\,.$$

rispetto alla conica osculatrice a C in x sta nel piano

$$\eta = e^{-\frac{2}{3}\int\frac{F_3}{F_2}}(r_0\xi' + r_1 d\xi' + r_2 d^2\xi') =$$

$$= \left[r_0 + \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2}r_1 + \left(\frac{2}{3}d\frac{F_3}{F_2} + \frac{4}{9}\frac{F_3^2}{F_2^2}\right)r_2\right]\xi +$$

$$+ \left(r_1 + \frac{4}{3}\frac{F_3}{F_2}r_2\right)d\xi + r_2 d^2\xi\ .$$

Sostituendo ai differenziali secondi d^2x e $d^2\xi$ i valori (1) del § 79 troviamo che

$$y = (r_0 + Pr_2)\,x + \left(r_1 + \frac{\frac{1}{2}dF_2 + F_3}{F_2}\right)dx +$$

$$+ \varepsilon\frac{\Sigma\vartheta_{rs}du_r\,\delta^2u_s - F_3'}{F_2}r_2 Dx + F_2 r_2 \mathrm{X}\ ,$$

$$\eta = \left[r_0 + \frac{2}{3}\frac{F_3}{F_2}r_1 + \left(\Pi + \frac{2}{3}\frac{dF_3}{F_2} + \frac{4}{9}\frac{F_3^2}{F_2^2}\right)r_2\right]\xi +$$

$$+ \left(r_1 + \frac{\frac{1}{2}dF_2 + \frac{1}{3}F_3}{F_2}r_2\right)d\xi +$$

$$+ \varepsilon\frac{\Sigma\vartheta_{rs}du_r\,\delta^2u_s + F_3'}{F_2}r_2\,.\,D\xi + F_2 r_2 \Xi\ .$$

Ponendo

$$y = \rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 \mathrm{X}\ ,$$

$$\eta = \sigma_0\xi + \sigma_1 d\xi + \sigma_2 D\xi + \sigma_3 \Xi\ ,$$

sarà pertanto :

$$\rho_0 = r_0 + P r_2\,, \quad \rho_1 = r_1 + \frac{\frac{1}{2} dF_2 + F_3}{F_2} r_2\,,$$

$$\rho_2 = \varepsilon \frac{\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s - F_3'}{F_2} r_2\,, \quad \rho_3 = F_2 r_2\,,$$

$$\sigma_0 = r_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 + \left(\Pi + \frac{2}{3} d \frac{F_3}{F_2} + \frac{4}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2}\right) r_2\,,$$

$$\sigma_1 = r_1 + \frac{\frac{1}{2} dF_2 + \frac{1}{3} F_3}{F_2} r_2\,, \quad \sigma_2 = \varepsilon \frac{\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s + F_3'}{F_2} r_2\,,$$

$$\sigma_3 = F_2 r_2\,.$$

Se ne deduce :

$$\sigma_3 = \rho_3\,, \quad \sigma_2 = \rho_2 + \frac{2\varepsilon F_3'}{F_2} r_2 = \rho_2 + 2\varepsilon \frac{F_3'}{F_2^2} \rho_3\,,$$

$$\sigma_1 = \rho_1 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_2 = \rho_1 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2^2} \rho_3\,,$$

$$\sigma_0 = \rho_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 + \left(\Pi - P + \frac{2}{3} \frac{dF_3}{F_2} + \frac{4}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2}\right) r_2 =$$

$$= \rho_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_1 + \left(\Pi - P + \frac{2}{3} d \frac{F_3}{F_2} - \frac{1}{3} \frac{F_3 d F_2}{F_2^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2}\right) r_2\,.$$

Queste equazioni equivalgono alle (2). Vale infatti la formola (*)

(*) Noi la dimostreremo fra poco.

$$F_2\, d\, F_3 - \frac{3}{2}\, d\, F_2 \,.\, F_3 =$$

(3)

$$= F_2\, \Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_l + 3\varepsilon\, \Sigma \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s \,.\, F_3' \ (*)\,,$$

$$F_2\, d\, F_3 - \frac{1}{2}\left(3\, d\, F_2 + F_2\, \frac{dJ}{J}\right) F_3 =$$

(3)$_{\text{bis}}$

$$= -\,\varepsilon\, F_3' \left[F_2\, \Sigma \psi_i\, Du_i - 3\, \Sigma \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\right]$$

in virtù della quale

$$\frac{2}{3}\, d\, \frac{F_3}{F_2} - \frac{1}{3}\, \frac{F_3\, d\, F_2}{F_2^2} = \frac{2}{3}\, \frac{dF_3}{F_2} - \frac{F_3\, d\, F_2}{F_2^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\, \frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_l}{F_2} + 2\,\varepsilon \Sigma \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s \,.\, \frac{F_3'}{F_2^2}\,,$$

sicchè:

$$\sigma_0 = \rho_0 + \frac{2}{3}\, \frac{F_3}{F_2}\, \rho_1 + 2\,\varepsilon\, \frac{F_3'}{F_2^2}\, \Sigma \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\, r_2 +$$

$$+ \left(\Pi - P + \frac{2}{3}\, \frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i}{F_2} - \frac{2}{9}\, \frac{F_3^2}{F_2^2}\right) r_2 =$$

$$= \rho_0 + \frac{2}{3}\, \frac{F_3}{F_2}\, \rho_1 + 2\, \frac{F_3'}{F_2}\, \rho_2 +$$

$$+ \left(\frac{2}{3}\, \frac{\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i}{F_2^2} - \frac{2}{9}\, \frac{F_3^2}{F_2^3} + 2\,\varepsilon\, \frac{F_3'^2}{F_2^3} + \frac{\Pi - P}{F_2}\right) \rho_3$$

che è appunto l' ultima delle (2).

(*) Se $J \neq 0$, la formola può scriversi (cfr. Cap. VI, § 56 (3)$_{\text{bis}}$ e § 58 (1)).

Il teorema di Moutard si prova ora subito (*). Infatti, nelle (2) non compaiono i differenziali secondi, sicchè, variando la curva C in modo che il piano di essa passi costantemente per la tangente fissa t, i coefficienti delle (2) non mutano e le (2) definiscono pertanto una *correlazione* fissa fra il punto y e il piano η che gode la seguente proprietà: Scelto comunque un punto y dello spazio, le polari di esso rispetto alle coniche osculatrici in x a tutte le curve piane di S che toccano t in x stanno nel piano η corrispondente a y nella nostra correlazione. Il luogo delle dette coniche osculatrici è pertanto identico al luogo dei punti incidenti ai piani loro corrispondenti nella correlazione, luogo che è, come è ben noto, una quadrica. Ma la correlazione definita dalle (2) è appunto la *polarità* rispetto alla quadrica dei punti d'incidenza. Infatti dalle identità subito stabilite (cfr. Cap. II § 12 (10), $(13)_{\text{bis}}$, $(2)_{\text{bis}}$ § 16 C $(9)_{\text{bis}}$ ecc.).

$$Sx\xi = 0\,,\quad Sxd\xi = 0\,,\quad SxD\xi = 0\,,\quad Sx\Xi = 1\,,$$

$$Sdx\,.\,\xi = 0\,,\quad Sdx\,.\,d\xi = -F_2\,,\quad Sdx\,.\,D\xi = 0\,,\quad Sdx\,.\,\Xi = 0\,,$$

(4)

$$SDx\,.\,\xi = 0\,,\quad SDx\,.\,d\xi = 0\,,\quad SDx\,.\,D\xi = \varepsilon F_2\,,\quad SDx\,.\,\Xi = 0\,,$$

$$SX\xi = 1\,,\quad SXd\xi = 0\,,\quad SXD\xi = 0\,,\quad SX\Xi = \Omega = -K-J$$

si deduce subito che la correlazione definita dalle

$$\sigma_r = b_{r0}\rho_0 + b_{r1}\rho_1 + b_{r2}\rho_2 + b_{r3}\rho_3 \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(*) Il teorema di Moutard si potrebbe anche dedurre semplicemente dal lemma: *Se due superficie hanno in un punto* O *un contatto del secondo ordine, e se un piano le interseca in curve che hanno contatto del quarto ordine, ogni curva situata su una delle due superficie che tocca in* O *la sezione piana ora menzionata ha pure contatto del quarto ordine con l'altra superficie.* Infatti basta applicare il lemma a S e a quella quadrica che ha in O contatto del secondo ordine con S e che passa per la conica osculatrice in O a una delle curve C. Il lemma si dimostra subito se si prendono il piano della conica e il piano tangente come due faccie del tetraedro di riferimento r. Ma per le ricerche che seguono (Cap. X) abbiamo bisogno dell'equazione (2).

