Základy analytické geometrie. II

Různé doplňky

In: Eduard Čech (author): Základy analytické geometrie. II. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 152–212.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402540

XIV

RŮZNÉ DOPLŇKY.

107. AFINNÍ KLASIFIKACE REGULÁRNÍCH KVADRIK. Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$, jehož úběžnou nadrovinou označíme N . *Kvadrikou prostoru* $\mathbf{E}_m$ rozumíme kvadriku projektivního rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$, která neobsahuje jako část celou nadrovinu N ; všímáme si zpravidla pouze bodů v konečnu takové kvadriky. V následujícím si všimneme pouze *regulárních* $\mathbf{Q}_{m-1}$ v prostoru $\mathbf{E}_m$ $(m \geqq 2)$. Dělíme je na středové a na paraboloidy podle toho, zda úběžná nadrovina N není či je tečnou nadrovinou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Vyšetřujme nejprve *středové* $\mathbf{Q}_{m-1}$. *Středem* takové $\mathbf{Q}_{m-1}$ nazveme pól S nadroviny N vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$; je to e. bod, který neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Přímka procházející středem S se jmenuje *průměr* kvadriky. Průměr, jehož úběžný bod leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, se jmenuje *asymptota* kvadriky. Z věty 76.3 soudíme, že průměr, který není asymptotou, má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ společné dva (reálné nebo imaginární) e. body A , A' tak, že S je středem dvojice A , A'; naproti tomu asymptota nemá s $\mathbf{Q}_{m-1}$ v konečnu žádný společný bod. Asymptoty jsou tečny pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ (s úběžným bodem dotyku); každý jiný reálný průměr je pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ buďto sečnou nebo nesečnou.

Mezi středové kvadriky patří všecky formálně reálné kvadriky; u nich každý reálný průměr je nesečnou. Dále si všimněme středových eliptických (regulárních) kvadrik. Ty jsou dvojího druhu podle toho, zda střed S leží uvnitř nebo vně $\mathbf{Q}_{m-1}$; leží-li S uvnitř, nazveme $\mathbf{Q}_{m-1}$ *elipsoidem* (pro $m = 2$ *elipsou*); leží-li S vně, nazveme $\mathbf{Q}_{m-1}$ *dvojdílnou kvadrikou* z důvodu, který v dalším vyložíme; dvojdílná $\mathbf{Q}_1$ se jmenuje *hyperbola*.

Každá přímka procházející nějakým vnitřním bodem elipsoidu, zejména tedy také každý jeho průměr, je sečnou elipsoidu (viz větu 102.4). Každá nesečna elipsoidu leží vně elipsoidu a totéž platí i o každé tečně s výjimkou jejího bodu dotyku. Jsou-li H , K průsečíky sečny s elipsoidem Q_{m-1}, potom, jelikož při kladné orientaci elipsoidu úběžný bod je kladný a vnitřní body jsou záporné vzhledem ke Q_{m-1}, podle poznámky na konci článku 99 úsečka HK leží (až na své krajní body) uvnitř Q_{m-1} a ostatek přímky HK leží vně elipsoidu. Vnitřek elipsoidu Q_{m-1} je tedy možné definovat jako množinu všech vnitřních bodů všech úseček, které mají své krajní body na Q_{m-1}. Tečná nadrovina elipsoidu Q_{m-1} leží až na svůj bod dotyku celá vně Q_{m-1}. Nadrovina ϱ, která není tečnou nadrovinou pro Q_{m-1}, buďto nemá s Q_{m-1} žádný společný bod a leží celá vně Q_{m-1}, nebo protne Q_{m-1} v elipsoidu Q_{m-2} (pro $m = 3$ v elipse, pro $m = 2$ ve dvou reálných bodech); prvý případ nastane na př. pro úběžnou nadrovinu, druhý pak pro každou nadrovinu obsahující bod uvnitř Q_{m-1}, zejména tedy pro každou *diametrální nadrovinu*, t. j. nadrovinu jdoucí středem S. Je-li $\{u\}$ libovolný směr a E_{m-1} jeho polární nadrovina, je E_{m-1} diametrální nadrovinou; z věty 76.3 plyne, že E_{m-1} obsahuje pro každou sečnu vedenou směrem $\{u\}$ a protínající Q_{m-1} v bodech H, K střed dvojice H, K. Je-li Q_{m-2} průnik E_{m-1} s Q_{m-1}, potom přímka směru $\{u\}$ vedená bodem na Q_{m-2} je tečnou elipsoidu, přímka směru $\{u\}$ vedená bodem uvnitř Q_{m-2} je sečnou a přímka směru $\{u\}$ vedená bodem vně Q_{m-2} je nesečnou; pro $m = 2$ se Q_0 skládá ze dvou bodů A, B a vnitřkem zde musíme rozumět vnitřek úsečky AB, vnějškem část přímky AB mimo úsečku AB.

Budiž nyní Q_{m-1} dvojdílná kvadrika. Ježto pól S úběžné nadroviny N leží vně Q_{m-1}, podle věty 102.5 N protne Q_{m-1} v regulární eliptické Q_{m-2} (pro $m = 2$ v Q_0 skládající se ze dvou různých reálných úběžných bodů). Podle věty 102.5 (aplikované na kvadriku Q_{m-2} prostoru N) existuje v N $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor P_{m-2}, jehož všecky body leží vně Q_{m-1} (což je zřejmě správné i pro $m = 2$). Avšak také bod S, který je konjugovaný ke každému bodu prostoru N, leží vně Q_{m-1}, takže podle věty 99:6 leží vně Q_{m-1} celá nadrovina ϱ prostoru E_m, která spojuje S a P_{m-2}. Ježto tedy Q_{m-1} a ϱ nemají žádný společný bod, můžeme rozdělit množinu všech e. bodů naší kvadriky Q_{m-1} na dva t. zv. *pláště*, z nichž jeden leží celý v jednom a druhý celý ve druhém z obou poloprostorů, na které nadrovina ϱ rozkládá e. prostor E_m. Pro $m = 2$ dvojdílnou Q_1 jsme nazvali hyperbolou; místo slova plášť se pro $m = 2$ užívá slova *větev*. Je třeba ovšem dokázat, že rozklad naší $\mathbf{Q}_{m-1}$ na dva pláště je nezávislý na volbě pomocné nadroviny ϱ, o které ostatně stačí vědět, že leží celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ (a nemá tudíž s $\mathbf{Q}_{m-1}$ žádný společný reálný bod); nezáleží na tom, zda ϱ prochází středem S. Abychom slíbený důkaz provedli, uvažme, že podle poznámky na konci článku 99, jsou-li A, B dva různé e. body na $\mathbf{Q}_{m-1}$, leží buďto celá úsečka AB až na body A, B uvnitř a ostatek přímky AB vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ nebo leží obráceně celá úsečka AB až na body A, B vně a ostatek přímky AB uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$; který z obou případů nastane, to záleží na tom, zdali průsečík přímky AB s nadrovinou ϱ, který v projektivním rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$ jistě existuje, náleží do úsečky AB. Z toho plyne: *Jestliže dva různé e. body A, B dvojdílné kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ leží oba na témže plášti, je vnitřek úsečky AB částí vnitřku kvadriky; jestliže však leží každý z obou bodů A, B v jiném plášti, je vnitřek úsečky AB částí vnějšku kvadriky.* Tím jsou pláště skutečně popsány nezávisle na pomocné nadrovině ϱ. Na druhé straně je patrné, že popis plášťů pomocí poloprostorů, na které nadrovina ϱ rozdělí $\mathbf{Q}_{m-1}$, zůstane správný i v tom případě, je-li ϱ tečnou nadrovinou, neboť každá tečná nadrovina je celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ až na svůj bod dotyku.

Řekli jsme si již, že úběžné body dvojdílné kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ tvoří v nadrovině N pro $m \geqq 3$ regulární eliptickou kvadriku $\mathbf{Q}_{m-2}$. Přímky, které spojují střed S se směry ležícími na $\mathbf{Q}_{m-2}$ jsou asymptoty kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ a dohromady tvoří její *asymptotický kužel* $\mathbf{Q}'_{m-1}$; je to singulární $(m - 1)$-rozměrná eliptická kvadrika s jediným singulárním bodem S. Směr $\{\mathbf{u}\}$ leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-2}$ neboli právě když leží uvnitř $\mathbf{Q}'_{m-1}$; podobně jestliže slovo uvnitř nahradíme slovem vně. Máme směry trojího druhu. Jestliže předně směr $\{\mathbf{u}\}$ leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ jdoucí středem S je asymptotou a nemá tudíž s $\mathbf{Q}_{m-1}$ v konečnu žádný společný bod; každá jiná přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ v konečnu právě jeden společný bod, který rozdělí přímku na dvě polopřímky, z nichž jedna leží uvnitř a druhá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže za druhé směr $\{\mathbf{u}\}$ leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom každá přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ je sečnou a protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve dvou reálných bodech H_1, H_2, z nichž je každý v jiném plášti; středy všech dvojic H_1, H_2 vyplní polární nadrovinu směru $\{\mathbf{u}\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, která prochází středem S a leží celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Jestliže posléze směr $\{\mathbf{u}\}$ leží vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom jeho polární nadrovina σ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v regulární dvojdílné eliptické kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}(\sigma)$ [pro $m = 3$ v hyperbole $\mathbf{Q}_1(\sigma)$], která má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ společný střed S; přímka, vedená ve směru $\{\mathbf{u}\}$ bodem na $\mathbf{Q}_{m-2}(\sigma)$, je tečnou ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ v tomto bodě, přímka vedená ve směru $\{\mathbf{u}\}$ bodem uvnitř $\mathbf{Q}_{m-2}(\sigma)$ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve dvou bodech H_1, H_2 na témž plášti tak, že střed dvojice H_1, H_2 leží v nadrovině σ; posléze přímka vedená ve směru $\{\mathbf{u}\}$ bodem vně $\mathbf{Q}_{m-2}(\sigma)$ je nesečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Výsledky formulované v předcházejícím odstavci platí též pro $m = 2$, t. j. pro hyperbolu $\mathbf{Q}_1$; „asymptotický kužel" $\mathbf{Q}'_0$ se zde skládá ze dvou asymptot a pro směr $\{\mathbf{u}\}$ ležící vně $\mathbf{Q}_1$ kvadrika $\mathbf{Q}_0(\sigma)$ se skládá ze dvou reálných bodů.

Pro $m = 2$ vedle formálně reálné regulární $\mathbf{Q}_1$, elipsy a hyperboly neexistují jiné regulární středové $\mathbf{Q}_1$. Pro $m = 3$ vedle formálně reálné regulární $\mathbf{Q}_2$ se signaturou (4,0), elipsoidu se signaturou (3.1) a dvojdílné $\mathbf{Q}_2$ s touž signaturou (3,1), nazývané obyčejně *dvojdílný hyperboloid*, existuje ještě regulární středová $\mathbf{Q}_2$ se signaturou (2,2); je to přímková kvadrika zvaná obyčejně *jednodílný hyperboloid*. Také jednodílný hyperboloid, stejně jako dvojdílný, protne úběžnou rovinu v kuželosečce $\mathbf{Q}_1$; přímky spojující střed S s jednotlivými úběžnými body na $\mathbf{Q}_1$ tvoří opět *asymptotický kužel* $\mathbf{Q}'_2$. Rozdíl mezi oběma hyperboloidy je na př. v tom, že kdežto dvojdílný hyperboloid leží celý uvnitř svého asymptotického kužele $\mathbf{Q}'_2$, leží jednodílný hyperboloid celý vně $\mathbf{Q}'_2$. Jiný rozdíl je na př. v tom, že pro jednodílný hyperboloid je každá přímka buďto sečnou nebo tečnou; nesečny neexistují. Popis možných poloh přímky ke $\mathbf{Q}_2$, výše podrobně udaný pro elipsoidy a dvojdílné hyperboloidy, nebudeme zde uvádět; čtenář už poznal, že tu běží jen o jednoduché specialisace projektivních vlastností známých z předcházející kapitoly.

Pro obecné m se omezme na poznámku, že existuje mimo formálně reálnou $\mathbf{Q}_{m-1}$ se signaturou $(m + 1, 0)$ pro liché m celkem $\frac{1}{2}(m + 1)$ možných signatur pro regulární středové $\mathbf{Q}_{m-1}$:

$$(107.1) \quad (m\,, 1)\,;\ (m - 1\,, 2)\,;\ \ldots\,;\ \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right);$$

každá z těchto signatur, s výjimkou poslední, dává dva různé typy podle toho, zda střed S je uvnitř či vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže celkem pro liché

m máme m různých typů bodově reálných regulárních středových $\mathbf{Q}_{m-1}$. Pro sudé m mimo signaturu $(m+1, 0)$ formálně reálné $\mathbf{Q}_{m-1}$ máme celkem $\frac{1}{2}m$ možných signatur pro regulární středové $\mathbf{Q}_{m-1}$:

$$(107.2) \qquad (m, 1); (m-1, 2); \ldots; \left(\frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}\right);$$

každá z těchto signatur bez výjimky dává dva různé typy podle toho, zda střed S je uvnitř či vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže pro sudé m stejně jako pro liché m máme opět celkem m různých typů bodově reálných regulárních středových $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Z výsledků článku 100 plyne, že je-li dána regulární středová $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{E}_m$, je možno v $\mathbf{E}_m$ nekonečně mnoha způsoby zavést lineární soustavu souřadnic

$$(107.3) \qquad \langle S; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$$

s počátkem ve středu S kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, že *rovnice kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$ je

$$(107.4) \qquad \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 1,$$

což ovšem znamená, že e. bod $X = [x_1, \ldots, x_m]$ leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když je splněna rovnice (107.4). Při tom koeficienty $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ jsou různé od nuly a ačkoli jejich hodnoty jsou ovšem závislé na volbě soustavy souřadnic (107.3), jsou jejich znamení na této volbě nezávislá, neboť je-li (p, q) signatura dané $\mathbf{Q}_{m-1}$, při čemž je $p + q = m + 1$ a můžeme předpokládat, že $p \geqq q$, je pro formálně reálnou $\mathbf{Q}_{m-1}$: $p = m + 1$, $q = 0$ a všecka ε_r $(1 \leqq r \leqq m)$ jsou záporná; pro bodově reálnou kvadriku pak: (1) v případě $p > q$, jestliže střed S leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, počet kladných ε_r je roven p, počet záporných ε_r je roven $q - 1$; (2) v případě $p > q$, jestliže střed S leží vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, počet kladných ε_r je roven q, počet záporných ε_r je roven $p - 1$; (3) v případě $p = q$, který je možný pouze pro lichá m, je počet kladných ε_r roven p, počet záporných ε_r roven $p - 1$. Pro $m = 2$ v rovnici

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 = 1$$

jsou obě čísla ε_1, ε_2 záporná v případě formálně reálné $\mathbf{Q}_1$, obě jsou kladná v případě elipsy, jedno je kladné a druhé záporné v případě hyperboly. Pro $m = 3$ v rovnici

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 1$$

jsou všecka tři čísla ε_1, ε_2, ε_3 záporná v případě formálně reálné $\mathbf{Q}_2$, všecka tři jsou kladná v případě elipsoidu, jedno je kladné a dvě záporná v případě dvojdílného hyperboloidu, dvě jsou kladná a jedno záporné v případě jednodílného hyperboloidu.