è polarità rispetto alla quadrica dei punti d'incidenza allora ed allora soltanto che

$$b_{10}F_2 + b_{31} = 0\,, \quad -\varepsilon b_{20}F_2 + b_{32} = 0\,, \quad b_{12} + \varepsilon b_{21} = 0\,,$$

$$b_{00} + \Omega b_{30} - b_{33} = 0\,, \quad b_{01} + \Omega b_{31} + b_{13}F_2 = 0\,,$$

$$b_{02} + \Omega b_{32} - \varepsilon b_{23}F_2 = 0\,,$$

condizioni dalle (2) tutte soddisfatte,

Resta da provare la formola (3). È

$$dF_3 = d\Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t =$$

$$+ \Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + 3\,\Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, \delta^2 u_t\,.$$

Moltiplicando per $F_2 = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k$ risulta:

$$F_2\, d\, F_3 = F_2\, \Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + 3\Sigma a_{rst}\, a_{ik}\, du_r\, du_s\, du_i\, du_k\, \delta^2 u_t\,.$$

Sottraendone l'identità

$$\frac{3}{2}\, dF_2\,.\, F_3 = 3\Sigma a_{ik}\, du_i\, \delta^2 u_k\, \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t =$$

$$= 3\,\Sigma a_{rst}\, a_{ik}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i\, \delta^2 u_k\,,$$

si ricava:

$$F_2\, d\, F_3 - \frac{3}{2}\, d\, F_2\,.\, F_3 = F_2\, \Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i +$$

$$+ 3\,\Sigma a_{rst}\, a_{ik}\, du_r\, du_s\, du_i\, (\delta^2 u_t\, du_k - du_t\, \delta^2 u_k)$$

da cui si arriva tosto alla (3), essendo

$$\Sigma a_{rst}\, a_{ik}\, du_r\, du_s\, du_i\, (\delta^2 u_t\, du_k - du_t\, \delta^2 u_k) =$$

$$= -\varepsilon\sqrt{|A|}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\,\Sigma \vartheta^{kt}\, a_{rst}\, a_{ik}\, du_r\, du_s\, du_i = \quad (*)$$

(*) Cfr. Cap. VI, § 57, $(3)_{\text{ter}}$.

$$= \varepsilon \sqrt{|A|}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\,\Sigma\, b^k_{rs}\, a_{ik}\, du_k\, du_s\, du_i =$$

$$= \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\, \Sigma b_{rsi}\, du_r\, du_s\, du_i =$$

$$= \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\, F'_3\,.$$

Nello stesso modo si dimostra anche la formola simile alla (3)

$$(3)_{\text{ter}} \qquad F_2\, d\, F'_3 - \frac{3}{2}\, d\, F_2\, F'_3 = \\ = F_2\, \Sigma\, b_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + 3\, \Sigma\, \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\, .\, F_3\,.$$ (*)

§ 81 — Le corrispondenze Σ. (**)

A) Loro definizione.

1. Studieremo al prossimo Capitolo la posizione delle quadriche di Moutard appartenenti alle diverse tangenti ad una superficie in un suo punto fisso. Ci occuperemo qui di alcune corrispondenze biunivoche fra la stella dei piani passanti per un punto fisso x della nostra superficie S e il piano ξ punteggiato tangente ad S in x, che ci saranno utili per lo studio accennato. Precisamente *indicheremo con* Σ (c) (***) *la corrispondenza in cui al punto*

$$r_0 x + r_1 x_1 + r_2 x_2$$

(*) Se $J \neq 0$, essa può scriversi

$$(3)_{\text{quater}} \qquad F_2\, d\, F'_3 - \frac{1}{2}\left(3\, d F_2 + F_2\, \frac{dJ}{J}\right) F'_3 = \\ = - F_3\,(F_2\, \Sigma\, \psi_i\, Du_i - 3\, \Sigma\, \vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\,)\,.$$

(**) Le corrispondenze Σ che qui studieremo sono state introdotte da Čech nel Časopis pro pěst. mat. a fys., t. 50, 1921.

(***) c essendo una costante arbitraria.

corrisponde il piano

$$s_0 \xi + s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2,$$

essendo

$$(1) \quad r_0 : r_1 : r_2 = \left(s_0 \Sigma a_{ik} s_i s_k - \frac{2c}{3} \Sigma a_{ikr} s_i s_k s_r \right) : \\ : s_1 \Sigma a_{ik} s_i s_k : s_2 \Sigma a_{ik} s_i s_k$$

e quindi, come si vede subito:

$$(1)_{\text{bis}} \quad s_0 : s_1 : s_2 = \left(r_0 \Sigma a_{ik} r_i r_k + \frac{2c}{3} \Sigma a_{ikl} r_i r_k r_l \right) : \\ : r_1 \Sigma a_{ik} r_i r_k : r_2 \Sigma a_{ik} r_i r_k \,.$$

Dalla definizione si vede subito che ogni Σ (*c*) ha *significato intrinseco ed invariante*. Anzi, il confronto di (1) e $(1)_{\text{bis}}$ dimostra che Σ (*c*) è anche *invariante per correlazioni.*

B) La polarità di Lie.

È pure evidente la proposizione: *la corrispondenza* Σ (0) *è subordinata alla polarità rispetto alla quadrica di Lie* (*). Se *S* è una quadrica, tutte le Σ (*c*) si confondono con Σ (0); in caso opposto, esse son tutte diverse (**).

Si puó dire anche che la corrispondenza Σ (*c*) associa il punto

$$r_0 x + r_1 dx$$

al piano

$$s_0 \xi + s_1 d \xi ,$$

(*) Cfr. Cap. III § 21.

(**) eccettuati gli eventuali punti di *S* dove tutte e due le asintotiche avessero simultaneamente un flesso.

se

$$r_0 : r_1 = \left(F_2\, s_0 - \frac{2c}{3} F_3\, s_1\right) : F_2\, s_1 ,$$

(1)$_{\text{ter}}$

$$s_0 : s_1 = \left(F_2\, r_0 + \frac{2c}{3} F_3\, r_1\right) : F_2\, r_1 .$$

Scrivendo qui Du_i al posto di du_i si vede che la $\Sigma\,(c)$ associa anche il punto

$$r_0\, x + r_2\, Dx$$

al piano

$$s_0\, \xi + s_2\, D\,\xi$$

se

$$r_0 : r_2 = \left(F_2\, s_0 + \frac{2c}{3} F_3'\, s_2\right) : F_2\, s_2 ,$$

(1)$_{\text{quater}}$

$$s_0 : s_2 = \left(F_2\, r_0 - \frac{2c}{3} F_3'\, r_2\right) : F_2\, r_2 .$$

C) **Corrispondenza di Segre.**

La corrispondenza $\Sigma\,(-\,3)$ *è la corrispondenza di Segre già studiata al Cap. III* § *22.* Ciò si vede subito scrivendo la (1) in coordinate asintotiche e confrontando con le equazioni del citato §. Ma si possono anche facilmente trovare direttamente le equazioni della corrispondenza di Segre, definita geometricamente al l. c., in coordinate curvilinee qualunque:

Infatti, la corrispondenza di Segre associa evidentemente il punto $(\xi\, d\,\xi\, d^2\,\xi)$ al piano $(x\, d\, x\, d^2\, x)$. Ora dalle (1) del § 79 si deduce

$$(\xi\, d\,\xi\, d^{\,2}\xi) = \varepsilon\, \frac{\Sigma\vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2\, u_s + F_3'}{F_2}\, (\xi\, d\,\xi\, D\,\xi) + F_2\, (\xi\, d\,\xi\, \Xi) ,$$

$$(x\, d\, x\, d^2\, x) = \varepsilon\, \frac{\Sigma\vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2\, u_s - F_3'}{F_2}\, (x\, d\, x\, D\, x) + F_2\, (x\, d\, x\, X) .$$

Ora (Cap. II, § 12 B (15))

$$(x\, d\, x\, D\, x) = (x\, ,\; x_1\, du + x_2\, dv\, ,\; x_1\, Du + x_2\, Dv) =$$

$$= \sqrt{|A|}\ (du\,Dv - dv\,Du)\,\xi\ ,$$

$$(\xi\, d\xi\, D\xi) = \varepsilon \sqrt{|A|}\ (du\,Dv - dv\,Du)\, x\ ,$$

sicchè (Cap. VI § 56, $(5)_{\text{bis}}$)

$$(2)\qquad (x\,dx\,Dx) = -\varepsilon F_2\,\xi\ ,\quad (\xi\,d\xi\,D\xi) = -F_2\,x\ .$$

D'altra parte, essendo (Cap. II, § 14 A, (3) e (4))

$$S x\,d\xi = S X d\xi = S x\,D\xi = S X D\xi = 0\ ,$$

si possono determinare λ e μ in modo che sia

$$(x\,dx\,X) = \lambda\,d\xi + \mu\,D\xi\ .$$

Moltiplicando per dx, oppure per Dx se ne ricava (cfr. le (4) del § 80)

$$\lambda = 0\ ,\quad \varepsilon\mu F_2 = S\,(x,\,dx,\,X)\,Dx = -(x,\,dx,\,Dx,\,X)\ .$$

Ora dalla (2) si deduce:

$$(x\,dx\,Dx\,X) = S\,(x\,dx\,Dx)\,X = -\varepsilon F_2\,S\xi X = -\varepsilon F_2\ ,$$

sicchè si trova la prima delle identitá

$$(2)_{\text{bis}}\qquad (x,\,dx,\,X) = D\xi\ ,\quad (\xi,\,d\xi,\,\Xi) = \varepsilon Dx\ ;$$

la seconda si dimostra nello stesso modo. Dalle (2) e $(2)_{\text{bis}}$ segue tosto

$$(3)\qquad \begin{aligned} (x,\,dx,\,d^2x) &= (F_3' - \Sigma\vartheta_{rs}\,du_r\,\delta^2 u_s)\,\xi + F_2\,D\xi\ ,\\ \varepsilon\,(\xi,\,d\xi,\,d^2\xi) &= -(F_3' + \Sigma\vartheta_{rs}\,du_r\,\delta^2 u_s)\,x + F_2\,Dx\ . \end{aligned}$$

Posto

$$(\xi\,d\xi\,D\xi) = r_0\,\xi + r_2\,Dx\ ,\quad (x\,dx\,Dx) = s_0\,\xi + s_2\,D\xi\ ,$$

si vede pertanto che

$$s_0 : s_2 = (F_2\,r_0 + 2F_3'\,r_2) : F_2\,r_2\ .$$

Confrontando con $(1)_{\text{quater}}$ si vede che la corrispondenza di Segre coincide con $\Sigma(-3)$ come abbiamo enunciato.

Tutte le proprietà della corrispondenza di Segre segnalate al Cap. III § 22 valgono tali e quali per ogni Σ (*c*).

D) La corrispondenza di Moutard.

Un' altra corrispondenza notevole è la Σ (1) che diremo *la corrispondenza di Moutard. Essa fa corrispondere ad ogni punto* P *del piano tangente ad* S *in* x *il suo piano polare rispetto alla quadrica di Moutard appartenente alla tangente* (x P). (*)

Ciò si vede immediatamente ponendo $\rho_2 = \rho_3 = 0$ nelle (2) del § 80 e confrontando con la $(1)_{\text{ter}}$ § 81.

Dalla definizione delle Σ (*c*) si vede subito: *I piani corrispondenti nelle diverse* Σ (c) *ad un punto* P *scelto comunque su* ξ *formano un fascio intorno alla tangente coniugata a* (x P); *tal fascio è proiettivo al sistema dei valori di* c, *il piano* ξ *stesso corrispondendo a* $c = \infty$. In particolare, *scelto su* ξ *un punto qualsiasi* P, *ed essendo* π_L, π_M, π_S *ordinatamente i piani corrispondenti a* P *nella polarità di Lie, nella corrispondenza di Moutard e nella corrispondenza di Segre, il birapporto* $(\xi \pi_L \pi_M \pi_S)$ *è uguale a* -3; e correlativamente. (**)

Daremo tosto (al § 83) una definizione geometrica della corrispondenza $\Sigma\left(-\frac{3}{2}\right)$. Ci saranno pure utili, per la costruzione delle quadriche di Moutard appartenenti alle diverse tangenti ad *S* in *x*, le corrispondenze $\Sigma\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Sigma\left(-\frac{5}{4}\right)$.

E) Proprietà delle corrispondenze Σ per le rigate.

Abbiamo già osservato che le proprietà della corrispondenza di Segre segnalate al Cap. III § 22 valgono tutte per ogni Σ (*c*) ($c \neq 0$). Qui aggiungeremo ancora qualche altra proprietà.

(*) Invece *nella corrispondenza di Segre a* P *corrisponde il suo piano polare rispetto alla quadrica di Moutard appartenente alla tangente coniugata alla* (x P). Ciò si vede come nel testo, usando la $(1)_{\text{quater}}$ al posto della $(1)_{\text{ter}}$.

(**) Se il punto *P* sta su una tangente di Darboux, i piani π_L, π_M, π_S coincidono e il birapporto è indeterminato.

In coordinate asintotiche le equazioni (1) e $(1)_{\text{bis}}$ di $\Sigma(c)$ sono (quando

$$r_0 x + r_1 x_u + r_2 x_v\,, \quad s_0 \xi + s_1 \xi_u + s_2 \xi_v$$

siano un punto e un piano omologhi):

$$(4) \qquad r_0 : r_1 : r_2 = \left[s_0 s_1 s_2 - \frac{c}{3}\,(\beta s_1^3 + \gamma s_2^3)\right] : s_1^2 s_2 : s_1 s_2^2\,,$$

$$s_0 : s_1 : s_2 = \left[r_0 r_1 r_2 + \frac{c}{3}\,(\beta r_1^3 + \gamma r_2^3)\right] : r_1^2 r_2 : r_1 r_2^2\,.$$

Se $\beta\gamma \gtrless 0$ (in un punto generico di una superficie non rigata) *la corrispondenza* $\Sigma(c)\,(c \neq 0)$ *è cubica;* se invece p. es. $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$ (in un punto non flecnodale di una superficie rigata), *la corrispondenza è* quadratica. Cominciamo lo studio col considerare un punto generico di una rigata; sia pertanto $\beta = 0$, $\gamma \lessgtr 0$ (le v cost. essendo le generatrici).

Dimostreremo che: *Ad un fascio di piani, il cui asse passa per un punto* x *di una superficie rigata senza esservi tangente alla rigata, corrisponde in* Σ (c) *una conica situata nel piano* ξ *tangente alla rigata in* x*; tale conica passa per* x, *tocca ivi la tangente all'asintotica curva, e la sua curvatura in* x *è il prodotto di* $-\dfrac{2c}{3}$ *per la curvatura dell'asintotica* (*)*; (in particolare, se* $c = -\dfrac{3}{2}$, *la conica e l'asintotica hanno in* x *contatto del 2° ordine); la conica interseca la generatrice della rigata, oltre che in* x, *in un altro punto* y, *e la tangente in* y *alla conica è la polare del fascio di piani* (cui corrisponde la conica Σ (c)) *rispetto alla quadrica di Lie* (che, si ricordi, coincide con l'iperboloide osculatore).

(*) In apparenza, introduciamo nell'enunciato un concetto metrico, quello della *curvatura* della conica e dell'asintotica. Ma basta osservare (il lettore faccia la facile dimostrazione) che: *Se due curve hanno in un punto* x *la stessa tangente e lo stesso piano osculatore, il rapporto delle loro curvature in* x *non muta per collineazioni.*

Corollario: *Dato lungo una generatrice di una rigata l'iperboloide osculatore, per determinare la corrispondenza* Σ (c) *appartenente ad un punto* x *di questa generatrice, basta conoscere la curvatura in* x *dell'asintotica curva della rigata.*

Al fascio di piani d'asse

$$s_0 = a_1 s_1 + a_2 s_2$$

corrisponde la punteggiata dei punti $r_0 x + r_1 x_u + r_2 x_v$ dove

$$r_0 : r_1 : r_2 = \left(a_1 s_1^2 + a_2 s_1 s_2 - \frac{c\gamma}{3} s_2^2\right) : s_1^2 : s_1 s_2$$

situata sulla conica

$$r_1 (r_0 - a_1 r_1 - a_2 r_2) + \frac{c\gamma}{3} r_2^2 = 0 \, .$$

Variando c, tale conica descrive un fascio cui appartiene la retta $r_2 = 0$, cioè la generatrice $(x\, x_u)$, contata due volte, e cui appartiene pure la conica spezzata nella retta $r_1 = 0$, cioè nella tangente $(x\, x_v)$ all'asintotica curva, e nella retta $r_0 = a_1 r_1 + a_2 r_2$, che si vede subito essere la polare del fascio di piani rispetto alla quadrica di Lie. Resta a dimostrare ciò che si è detto sulla curvatura in x della nostra conica. Il lettore vedrà facilmente che le curvature in x delle diverse coniche del fascio (ottenuto variando c) son proporzionali a c, sicchè dobbiamo provare soltanto che, se $c = -\frac{3}{2}$, la conica ha in x contatto del secondo ordine con l'asintotica $u = \text{cost.}$ Ora un punto dell'asintotica vicino ad x è

$$x + x_v dv + \frac{1}{2} x_{vv} dv^2 + \ldots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} p_{22} dv^2 + \ldots\right) x + \left(\frac{1}{2} \gamma d v^2 + \ldots\right) x_u +$$

$$+ \left(dv + \frac{1}{2} \theta_v dv^2 + \ldots\right) x_v + (\ldots) X \, ,$$

i termini trascurati essendo divisibili per dv^3. Posto pertanto

$$r_0 = 1 + \frac{1}{2} p_{22} dv^2 + \dots, \quad r_1 = \frac{1}{2} \gamma dv^2 + \dots,$$

$$r_2 = dv + \frac{1}{2} \theta_v dv^2 + \dots,$$

ed osservando che allora

$$r_1 (r_0 - a_1 r_1 - a_2 r_2) + \frac{c\gamma}{3} r_2^2 = \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{3} \right) dv^2 + \dots,$$

risulta evidente ciò che si voleva provare.

F) Proprietà delle corrispondenze Σ per superficie non rigate.

Consideriamo ora invece un punto generico di una superficie S *non* rigata riferita alle asintotiche, sicchè $\beta\gamma \gtrless 0$. La retta $(x x_u)$ genera, *se* v *solo varia*, una rigata R_1; la retta $(x x_v)$ genera, *se* u *solo varia*, una rigata R_2. *Le rigate* R_1 e R_2 *sono* pertanto *i luoghi delle tangenti asintotiche lungo una curva asintotica dell'altro sistema;* noi le diremo le *rigate asintotiche di* S*;* R_1 sarà la prima, R_2 la seconda rigata asintotica. (*)

Dimostriamo che: *Dato un piano* ζ *passante per un punto* x *di una superficie non rigata* S, *per determinare il punto* z *che corrisponde a* ζ *nella corrispondenza* Σ (c) *appartenente a* S, si costruiscano i punti z_1 e z_2 *corrispondenti ordinatamente a* ζ nelle corrispondenze Σ (2c) (**) *appartenenti alle rigate asintotiche* R_1 *e* R_2: *il punto cercato* z *è il coniugato armonico di* x *rispetto ai punti* z_1 *e* z_2.

(*) Il concetto di rigata asintotica è dovuto al Wilczynski (osculating ruled surfaces); ma il teorema che segue è di Čech.

(**) Con $2c$ al posto di c; l'osservazione fatta a pag. 5 riga 6 della Memoria di Čech: *L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo* (Ann. di Mat., t. 31 (3), 1922) non è corretta.