Zároveň s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ danou rovnicí (107.5) je účelné uvažovat také kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$ danou rovnicí

$$(107.5) \qquad \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 + 1 = 0 ,$$

což je opět regulární středová kvadrika téhož $\mathbf{E}_m$ s týmž středem S. Vztah mezi oběma kvadrikami $\mathbf{Q}_{m-1}$ a $\mathbf{Q}'_{m-1}$ je zřejmě symetrický; nazveme je navzájem *středově sdružené.* Je patrné, že každý průměr je buďto asymptotou zároveň pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ i pro $\mathbf{Q}'_{m-1}$, nebo je pro jednu z nich sečnou a pro druhou nesečnou. Vztah středové sdruženosti je nezávislý na volbě souřadnicové soustavy (107.3), neboť se dá popsat tak, že je-li ϱ polární nadrovina e. bodu X vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a je-li X' obraz bodu X při středové souměrnosti se středem S, je ϱ polární nadrovina bodu X' vzhledem ke $\mathbf{Q}'_{m-1}$.

Budiž nyní $\mathbf{Q}_{m-1}$ *paraboloid*, t. j. regulární kvadrika prostoru $\mathbf{E}_m$, pro kterou úběžná nadrovina N je tečnou nadrovinou; v případě $m = 2$, který v následujícím není vyloučen, se místo slova paraboloid užívá slova *parabola.*

Označme $\{\boldsymbol{u}_1\}$ (úběžný) bod dotyku nadroviny N a nazveme jej *osovým směrem* paraboloidu. Ježto regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje reálný bod $\{\boldsymbol{u}\}$, je paraboloid $\mathbf{Q}_{m-1}$ bodově reálnou kvadrikou; jeho (neorientovaná) signatura má tvar (p, q), kde $p \geq q \geq 1$, $p + q = m + 1$. Nadrovina N podle věty 102.2 protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$, která má jediný singulární bod $\{\boldsymbol{u}_1\}$ a která má signaturu $(p - 1, q - 1)$. Je-li $q = 1$, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ *eliptický paraboloid,* t. j. je to paraboloid, který je zároveň eliptickou kvadrikou; v tomto případě, který pro $m = 2$ je jedině možný, je osový směr $\{\boldsymbol{u}_1\}$ jediným reálným úběžným bodem paraboloidu; je-li však $q \geq 2$ (a tedy $m \geq 3$), je úběžná kvadrika $\mathbf{Q}_{m-2}$ bodově reálná a obsahuje mimo svůj singulární bod $\{\boldsymbol{u}_1\}$ ještě nekonečně mnoho regulárních reálných bodů.

Budiž nejprve $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptický paraboloid, takže při kladné orientaci je signatura $(m, 1)$; body vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ jsou kladné, body uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$ jsou záporné. Až na osový směr $\{\boldsymbol{u}_1\}$, který leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, leží všecky úběžné body vně Q_{m-1}. E. přímka p osového směru $\{\mathbf{u}_1\}$ není tečnou ke Q_{m-1} v bodě $\{\mathbf{u}_1\}$, protože tečná nadrovina v tomto bodě je úběžná; tudíž p je sečnou pro Q_{m-1} a protne Q_{m-1} v konečnu v právě jednom bodě A, který rozdělí p na dvě polopřímky tak, že až na bod A je jedna celá uvnitř a druhá vně Q_{m-1}. Má-li e. přímka p směr různý od $\{\mathbf{u}_1\}$, je její úběžný bod vně Q_{m-1} a jsou tři možnosti: buďto p je nesečnou a leží celá vně Q_{m-1}, nebo p je tečnou a až na svůj bod dotyku leží celá vně Q_{m-1}, nebo posléze p je sečnou a protne Q_{m-1} ve dvou různých e. bodech H_1, H_2 tak, že úsečka H_1H_2 až na své krajní body leží uvnitř Q_{m-1}, ostatek přímky p pak vně Q_{m-1}. Tedy jako u elipsoidu můžeme i u eliptického paraboloidu definovat vnitřek jako množinu všech vnitřních bodů všech úseček, jejichž krajní body leží na Q_{m-1}. Jestliže e. bod A leží na Q_{m-1}, potom přímka p vedená bodem A v osovém směru $\{\mathbf{u}_1\}$ není tečnou v bodě A, takže zaměření tečné nadroviny α bodu A neobsahuje směr $\{\mathbf{u}_1\}$. E. nadrovina $\beta \neq \alpha$ rovnoběžná s α nemůže být tečnou nadrovinou pro Q_{m-1}. Neboť β protne p v e. bodě $B \neq A$; budiž B' ten bod na přímce p, pro který A je středem dvojice B, B'; ježto oba body A, $\{\mathbf{u}_1\}$ leží na Q_{m-1}, jsou B, B' navzájem konjugovány vzhledem ke Q_{m-1}, mimo to však také každý úběžný bod nadroviny α je konjugován jak s bodem A, tak i s bodem $\{\mathbf{u}_1\}$, tedy též s bodem B'; z toho plyne, že β je polární nadrovinou bodu B', který neleží na β, takže β vskutku není tečnou nadrovinou. Na druhé straně budiž P_{m-2} libovolný $(m—1)$-směr neobsahující směr $\{\mathbf{u}_1\}$; potom má Q_{m-1} tečnou nadrovinu (podle předchozího právě jednu) se zaměřením P_{m-2}. Neboť je-li β libovolně zvolená e. nadrovina se zaměřením P_{m-2}, potom její pól B vzhledem ke Q_{m-1} je bod v konečnu, ježto každý bod v nekonečnu je konjugován s bodem $\{\mathbf{u}_1\}$, který neleží v β; přímka p vedená bodem B ve směru $\{\mathbf{u}_1\}$ protne Q_{m-1} v e. bodě A a každý úběžný bod nadroviny β je konjugován jak s bodem B, tak s bodem $\{\mathbf{u}_1\}$, tedy též s bodem A, takže tečná nadrovina bodu A je rovnoběžná s β.

Ježto parabola má signaturu (2,1), platí všecky výsledky předcházejícího odstavce i pro parabolu. Pro $m \geqq 3$ některé z těchto výsledků platí pro všecky paraboloidy. Zejména platí, že každá přímka osového směru $\{\mathbf{u}_1\}$ protne Q_{m-1} v právě jednom e. bodě, že tečná nadrovina nemůže obsahovat osový směr $\{\mathbf{u}_1\}$ a že každý $(m — 1)$-směr, který neobsahuje směr $\{u_1\}$, je zaměřením právě jedné tečné nadroviny. To, co bylo právě řečeno, se vztahuje na ty tečné nadroviny, jejichž bod dotyku je v konečnu; jestliže paraboloid Q_{m-1} není eliptický, obsahuje úběžné body $\{u\} \neq \{u_1\}$ a tečná nadrovina v takovém úběžném bodě obsahuje směr $\{u_1\}$.

Dokažme nyní, že je-li dán paraboloid Q_{m-1} prostoru E_m, je možno v E_m nekonečně mnoha způsoby zavést lineární soustavu souřadnic

$$\langle P\,;\, u_1, \ldots, u_m\rangle \tag{107.6}$$

tak, aby *rovnice paraboloidu* Q_{m-1} byla

$$\varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 2x_1\,, \tag{107.7}$$

což ovšem znamená, že e. bod $X = [x_1, \ldots, x_m]$ leží na Q_{m-1}, právě když je splněna rovnice (107.7). Při tom koeficienty $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ jsou různé od nuly a je-li mezi nimi $p - 1$ kladných a $q - 1$ záporných, jsou čísla p, q nezávislá na volbě soustavy (107.6), ježto (p, q) je neorientovaná signatura kvadriky Q_{m-1}; je patrné, že jestliže soustavu (107.6) změníme tak, že místo u_1 dáme $-u_1$, vymění se p a q mezi sebou.

Nejprve je patrné, že jsou-li dána čísla $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ různá od nuly, potom při libovolné volbě lineární soustavy souřadnic (107.6) je (107.7) rovnice určité kvadriky Q_{m-1}. Snadno verifikujeme, že Q_{m-1} nemá ani v konečnu, ani v nekonečnu singulární bod a že pólem úběžné nadroviny N je úběžný bod $\{u_1\}$, takže Q_{m-1} je *paraboloid s osovým směrem* $\{u_1\}$. Dále je patrné, že průnik Q_{m-1} s N má rovnici $\varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 0$, takže je-li $p - 1$ čísel ε_r kladných a $q - 1$ záporných, je tento průnik singulární Q_{m-2} prostoru N s jediným singulárnim bodem $\{u_1\}$ a s neorientovanou signaturou $(p - 1, q - 1)$, takže podle věty 102.2 Q_{m-1} má neorientovanou signaturu (p, q).

Obráceně budiž dán v E_m paraboloid Q_{m-1}. Budiž Q_{m-2} průnik Q_{m-1} s úběžnou nadrovinou N, takže Q_{m-2} je singulární kvadrika v N s jednobodovým vrcholem, jímž je osový směr paraboloidu Q_{m-1}. Podle věty 100.2 existuje v N polární ar. base $u_1, \ldots, u_m$ pro Q_{m-2} a podle věty 100.1 existuje index s $(1 \leq s \leq m)$ tak, že $\{u_s\}$ je osový směr pro Q_{m-1}. Můžeme předpokládat, že $s = 1$. Podle předchozího existuje na Q_{m-1} e. bod P tak, že tečná nadrovina ke Q_{m-1} v bodě P má zaměření $\{u_2, \ldots, u_m\}$. Je-li nyní Q_{m-1} vytvořen kvadratickou formou f_2 příslušnou bilineární formě f, potom $f_2(P) = 0$, $f(P, \boldsymbol{u}_1) = = a \neq 0$, $f(P, \boldsymbol{u}_r) = 0$ pro $2 \leqq r \leqq m$ a dále $f_2(\boldsymbol{u}_1) = 0$, $f_2(\boldsymbol{u}_r) = = \varepsilon_r \neq 0$ pro $2 \leqq r \leqq m$, $f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_r) = 0$ pro $2 \leqq r \leqq m$, $f(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_s) = 0$ pro $2 \leqq r, s \leqq m$, $r \neq s$. Tedy pro $X = x_0P + x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{u}_m$ je

$$f_2(X) = \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 + 2ax_0x_1$$

a ježto můžeme předpokládat, že $a = -1$, dostáváme rovnici (107.7), uvážíme-li, že pro e. bod X je $x_0 = 1$.

108. ABSOLUTNÍ POLARITA. Budiž dán eukleidovský prostor $\boldsymbol{E}_m$ ($m \geqq 2$) a budiž N jeho úběžná nadrovina. Množina $\boldsymbol{V}_m$ všech vektorů prostoru $\boldsymbol{E}_m$ je ar. základ projektivního $(m - 1)$-rozměrného prostoru N. Je-li $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{uv}$ skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, je f symetrická bilineární forma ve $\boldsymbol{V}_m$ a pro příslušnou kvadratickou formu f_2 máme $f_2(\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|^2$, takže forma f_2 je definitní kladná a tedy podle věty 99.1 regulární. Forma f_2 vytvořuje formálně reálnou kvadriku prostoru N, kterou označíme $\boldsymbol{A}_{m-2}$ a nazveme *absolutní kvadrikou* prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Polaritu vzhledem k $\boldsymbol{A}_{m-2}$ nazveme *absolutní polaritou* prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Zřejmě dva reálné směry $\{\boldsymbol{u}\}$, $\{\boldsymbol{v}\}$ jsou k sobě kolmé, právě když jsou konjugované vzhledem k $\boldsymbol{A}_{m-2}$. Můžeme pojem *kolmosti* jako názvu pro konjugovanost vzhledem k $\boldsymbol{A}_{m-2}$ rozšířit na komplexní směry. Při tom se však vyskytnou imaginární směry, které jsou na sobě kolmé; jsou to právě ty směry, které náležejí do absolutní kvadriky $\boldsymbol{A}_{m-2}$; nazýváme je *minimální* nebo také *isotropické směry*. Pro $m = 2$ jsou právě dva minimální směry, které jsou navzájem komplexně sdružené. Pro $m \geqq 3$ je minimálních směrů nekonečně mnoho. Směr komplexně sdružený s minimálním směrem je také minimální.

Pro $m = 2$ polarita vzhledem k $\boldsymbol{A}_0$ je eliptická involuce, která se nazývá *absolutní involuce* roviny $\boldsymbol{E}_2$. Je-li φ reálná involuce na úběžné přímce roviny $\boldsymbol{E}_2$ různá od absolutní involuce, plyne z věty 93.3, že ve φ existuje právě jedna dvojice složená ze dvou navzájem kolmých směrů.