Corollario: (*) *Le corrispondenze* Σ (c) *sono completamente determinate dalla* Σ (0) (che, si ricordi, è subordinata alla polarità di Lie) *e dalle curvature in* x *delle due asintotiche.*

Per fissare le idee, supponiamo che il punto x di S corrisponda ai valori $u = v = 0$ dei parametri. La rigata R_1 è generata dal punto

$$x + \overline{u}\, x_u\,, \quad \text{dove } u = 0\,,$$

variando $\overline{u}$ e v. Il suo piano tangente è

$$\xi + \overline{u}\, \xi_u\,, \quad \text{dove } u = 0$$

dove il fattore di $\xi + \overline{u}\, \xi_u$ è già associato al fattore di $x + \overline{u}\, x_u$ al solito modo. (**) Calcoliamo le forme F_2 e F_3 per R_1 indicandole con $F_2^{(1)}$ e $F_3^{(1)}$. (***) In tutti i calcoli e formole riguardanti R_1 si deve sempre porre $u = 0$; si prega il lettore di ricordarsene, anche se omettiamo di rilevarlo nelle notazioni.

È

$$F_2^{(1)} = -Sd\,(x + \overline{u}\, x_u)\, d\,(\xi + \overline{u}\, \xi_u) =$$

$$= -S\,[(x_v + \overline{u}\, a_{12} X)\, dv + x_u d\overline{u})] \cdot [(\xi_v + \overline{u}\, a_{12}\, \Xi)\, dv + \xi_u d\overline{u}\,] =$$

$$= 2a_{12}\, d\overline{u}\; d\overline{v} - \overline{u}^2\, \Omega\, dv^2\,. \quad (****)$$

La R_1 essendo rigata e le $v =$ cost. le sue generatrici, la forma $F_3^{(1)}$ si può calcolare (*****) dalla

$$F_3^{(1)} = \frac{1}{2}\, S \left(\frac{\partial y}{\partial v}\, \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\, \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) dv^3\,,$$

(*) Si ricordi il corollario del § 81 E.

(**) Cfr. Cap. IV, § 32 B.

(***) Per il nostro scopo basterebbe calcolare soltanto per $\overline{u} = 0$; ma più tardi avremo bisogno anche dei coefficienti di $\overline{u}$.

(****) Si ricordi che $\Omega = SX\Xi$.

(*****) Cfr. Cap. IV § 31.

dove

$$y = x + \bar{u}\, x_u\,, \quad \eta = \xi + \bar{u}\, \xi_u\,.$$

Derivando si trova

$$\frac{\partial y}{\partial v} = x_v + \bar{u}\, a_{12} X\,, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = x_{vv} + \bar{u}\, a_{12}\,(X_v + \theta_v X)\,,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = \xi_v + \bar{u}\, a_{12} \Xi\,, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = \xi_{vv} + \bar{u}\, a_{12}\,(\Xi_v + \theta_v \Xi)\,.$$

Ora per le equazioni fondamentali

$$x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x\,, \quad \xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi\,,$$

$$X_v = l_2 x + \frac{1}{a_{12}}\,(\pi_{22} x_u + m_{12} x_v)\,,$$

$$\Xi_v = \lambda_2 \xi + \frac{1}{a_{12}}\,(p_{22} \xi_u + \mu_{12} \xi_v)\,; \quad (*)$$

si trova perciò:

$$S\,\frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = a_{12}\,[\gamma + \bar{u}\,(\pi_{22} - p_{22} + \theta_v \Omega) + \bar{u}^2 a_{12} \lambda_2]\,,$$

$$S\,\frac{\partial \eta}{\partial v}\,\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = a_{12}\,[-\gamma + \bar{u}\,(p_{22} - \pi_{22} + \theta_v \Omega) + \bar{u}^2 a_{12} l_2]\,.$$

Ricordando la (4) del Cap. II § 16 A si arriva dunque anche alla seconda delle formole

$$F_2^{(1)} = 2 a_{12}\, d\bar{u}\, dv - \bar{u}^2\, \Omega\, dx^2\,,$$

$$(5) \qquad F_3^{(1)} = a_{12}\left[\gamma + \bar{u}\,(\gamma_u + \theta_u \gamma) + \frac{1}{2}\,\bar{u}^2 a_{12}\,(\lambda_2 - l_2)\right] dv^3$$

(*) È $\mu_{22} = p_{22}$, $m_{22} = \pi_{22}$, cfr. Cap. II § 14 C.

dove $u = 0$. (*)

Similmente si trovano le forme fondamentali di R_2:

$$(5)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} F_2^{(2)} &= 2a_{12}\, du\, d\bar{v} - \bar{v}^2\, \Omega\, du^2 , \\ F_3^{(2)} &= a_{12} \left[\beta + \bar{v}\,(\beta_v + \theta_v \beta) + \frac{1}{2} \bar{v}^2 a_{12} (\lambda_1 - l_1) \right] du^3 , \end{aligned}$$

dove $v = 0$.

Per $\bar{u} = \bar{v} = 0$ le (5) e $(5)_{\text{bis}}$ si riducono a

$$F_2^{(1)} = 2a_{12}\, d\bar{u}\, dv , \quad F_3^{(1)} = a_{12}\gamma\, dv^3$$

$$F_2^{(2)} = 2a_{12} du\, d\bar{v} , \quad F_3^{(2)} = a_{12}\beta\, dv^3$$

che permettono di scrivere le equazioni delle Σ (c) corrispondenti a R_1 e R_2. Confrontando con la (4) che dà le Σ (c) corrispondenti ad S, si vede subito l'esattezza del teorema enunciato.

(*) L'espressione trovata per $F_3^{(1)}$ mostra che il coniugato armonico di x rispetto ai punti flecnodali di R_1 è

$$(\gamma_u + \theta_u \gamma)\, x - 2\gamma\, x_u$$

ossia

$$x_u - \frac{1}{2} \frac{\partial \log\, (a_{12}\gamma)}{\partial u}\, x$$

che è un punto della (seconda) direttrice di S. Il risultato enunciato al Cap. III § 25 B e dimostrato al Cap. IV alla fine del § 37 è così confermato mediante calcolo diretto.

§ 82 — Le corrispondenze Σ appartenenti ad una generatrice di una rigata. (*)

A) Trasformazioni birazionali Σ (*c*) nello spazio.

Le corrispondenze Σ definite al § precedente appartengono ad *un punto* x della superficie in considerazione, riferendosi ai punti del piano tangente ξ alla superficie in x ed ai piani passanti per x. Consideriamo in particolare una superficie *rigata* R (non sviluppabile); fissandone una generatrice $p = (yz)$, è chiaro che le corrispondenze $\Sigma\ (c)$ (c fisso) appartenenti ai diversi punti di p si possono riunire in una corrispondenza birazionale che si riferisce a tutti i punti e piani dello spazio: per costruire p. es. il punto che corrisponde ad un piano scelto comunque nello spazio, si consideri l'intersezione $x = y + uz$ del piano con la generatrice p, e quella corrispondenza $\Sigma\ (c)$ che appartiene a x. Indicheremo la corrispondenza a tre dimensioni con lo stesso simbolo $\Sigma\ (c)$ come quella sua parte che si riferisce ad un punto di p; e dove vi sarebbe pericolo di equivoco, parleremo di *corrispondenza* $\Sigma\ (c)$ *appartenente alla generatrice* p *di* R. Per ottenere le equazioni di $\Sigma\ (c)$, supponiamo il punto generico di R dato da $x = y + uz$, i punti y e z dipendendo da v, e scegliamo in particolare y e z in modo che le $u =$ cost. siano le asintotiche curve (cfr. Cap. IV, § 34 A). Di più si scelga v in modo che sia $a_{12} = \omega = \pm 1$; sicchè: (Cap. IV, § 31):

$$F_2 = 2\omega\, du\, dv\,, \quad F_3 = \omega\,(A + 2Bu + Cu^2)\, dv^3\,.$$

Le equazioni (4) del § 81 mostrano che in $\Sigma\ (c)$ si corrispondono il punto

(*) I teoremi di questo § sono stati esposti da Čech nella Memoria "*Projektivní geometrie pětí soumezných mimoběžek*", (*Géometrie projective de cinq droites infiniment voisines*) Publ. de la Fac. des Sc. de l'Univ. Masaryk, 1921, nº 4.

$$r_0(y+uz)+r_1z+r_2(y'+uz')$$

e il piano

$$s_0(\eta+u\zeta)+s_1\zeta+s_2(\eta'+u\zeta')\,,$$

quando sia

$$r_0:r_1:r_2=\left[s_0s_2-\frac{c}{3}(A+2Bu+Cu^2)\right]:s_1s_2:s_2^2\,,$$

$$s_0:s_1:s_2=\left[r_0r_2+\frac{c}{3}(A+2Bu+Cu^2)\right]:r_1r_2:r_2^2\,.$$

Un facile calcolo permette di scrivere ciò in un altro modo che è più conveniente per la discussione che faremo: *La corrispondenza* Σ (c) *appartenente alla generatrice (yz) associa il punto*

$$ly+mz+l_1y'+m_1z'$$

ed il piano

$$\lambda\eta+\mu\zeta+\lambda_1\eta'+\mu_1\zeta'$$

essendo

$$\lambda:\mu:\lambda_1:\mu_1=$$

$$=\left[l(ml_1-lm_1)+\frac{c}{3}l_1(Al_1^2+2Bl_1m_1+Cm_1^2)\right]:$$

$$(1)\qquad :\left[m(ml_1-lm_1)+\frac{c}{3}m_1(Al_1^2+2Bl_1m_1+Cm_1^2)\right]:$$

$$:l_1(ml_1-lm_1):m_1(ml_1-lm_1)\,,$$

$$l:m:l_1:m_1=$$

$$=\left[\lambda(\mu\lambda_1-\lambda\mu_1)-\frac{c}{3}\lambda_1(A\lambda_1^2+2B\lambda_1\mu_1+C\mu_1^2)\right]:$$

$$(1)_{\text{bis}}\qquad :\left[\mu(\mu\lambda_1-\lambda\mu_1)-\frac{c}{3}\mu_1(A\lambda_1^2+2B\lambda_1\mu_1+C\mu_1^2)\right]:$$

$$: \lambda_1 (\mu\lambda_1 - \lambda\mu_1) : \mu_1 (\mu\lambda_1 - \lambda\mu_1) .$$

Osserviamo che, se R non è riferita alle asintotiche, basta scrivere $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ al posto di y', z', η', ζ'. Dalle (1) si vede subito: *Le corrispondenze* Σ *(c) (c* $\neq 0$*) appartenenti ad una generatrice* p *di una rigata* R *sono corrispondenze birazionali cubiche, se il regolo osculatore ad* R *lungo* p *non iperoscula* R. (*)

B) Curva omologa di un fascio di piani.