Budiž $m \geqq 2$ opět libovolné. Budiž v $\boldsymbol{E}_m$ dán e. bod S a budiž dáno číslo $r > 0$. Nazveme *koulí prostoru* $\boldsymbol{E}_m$ *se středem* S a *poloměrem* r množinu všech e. bodů X prostoru $\boldsymbol{E}_m$, jejichž vzdálenost od bodu S

je rovna r. Koule prostoru $\mathbf{E}_m$ nazveme také $(m-1)$-*rozměrné koule*. Zřejmě jednorozměrné koule jsou totožné s *kružnicemi* (viz článek 58). Podmínka, aby bod X ležel na kouli se středem S a poloměrem r zní $(X-S).(X-S)=r^2$, takže v libovolné *kartézské* soustavě souřadnic $\langle P\,;\,\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m\rangle$ rovnice koule zní

$$(x_1-s_1)^2+\dots+(x_m-s_m)^2=r^2$$

a jestliže počátek P splyne se středem S, jednodušeji:

$$x_1^2+\dots+x_m^2=r^2\,. \tag{108.1}$$

Z toho plyne, že koule prostoru $\mathbf{E}_m$ je regulární bodově reálná kvadrika v $\mathbf{E}_m$, která protne úběžnou nadrovinu v absolutní kvadrice $\mathbf{A}_{m-2}$. Obráceně budiž dána v prostoru $\mathbf{E}_m$ kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, že úběžná nadrovina ji protne v absolutní kvadrice $\mathbf{A}_{m-2}$. (Předpokládáme, že úběžná nadrovina není částí $\mathbf{Q}_{m-1}$.) Může se stát, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární; ježto však $\mathbf{A}_{m-2}$ je regulární, je to zřejmě jen tak možné, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ má jediný singulární bod S, který leží v konečnu; $\mathbf{Q}_{m-1}$ se potom skládá ze všech minimálních přímek procházejících bodem S, který je jediným reálným bodem na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže $\mathbf{Q}_{m-1}$ je regulární, je to středová kvadrika, která je buďto eliptická nebo formálně reálná. Je-li S její střed ve smyslu článku 107 a je-li $\langle S\,;\,\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m\rangle$ libovolná kartézská soustava souřadnic s počátkem S, je patrné, že $S,\mathbf{e}_1,\dots$ $\dots,\mathbf{e}_m$ je polární ar. base pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici tvaru (107.4), při čemž čísla $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ jsou si rovna, ježto $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje $\mathbf{A}_{m-2}$. Jestliže $\mathbf{Q}_{m-1}$ je bodově reálná, jsou čísla ε_r kladná a rovnici (107.4) lze dát tvar (108.1), kde $r>0$; tedy $\mathbf{Q}_{m-1}$ je v tomto případě koule a bod je jejím středem také ve smyslu definice tohoto článku. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ formálně reálná, jsou čísla ε_r záporná a rovnici (107.4) lze dát tvar

$$x_1^2+\dots+x_m^2+r^2=0\,;$$

v tomto případě kvadrika $\mathbf{Q}'_{m-1}$ středově sdružená s $\mathbf{Q}_{m-1}$ je koule s rovnicí (108.1).

V článku 79 jsme poznali, že je-li f afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$, má f projektivní rozšíření $\{f\}$, které je kolineací prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ se samodružnou nadrovinou N, kde N znamená opět úběžnou nadrovinu; víme také, že obráceně každá kolineace prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ se samodružnou nadrovinou N je projektivním rozšířením určité afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$. Částí $\{f\}$ je určitá kolineace K nadroviny N. Snadno se dokáže, že transformace f je podobná nebo shodná, právě když K převádí absolutní kvadriku $\mathbf{A}_{m-2}$ samu v sebe. Je-li tomu tak, potom transformace f je shodná, právě když determinant kolineace $\{f\}$ v samodružné nadrovině N (viz článek 85) je roven ± 1, při čemž $+1$ se týká přímé a -1 nepřímé shodné transformace. Důkazy přenecháváme čtenáři.

Absolutní polarity lze užít k důkazům vět metrické geometrie pomocí projektivní geometrie. V této knize nebudeme se tímto thematem zabývat a spokojíme se jednou drobnou ukázkou. V projektivní rovině $\mathbf{P}_2$ budiž dána kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ a na ní dva různé body A_1, A_2; dále budiž v $\mathbf{P}_2$ dána přímka p procházející pólem C přímky A_1A_2 vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$, která neprochází ani bodem A_1, ani bodem A_2, takže protne $\mathbf{Q}_1$ ve dvou různých (reálných nebo imaginárních) bodech M_1, M_2. Budiž φ projektivní zobrazení svazku $\pi(A_1, \mathbf{P}_2)$ na svazek $\pi(A_2, \mathbf{P}_2)$ popsané ve větě 103.2. Potom na přímce p existuje projektivita ψ tak, že je-li X libovolný bod přímky p, X' jeho obraz při φ, potom přímka A_1X má při ψ za obraz přímku A_2X'. Nyní zřejmě body M_1, M_2 jsou samodružné při ψ a je-li B průsečík přímek A_1A_2, p, je každý z obou bodů B, C obrazem druhého při ψ, takže podle věty (87.4 je ψ involuce s dvojnými body M_1, M_2. Budiž nyní $\mathbf{P}_2 = \overline{\mathbf{E}}_2$, $\mathbf{Q}_1$ budiž kružnice a body A_1, A_2 buďtež voleny tak, aby přímka A_1A_2 byla průměrem; potom můžeme za p volit úběžnou přímku, načež body M_1, M_2 tvoří absolutní $\mathbf{A}_0$ a ψ je absolutní involuce. Dostáváme takto projektivní důkaz známé t. zv. Thaletovy věty, podle níž úhel $\sphericalangle A_1CA_2$ je pravý, je-li C bod na $\mathbf{Q}_1$ různý od A_1 i od A_2.

109. SVAZKY KVADRIK. Budiž Φ_m množina všech kvadratických forem v projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$; na rozdíl od dohody učiněné v článku 95 počítejme do Φ_m také nulovou formu, kterou v tomto článku označíme ω a pro kterou je $\omega(X) = 0$ pro každý ar. bod X prostoru $\mathbf{P}_m$. Jsou-li f_2, g_2 dvě kvadratické formy, je také $f_2 + g_2$ kvadratická forma; rovněž cf_2 je kvadratická forma pro každou volbu čísla c. Φ_m je tedy vektorový prostor s nulovým vektorem ω. Zvolíme-li libovolně ar. basi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ prostoru $\mathbf{P}_m$, potom ty kvadratické formy φ_{rs} $(0 \leq$

$\leq r \leq s \leq m)$, pro něž $\varphi_{rs}(X) = x_r x_s$ pro $X = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_m A_m$, tvoří basi pro Φ_m, takže Φ_m má dimensi $\frac{1}{2}(m + 1)(m + 2)$. Jak je nám známo, existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi kvadrikami $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ a jednorozměrnými lineárními soustavami obsaženými ve Φ_m. Proto *množinu všech kvadrik prostoru* $\mathbf{P}_m$, kterou označíme $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$, *můžeme považovat za projektivní prostor dimense* $\frac{1}{2}m(m + 3)$, jehož ar. základem je Φ_m. Při tom jsme měli na mysli reálné kvadratické formy a reálné kvadriky, ale co jsme řekli, platí i o komplexních kvadratických formách, jejichž soubor můžeme označit $\Phi_m(\mathrm{i})$ a o komplexních kvadrikách, jejichž soubor můžeme označit $\{\mathbf{Q}_{m-1}(\mathrm{i})\}$. V dalším pro stručnost budeme užívat značek Φ_m, $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$ v obojím smyslu, reálném i komplexním.

Dvě různé kvadriky prostoru $\mathbf{P}_m$ určují přímku prostoru $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$, která se obyčejně nazývá *svazek kvadrik* v $\mathbf{P}_m$. Ar. basí takového svazku jsou libovolné dvě lineárně nezávislé kvadratické formy v $\mathbf{P}_m$. Je-li dán svazek kvadrik v $\mathbf{P}_m$ — označme jej Σ — a je-li $\mathbf{P}_k$ lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}_m$, potom každá kvadrika svazku Σ buďto obsahuje $\mathbf{P}_k$ jako část nebo protne $\mathbf{P}_k$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{k-1}$. Jsou možné celkem tři případy: (1) prostor $\mathbf{P}_k$ je částí všech kvadrik svazku Σ; (2) prostor $\mathbf{P}_k$ je částí právě jedné kvadriky svazku Σ a všecky ostatní $\mathbf{Q}_{m-1}$ svazku protnou $\mathbf{P}_k$ v téže $\mathbf{Q}_{k-1}$; (3) prostor $\mathbf{P}_k$ není částí žádné kvadriky svazku Σ, načež každá z nich protne $\mathbf{P}_k$ v jiné $\mathbf{Q}_{k-1}$ a všecky tyto $\mathbf{Q}_{k-1}$ tvoří svazek kvadrik v $\mathbf{P}_k$, který můžeme nazvat *průnikem* svazku Σ s prostorem $\mathbf{P}_k$.

Následující dvě věty jsou zřejmé.

VĚTA 109.1. *Budiž Σ svazek kvadrik prostoru $\mathbf{P}_m$. Je-li A bod prostoru $\mathbf{P}_m$, potom jím procházejí buďto všecky kvadriky svazku Σ nebo právě jedna z nich.* V prvém případě pravíme, že A je *základní bod svazku Σ*.

VĚTA 109.2. *Jsou-li body A, B konjugovány zároveň vzhledem ke dvěma různým kvadrikám svazku kvadrik, jsou konjugovány vzhledem ke všem kvadrikám svazku.*

Budiž Σ svazek kvadrik na přímce $\mathbf{P}_1$; připomeňme si, že každá $\mathbf{Q}_0$ je dvojice (reálných nebo imaginárních, různých nebo splývajících) bodů. Σ nazveme *parabolický* nebo *neparabolický*, podle toho, zda má či nemá základní bod. Snadno se dokáže, že parabolický Σ se základním bodem A je množina těch dvojic bodů na $\mathbf{P}_1$, do kterých náleží bod A (včetně dvojice A, A, která tvoří jedinou singulární $\mathbf{Q}_0$ svazku).

VĚTA 109.3. *Neparabolické svazky kvadrik na přímce $\mathbf{P}_1$ jsou totožné s involucemi na $\mathbf{P}_1$.*

DŮKAZ. Jsou-li A_0, A_1 dvojné body involuce φ, tvoří dvojice A_0, A_0 singulární $\mathbf{Q}_0'$, dvojice A_1, A_1 singulární $\mathbf{Q}_0''$ a obě kvadriky $\mathbf{Q}_0'$, $\mathbf{Q}_0''$ určují svazek kvadrik Σ na P_1. Je-li $\mathbf{Q}_0$ jiná kvadrika svazku Σ, která tudíž podle věty 109.1 neobsahuje ani bod A_0, ani bod A_1, jsou podle věty 109.2 body A_0, A_1 navzájem konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, z čehož plyne, že dvojice $\mathbf{Q}_0$ náleží do involuce φ. Je tedy svazek Σ částí involuce φ a ježto podle věty 109.1 Σ musí obsahovat $\mathbf{Q}_0$, do které náleží libovolně předepsaný bod na $\mathbf{P}_1$, splyne Σ s φ. Tím je dokázáno, že φ tvoří svazek kvadrik na $\mathbf{P}_1$, který zřejmě je neparabolický. Je-li obráceně dán na $\mathbf{P}_1$ neparabolický svazek Σ, zvolme v něm dvě různé dvojice $\mathbf{Q}_0' = (A_0, A_1)$; $\mathbf{Q}_0'' = (B_0, B_1)$, jimiž je jednoznačně určen. Stačí dokázat, že existuje na $\mathbf{P}_1$ involuce φ obsahující dvě dvojice $\mathbf{Q}_0'$, $\mathbf{Q}_0''$. Za tím účelem uvažme nejprve, že ježto Σ je neparabolický, nemají dvojice $\mathbf{Q}_0'$, $\mathbf{Q}_0''$ podle věty 109.1 žádný společný bod. Je-li nyní $A_0 = A_1$, $B_0 = B_1$, je φ involuce s dvojnými body A_0, B_0. Je-li dále třeba $A_0 \neq A_1$, $B_0 = B_1$, určeme na $\mathbf{P}_1$ bod C tak, aby bylo $(A_0A_1B_0C) = -1$; φ je potom involuce s dvojnými body B_0, C. Jsou-li posléze všecky čtyři body A_0, A_1, B_0, B_1 navzájem různé, plyne existence involuce φ z věty 87.5.

Z věty 109.3 plyne

VĚTA 109.4. *Jestliže přímka p neprochází žádným základním bodem svazku kvadrik Σ v prostoru $\mathbf{P}_m$ ($m \geqq 2$), potom p protne Σ v involuci.*

Svazek kvadrik Σ se jmenuje *singulární*, jestliže každá jeho kvadrika je singulární; Σ se jmenuje *regulární*, jestliže naopak aspoň jedna jeho kvadrika je regulární. Výše jsme poznali, že pro $m = 1$ každý Σ je regulární; naproti tomu pro $m \geqq 2$ existují singulární svazky kvadrik v $\mathbf{P}_m$, ale v této knize se jimi nebudeme zabývat.

Bod A nazveme *singulárním bodem svazku kvadrik* Σ v $\mathbf{P}_m$, je-li singulárním bodem aspoň jedné kvadriky svazku. Může se stát, že A je singulárním pro *všecky* kvadriky svazku Σ, který potom nutně je singulární. Není-li tomu tak, plyne z věty 109.2, že A je singulárním bodem právě jedné kvadriky svazku. Bod A nazveme *regulárním bodem svazku kvadrik* Σ, není-li jeho singulárním bodem.

VĚTA 109.5. *Budiž* Σ *svazek kvadrik v* $\mathbf{P}_m$. *Je-li* A *singulárním bodem svazku* Σ *a je-li* ϱ *jeho polární nadrovina vzhledem k jedné kvadrice svazku* Σ, *pro kterou* A *není singulárním bodem, potom* ϱ *je polární nadrovinou bodu* A *vzhledem ke každé kvadrice svazku* Σ, *pro kterou* A *není singulárním bodem. Je-li* A *regulárním bodem svazku* Σ, *má* A *vzhledem ke dvěma různým kvadrikám svazku vždy také dvě různé polární nadroviny.*

DŮKAZ. Prvá část věty je důsledkem věty 109.2. Předpokládejme, že bod A regulární vzhledem k Σ má vzhledem ke dvěma různým kvadrikám svazku Σ touž polární nadrovinu ϱ; máme dokázat, že je to nemožné. Zvolme bod B mimo nadrovinu ϱ; snadno se zjistí, že v Σ existuje kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$, vzhledem k níž je bod B konjugován s bodem A. Podle věty 109.2 však je vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ také každý bod nadroviny ϱ konjugován s bodem A, takže A je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Ježto A je regulárním bodem pro Σ, je to nemožné.

Poznámka. Je-li A základní bod svazku Σ, plyne z věty 109.5, že je-li A regulárním bodem svazku Σ, má každá z kvadrik svazku v bodě A jinou tečnou nadrovinu, kdežto je-li A singulární pro Σ, je buďto A singulárním bodem každé kvadriky ze Σ, nebo všecky ty kvadriky ze Σ, pro které je A regulárním bodem, mají v A touž tečnou nadrovinu.

VĚTA 109.6. *Každý svazek kvadrik* Σ *v prostoru* $\mathbf{P}_m$ *má aspoň jeden reálný nebo imaginární singulární bod. Je-li* m *sudé, má* Σ *aspoň jeden reálný singulární bod. Existuje-li v* Σ *regulární formálně reálná kvadrika, platí dokonce* (ať už m je sudé či liché), *že každá singulární kvadrika svazku* Σ *je reálná.*

DŮKAZ. Pro singulární Σ je věta zřejmá; budiž tedy f_2, g_2 taková ar. base pro Σ, že kvadratická forma f_2 je regulární. Zvolme libovolně ar. basi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ pro $\mathbf{P}_m$; pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$ budiž

$$f_2(X) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} a_{rs}x_rx_s\,, \qquad g_2(X) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} b_{rs}x_rx_s\,,$$

kde $a_{rs} = a_{sr}$, $b_{rs} = b_{sr}$. Kvadrika $g_2 + \lambda f_2$ svazku Σ je singulární, právě když

$$(109.1) \qquad \begin{vmatrix} b_{00} + \lambda a_{00} & b_{01} + \lambda a_{01} & \ldots & b_{0m} + \lambda a_{0m} \\ b_{10} + \lambda a_{10} & b_{11} + \lambda a_{11} & \ldots & b_{1m} + \lambda a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m0} + \lambda a_{m0} & b_{m1} + \lambda a_{m1} & \ldots & b_{mm} + \lambda a_{mm} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ježto f_2 je regulární, je determinant (94.9) různý od nuly, takže (109.1) je rovnice stupně $m + 1$ pro λ , která pro sudé m má aspoň jeden reálný kořen, pro liché m pak aspoň jeden reálný nebo imaginární kořen. Podle věty 99.3 stačí ještě dokázat, že je-li forma f_2 definitní, je každý kořen rovnice (109.1) reálný. Nechť naopak f_2 je třeba definitní kladná a přesto (109.1) má imaginární kořen λ . Budiž $A = A_1 + iA_2$ singulární bod kvadratické formy $g_2 + \lambda f_2$, takže $A^* = A_1 - iA_2$ je singulární bod kvadratické formy $g_2 + \lambda^* f_2$, kde číslo λ^* je komplexně sdružené s číslem λ . Ježto singulární bod je konjugován s každým bodem, je jednak (f , g jsou bilineární formy příslušné k f_2 , g_2)

$$g(A , A^*) + \lambda f(A , A^*) = 0 ,$$

jednak

$$g(A , A^*) + \lambda^* f(A , A^*) = 0 .$$

Ježto λ je imaginární, je $\lambda \neq \lambda^*$, tedy $f(A , A^*) = 0$. Avšak

$$f(A , A^*) = f(A_1 + iA_2 , A_1 - iA_2) =$$
$$= f_2(A_1) + f_2(A_2) + if(A_2 , A_1) - if(A_1 , A_2)$$

a ježto f je symetrická, je

$$0 = f(A , A^*) = f_2(A_1) + f_2(A_2) .$$

Protože f_2 je kladná, je $f_2(A_1) = 0$, $f_2(A_2) = 0$ a protože f_2 je definitní, je $A_1 = \mathbf{o}$, $A_2 = \mathbf{o}$, tedy $A = A_1 + iA_2 = \mathbf{o}$, což je nemožné.

Poznámka. Ježto singulární kvadriky svazku Σ odpovídají kořenům λ rovnice (109.1), vidíme, že *regulární svazek kvadrik prostoru* $\mathbf{P}_m$ *obsahuje nejvýše* $m + 1$ (reálných nebo imaginárních) *singulárních kvadrik*. Ježto regulární formálně reálná kvadrika neobsahuje žádný reálný bod, je snadným důsledkem věty 109.1, že *regulární svazek kvadrik obsahuje nekonečně mnoho regulárních bodově reálných kvadrik.*

VĚTA 109.7. *Jestliže svazek kvadrik Σ prostoru $\mathbf{P}_m$ obsahuje aspoň jednu regulární formálně reálnou kvadriku, existuje ar. base prostoru $\mathbf{P}_m$, která je polární vzhledem ke každé kvadrice svazku Σ.*

DŮKAZ. Je-li $m = 1$, je Σ neparabolický svazek kvadrik na $\mathbf{P}_1$, tedy podle věty 109.3 involuce na $\mathbf{P}_1$, která obsahuje dvojici složenou z imaginárních komplexně sdružených bodů, takže je hyperbolická podle věty 93.2. Můžeme tedy při důkaze pro $\mathbf{P}_m$ předpokládat, že $m \geq 2$ a že věta platí pro $\mathbf{P}_{m-1}$. Podle věty 109.6 existuje reálný singulární bod $\{A_0\}$ pro Σ; ježto Σ obsahuje regulární kvadriku, je bod $\{A_0\}$ singulárním pro jedinou kvadriku svazku Σ a vzhledem ke všem ostatním kvadrikám svazku má $\{A_0\}$ podle věty 109.5 jednu a touž polární nadrovinu $\mathbf{P}_{m-1}$. Zřejmě $\{A_0\}$ je konjugován s každým bodem nadroviny $\mathbf{P}_{m-1}$ vzhledem je všem kvadrikám svazku Σ. Průnik Σ' nadroviny $\mathbf{P}_{m-1}$ se svazkem Σ je svazek kvadrik prostoru $\mathbf{P}_{m-1}$, který opět obsahuje regulární formálně reálnou kvadriku (průnik $\mathbf{P}_{m-1}$ s regulární formálně reálnou kvadrikou svazku Σ), takže existuje ar. base $A_1, \ldots, A_m$ nadroviny $\mathbf{P}_{m-1}$ polární vzhledem ke každé kvadrice svazku Σ'. Připojíme-li A_0, obdržíme ar. basi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ prostoru $\mathbf{P}_m$, která má žádanou vlastnost.

110. SVAZEK KUŽELOSEČEK. V tomto článku budeme vyšetřovat regulární svazek kvadrik Σ v projektivní rovině $\mathbf{P}_2$ Podle poznámky za větou 109.6 obsahuje Σ nekonečně mnoho kuželoseček, a proto nazveme Σ *svazkem kuželoseček*; vedle kuželoseček může Σ obsahovat také formálně reálné regulární $\mathbf{Q}_1$ a též singulární $\mathbf{Q}_1$, ale počet těchto posledních (reálných i imaginárních) nemůže převýšit číslo tři. Každé dvě různé kuželosečky $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_2''$ jsou obsaženy v právě jednom svazku kuželoseček, a proto v tomto článku dospějeme také k poznatkům o dvojici kuželoseček.

Zavedeme nyní pojem *násobnosti základního bodu* svazku Σ, která má v každém případě jednu ze čtyř hodnot 1, 2, 3, 4 (*jednoduché*, *dvojné*, *trojné*, *čtyřnásobné* základní body). Základní bod A nazveme *jednoduchým*, je-li regulárním bodem svazku; každá $\mathbf{Q}_1$ svazku má v bodě A určitou tečnu, která nemůže být táž pro dvě různé křivky svazku (viz poznámku po větě 109.5). Jestliže základní bod A svazku

Σ je singulárním bodem svazku, potom (podle téže poznámky a ježto svazek Σ je regulární) je A singulárním pro právě jednu $\mathbf{Q}_1$ svazku a všecky ostatní $\mathbf{Q}_1$ svazku mají v bodě A touž tečnu t. Dokážeme ihned, že jsou možné tři případy: (1) Na tečně t existuje právě jeden bod $B \neq A$ singulární pro Σ; v tomto případě A je *dvojný*. (2) Na tečně t neexistuje mimo bod A žádný jiný bod singulární pro Σ; v tomto případě A je *trojný*. (3) Každý bod tečny t je singulární pro Σ; v tomto případě A je *čtyřnásobný*. Abychom provedli slíbený důkaz, zvolme v Σ dvě různé kuželosečky $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_1''$ a uvažujme dvě projektivní zobrazení φ', φ'' přímky t na svazek $\pi(A\,;\,\mathbf{P}_2)$, při čemž pro bod X přímky t je $\varphi'X$ jeho polára vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$, $\varphi''X$ jeho polára vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$. Podle věty 109.5 je X singulární pro Σ, právě když $\varphi'X = \varphi''X$, t. j. právě když je samodružným bodem projektivity $\psi = \varphi' \circ (\varphi'')^{-1}$; při tom jedním samodružným bodem pro ψ je bod A a podle článku 87 nastane jedna ze tří výše uvedených možností.

Dvě různé kuželosečky $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_1''$ náležejí do právě jednoho svazku kuželoseček Σ a bod A je průsečíkem kuželoseček $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_1''$, právě když je základním bodem pro Σ. Pravíme, že A je jednoduchým, dvojným, trojným, čtyřnásobným průsečíkem kuželoseček $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_1''$ podle toho, zda A je jednoduchým, dvojným, trojným, čtyřnásobným základním bodem pro Σ. Podle předcházejícího *průsečík A kuželoseček $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_1''$ je jednoduchý, právě když tečny obou kuželoseček v bodě A jsou navzájem různé; mají-li $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_1''$ ve společném bodě A touž tečnu t, je A dvojný průsečík v případě, že na t existuje právě jeden bod $B \neq A$ s touž polárou vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$ jako vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$; A trojný průsečík v případě, že každý bod $B \neq A$ společné tečny t má vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$ jinou poláru než vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$; A je čtyřnásobný průsečík v případě, že každý bod společné tečny t má touž poláru vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$ jako vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$.*

Účelnost předcházejících definic je patrná z toho, že dokážeme: *Svazek Σ má aspoň jeden* (reálný nebo imaginární) *základní bod a součet násobností všech těchto základních bodů je vždy roven čtyřem.* Jinak řečeno: *Dvě různé kuželosečky mají aspoň jeden* (reálný nebo imaginární) *průsečík a součet násobností všech těchto průsečíků je vždy roven čtyřem.* Je patrné, že existuje-li imaginární základní bod (průsečík) A, potom také komplexně sdružený bod A^*, který je různý od A, je základním bodem (průsečíkem) s touž násobností. Podle výše vyslovené věty tedy imaginární základní bod (průsečík) je buďto jednoduchý nebo dvojný.

Při důkaze předpokládejme nejprve, že žádný singulární bod svazku Σ není základním bodem, takže každým singulárním bodem A svazku Σ prochází jen ta kvadrika svazku, pro kterou je A singulárním bodem. Budiž potom Q_1' zvolená *kuželosečka* svazku Σ. Podle věty 109.6 existuje aspoň jeden reálný bod A, který je singulárním pro Σ. Podle právě řečeného leží bod A mimo kuželosečku Q_1' a je singulárním bodem určité kvadriky svazku Σ, kterou označíme Q_1''. Není možné, aby Q_1'' byla dvojnásobná přímka p, neboť potom by každý bod přímky p byl singulárním bodem pro Σ a tudíž by existoval také singulární bod svazku Σ na kuželosečce Q_1', což odporuje učiněnému předpokladu. Tedy Q_1'' se skládá ze dvou různých (reálných nebo imaginárních) přímek p_1, p_2 protínajících se v bodě A (tedy mimo Q_1'), a žádná z těchto přímek není tečnou pro Q_1', neboť jinak by bod dotyku byl singulárním pro Σ a ležel by na Q_1', což je vyloučeno. Tedy každá z přímek p_1, p_2 protne Q_1' ve dvou různých (reálných nebo imaginárních) bodech a dostáváme celkem čtyři různé (reálné nebo imaginární) body A_1, A_2, A_3, A_4, z nichž každý je jednoduchým základním bodem pro Σ, neboť tečna ke Q_1'' ve kterémkoli z nich splyne s jednou z přímek p_1, p_2, není tedy tečnou ke Q_1''. Také je patrné, že mimo A_1, A_2, A_3, A_4 nemá Σ žádný další základní bod, protože Q_1' a Q_1'' nemají žádný další průsečík. Ježto body A_1, A_2, A_3, A_4 leží na kuželosečce Q_1', nemohou žádné tři z nich ležet v téže přímce. Ježto uvažovaný svazek kuželoseček má čtyři různé jednoduché základní body, nazveme jej *svazkem kuželoseček typu* (1,1,1,1).

Zbývá k diskusi ten případ, že uvažovaný svazek kuželoseček Σ má základní bod A, který je singulárním bodem pro Σ. Zvolme opět v Σ *kuželosečku* Q_1', která nutně prochází bodem A a budiž Q_1'' ta kvadrika svazku Σ, která má v A singulární bod.

Jestliže Q_1'' je dvojnásobná přímka p, jsou dvě možnosti. Buďto p protne Q_1' ve dvou různých (reálných nebo imaginárních) bodech A_1, A_2; budiž potom A_0 průsečík tečen ke Q_1' v bodech A_1, A_2. Každý od A_1 různý bod přímky A_0A_1 má vzhledem ke Q_1'' touž poláru p, která je vzhledem ke Q_1' polárou bodu A_0 a žádného jiného bodu na přímce A_0A_1. Podle věty 109.5 leží tedy na přímce A_0A_1 právě jeden bod $X \neq A_1$ singulární pro Σ; proto A_1, a zřejmě též A_2 je dvojným základním bodem pro Σ a je patrné, že Σ nemá jiné základní body; takový svazek Σ nazveme *svazkem kuželoseček typu* (2,2). Při tom jsme předpokládali, že p není tečnou kuželosečky Q_1'. Je-li p tečnou ke Q_1'' v bodě A, je každý bod na p singulárním pro Σ, takže A je čtyřnásobným základním bodem pro Σ a je patrné, že Σ nemá jiné základní body; takový svazek Σ nazveme *svazkem kuželoseček typu* (4).