Ad un fascio di piani corrisponde pertanto in *generale* una cubica sghemba. Noi sappiamo dal § 81 che, se l'asse del fascio è tangente a R (naturalmente in un punto di p) la cubica si riduce ad una retta (la tangente coniugata all'asse del fascio); e se l'asse del fascio incontra p, senza essere tangente ad R, la cubica si riduce a una conica. Ma si presentano altre riduzioni che è importante rilevare: *Se l'asse del fascio di piani incontra una tangente flecnodale di* R (appartenente alla generatrice p) *la curva che vi corrisponde in* Σ (c) ($c \neq 0$) *è in generale* (**) *una conica.* Per dimostrarlo supponiamo, come è lecito, che la tangente flecnodale sia (yy'), sicchè $A = 0$, e $\mu = \alpha\mu_1$ (α costante) per i piani del fascio. Si vede immediatamente che, posto $\mu = \alpha\mu_1$, nelle $(1)_{\text{bis}}$ a destra si può scartare il fattore μ_1. Da questa dimostrazione si vede subito che, almeno se $B^2 - AC \neq 0$, se cioè le tangenti flecnodali appartenenti a p son distinte, vale il teorema:

Se l'asse r *del fascio di piani appartiene alla congruenza lineare osculatrice di* R (corrispondente alla generatrice p), *ma non interseca* p *e non sta su* H, *la linea* r' *che vi corrisponde in* Σ (c) *è semplicemente una retta.*

Ma dimostriamo tal teorema in altra maniera, valida anche se $B^2 - AC = 0$. (***) Una retta r che non interseca p si può scrivere sotto la forma

(*) Nel caso escluso sarebbe $A = B = C = 0$ e tutte le Σ (c) si ridurrebbero a Σ (0) (polarità rispetto all'iperboloide osculatore H).

(**) Essa può essere retta; v. più avanti.

(***) Del resto le formole della dimostrazione che segue ci saranno ancora utili in questo paragrafo.

$$r = (a_1\eta + b_1\zeta + \eta',\quad a_2\eta + b_2\zeta + \zeta') =$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)(\eta\zeta) - a_2(\eta\eta') + b_1(\zeta\zeta') + a_1(\eta\zeta') -$$

$$- b_2(\zeta\eta') + (\eta'\zeta') = \quad (*)$$

(2)

$$= \omega\,[(a_1b_2 - a_2b_1)(yz) + a_2(yy') - b_1(zz') +$$

$$+ b_2(yz') - a_1(zy') + (y'z')]\,.$$

Posto, come al Cap. IV, $p = (yz)$, $q = (y'z')$ è dunque

$$\omega r = (a_1b_2 - a_2b_1)\,p + \frac{a_1 + b_2}{2}\,p' + q +$$

$$+ a_2(yy') - \frac{a_1 - b_2}{2}[(yz') + (zy')] - b_1(zz')\,.$$

Se r appartiene alla congruenza lineare osculatrice di R (corrispondente a p), l'espressione precedente è combinazione lineare di p, p', q, q' e viceversa. Dal Cap. IV, § 37, (2) risulta che ciò accade allora ed allora soltanto che

(3) $$b_1 : (b_2 - a_1) : -a_2 = A : 2B : C\,.$$

D'altra parte cerchiamo quando mai, posto

$$\lambda = a_1\lambda_1 + a_2\mu_1\,,\quad \mu = b_1\lambda_1 + b_2\mu_1\,,$$

si può scartare un fattore quadratico a destra delle $(1)_{\text{bis}}$. Sostituiti i valori precedenti di λ e μ, le due espressioni

$$\mu\lambda_1 - \lambda\mu_1 \quad \text{e} \quad A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\mu_1 + C\mu_1^2$$

devono differire soltanto per un fattore, e si ricade nella (3), come si voleva dimostrare. Cerchiamo ancora la posizione della retta

(*) Cap. IV, § 32.

r' che corrisponde in Σ (c) al fascio d'asse r, se valgono le (3). Scriviamo le (3) nella forma

$$A : b_1 = 2B : (b_2 - a_1) = C : - a_2 = \tau\,.$$

Ai due piani $a_1\eta + b_1\zeta + \eta'$, $a_2\eta + b_2\zeta + \zeta'$ corrispondono in Σ (c) rispettivamente i punti (v. $(1)_{\text{bis}}$)

$$\left(a_1 - \frac{c\tau}{3}\right) y + b_1 z + y'\,,$$

$$a_2 y + \left(b_2 - \frac{c\tau}{3}\right) z + z'\,.$$

La retta r' cercata è quindi (*)

$$r' = \left[\left(a_1 - \frac{c\tau}{3}\right) y + b_1 z + y'\,,\quad a_2 y + \left(b_2 - \frac{c\tau}{3}\right) z + z'\right] =$$

$$(2)_{\text{bis}} \qquad = \left[a_1 b_2 - a_2 b_1 - \frac{c\tau}{3}(a_1 + b_2)\right] (yz) - a_2 (yy') +$$

$$+ b_1 (zz') + \left(a_1 - \frac{c\tau}{3}\right) (yz') - \left(b_2 - \frac{c\tau}{3}\right) (zy') + (y'z')\,.$$

Confrontando le espressioni (2) e $(2)_{\text{bis}}$ si arriva facilmente al teorema: *La retta* r_0 *coniugata armonica di* p *rispetto alla coppia di rette* r *e* r' del teorema precedente (nel regolo determinato dalle rette p, r e r') *appartiene ad* H. Scegliamo il parametro t in modo che

$$r_0 = \omega r + r' + tp$$

rappresenti una retta. Dalle (2) e $(2)_{\text{bis}}$ si deduce subito che

(*) Naturalmente anche r' appartiene alla congruenza osculatrice.

$$r_0 = \bar{t}\,p + \frac{c\tau}{3} p' + 2q\,,$$

dove il valore di t non ci interessa. La retta r_0, dipendendo linearmente da p, p' e q, appartiene ad H (Cap. IV § 37). Per dimostrare il teorema, basta pertanto provare che $(pr_0rr') = -1$. A tale scopo, supponiamo che (yy') sia una tangente flecnodale (per il valore di v appartenente a p) ossia che $A = 0$ e quindi per le (3) anche $b_1 = 0$. Si trova ora subito che le intersezioni di p, r_0, r, r' con (yy') sono ordinatamente i punti

$$y, \left(a_1 + b_2 - \frac{c\tau}{3}\right) y + 2y'\,, \quad b_2 y + y'\,, \left(a_1 - \frac{c\tau}{3}\right) y + y'$$

che formano una quaterna armonica c. d. d.

C) Determinazione delle Σ.

Scegliendo comunque la retta r *purchè non incontri* p *nè stia su* H, *tutte le corrispondenze* Σ *(*c*) appartenenti a* p *sono determinate se si conosce* p, H *e la curva* (*) r′ *corrispondente al fascio di piani d'asse* r *in una delle* Σ *(*c*) (*$c \neq 0$*).* Infatti a un piano π, scelto ad arbitrio, che intersechi p nel punto P, corrispondono in Σ (0) (che è la polarità rispetto ad H), in Σ (c) ed in Σ (c') ordinatamente dei punti P_0, P_c, $P_{c'}$ che sappiamo (§ 81 D) stare su una retta insieme con P e tali che il birapporto

$$(PP_0P_cP_{c'}) = c' : c\,.$$

Basta pertanto saper costruire P_c per quel valore di c cui appartiene r'. E ciò si può fare facilmente:

Sia Q il punto d'incontro di π e r. Al fascio di piani d'asse PQ (cui appartiene il piano dato π) corrisponde in Σ (c) una

---

(*) che è una cubica sghemba, oppure conica, od infine retta, secondo la posizione di r.

conica C situata nel piano tangente τ ad R in P. (*) Il punto P_c cercato è l'intersezione (diversa da P) di C con la retta che congiunge P al polo di π rispetto ad H. (**) Tutto si riduce quindi a costruire nel piano τ la conica C. Ora C tocca nel punto P la tangente all'asintotica curva di R (che conosciamo, perchè è generatrice di H), e tocca anche la polare di PQ rispetto ad H (***); di più, C passa per il punto d'incontro (non situato su p) di τ ed r' (****); la conica C si può dunque costruire, giacchè ne conosciamo tre punti, e le tangenti in due di essi.