V předcházejícím odstavci jsme předpokládali, že kvadrika Q_1'', která má v bodě A kuželosečky Q_1' singulární bod, je dvojnásobná přímka. Je tedy třeba vyšetřit ten případ, že Q_1'' se skládá ze dvou různých (reálných nebo imaginárních) přímek p_1, p_2 protínajících se v bodě A. Jestliže ani p_1, ani p_2 není tečnou ke Q_1' v bodě A, protne p_1 kuželosečku Q_1' ještě v bodě $A_1 \neq A$, p_2 pak v bodě $A_2 \neq A$ a body A, A_1, A_2 jsou navzájem různé a jsou základními body pro svazek Σ, který zřejmě nemá jiných základních bodů. Při tom A_1, A_2 jsou jednoduché základní body pro Σ, protože v nich má Q_1' jinou tečnu než Q_1''. Naproti tomu A je dvojným základním bodem pro Σ. Neboť je-li t tečna ke Q_1' v bodě A a je-li A_0 průsečík přímky t s přímkou A_1A_2, má bod A_0 touž poláru vzhledem ke Q_1' jako vzhledem ke Q_1'', totiž přímku A_0C, kde C je na přímce A_1A_2 harmonicky sdružen s bodem A_0 vzhledem k bodům A_1, A_2; naproti tomu ten bod $X \neq A$ přímky t, jehož polárou vzhledem ke Q_1' je přímka p_1, má jistě vzhledem ke Q_1'' polárou různou od p_1. Má tedy Σ celkem tři základní body A, A_1, A_2, z nichž první je dvojný a ostatní dva jednoduché; takový svazek Σ nazveme *svazkem kuželoseček typu* (2,1,1). Zbývá případ, že jedna z obou přímek p_1, p_2 je tečnou ke Q_1' v bodě A. Pro určitost to budiž přímka p_1, kdežto p_2 protne Q_1' ještě v bodě $A_1 \neq A$. Body A, A_1 jsou základní body svazku Σ, který zřejmě nemá jiných základních bodů. Ježto v A_1 má Q_1' jinou tečnu než Q_1'', je A_1 jednoduchým základním bodem pro Σ, kdežto A je trojným základním bodem, neboť každý bod $X \neq A$ tečny p_1 má vzhledem ke Q_1'' za poláru přímku p_1, která není polárou bodu X vzhledem ke Q_1'; takový svazek Σ nazveme *svazkem kuželoseček typu* (3,1).

Poznali jsme, že je celkem pět různých typů svazků kuželoseček, z nichž každý jsme označili symbolem složeným z násobností základních bodů; jsou to typy (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), (4).

Svazkem Σ typu (1,1,1,1) má čtyři reálné nebo imaginární základní body A_1, A_2, A_3, A_4, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Daným bodem X různým od základních bodů prochází podle věty 109.1 právě jedna kvadrika $\mathbf{Q}_1$ svazku. Jestliže bod X leží v téže přímce se dvěma základními body, pro určitost třeba na přímce A_1A_2, je patrné, že přímka A_1A_2 je částí kvadriky $\mathbf{Q}_1$, která — ježto obsahuje všecky čtyři základní body — nutně se skládá z obou přímek A_1A_2, A_3A_4. Z toho je patrné, že Σ obsahuje tři různé reálné nebo imaginární singulární kvadriky: $\mathbf{Q}_1'$ složenou z přímek A_1A_2, A_3A_4, jejichž průsečík C' je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_1'$; $\mathbf{Q}_1''$ složenou z přímek A_1A_3, A_2A_4, jejichž průsečík C'' je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_1''$; $\mathbf{Q}_1'''$ složenou z přímek A_1A_4, A_2A_3, jejichž průsečík C''' je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_1'''$. Svazek Σ tedy obsahuje tři různé singulární kvadriky $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_1''$, $\mathbf{Q}_1'''$ a v souhlase s poznámkou za větou 109.6 neobsahuje žádnou jinou singulární kvadriku. Tudíž Σ má právě tři (reálné nebo imaginární) singulární body C', C'', C''', které zřejmě neleží v jedné přímce. Body C', C'', C''' tvoří polární ar. basi pro každou kvadriku svazku Σ; to plyne z věty 109.2. Neboť na př. C' je vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$ konjugován s každým bodem roviny, zejména s bodem C'', který je vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$ konjugován s každým bodem roviny, zejména s bodem C', takže podle věty 109.2 jsou body C', C'' navzájem konjugovány vzhledem ke každé kvadrice svazku Σ. Zvolíme-li bod X tak, aby neležel v téže přímce s žádnými dvěma ze čtyř základních bodů A_1, A_2, A_3, A_4 svazku Σ, je patrné, že kvadrika $\mathbf{Q}_1(X)$ svazku Σ procházející bodem X je regulární bodově reálná kvadrika, t. j. $\mathbf{Q}_1(X)$ je kuželosečka, a je to jediná kuželosečka procházející body A_1, A_2, A_3, A_4, X, neboť z našich úvah plyne, že dvě různé kuželosečky nemohou mít více než čtyři průsečíky. Poznamenejme ještě, že základní body A_1, A_2, A_3, A_4 svazku Σ typu (1,1,1,1) nejsou podrobeny jiné podmínce než výše vyslovené, podle níž žádné tři ze čtyř bodů A_1, A_2, A_3, A_4 neleží v téže přímce. Za ar. basi příslušného svazku Σ můžeme zvolit na př. obě singulární $\mathbf{Q}_1$, z nichž prvá se skládá z dvojice přímek A_1A_2, A_3A_4 a druhá z dvojice přímek A_1A_3, A_2A_4. V právě provedené úvaze je m. j. obsažen důkaz následující věty.

VĚTA 110.1. *Pěti různými body, z nichž žádné tři neleží v téže přímce,* *prochází právě jedna kuželosečka.* Přenecháme čtenáři, aby sám provedl jednak přímý početní důkaz věty 110.1, jednak důkaz založený na případě $m = 1$ věty 79.6 a na větách 103.1 a 103.2. Mimo to je účelné poznamenat, že z našich úvah plyne podle věty 109.4:

VĚTA 110.2. *Buďtež A_1, A_2, A_3, A_4 čtyři body projektivní roviny $\mathbf{P}_2$, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Budiž p přímka v rovině $\mathbf{P}_2$, která neprochází žádným ze čtyř bodů A_1, A_2, A_3, A_4. Potom existuje involuce φ na přímce p tak, že do φ náleží dvojice průsečíků s přímkou p předně přímek A_1A_2, A_3A_4, za druhé přímek A_1A_3, A_2A_4, za třetí přímek A_1A_4, A_2A_3.*

Nechť čtenář sám uváží, že věta 86.2 je zvláštním případem věty 110.2.

Pokud se týče reality, jsou u svazku Σ typu (1,1,1,1) tři možnosti. Předně mohou všecky čtyři základní body A_1, A_2, A_3, A_4 být reálné; potom jsou reálné také singulární body C', C'', C''' a singulární $\mathbf{Q}_1$ svazku jsou bodově reálné. Za druhé mohou být třeba A_1, A_2 reálné, A_3, A_4 pak imaginární a komplexně sdružené; singulární bod C' je reálný a kvadrika $\mathbf{Q}_1'$ je bodově reálná, ale singulární body C'', C''' a kvadriky $\mathbf{Q}_1''$, $\mathbf{Q}_1'''$ jsou imaginární. Za třetí mohou být všecky čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4 imaginární a třeba A_1, A_2 komplexně sdružené, a stejně i A_3, A_4; potom jsou všecky tři singulární body C', C'', C''' reálné, kvadrika $\mathbf{Q}_1'$ je bodově reálná, kvadriky $\mathbf{Q}_1''$, $\mathbf{Q}_1'''$ jsou formálně reálné. Formálně reálné kvadriky se vyskytnou pouze v tom případě, že všechny čtyři základní body jsou imaginární.

U ostatních typů svazků kuželoseček shrneme pouze výsledky, které čtenář snadno odůvodní. Svazek Σ typu (2,1,1) je určen, zvolíme-li libovolně tři body A, A_1, A_2 tak, aby neležely v jedné přímce, a přímku t procházející bodem A, ale neprocházející ani bodem A_1 ani bodem A_2. Bod A a přímka t jsou reálné; body A_1, A_2 jsou buďto reálné nebo imaginární a komplexně sdružené. Σ obsahuje dvě singulární $\mathbf{Q}_1$, z nichž jedna se skládá z přímek A_1A_2 a t, je tedy bodově reálná, druhá pak z přímek AA_1, AA_2, je tedy při reálných A_1, A_2 bodově reálná, při imaginárních A_1, A_2 formálně reálná. Σ neobsahuje žádnou formálně reálnou regulární $\mathbf{Q}_1$. Neexistuje ar. base polární zároveň vzhledem ke dvěma (a tedy podle věty 109.2 ke všem) kvadrikám svazku. Každá kuželosečka svazku Σ prochází všemi třemi body A, A_1, A_2 a má v bodě A tečnu t; obráceně každá taková kuželosečka náleží do Σ. Daným bodem, který neleží ani na přímce t, ani na žádné z přímek A_1A_2, AA_1, AA_2, prochází právě jedna kuželosečka svazku.

Svazek Σ typu (2,2) je určen, zvolíme-li libovolně tři body A, A_1, A_2 tak, aby neležely v jedné přímce; bod A je reálný, body A_1, A_2 jsou buďto reálné nebo imaginární a komplexně sdružené. Σ obsahuje dvě regulární $\mathbf{Q}_1$, z nichž jednou je dvojnásobná přímka A_1A_2 a druhá se skládá z přímek AA_1, AA_2, je tedy bodově reálná, jsou-li body A_1, A_2 reálné, formálně reálná, jsou-li A_1, A_2 imaginární. Jsou-li A_1, A_2 reálné, neobsahuje Σ žádnou formálně reálnou $\mathbf{Q}_1$; jsou-li A_1, A_2 imaginární, obsahuje Σ nekonečně mnoho formálně reálných $\mathbf{Q}_1$ (které až na jedinou z nich jsou regulární). Existuje nekonečně mnoho reálných ar. basí polárních zároveň vzhledem ke všem kvadrikám svazku Σ; jsou to ar. base tvaru A, B_1, B_2, kde $B_1 \neq B_2$ a dvojice B_1, B_2 náleží do involuce φ s dvojnými body B_1, B_2. Každá kuželosečka svazku Σ prochází body A_1, A_2 a má v nich tečny AA_1, AA_2; obráceně každá taková kuželosečka náleží do Σ; také lze říci, že Σ obsahuje ty kuželosečky $\mathbf{Q}_1$, které mají tu vlastnost, že je-li B_1, B_2 libovolná dvojice involuce φ, je přímka AB_2 polárou bodu B_1 vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$. Daným bodem, který neleží na žádné z přímek A_1A_2, AA_1, AA_2, prochází právě jedna kuželosečka svazku.

Svazek Σ typu (3,1) je určen, zvolíme-li libovolně kuželosečku $\mathbf{Q}'_1$ a na ní dva různé reálné body A, A_1. Σ obsahuje právě jednu singulární kvadriku, která se skládá z přímky AA_1 a z tečny ke $\mathbf{Q}'_1$ v bodě A. Neexistuje ar. base polární zároveň ke dvěma různým kvadrikám svazku. Σ neobsahuje žádnou formálně reálnou kvadriku. Kuželosečka $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}'_1$ náleží do Σ, právě když prochází oběma body A, A_1, má v bodě A touž tečnu jako $\mathbf{Q}'_1$, v bodě A_1 pak jinou tečnu než $\mathbf{Q}'_1$ a posléze nemá mimo A, A_1 další společný bod s $\mathbf{Q}'_1$. Daným bodem, který neleží ani na přímce AA_1, ani na tečně ke $\mathbf{Q}'_1$ v bodě A, prochází právě jedna kuželosečka svazku.

Svazek Σ typu (4) je určen, zvolíme-li libovolně reálný bod A, jím procházející reálnou přímku p a reálné projektivní zobrazení φ přímky p na svazek přímek $\pi(A; \mathbf{P}_2)$, pro něž $\varphi A = p$. Σ obsahuje právě jednu singulární kvadriku; je to dvojnásobná přímka p.

Neexistuje ar. base polární zároveň ke dvěma různým kvadrikám svazku. Σ neobsahuje žádnou formálně reálnou kvadriku. Kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ náleží do Σ, právě když polárou každého bodu X přímky p vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$ je přímka φX. Daným bodem, který neleží na přímce p, prochází právě jedna kuželosečka svazku.

111. METRICKÁ KLASIFIKACE REGULÁRNÍCH KVADRIK. Stejně jako v článku 107 budeme i v tomto článku vyšetřovat pouze *regulární* $\mathbf{Q}_{m-1}$ v prostoru $\mathbf{E}_m$ $(m \geqq 2)$. V článku 107 jsme poznali, že vhodnou volbou lineární soustavy souřadnic lze docílit toho, aby rovnice kvadriky měla jednoduchý tvar (107.4), je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ regulární středová kvadrika, nebo (107.7), je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ paraboloid.

Označme $\mathbf{Q}_{m-2}$ průnik uvažované kvadriky s úběžnou nadrovinou N; ježto absolutní kvadrika $\mathbf{A}_{m-2}$ je regulární formálně reálná kvadrika v N, existuje podle věty 109.7 ar. base

$$(111.1) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$$

prostoru N polární i vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$ i vzhledem k $\mathbf{A}_{m-2}$. Můžeme ještě předpokládat, že $|\mathbf{u}_r| = 1$ pro $1 \leqq r \leqq m$; ar. base (111.1) je tedy ortonormální a polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ středová a je-li S její střed, je

$$(111.2) \qquad \langle S; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$$

kartézská soustava souřadnic, v níž $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici

$$(111.3) \qquad \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 1,$$

kde $\varepsilon_r \neq 0$ pro $1 \leqq r \leqq m$. Můžeme předpokládat, že

$$(111.4) \qquad \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_m;$$

uvidíme, že potom čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ jsou jednoznačně určena. Prozatím však předpokládejme, že máme dánu pevnou kartézskou soustavu souřadnic (111.2) tak, že rovnice kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ má tvar (111.3). Předpokládejme, že platí (111.4) a rozdělme indexy na *skupiny* tak, že indexy $r, s (1 \leqq r, s \leqq m)$ jsou v téže skupině, právě když $\varepsilon_r = \varepsilon_s$. Nazveme *osou regulární středové kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$ průměr $\{S; \mathbf{v}\}$ takový, že diametrální nadrovina, která je polární ke směru $\{\mathbf{v}\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, je kolmá na směr $\{\mathbf{v}\}$. Je-li však

$$(111.5) \qquad \mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + a_m \mathbf{u}_m,$$

potom polární nadrovina směru $\{\mathbf{v}\}$ má rovnici

$$\varepsilon_1 a_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m a_m x_m = 0 ;$$

Průměr $\{S ; \mathbf{v}\}$ je osou, právě když tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m = 0 .$$

Tudíž směr každé osy přísluší k určité skupině indexů v tom smyslu, že koeficient a_r ve (111.5) může být různý od nuly pouze, když index r náleží do této skupiny; obráceně, je-li tato podmínka splněna, je přímka $\{S ; \mathbf{v}\}$ osou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Každé skupině indexů můžeme přiřadit *totální osový prostor*, který prochází středem kvadriky a jehož zaměření má za ar. basi právě ty z vektorů (111.1), jejichž indexy náležejí do uvažované skupiny; je to lineární podprostor prostoru $\mathbf{E}_m$, jehož dimense je rovna počtu indexů v příslušné skupině; číslo ε_r (stejné pro všecky indexy uvažované skupiny) nazveme *koeficientem totálního osového prostoru* vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je patrné, že v kartézské soustavě souřadnic (111.2) má $\mathbf{Q}_{m-1}$ rovnici tvaru (111.3), právě když každá přímka $\{S ; \mathbf{u}_r\}$ $(1 \leq r \leq m)$ je osou. Jeden krajní případ je ten, že všecky koeficienty ε_r $(1 \leq r \leq m)$ jsou navzájem různé; osy jsou v tomto případě totožné s totálními osovými prostory a jsou tudíž jednoznačně určeny, a to i co do pořadí, žádáme-li platnost nerovností (111.4); pro kartézskou soustavu souřadnic (111.2) je potom konečný počet, a to přesně 2^m možností, neboť neurčitost je pouze v tom, že kterýkoli vektor $\mathbf{u}_r$ $(1 \leq r \leq m)$ lze nahradit vektorem $-\mathbf{u}_r$. Druhý krajní případ je ten, že všecky koeficienty ε_r jsou si rovny; jsou-li rovny *kladnému* číslu c^2, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ koule se středem S a s poloměrem $|c|$; jsou-li všecky koeficienty ε_r rovny témuž *zápornému* číslu $-c^2$, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ formálně reálná kvadrika středově sdružená s koulí se středem S a s poloměrem $|c|$. V těchto případech má kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ rovnici tvaru (111.3) při *každé* kartézské soustavě souřadnic (111.2), jejímž počátkem je bod S. Pro každou regulární středovou kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$, jestliže některé z koeficientů ε_r jsou si rovny, je nekonečně mnoho kartézských soustav souřadnic (111.2), vzhledem k nimž rovnice $\mathbf{Q}_{m-1}$ má tvar (111.3). Vektory (111.1) se dělí na skupiny příslušné jednotlivým totálním osovým prostorům; jestliže dimense d totálního osového prostoru $\mathbf{E}_d$ je rovna jedné, přísluší mu ve (111.1) jediný vektor $\boldsymbol{u}_r$, který je určen dvojznačně: lze jej totiž nahradit vektorem $-\boldsymbol{u}_r$; jestliže však $d > 1$, potom máme ve (111.1) d vektorů příslušných k $\boldsymbol{E}_d$, které lze volit nekonečně mnoha způsoby: jsou podrobeny pouze té podmínce, že tvoří ortonormální basi pro $\boldsymbol{E}_d$. Ohlásili jsme již, že koeficient ε_r příslušný totálnímu osovému prostoru $\boldsymbol{E}_d$ je tímto prostorem jednoznačně určen. Je výhodné uvažovat v této souvislosti zároveň s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ také s ní středově sdruženou kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$, jejíž rovnice je

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 + 1 = 0\,, \tag{111.6}$$

t. j. při přechodu od $\mathbf{Q}_{m-1}$ ke $\mathbf{Q}'_{m-1}$ každý koeficient ε_r přejde v $-\varepsilon_r$. Je zvykem zavést kladné číslo a_r rovnicí

$$\varepsilon_r = \pm \frac{1}{a_r^2}\,; \tag{111.7}$$

čísla a_r nazýváme *poloosou* příslušnou ose $\{S\,;\,\boldsymbol{u}_r\}$. Snadno se zjistí, že pro $\varepsilon_r > 0$ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ osu $\{S\,;\,\boldsymbol{u}_r\}$ ve dvou různých reálných bodech

$$A'_r = S + a_r\boldsymbol{u}_r\,; \qquad A''_r = S - a_r\boldsymbol{u}_r\,; \tag{111.8}$$

S je střed dvojice A'_r, A''_r a každý z bodů A'_r, A''_r má od bodu S vzdálenost rovnu a_r. Při $\varepsilon_r < 0$ je osa $\{S\,;\,\boldsymbol{u}_r\}$ nesečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, ale protne středově sdruženou kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$ v bodech (111.8). Je nyní patrné, že číslo ε_r je jednoznačně určeno prostorem $\boldsymbol{E}_d$.

Pro $m = 2$, nepřihlížíme-li k případu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0$ kružnice a středově sdruženému případu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 < 0$, máme jednak *elipsu* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1\,, \qquad 0 < a_1 < a_2$$

a s ní středově sdruženou formálně reálnou regulární $\mathbf{Q}_1$ s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0\,,$$

jednak dvě navzájem středově sdružené *hyperboly*, z nichž jedna má rovnici

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1\,, \qquad a_1 > 0\,,\ a_2 > 0\,,$$

druhá pak rovnici

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_1^2}{a_1^2} = 1\,, \qquad a_1 > 0\,,\; a_2 > 0\,.$$

Pro $m = 3$, jestliže opět nepřihlížíme k případu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 > 0$ koule a středově sdruženému případu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 < 0$, je rozeznávat *rotační* a *trojosé* regulární středové $\mathbf{Q}_2$, při čemž u trojosých $\mathbf{Q}_2$ jsou čísla ε_1, ε_2, ε_3 navzájem různá, kdežto u rotačních $\mathbf{Q}_2$ dvě z čísel ε_1, ε_2, ε_3 jsou si rovna, ale třetí se od nich liší. U trojosé $\mathbf{Q}_2$ jsou osy jednoznačně určeny; máme jednak *trojosý elipsoid* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1\,, \qquad 0 < a_1 < a_2 < a_3$$

a s ním středově sdruženou formálně reálnou regulární $\mathbf{Q}_2$ s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0\,,$$

jednak dva navzájem středově sdružené *trojosé hyperboloidy*, z nichž jeden je dvojdílný a druhý jednodílný. Při tom rovnice jednodílného hyperboloidu je

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

a rovnice příslušného dvojdílného hyperboloidu je

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0\,,$$

kde čísla a_1, a_2, a_3 jsou kladná a $a_1 \neq a_2$.

U rotační $\mathbf{Q}_2$ je jednoznačně určena pouze ta osa, jejíž koeficient je různý od (sobě rovných) koeficientů druhých dvou os; tato osa se jmenuje *rotační osa* uvažované $\mathbf{Q}_2$; tvoří jeden totální osový prostor, kdežto druhým totálním osovým prostorem je rovina vedená středem S kvadriky kolmo na rotační osu. Máme tu předně *rotační elipsoid* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1\,, \qquad a > 0\,,\; b > 0\,,\; a \neq b\,,$$

který se z důvodů, jež si čtenář sám snadno uvědomí, nazývá *protáhlým*, je-li $a < b$, *zploštělým*, je-li $a > b$; s uvažovaným elipsoidem je středově sdružena formálně reálná regulární kvadrika s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} + 1 = 0 .$$

Za druhé máme *rotační jednodílný hyperboloid* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} = 1 , \qquad a > 0 , \ b > 0$$

a s ním středově sdružený *rotační dvojdílný hyperboloid* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} + 1 = 0 , \qquad a > 0 , \ b > 0 .$$

Názvy rotační elipsoid, rotační hyperboloid, rotační osa jsou odůvodněny tím, že jak se snadno dokáže, středová rotační $\mathbf{Q}_2$ je svým vlastním obrazem při každé rotaci prostoru $\mathbf{E}_3$, jejíž osou je rotační osa uvažované kvadriky.

Přistupme k paraboloidům! Úběžná nadrovina N opět protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$, která tentokrát má (jediný) singulární bod, který je osovým směrem paraboloidu $\mathbf{Q}_{m-1}$. Podle věty 109.7 opět je možno najít ortonormální ar. basi (111.1) prostoru N polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$, při čemž podle věty 100.1 můžeme předpokládat, že $\{\boldsymbol{u}_1\}$ je osový směr paraboloidu. Podle článku 107 existuje na paraboloidu právě jeden bod V, zvaný *vrcholem paraboloidu*, jehož tečná nadrovina je kolmá na osový směr. Podle úvahy provedené na konci článku 100.7 má paraboloid $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kartézské soustavě souřadnic

(111.9) $$\langle V ; \boldsymbol{u}_1 , \ldots , \boldsymbol{u}_m \rangle$$

rovnici tvaru

(111.10) $$\varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 2x_1 ,$$

kde čísla $\varepsilon_2 , \ldots , \varepsilon_m$ jsou různá od nuly. Můžeme předpokládat, že

(111.11) $$\varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_m .$$

Přímka $\{V ; \boldsymbol{u}_1\}$ vedená vrcholem paraboloidu v osovém směru se jmenuje *osa paraboloidu*. Nazveme *hlavní tečnou paraboloidu* takovou tečnu $\{V ; \boldsymbol{v}\}$ paraboloidu v jeho vrcholu V, jejíž směr $\{\boldsymbol{v}\}$ má vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ polární nadrovinu kolmou na $\{\boldsymbol{v}\}$. Ježto $\{V\,;\boldsymbol{v}\}$ je tečna ve V, je

$$(111.12) \qquad \boldsymbol{v} = a_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_m\boldsymbol{u}_m$$

a polární nadrovina směru $\{\boldsymbol{v}\}$ podle (111.10) má rovnici

$$\varepsilon_2 a_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_m a_m x_m = 0\,.$$

Podmínka pro hlavní směr je, aby tato rovnice byla ekvivalentní s rovnicí

$$a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m = 0\,.$$

Rozdělíme-li tedy indexy r $(2 \leqq r \leqq m)$ na skupiny tak, aby dva indexy r, s přišly do téže skupiny, právě když $\varepsilon_r = \varepsilon_s$, potom je $\{V\,;\boldsymbol{v}\}$ hlavní tečnou, právě když všecky ty indexy r $(2 \leqq r \leqq m)$, pro něž ve (111.12) je $a_r \neq 0$, náležejí do téže skupiny. Každé skupině indexů můžeme přiřadit *totální hlavní tečnový prostor*, který prochází vrcholem V paraboloidu a jehož zaměření má za ar. basi právě ty vektory $\boldsymbol{u}_r$ $(2 \leqq r \leqq m)$, jejichž indexy patří do uvažované skupiny; je to lineární podprostor $\boldsymbol{E}_d$ tečné nadroviny paraboloidu ve vrcholu, jehož dimense d je rovna počtu indexů v příslušné skupině. Je patrné, že v kartézské soustavě souřadnic (111.9) má paraboloid rovnici tvaru (111.10), právě když přímka $\{V\,;\boldsymbol{u}_1\}$ je jeho osou a každá přímka $\{V\,;\boldsymbol{u}_r\}$ $(2 \leqq r \leqq m)$ hlavní tečnou (z čehož ovšem už plyne, že počátek V je vrcholem paraboloidu).

Pro $m = 2$ máme *parabolu*, která má ve svém vrcholu jedinou tečnu, jež ovšem je hlavní tečnou a obyčejně se nazývá *vrcholovou tečnou* paraboly. V kartézské soustavě souřadnic $\{V\,;\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, ve které $\{V\,;\boldsymbol{u}_1\}$ je osa paraboly a $\{V\,;\boldsymbol{u}_2\}$ vrcholová tečna, má parabola rovnici $\varepsilon_2 x_2^2 = 2x_1$. Taková kartézská soutava je určena čtyřznačně, ježto místo $\boldsymbol{u}_1$ lze dát $-\boldsymbol{u}_1$, místo $\boldsymbol{u}_2$ pak $-\boldsymbol{u}_2$. Při přechodu od $\boldsymbol{u}_2$ k $-\boldsymbol{u}_2$ koeficient ε_2 se nezmění, ale při přechodu od $\boldsymbol{u}_1$ k $-\boldsymbol{u}_1$ přejde ε_2 v $-\varepsilon_2$. Jednoznačně je určeno číslo $|\varepsilon_2|$, místo něhož se obyčejně zavádí číslo

$$\frac{1}{|\varepsilon_2|} = p\,,$$

kterému se říká *parametr paraboly*, a jehož geometrický význam si osvětlíme v článku 113. Číslo ε_2 samo je úplně určeno teprve, když rozhodneme mezi vektory $\mathbf{u}_1$ a $-\mathbf{u}_1$, t. j. když zvolíme určitou orientaci osy paraboly, kterou nazveme *kladnou*, jestliže pro ty body $V + x\mathbf{u}_1$, které leží uvnitř paraboly, je $x > 0$, *zápornou*, je-li pro ně $x < 0$. Snadno se dokáže, že $\varepsilon_2 > 0$ při kladné a $\varepsilon_2 < 0$ při záporné orientaci osy paraboly.

Také pro $m \geqq 3$ jsou čísla ε_r $(2 \leqq r \leqq m)$ jednoznačně určena teprve, když se rozhodneme pro určitou orientaci osy paraboloidu $\{V; \mathbf{u}_1\}$; při změně této orientace se změní znamení u všech ε_r zároveň. Rovina $\{V; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_r\}$ protne paraboloid v parabole, jejíž osa splyne s osou paraboloidu a jejíž parametr je $1 : |\varepsilon_r|$; je $\varepsilon_r > 0$ nebo $\varepsilon_r < 0$ podle toho, zda zvolená orientace osy je pro uvažovanou osu kladná či záporná.

Pro $m = 3$ máme jednak *dvojosé paraboloidy*, u nichž $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, jednak *rotační paraboloidy*, u nichž $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Rotační paraboloid přejde sám v sebe při kladné rotaci prostoru $\mathbf{E}_3$, jejíž osou je osa rotačního paraboloidu. Rotační paraboloidy jsou zvláštním případem eliptických paraboloidů. Dvojosý paraboloid má jen dvě hlavní tečny; u rotačního paraboloidu naproti tomu je každá tečna ve vrcholu hlavní tečnou.

Libovolný paraboloid $\mathbf{Q}_{m-1}$ spolu s dvojnásobnou úběžnou nadrovinou N určuje svazek kvadrik, ve kterém dvojnásobná N je jedinou singulární kvadrikou; každá jiná kvadrika svazku je paraboloidem, který vznikne z původního paraboloidu translací ve směru osy; má-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ rovnici (111.10), mají ostatní paraboloidy svazku rovnici

$$\varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 2(x_1 - \lambda);$$

vrcholem je bod $V + \lambda\mathbf{u}_1$.