In generale, (se cioè $B^2 - AC \neq 0$, $B'^2 - A'C' \neq 0$*) le corrispondenze* Σ (c) *appartenenti a* p *si possono costruire, se si conoscono le due quadriche* H *e* W_1 (*****) *e l'invariante* h (******).

Per il teorema precedente, basta trovare il luogo dei punti corrispondenti in *una* delle Σ (c) ($c \neq 0$) ai piani passanti per *una* retta r. Per le ipotesi fatte, possiamo far uso delle formole (7) § 38 del Cap. IV, riferendo R alle linee flecnodali. Riguardando le l, m, l_1, m_1 come coordinate del punto

$$ly + mz + l_1 \dot{y} + m_1 \dot{z}$$

e λ, μ, λ_1, μ_1 come coordinate del piano

$$\lambda\eta + \mu\zeta + \lambda_1\dot{\eta} + \mu_1\dot{\zeta} ,$$

le equazioni di Σ (c) sono le (1) e $(1)_{\text{bis}}$, dove

$$A = C = 0 , \quad B = 1 .$$

Se poniamo p. es.

(*) v. il teorema di § 81 E.
(**) v. il teorema di § 81 D.
(***) v. il teorema citato su (**).
(****) che corrisponde in Σ (c) al piano (Pr) del nostro fascio.
(*****) la quadrica W_1 è stata definita al Cap. IV, § 35 C.
(******) Cap. IV, § 35 B.

$$(4) \qquad \lambda = \frac{n}{2}\mu_1, \quad \mu = 0,$$

sarà

$$l:m:l_1:m_1 = \left(\frac{8c}{3}\lambda_1^2 + n^2\mu_1^2\right) : \frac{8c}{3}\lambda_1\mu_1 : 2n\lambda_1\mu_1 : 2n\mu_1^2 .$$

Dimostriamo che, scelto convenientemente c, tutta la conica di questi punti $ly + mz + l_1\dot{y} + m_1\dot{z}$ *sta sulla quadrica* W_1.

Essendo (*)

$$A = C = 0, \quad B = 1, \quad \dot{A} = -2\delta n, \quad \dot{B} = 0,$$

$$\dot{C} = 2n, \quad \delta = \pm 1 .$$

l'equazione di W_1 è (cfr. Cap. IV, § 35 C, (14) pag. 215)

$$2(lm_1 + ml_1) + \delta n l_1^2 - n m_1^2 = 0 .$$

Affinchè i valori precedenti di l, m, l_1, m_1 soddisfino a questa equazione (identicamente in λ_1, μ) basta che si scelga

$$c = -\frac{3\delta}{16}n^2 = -\frac{3}{64}h .$$

Il piano della conica è evidentemente

$$m : l_1 = \frac{8c}{3} : 2n = -\frac{\delta}{4}n,$$

ossia il piano

$$(4)_{\text{bis}} \qquad \delta n\,(yz\dot{z}) - 4\,(y\dot{y}\dot{z}) = \delta n\zeta + 4\dot{\eta} .$$

Indichiamo con r la retta base del fascio (4) e con π il piano $(4)_{\text{bis}}$. Sappiamo per ora che: I punti che corrispondono in

(*) Cap. IV, § 38.

$\Sigma\left(-\frac{3h}{64}\right)$ ai piani passanti per la retta r formano la conica intersezione della quadrica W_1 col piano π. Per dedurre il teorema enunciato, occorre indicare una costruzione della retta r e del piano π mediante le quadriche H e W. Ricordiamo dapprima il significato geometrico del tetraedro y, z, $\dot{y}$, $\dot{z}$: (yz) è la generatrice p studiata di R, $(y\dot{y})$ e $(z\dot{z})$ sono le tangenti flecnodali e $(\dot{y}\dot{z})$ è la generatrice principale di H (*). *La retta r congiunge il punto $\dot{y}$ all'intersezione $ny - 2\dot{z}$ della retta $(y\dot{z})$ colla generatrice principale*

$$\delta n^2 (yz) + 2n (y\dot{y}) + 2\delta n z \dot{z} + 4 (\dot{y}\dot{z})$$

della quadrica W_2 (cfr. $(14)_{\text{bis}}$ § 35 C, Cap. IV). *Il piano π congiunge il punto $\dot{z}$ a quella tangente di R in y* che è la coniugata *armonica di p rispetto alle generatrici del secondo sistema di H e di W_1 passanti per y.* Lascio le verifiche al lettore.

Come una facile applicazione delle formole del Cap. IV, il lettore dimostri ancora la proposizione: *Se la rigata* R *possiede una (ed una sola) retta direttrice* d, *i punti che corrispondono in* Σ *(*c*) (*$\mathrm{c} \neq 0$*) ai piani passanti per la generatrice principale della quadrica* W_1 *formano una conica* C. *Il piano di* C *contiene: 1° il punto della generatrice studiata* p *situato su* d, *2° l'intersezione della tangente flecnodale (diversa da* d*) con la generatrice principale di* H. *Il piano che contiene i due punti suddetti ed è il piano coniugato armonico al piano di* C *rispetto ai due piani del loro fascio di cui uno contiene* p *e l'altro* d, *interseca* W_1 *in una conica* C′. *Le due coniche* C *e* C′ *stanno sopra un cono il cui vertice è quel flecnodo di* p *che non appartiene a* d.

(*) Cap. IV, § 35. Dalle definizioni di $(\dot{y}\dot{z})$ risulta facilmente che essa si può costruire mediante le quadriche H e W_1.

§ 83 — Metriche di Weyl (*) e corrispondenze $\Sigma\left(-\frac{3}{2}\right)$.

A) Metriche di Weyl.

Già ai §§ 15 F e 23 A abbiamo visto che per lo studio proiettivo di una superficie non sviluppabile è utile considerare la metrica di Riemann di elemento lineare $F_2 = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k$. Qui vogliamo mostrare che il risultato di l. c. si può estendere alle metriche di Weyl. Una metrica di Weyl a due dimensioni è determinata da una forma differenziale *quadratica*

$$F_2 = a_{11} du^2 + 2a_{12}\, du\, dv + a_{22} dv^2$$

e una forma differenziale *lineare* che scriveremo

$$(1) \qquad 2\,(\alpha_1 du + \alpha_2 dv)\,,$$

convenendo che le forme

$$(2) \qquad \rho F_2\,, \quad 2\,\Sigma\alpha_i du_i - \frac{d\rho}{\rho}$$

definiscano la stessa metrica se ρ è funzione arbitraria di u e v. Le cosidette *geodetiche* della metrica sono definite dall'equazione differenziale

$$(\delta^2 u - \alpha^1 F_2) : (\delta^2 v - \alpha^2 F_2) = du : dv\,,$$

essendo al solito $\alpha^r = \Sigma A_{rk}\,\alpha_k$, (**) e $\delta^2 u_i$ indicando i differenziali secondi controvarianti. Tale equazione si può evidentemente scrivere anche nella forma:

$$(3) \qquad \Sigma\vartheta_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + F_2\, \Sigma\alpha_i D u_i = 0\,.$$

(*) *Weyl* Raum, Zeit, Materie, 4ª edizione.

(**) Si verifica facilmente che l'equazione differenziale delle geodetiche non cambia per l'operazione (2).

Le metriche di Riemann sono un caso particolare delle metriche di Weyl caratterizzato dall'equazione (α_{rk} sono le derivate covarianti di α_r)

$$\Sigma\vartheta^{rk}\,\alpha_{rk}=0$$

che esprime che $\Sigma\alpha_r du_r = d\alpha$ è un differenziale esatto (*). Ma vi è un altro caso notevole che pare finora inosservato (**). Nel caso attuale di due dimensioni, esso è caratterizzato dall'equazione (***)

$$\Sigma a^{rk}\,\alpha_{rk}=K \tag{4}$$

dove α_{rk} son le derivate covarianti delle α_r (formate rispetto a F_2) e K indica la curvatura di F_2.

Occorre dimostrare che la condizione (4) è invariante per l'operazione (2). Per brevità assumiamo i parametri u, v in modo che sia $a_{11}=a_{22}=0$. Allora:

$$F_2=2a_{12}\,du\,dv\,,\quad K=-\frac{1}{a_{12}}\,\frac{\partial^2\log|a_{12}|}{\partial u\,\partial v}\,,$$

$$\Sigma a^{rk}\,\alpha_{rk}=\frac{1}{a_{12}}\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}\right),$$

(*) Scegliendo nelle (2) $\rho=e^{2\alpha}$, la forma lineare svanisce, e la metrica di Weyl si riduce alla metrica di Riemann di elemento lineare $e^{2\alpha}F_2$ (determinato a meno di un fattor numerico).

(**) Nella teoria usuale della metrica di Weyl, ha ufficio fondamentale il parallelismo di Levi-Civita generalizzato da Weyl. Considerando in un punto P della varietà (u, v) uno spazio (a due dim.) di vettori e trasportandolo con parallelismo lungo una curva chiusa C ritornante in P, lo spazio subisce, in generale, *una similitudine*. Se tale similitudine si riduce all'*identità*, comunque si scelga il punto P e la curva chiusa C passante per P, la metrica è *euclidea*. Più generalmente, se la detta similitudine si riduce sempre ad una *rotazione*, la metrica è di Riemann. L'altro caso particolare cui accenno nel testo è quello in cui la similitudine è sempre un'*omotetia*.