Libovolná regulární středová kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ spolu s dvojnásobnou úběžnou nadrovinou N určuje svazek kvadrik, který nazveme *homothetickým*. Takový svazek obsahuje právě dvě singulární kvadriky, a to vedle dvojnásobné N ještě kvadriku, která má za jediný singulární bod střed S a je společným asymptotickým kuželem všech regulárních kvadrik svazku. Má-li výchozí $\mathbf{Q}_{m-1}$ rovnici (111.3), mají regulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ svazku rovnice

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = \lambda,$$

kde $\lambda \neq 0$. Zároveň se středovou regulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje náš svazek každou kvadriku, která z ní vznikne homothetickou transformací se středem homothetie S a s libovolným koeficientem homothetie. Dále zároveň s $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje náš svazek také s ní středově sdruženou kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$; každá regulární kvadrika svazku vznikne z jedné z obou kvadrik $\mathbf{Q}_{m-1}$, $\mathbf{Q}'_{m-1}$ homothetickou transformací se středem homothetie S.

112. KONFOKÁLNÍ STŘEDOVÉ KVADRIKY. V článku 109 jsme zavedli pojem svazku kvadrik v prostoru $\mathbf{P}_m$. Tento pojem má smysl pro každý projektivní prostor, tedy též pro prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duální k prostoru $\mathbf{P}_m$. Kvadriky prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ jsme v článku 98 nazvali duálními kvadrikami prostoru $\mathbf{P}_m$. V tomto článku si probereme jeden důležitý zvláštní případ svazku duálních kvadrik.

Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ $(m \geqq 2)$; označme N jeho úběžnou nadrovinu, takže N je projektivní prostor dimense $m - 1$. V článku 108 jsme definovali absolutní kvadriku $\mathbf{A}_{m-2}$ prostoru $\mathbf{E}_m$; je to formálně reálná regulární kvadrika prostoru N. Podle článku 98 (viz str. 115) existuje singulární duální kvadrika prostoru $\mathbf{E}_m$, kterou označíme $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ a nazveme *absolutní duální kvadrikou* prostoru $\mathbf{E}_m$, která se skládá ze všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{E}_m$, které procházejí některým tečným $\mathbf{P}_{m-2}$ kvadriky $\mathbf{A}_{m-2}$; N je duálním vrcholem pro $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$. Zároveň s $\mathbf{A}_{m-2}$ je také $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ formálně reálná (viz str. 132).

Budiž

(112.1) $$\langle P\,;\, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$$

kartézská soustava souřadnic v prostoru $\mathbf{E}_m$; ar. body P, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ tvoří ar. basi projektivního rozšíření $\overline{\mathbf{E}}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$, k níž existuje duální ar. base

(112.2) $$\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$$

prostoru $\tilde{\mathbf{E}}_m$ duálního k $\overline{\mathbf{E}}_m$; zřejmě $\tilde{A}_0$ je ar. zástupce nadroviny N. Je-li

(112.3) $$X = x_0 P + x_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + x_m \mathbf{u}_m\,,$$ $$\tilde{X} = \xi_0 \tilde{A}_0 + \xi_1 \tilde{A}_1 + \ldots + \xi_m \tilde{A}_m\,,$$

je $\mathbf{A}_{m-2}$ dána rovnicemi

(112.4) $$x_1^2 + \ldots + x_m^2 = 0\,, \qquad x_0 = 0$$

a snadno spočteme, že $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ má rovnici

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 = 0\,. \tag{112.5}$$

Budiž nyní $\mathbf{Q}_{m-1}$ reálná regulární kvadrika prostoru $\mathbf{E}_m$ a budiž $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ její dualisace, tedy regulární duální kvadrika, která spolu s duální kvadrikou $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ určuje regulární svazek duálních kvadrik, který označíme Σ. Podle poznámky před větou 109.7 obsahuje Σ mimo $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ ještě nejvýš m singulárních duálních kvadrik. Nazveme *konfokální soustavou kvadrik* určenou danou regulární kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ množinu všech těch regulárních kvadrik prostoru $\mathbf{E}_m$, jejichž dualisace (jež jsou regulární duální kvadriky) náležejí do Σ.

V tomto článku probereme případ, že daná kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je středová. Potom je možné volit kartézskou soustavu souřadnic (112.1) tak, aby $\mathbf{Q}_{m-1}$ měla rovnici

$$\frac{x_1^2}{c_1} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m} = 1\,, \tag{112.6}$$

kde čísla c_r $(1 \leqq r \leqq m)$ jsou různá od nuly.

Proti (111.3) jsme tedy poněkud změnili označení; je $c_r = 1 : \varepsilon_r$. Ze (112.3) a (112.6) plyne, že je-li $x_0 = -\xi_0$, $x_r = c_r\xi_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$, je $\tilde{X}$ polární nadrovina bodu X vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Z toho pak snadno následuje, že dualisace $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici

$$c_1\xi_1^2 + \ldots + c_m\xi_m^2 = \xi_0^2\,. \tag{112.7}$$

Tudíž Σ obsahuje vedle $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ duální kvadriky s rovnicí

$$(c_1 - \lambda)\xi_1^2 + \ldots + (c_m - \lambda)\xi_m^2 = \xi_0^2\,. \tag{112.8}$$

Duální kvadrika s rovnicí (112.8) je regulární, jestliže číslo λ je různé od všech čísel $c_1, \ldots, c_m$. Tedy konfokální soustava určená středovou kvadrikou s rovnicí (112.6) se skládá z kvadrik daných rovnicí

$$\frac{x_1^2}{c_1 - \lambda} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m - \lambda} = 1\,, \tag{112.9}$$

kde

$$\lambda \neq c_r \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,. \tag{112.10}$$

Počátek souřadnic je tedy společným středem všech kvadrik konfokální soustavy, které se také shodují ve všech osách.

Pro $m = 2$ v případě $c_1 = c_2$ všecky kuželosečky konfokální soustavy jsou kružnice se společným středem P. Je-li $c_1 \neq c_2$, můžeme předpokládat, že

$$c_1 > c_2 . \tag{112.11}$$

Rovnice

$$\frac{x_1^2}{c_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{c_2 - \lambda} = 1 \tag{112.12}$$

dává potom:

elipsu pro $\lambda < c_2$,
hyperbolu pro $c_2 < \lambda < c_1$,
formálně reálnou $\mathbf{Q}_1$ pro $\lambda > c_1$.

Pro $m = 3$ v případě $c_1 = c_2 = c_3$ všecky bodově reálné kvadriky konfokální soustavy jsou koule se společným středem P. Je-li na př. $c_1 \neq c_2 = c_3$, jsou konfokální kvadriky rotační se společnou rotační osou $\{P ; \boldsymbol{u}_1\}$; jejich rovnice je

$$\frac{x_1^2}{c_1 - \lambda} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{c_2 - \lambda} = 1 .$$

Je patrné, že studium takové soustavy konfokálních $\mathbf{Q}_2$ se redukuje na studium soustavy (112.11) konfokálních $\mathbf{Q}_1$, jež jsou řezy daných $\mathbf{Q}_1$ rovinou $\{P ; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$. Skutečně nový proti $\boldsymbol{E}_2$ je tedy v $\boldsymbol{E}_3$ pouze ten případ, že všecka tři čísla c_1, c_2, c_3 jsou navzájem různá. Je-li tomu tak, můžeme předpokládat, že

$$c_1 > c_2 > c_3 , \tag{112.13}$$

načež rovnice

$$\frac{x_1^2}{c_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{c_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{c_3 - \lambda} = 1 \tag{112.14}$$

dává

elipsoid pro $\lambda < c_3$,
jednodílný hyperboloid pro $c_3 < \lambda < c_2$,
dvojdílný hyperboloid pro $c_2 < \lambda < c_1$,
formálně reálnou $\mathbf{Q}_2$ pro $\lambda > c_1$.

Stejně jako pro $m = 2$ a pro $m = 3$ je i pro vyšší m nejdůležitější ten případ, že *všecka čísla* c_r $(1 \leqq r \leqq m)$ *jsou navzájem různá*, na který se v následujícím omezíme a volíme označení tak, aby bylo

$$c_1 > \ldots > c_m . \tag{112.15}$$

Potom je lehko patrné ze (112.8), že Σ obsahuje mimo $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ ještě právě m singulárních duálních kvadrik, jejichž rovnice se dostanou, jestliže ve (112.8) je $\lambda = c_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$, takže každá z nich přísluší jedné hodnotě indexu r. Singulární duální kvadrika příslušná indexu r má za duální vrchol (viz str. 114) nadrovinu σ_r vedenou bodem P kolmo na směr $\{\mathbf{u}_r\}$; uvažovaná duální kvadrika se skládá ze všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{E}_m$, které obsahují některý tečný $\mathbf{E}_{m-2}$ regulární $(m - 2)$-rozměrné kvadriky nadroviny σ_r dané rovnicemi

$$\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{m} \frac{x_s^2}{c_s - c_r} = 1\,; \quad x_r = 0\,. \tag{112.16}$$

Kvadriky (112.16) se jmenují *fokální* $\mathbf{Q}_{m-2}$ uvažované konfokální soustavy a také fokální $\mathbf{Q}_{m-2}$ kterékoli $\mathbf{Q}_{m-1}$ náležející do té konfokální soustavy.

Pro $m = 2$ máme dvě fokální $\mathbf{Q}_0$, jednu danou rovnicemi $x_1^2 = c_1 - c_2$, $x_2 = 0$, druhou danou rovnicemi $x_2^2 = c_2 - c_1$, $x_1 = 0$. Za předpokladu (112.11) prvá fokální $\mathbf{Q}_0$ se skládá ze dvou reálných bodů

$$P \pm \sqrt{c_1 - c_2}\,.\,\mathbf{u}_1 \tag{112.17}$$

a druhá ze dvou imaginárních komplexně sdružených bodů

$$P \pm \mathrm{i}\sqrt{c_1 - c_2}\,.\,\mathbf{u}_2\,. \tag{112.18}$$

Body (112.17) a (112.18) se jmenují *ohniska* kterékoli $\mathbf{Q}_1$ uvažované konfokální soustavy (112.11). Tedy každá středová regulární $\mathbf{Q}_1$ má celkem čtyři komplexní ohniska, po dvou na každé ze svých obou os; na jedné z os jsou ohniska reálná (tato osa se nazývá *hlavní osa*), na druhé imaginární (tato osa se nazývá *vedlejší osa*). Snadno se zjistí, že u elipsy poloosa příslušná hlavní ose je větší než poloosa příslušná vedlejší ose, u hyperboly pak hlavní osa je sečnou, vedlejší nesečnou. Reálná ohniska středové kuželosečky (která není kružnicí; pro kružnici jsme ohniska nedefinovali) leží vždy uvnitř kuželosečky. Čtenář sám provede početní důkaz známé věty, že jsou-li F_1, F_2 reálná ohniska a je-li a poloosa příslušná hlavní ose, je elipsa množinou těch bodů X v rovině $\mathbf{E}_2$, pro něž $\overline{F_1X} + \overline{F_2X} = 2a$, u hyperboly pak je jedna větev množinou těch X, pro něž $\overline{F_1X} - \overline{F_2X} = 2a$, druhá množinou těch X, pro něž $\overline{F_2X} - \overline{F_1X} = 2a$.

Pro $m = 3$ máme tři fokální $\mathbf{Q}_1$, jednu danou rovnicemi

$$\frac{x_1^2}{c_1 - c_3} + \frac{x_2^2}{c_2 - c_3} = 1\,, \quad x_3 = 0\,, \tag{112.19}$$

druhou danou rovnicemi

$$\frac{x_1^2}{c_1 - c_2} - \frac{x_3^2}{c_2 - c_3} = 1\,, \quad x_2 = 0\,, \tag{112.20}$$

třetí danou rovnicemi

$$\frac{x_2^2}{c_1 - c_2} + \frac{x_3^2}{c_1 - c_3} + 1 = 0\,, \quad x_1 = 0\,. \tag{112.21}$$

Za předpokladu (112.13) je (112.19) elipsa v rovině $\{P\,;\,\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_2\}$, (112.20) hyperbola v rovině $\{P\,;\,\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{u}_3\}$, (112.21) formálně reálná regulární $\mathbf{Q}_1$ v rovině $\{P\,;\,\boldsymbol{u}_2\,,\,\boldsymbol{u}_3\}$.

Vraťme se k libovolnému m a zvolme bod $X = P + x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{u}_m$ tak, aby všecky souřadnice x_r byly různé od nuly, neboli aby X neležel v žádné z nadrovin σ_r $(1 \leqq r \leqq m)$. Ptáme se po kvadrikách konfokální soustavy procházejících daným bodem X. Podmínka je vyjádřena rovnicí (112.9), ve které neznámou je λ. Označíme-li $\varphi(\lambda)$ levou stranu rovnice (112.9), která tedy zní $\varphi(\lambda) = 1$, je $\varphi(\lambda)$ spojitá funkce pro všecka λ mimo výjimečné hodnoty $\lambda = c_1, c_2, \ldots, c_m$ a blíží-li se λ některé výjimečné hodnotě, má $\varphi(\lambda)$ limitu zleva rovnou $+\infty$ a limitu zprava rovnou $-\infty$; blíží-li se λ k $\pm\infty$, má $\varphi(\lambda)$ limitu rovnou nule. Z toho je patrné, že za předpokladu (112.15) rovnice $\varphi(\lambda) = 1$ má aspoň jeden kořen v každém z m intervalů

$$\lambda < c_m\,; \quad c_m < \lambda < c_{m-1}\,, \ldots, c_2 < \lambda < c_1\,; \tag{112.22}$$

na druhé straně je $\varphi(\lambda) = 1$ algebraická rovnice m-ho stupně, která nemůže mít více než m kořenů; proto naše rovnice má v každém z m intervalů (112.22) právě jeden kořen. Tedy *za předpokladu, že všecky koeficienty c_r jsou navzájem různé a že bod X leží mimo všecky nadroviny σ_r* (vedené středem kolmo k osám), *prochází bodem X právě m kvadrik konfokální soustavy, a to právě po jedné kvadrice každého z m různých typů, na které jsme v článku* 107 *rozdělili bodově reálné regulární středové* $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Každá z těch m kvadrik naší konfokální soustavy, které procházejí bodem X, má v bodě X určitou tečnou nadrovinu; celkem je to m *tečných nadrovin, které jsou všecky navzájem kolmé.* Jsou-li totiž $\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}_{m-1}$ $(1 \leqq r \leqq m)$ dualisace uvažovaných kvadrik procházejících bodem X a jsou-li ϱ_r jejich tečné nadroviny v bodě X, potom pro každé r je vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}_{m-1}$ s nadrovinou ϱ_r konjugována každá nadrovina procházející bodem X, takže pro $1 \leqq r < s \leqq m$ jsou nadroviny ϱ_r, ϱ_s navzájem konjugovány vzhledem k oběma různým duálním kvadrikám $\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}_{m-1}$, $\tilde{\mathbf{Q}}^{(s)}_{m-1}$, jež obě náležejí do Σ a tudíž podle věty 109.2 jsou nadroviny ϱ_r, ϱ_s navzájem konjugovány vzhledem k $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ a snadno se dokáže, že to právě znamená, že nadroviny ϱ_r, ϱ_s jsou navzájem kolmé.