(***) Essa può scriversi anche

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{|A|}\;\alpha^1\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{|A|}\;\alpha^2\right)\right]=K\,.$$

sicchè la (4) diventa:

$$(4)_{bis} \qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + \frac{\partial^2 \log |a_{12}|}{\partial u \, \partial v} = 0 .$$

Ora l'operazione (2) muta rispettivamente a_{12}, α_1, α_2 in

$$\rho a_{12}, \quad \alpha_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u}, \quad \alpha_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v}$$

e si vede subito che la $(4)_{bis}$ non cambia per tale sostituzione, c. d. d. Vediamo di più che scelto ρ in modo che, eseguita la trasformazione (2), sia $a_{12} = 1$ e quindi $K = 0$, la $(4)_{bis}$ diventa semplicemente $\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} = 0$, esprime cioè che

$$(4)_{ter} \qquad \alpha_1 du - \alpha_2 dv = d\lambda(u, v)$$

è un differenziale esatto. Quest'osservazione permette di provare semplicemente il teorema di Čech:

Se esiste in una metrica di Weyl (a due dimensioni) *un sistema doppio ortogonale* (*) *di geodetiche, la metrica soddisfa alla condizione* (4) *; viceversà le geodetiche di una metrica di Weyl soddisfacente a* (4) *formano un fascio* (**) *e se ne possono pertànto formare infiniti sistemi doppï ortogonali.*

Per dimostrare i due enunciati, possiamo supporre

$$a_{11} = a_{22} = 0 , \quad a_{12} = 1 .$$

Supponiamo in primo luogo che la metrica possegga un doppio sistema ortogonale di geodetiche definito da

$$\frac{dv}{du} = \pm e^{\frac{1}{2} \lambda (u, v)}$$

(*) cioè coniugato rispetto a F_2.
(**) nel senso di Cap. III § 23 D.

L'equazione differenziale (3) delle geodetiche diventa sotto le nostre ipotesi ($a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = 1$)

$$(3)_{\text{bis}} \qquad d \log \left| \frac{dv}{du} \right| - 2\,(\alpha_1 du - \alpha_2 dv) = 0 .$$

Sostituendovi i valori di $\dfrac{dv}{du}$ appartenenti al nostro doppio sistema ortogonale otteniamo

$$d\lambda = \alpha_1 du - \alpha_2 dv .$$

Tale equazione deve essere soddisfatta se

$$dv = e^{\frac{1}{2}\lambda}\, du$$

e anche se

$$dv = -\, e^{\frac{1}{2}\lambda}\, du$$

ed è quindi soddisfatta *identicamente*; vale a dire $\alpha_1 du - \alpha_2 dv$ è un differenziale esatto, il che prova la prima parte dell'enunciato.

Viceversa supponiamo soddisfatta la $(4)_{\text{ter}}$. L'equazione differenziale $(3)_{\text{bis}}$ delle geodetiche diventa

$$d \log \left| \frac{dv}{du} \right| = d\lambda\,(u, v)$$

ed integrata dà

$$\frac{dv}{du} = ce^{\lambda} \,, \quad c \text{ costante arbitraria,}$$

sicchè le geodetiche formano un fascio di curve c. d. d.

B) Piani osculatori alle geodetiche di Weyl

Torniamo a considerare una superficie S non sviluppabile. Scegliendo comunque il fattore delle coordinate omogenee x dei punti di S, consideriamo la solita forma quadrica

$$F_2 = -S\,dx\,d\xi\,,$$

e scegliamo ad arbitrio una forma lineare (1). Le due forme definiscono sulla superficie una metrica di Weyl, di cui studieremo le geodetiche definite dalla (3). Ma ricordiamo dapprima che si era visto al Cap. III § 23 che si può far corrispondere alla coppia di forme F_2 e $\Sigma\alpha_i\,du_i$ una coppia di congruenze duali. È facile definire analiticamente le due congruenze senza far uso di coordinate asintotiche. Infatti da l. c. risulta subito che la generatrice della prima congruenza è l'asse del fascio di piani

$$d\xi + \Sigma\alpha_r\,du_r\,.\,\xi \tag{5}$$

ottenuto variando i differenziali du_r; similmente la generatrice della seconda congruenza è il luogo del punto

$$dx + \Sigma\alpha_r\,du_r\,.\,x\,. \tag{5$_{\rm bis}$}$$

Inoltre, si era osservato l. c. che la trasformazione (2) non cambia le nostre congruenze sicchè esse sono completamente determinate data S e su essa la metrica di Weyl. Chiameremo le rette della prima congruenza le *normali della metrica di Weyl.* (*)

Ciò posto, dimostriamo che: *I piani osculatori alle geodetiche della nostra metrica di Weyl* (**) *in un punto arbitrario di* S *corrispondono ai punti della retta duale della normale della metrica nella corrispondenza* $\Sigma\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ *ed inviluppano quindi in generale* (se cioè S non è rigata) *un cono di terza classe i cui tre piani cuspidali passano per la normale della metrica e intersecano il piano tangente ad* S *nelle tangenti di Segre* (***).

Infatti, sostituendo nella prima delle equazioni (3) del § 81 il valore di $\Sigma\vartheta_{rs}\,du_r\,\delta^2 u_s$ tratto dall'equazione (3) delle geodetiche

(*) Le rette della seconda congruenza sono rette duali di quelle della prima, corrispondono cioè ad esse in Σ (0).

(**) Che, si noti, è la più generale metrica di Weyl su S che abbia come curve minime le asintotiche di S.

(***) Una parte di questa proposizione è giá stata provata, in coordinate asintotiche, al Cap. III § 23 D.

studiate si deduce che il piano osculatore ad una geodetica della metrica è rappresentato da

$$(F'_3 + F_2 \Sigma\alpha_r Du_r)\,\xi + D_2\xi\,,$$

e le $(1)_{\text{quater}}$ del § 81 B mostrano che tal piano corrisponde in $\Sigma\left(-\frac{3}{2}\right)$ al punto

$$Dx + F_2 \,.\, \Sigma\alpha_r Du_r \,.\, x$$

situato evidentemente sulla retta duale della normale della metrica.

C) Geodetiche formanti fascio.

In particolare, se la metrica è di *Riemann*, $\Sigma\alpha_r du_r$ è un differenziale esatto e *alle sviluppabili della congruenza delle normali della metrica corrisponde su* S *un sistema coniugato ;* e vale anche il teorema inverso (Cap. III § 25 A). Sappiamo inoltre che (*), la più semplice di tali metriche intrinsecamente definita è quella in cui

$$\Sigma\alpha_r du_r = \frac{1}{2}\frac{dJ}{J}$$

o in coordinate normali

$$\Sigma\alpha_r du_r = 0\ .$$

La normale di questa metrica è la *normale proiettiva* di S.

Invece il caso particolare in cui vale la (4) è caratterizzato geometricamente dal fatto che le geodetiche della metrica formano un *fascio.* Viceversa *dato su* S *un qualsiasi fascio, esiste su* S *una e una sola metrica di Weyl del tipo studiato* (per cui cioè le asintotiche di S siano le curve minime) *che ha le curve del fascio per*

(*) se S non è rigata.

geodetiche. Si scelga infatti nel fascio un doppio sistema coniugato (ciò è evidentemente possibile in ∞^1 modi) e, in ogni punto x di S si costruisca la retta r che congiunge i punti corrispondenti in $\Sigma\left(-\frac{3}{2}\right)$ ai piani osculatori delle due curve del sistema coniugato. La $(5)_{\text{bis}}$ mostra subito che una ed una sola delle nostre metriche di Weyl ha, per ogni posizione di x, la retta duale di r come normale. Dal teorema di § 83 B si deduce che le curve del sistema coniugato sono geodetiche di tale metrica. Per la prima parte del teorema di § 83 A, tale metrica soddisfa alla condizione (4); onde la seconda parte dello stesso teorema dimostra che tutte le curve del fascio dato ne sono geodetiche. E similmente si vede pure che non può esistere altra metrica di Weyl che soddisfi alla condizione dell'enunciato. Se ne deduce tosto il teor. (Cfr. § 23).

Dato su S *un qualsiasi fascio di curve, i piani osculatori alle curve del fascio in un punto qualunque di* S *inviluppano un cono di terza classe che possiede tre piani cuspidali intersecantisi in una retta. Di più sappiamo che i tre piani cuspidali del cono contengono rispettivamente le tre tangenti di Segre.*

§ 84 — Le rette canoniche in coordinate generali. (*)

1. La proposizione che chiude il § precedente permette di ritrovare senza ulteriore calcolo i risultati trovati al Cap. III § 23 B, sulla posizione dei piani osculatori alle curve di Darboux e di Segre. Basta osservare che esiste su S un *fascio* (**) *che comprende tutte le linee di Darboux e di Segre ed applicare la proposizione citata.* Ne segue senz'altro che esiste su S una metrica di Weyl del tipo studiato al § 83 di cui le linee di Darboux e di Segre sono delle geodetiche particolari. (***) La nor-

(*) In questo § supponiamo che S non sia rigata ($J \neq 0$).

(**) Definito in coordinate asintotiche da $\beta\, du^3 + c\gamma\, dv^3 = 0$ con c costante arbitraria.

(***) Questa metrica soddisfa evidentemente la condizione (4) del § 83.

male di tale metrica è evidentemente l'*asse* di S. Ne segue che l'asse di S è la retta base del fascio di piani rappresentato da (5) § 83 appena si determini il sistema covariante α_r in modo che la (3) del § 83 abbia le linee di Darboux (*) come curve integrali particolari. Ora la $(3)_{\text{bis}}$ del § 80 C mostra che le curve di Darboux soddisfano all'equazione

$$F_2 \Sigma \psi_r Du_r - 3 \Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s = 0 .$$

Confrontando con la (3) del § 83 A vediamo pertanto che l'*asse di* S *è la retta base del fascio di piani* (ottenuto variando $du_1 : du_2$)

$$d\xi - \frac{1}{2} \Sigma \psi_r du_r . \xi . \quad (**) \tag{1}$$

Conosciamo pertanto le equazioni in coordinate curvilinee qualunque di due delle rette canoniche: la normale proiettiva e l'asse. Per determinare le altre rette canoniche basta ricordare dal Cap. III § 27 i valori (costanti) dei birapporti fra esse. Troviamo così che la *direttrice è la retta base del fascio*

$$d\xi - \frac{1}{2} \left(\Sigma \psi_i du_i + \frac{1}{2} \frac{dJ}{J} \right) \xi \tag{1_{bis}}$$

e lo *spigolo è la retta base del fascio*

$$d\xi - \frac{1}{4} \left(\Sigma \psi_i du_i - \frac{1}{2} \frac{dJ}{J} \right) \xi \tag{1_{ter}}$$

(*) Si potrebbe partire anche dalle linee di Segre.

(**) Per il significato invariante dell'asse se ne deduce tosto che la forma differenziale lineare

$$\Sigma \psi_i \, du_i + \frac{3}{2} \frac{dJ}{J}$$

è intrinseca ed *invariante,* come abbiamo già enunciato al Cap. VI § 58 A. Inoltre facendo uso della penultima nota a piè di pag. si conferma il risultato (Cap. VI. § 60 A) che $K = -\frac{1}{3} \Sigma a^{rs} \psi_{rs}$ è la curvatura di F_2.

Come corollario si deduce che il fascio canonico interseca il piano tangente lungo la tangente

$$(1)_{\text{quater}} \qquad \Sigma\psi_i Du_i + \frac{3}{2}\frac{DJ}{J} = 0 .$$

2. È facile verificare questi risultati con calcolo diretto. A tale scopo dimostriamo dapprima: *In uno spostamento infinitesimo lungo una curva asintotica di* S *valgono le formole* (*)

$$(2) \qquad \begin{aligned} d^2x &= \left(\frac{1}{3}\frac{dF_3}{F_3} - \frac{1}{6}\frac{dJ}{J} + \frac{1}{3}\Sigma\psi_r\, du_r\right) dx + \Delta x + Px , \\ d^2\xi &= \left(\frac{1}{3}\frac{dF_3}{F_3} - \frac{1}{6}\frac{dJ}{J} + \frac{1}{3}\Sigma\psi_r\, du_r\right) d\xi - \Delta\xi + \Pi\xi , \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$(2)_{\text{bis}} \qquad \Delta u_i = \Sigma a_{rs}^{i}\, du_r\, du_s , \quad \Delta x = \Sigma x_i\, \Delta u_i , \quad \Delta\xi = \Sigma \xi_i\, \Delta u_i .$$

Cominciamo coll'osservare che, muovendosi lungo un' asintotica è (**) $duDv -$ $- dv\, Du = 0$, sicchè possiamo porre:

$$Du = \lambda du , \quad Dv = \lambda dv ,$$

ossia

$$a_{12}\, du + a_{22}\, dv = -\varepsilon\lambda\sqrt{|A|}\, du ,$$

$$a_{11}\, du + a_{12}\, dv = \varepsilon\lambda\sqrt{|A|}\, dv .$$

Se ne deduce

$$\begin{vmatrix} a_{12} + \varepsilon\lambda\sqrt{|A|} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} - \varepsilon\lambda\sqrt{|A|} \end{vmatrix} = -A - \lambda^2 |A| = -|A|(\lambda^2 + \varepsilon) = 0$$

onde $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$,

(*) Si confronti con le formole (1) del § 79 valide se $F_2 \neq 0$.
(**) Cap. VI, § 56, (5) bis.

$$(3) \qquad Du_i = \sqrt{\varepsilon}\, du_i\,, \quad \text{se} \quad F_2 = 0\,. \quad (*)$$

Sostituendo nella (1) del Cap. VI § 57 si trova poi (**)

$$(3)_{\text{bis}} \qquad F'_3 = \sqrt{\varepsilon}\, F_3\,, \quad \text{se} \quad F_2 = 0\,.$$

Di più

$$(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)^2 = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} du & \delta^2 u \\ dv & \delta^2 v \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k & \Sigma a_{ik}\, du_i\, \delta^2 u_k \\ \Sigma a_{ik}\, du_i\, \delta^2 u_k & \Sigma a_{ik}\, \delta^2 u_i\, \delta^2 u_k \end{vmatrix} = 0\,,$$

essendo

$$\Sigma a_{ik} du_i\, du_k = F_2 = 0\,, \quad 2\Sigma a_{ik} du_i\, \delta^2 u_k = dF_2 = 0\,,$$

sicchè

$$\delta^2 u = \mu\, du\,, \quad \delta^2 v = \mu\, dv\,.$$

Per calcolare μ sostituiamo nella formola

$$dF_3 = \Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i + 3\,\Sigma\, a_{rst}\, du_r\, du_s\, \delta^2 u_t$$

onde

$$\mu = \frac{1}{3}\,\frac{dF_3}{F_3} - \frac{1}{3F_3}\,\Sigma a_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i\,,$$

sicchè si ottiene, ricordando la (1) del Cap. VI § 58,

$$(3)_{\text{ter}} \qquad \delta^2 u_i = \left(\frac{1}{3}\,\frac{dF_3}{F_3} - \frac{1}{6}\,\frac{dJ}{J} + \frac{1}{3}\,\Sigma \psi_r\, du_r \right) du_i\,, \quad \text{se} \quad F_2 = 0\,.$$

Ora dalle equazioni fondamentali si deduce subito che

$$d^2 x = \Sigma x_r\, \delta^2 u_r + \Delta x + P\,.\,x\,,$$

$$d^2 \xi = \Sigma \xi_r\, \delta^2 u_r - \Delta \xi + \Pi\,.\,\xi\,,$$

e basta osservare la $(3)_{\text{ter}}$ per arrivare alle (1).

Osserviamo anche le formole (valide qualunque siano du_r)

(*) Passando ad un' asintotica dell' altro sistema, dobbiamo cambiare il segno di $\sqrt{\varepsilon}$.

(**) La formola $(3)_{\text{bis}}$ si potrebbe dedurre anche dalla (4) del Cap. VI. § 57.

$$(4) \qquad \Sigma \vartheta_{ik}\, du_i\, \Delta u_k = - F_3',$$

$$(4)_{bis} \qquad \Sigma a_{ik}\, \Delta u_i\, \Delta u_k = - \frac{1}{2} J F_2^2$$

La (4) si dimostra subito. Infatti, per la (3) del Cap. VI § 57 e per la $(2)_{bis}$ è

$$\Sigma \vartheta_{ik}\, du_i\, \Delta u_k = \Sigma \vartheta_{ik}\, a_{rs}^{k}\, du_i\, du_r\, du_s = - \Sigma b_{rsi}\, du_i\, du_r\, du_s\,.$$

La $(4)_{bis}$ diventa, sostituendovi i valori di Δu_i,

$$4_{ter} \qquad \Sigma a_{rs}^{i}\, a_{pqi}\, du_r\, du_s\, du_p\, du_q = - \frac{1}{2} J F_2^2\,.$$

Per dimostrarla, ricordiamoci la dimostrazione della formola (9) del Cap. IV, § 59 D; vediamo subito che nello stesso modo come la formola citata si può anche dimostrare che

$$\Sigma a_{rs}^{i} a_{pqi} \tau^r\, \tau^s\, \tau^p\, du_q = \frac{1}{2} \Sigma a_{rs} \tau^r\, \tau^s\, \Sigma \tau_i\, du_i = \frac{1}{2} \Sigma a_{rs} \tau^r\, \tau^s\, \Sigma a_{ik} \tau^k\, du_i\,,$$

τ^r essendo un sistema controvariante arbitrario. Scegliendo $\tau^r = du_r$ si ottiene la $(4)_{ter}$ sotto l'ipotesi $J = -1$ fatta l. c. Si passa poi immediatamente al caso di J qualunque.

Se in particolare $F_2 = 0$, sicchè il punto dx sta su una tangente asintotica, la $(4)_{bis}$ dimostra che il punto Δx sta pure su una tangente asintotica, che è, per la (4) diversa dalla precedente. Ciò posto, le (2) permettono di rifare, in coordinate curvilinee qualunque, il calcolo fatto al Cap. III § 26 per trovare lo spigolo.

Infatti posto (supponendo che $F_2 = 0$)

$$t = \frac{(x\, d\, x)}{\sqrt[3]{F_3}},$$

dalle (1) si trova subito

$$dt = \frac{1}{3}\left(\Sigma \psi_r\, d\, u_r - \frac{1}{2}\, \frac{dJ}{J}\right) t + \frac{(x\, \Delta\, x)}{\sqrt[3]{F_3}}$$

sicchè (Cap. I § 7 D) la polare del punto

$$(5) \qquad d\, x - \frac{1}{4}\left(\Sigma \psi_r\, du_r - \frac{1}{2}\, \frac{dJ}{J}\right) x$$

rispetto alla conica osculatrice dell' asintotica su cui supponiamo muoverci è la retta $(x\, \Delta x)$ che abbiamo visto essere la tangente all' altra asintotica in x. Se ne deduce subito che l' espressione rappresenta la retta duale dello spigolo. Lascio al lettore di fare un calcolo analogo per la direttrice.