113. KONFOKÁLNÍ PARABOLOIDY. Pokračujíce v úvahách začatých v předcházejícím článku předpokládejme nyní, že výchozí regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je paraboloid. Potom můžeme kartézskou soustavu souřadnic (112.1) volit tak, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici

$$(113.1) \qquad \frac{x_2^2}{c_2} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m} = 2x_1\,,$$

kde čísla c_r $(2 \leqq r \leqq m)$ jsou různá od nuly. Potom [při označení (112.3)], je-li $x_0 = -\xi_1$, $x_1 = -\xi_0$, $x_r = c_r\xi_r$ $(2 \leqq r \leqq m)$, je $\tilde{X}$ polární nadrovinou bodu X vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a dualisace $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici

$$c_2\xi_2^2 + \ldots + c_m\xi_m^2 = 2\xi_0\xi_1$$

a tudíž Σ (označení stále jako v článku 112) obsahuje vedle $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ duální kvadriky s rovnicí

$$(113.2) \qquad (c_2 - \lambda)\xi_2^2 + \ldots + (c_m - \lambda)\xi_m^2 = \xi_1(2\xi_0 + \lambda\xi_1)\,.$$

Duální kvadrika s rovnicí (113.2) je regulární, jestliže číslo λ je různé od všech čísel $c_2, \ldots, c_m$. Je-li tomu tak, potom [opět při označení (112.3)], je-li $x_0 = -\xi_1$, $x_1 = -\xi_0 - \lambda\xi_1$, $x_r = (c_r - \lambda)\xi_r$ pro $2 \leqq r \leqq m$, je X pól nadroviny $\tilde{X}$ vzhledem k duální kvadrice s rovnicí (113.2), takže tato je dualisací kvadriky s rovnicí

$$(113.3) \qquad \frac{x_2^2}{c_2 - \lambda} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m - \lambda} = 2(x_1 - \tfrac{1}{2}\lambda)\,.$$

(113.3) je tedy rovnice libovolné kvadriky konfokální soustavy určené paraboloidem $\mathbf{Q}_{m-1}$; ve (113.3) je ovšem třeba předpokládat, že

$$\lambda \neq c_r \quad \text{pro} \quad 2 \leqq r \leqq m\,. \tag{113.4}$$

Ze (113.3) je patrné, že všecky kvadriky naší konfokální soustavy jsou paraboloidy, které mají společnou osu v přímce $\{P\,;\,\mathbf{u}_1\}$ a společné směry hlavních tečen. Vrchol paraboloidu je $P + \frac{1}{2}\lambda\mathbf{u}_1$, kde je nutné, aby λ splňovalo nerovnosti (113.4).

Pro $m = 2$ výchozí parabola $\mathbf{Q}_1$ má rovnici $x_2^2 = 2c_2x_1$, kde číslo $|c_2|$ jsme v článku 111 nazvali *parametrem* paraboly $\mathbf{Q}_1$. Osou paraboly je přímka $\{P\,;\,\mathbf{u}_1\}$ a každý bod osy až na výjimečný bod $F = P + \frac{1}{2}c_2\mathbf{u}_1$ je vrcholem jedné konfokální paraboly; bod F naproti tomu leží uvnitř všech parabol konfokální soustavy. Bod F se jmenuje *ohnisko* paraboly (na rozdíl od elipsy a hyperboly má tedy parabola *jediné* ohnisko); *parametr paraboly je dvojnásobek vzdálenosti vrcholu od ohniska.*

Jestliže pro $m = 3$ je $c_2 = c_3$, jsou všecky paraboloidy rotační se společnou osou a studium takové konfokální soustavy rotačních paraboloidů se v podstatě redukuje na studium soustavy konfokálních parabol, která vznikne, protneme-li paraboloidy pevně zvolenou rovinou procházející osou. Podobně je tomu i pro vyšší m , a proto se omezíme na ten případ, že čísla c_r $(2 \leqq r \leqq m)$ jsou navzájem různá; označení volíme tak, aby bylo

$$c_2 > \ldots > c_m\,. \tag{113.5}$$

Pro $m = 2$ ovšem nerovnosti (113.5) odpadnou.

Je patrné, že Σ obsahuje mimo $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ ještě právě $m - 1$ dalších singulárních duálních kvadrik, z nichž každá patří jednomu z indexů r $(2 \leqq r \leqq m)$ a je pro $m \geqq 3$ dána rovnicí

$$\sum_{\substack{s=2\\ s\neq r}}^{m}(c_s - c_r)\xi_s^2 = \xi_1(2\xi_0 + c_r\xi_1)\,, \tag{113.6}$$

pro $m = 2$ pak rovnicí

$$\xi_1(2\xi_0 + c_2\xi_1) = 0\,. \tag{113.7}$$

Duálním vrcholem takové singulární kvadriky je pro $m \geqq 3$ nadrovina σ_r vedená osou kolmo na směr $\{\mathbf{u}_r\}$ hlavní tečny; pro $m = 2$ je duálním vrcholem prostě osa. Pro $m = 2$ se naše singulární duální kvadrika (113.7) skládá ze všech přímek, které buďto jsou rovnoběžné s osou paraboly nebo procházejí jejím ohniskem. Pro $m \geqq 3$ singulární duální kvadrika (113.6) se skládá ze všech těch nadrovin prostoru E_m, které obsahují některý tečný E_{m-2} regulární $(m - 2)$-rozměrné kvadriky nadroviny σ_r dané rovnicemi

$$(113.8) \qquad \sum_{\substack{s=2 \\ s \neq r}}^{m} \frac{x_s^2}{c_s - c_r} = 2x_1 - c_r\,, \quad x_r = 0\,;$$

tato Q_{m-2} se jmenuje *fokální* Q_{m-2} konfokální soustavy paraboloidů nebo kteréhokoli paraboloidu této soustavy; počet takových fokálních Q_{m-2} je roven $m - 1$; každá z nich je pro $m \geqq 3$ paraboloidem ve své nadrovině σ_r, pro $m = 3$ tedy parabolou.

Zvolme bod $X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$ tak, aby bylo $x_r \neq 0$ pro $2 \leqq r \leqq m$, aby tedy neležel v žádné z výše uvedených $m - 1$ nadrovin σ_r. Podmínka, aby paraboloid naší konfokální soustavy procházel bodem X, zní $\varphi(\lambda) = 2x_1$, kde

$$\varphi(\lambda) = \frac{x_2^2}{c_2 - \lambda} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m - \lambda} + \lambda\,.$$

Za předpokladu (113.4) je $\varphi(\lambda)$ spojitá funkce proměnné λ; blíží-li se λ některé z vyloučených hodnot c_r $(2 \leqq r \leqq m)$, má $\varphi(\lambda)$ limitu zleva rovnou $+\infty$ a limitu zprava rovnou $-\infty$; mimo to pro $\lambda \to \infty$ je $\varphi(\lambda) \to \infty$, pro $\lambda \to -\infty$ je $\varphi(\lambda) \to -\infty$. Z toho soudíme, že naše rovnice $\varphi(\lambda) = 2x_1$ má aspoň jeden kořen v každém z m intervalů

$$(113.9) \qquad \lambda < c_m\,;\; c_m < \lambda < c_{m-1}\,;\; \ldots\,;\; c_3 < \lambda < c_2\,;\; \lambda > c_2$$

a ježto $\varphi(\lambda) = 2x_1$ je algebraická rovnice m-ho stupně, máme v každém z intervalů (113.9) právě jeden kořen. Tedy *jestliže čísla* c_r $(2 \leqq r \leqq m)$ *jsou navzájem různá a jestliže bod* X *neleží v žádné z nadrovin* σ_r (pro $m = 2$ to znamená prostě, že X neleží na společné ose uvažovaných parabol), *prochází bodem* X *právě* m *paraboloidů konfokální soustavy. Tečné nadroviny těchto* m *paraboloidů v bodě* X *jsou navzájem kolmé*, což se dokáže týmž způsobem jako u středových kvadrik.

114. ALTERNUJÍCÍ BILINEÁRNÍ FORMY. LINEÁRNÍ KOMPLEXY. Bilineární formu f v prostoru $\boldsymbol{P}_m$ jsme v článku 94 nazvali *alternující*, je-li identicky

$$f(Y, X) = -f(X, Y). \tag{114.1}$$

Je-li v $\boldsymbol{P}_m$ zvolena ar. base

$$A_0, A_1, \dots A_m \tag{114.2}$$

a je-li f libovolná bilineární forma v $\boldsymbol{P}_m$, potom pro (94.6) a (94.7) platí (94.8). Je-li f alternující, potom v (94.6) je

$$a_{rs} = -a_{sr} \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r < s \leqq m, \tag{114.3}$$

$$a_{rr} = 0 \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m. \tag{114.4}$$

Obráceně, platí-li (114.3) a (114.4), je (94.8) alternující bilineární forma v $\boldsymbol{P}_m$ a (94.8) můžeme psát ve tvaru

$$f(X, Y) = \sum_{(rs)} a_{rs}(x_r y_s - x_s y_r), \tag{114.5}$$

kde sumace $\sum\limits_{(rs)}$ se vztahuje na všecky ty dvojice indexů r, s, pro něž $1 \leqq r < s \leqq m$.

VĚTA 114.1. *Je-li f alternující bilineární forma v $\boldsymbol{P}_m$, lze určit ar. basi* (114.2) *tak, že f má tvar*

$$\sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r(x_{2r}y_{2r+1} - x_{2r+1}y_{2r}), \tag{114.6}$$

při čemž $2k \leqq m + 1$.

DŮKAZ. Pro $m = 1$ je věta zřejmá při každé volbě ar. base A_0, A_1. Pro každé m je věta zřejmá, je-li f identicky rovna nule. Není-li f identicky rovna nule, lze určit A_0 tak, že není identicky $f(A_0, X) = 0$. Potom existuje nadrovina ϱ_0 jdoucí bodem A_0 tak, že $f(A_0, X) = 0$, právě když $\{X\}$ leží v ϱ_0. Zvolme A_1 mimo ϱ_0, takže $f(A_0, A_1) \neq 0$. Potom existuje nadrovina ϱ_1 jdoucí bodem A_1 tak, že $f(A_1, X) = 0$, právě když $\{X\}$ leží v ϱ_1. Je $\varrho_0 \neq \varrho_1$ a ježto můžeme předpokládat, že $m \geqq 2$, průnik $\boldsymbol{P}_{m-2}$ nadrovin ϱ_0, ϱ_1 není prázdný. Budiž

$$A_2, \dots, A_m \tag{114.7}$$

ar. base pro P_{m-2}. Potom je (114.2) ar. base pro P_m, neboť jinak by existovala čísla c_r $(0 \leqq r \leqq m)$ tak, že

$$c_0 A_0 + c_1 A_1 = \sum_{r=2}^{m} c_r A_r \neq \mathbf{o},$$

tedy buďto $c_0 \neq 0$ nebo $c_1 \neq 0$, což je nemožné, ježto

$$f(A_0, \sum_{r=2}^{m} c_r A_r) = f(A_1, \sum_{r=2}^{m} c_r A_r) = 0,$$

$$f(A_0, c_0 A_0 + c_1 A_1) = c_1 f(A_0, A_1)$$

$$f(A_1, c_0 A_0 + c_1 A_1) = -c_0 f(A_0, A_1).$$

Ve (114.5) je nyní $a_{0s} = a_{1s} = 0$ pro $2 \leqq s \leqq m$, takže pro $m = 2$ je $f(X, Y) = a_{01}(x_0 y_1 - x_1 y_0)$ a věta je pro $m = 2$ správná. Pro $m \geqq 3$ můžeme předpokládat, že věta je správná pro P_{m-2}, načež můžeme (114.7) volit tak, že pro $x_0 = y_0 = 0$, t. j. pro $X = x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m$, $Y = y_2 A_2 + \ldots + y_m A_m$ je

$$f(X, Y) = \sum_{r=1}^{k-1} \varepsilon_r (x_{2r} y_{2r+1} - x_{2r+1} y_{2r}),$$

kde $2k \leqq m + 1$, načež, ježto $a_{0s} = a_{1s} = 0$ $(2 \leqq s \leqq m)$, má f při libovolných X, Y tvar (114.6), jestliže $\varepsilon_1 = a_{01}$.

Bod $\{X\}$ nazveme *regulárním* vzhledem k alternující bilineární formě f, existuje-li Y tak, že $f(X, Y) \neq 0$; bod $\{X\}$ nazveme *singulárním* vzhledem k f, jestliže $f(X, Y) = 0$ pro všecka Y. V článku 94 jsme definovali regulární a singulární bilineární formy f. Je patrné, že vzhledem k alternující bilineární formě f existují singulární body, právě když f je singulární. Množinu všech singulárních bodů singulární alternující bilineární formy f nazveme jejím *vrcholem*. Je to zřejmě lineární podprostor P_d v širším smyslu prostoru P_m $(0 \leqq d \leqq m$, při čemž $d = m$ pouze pro nulovou formu $f)$.

VĚTA 114.2. *Při lichém m existují jak regulární, tak i singulární alternující bilineární formy f, při sudém m pouze singulární. Je-li d dimense vrcholu singulární f, je číslo $m - d$ sudé* (není-li f nulová, je $m - d > 0$).

DŮKAZ. Není-li f nulová forma, můžeme předpokládat, že ve (114.6) je $\varepsilon_r \neq 0$ pro $0 \leqq r \leqq k - 1$. Je-li $X = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_m A_m$, je zřejmě $\{X\}$ singulární, právě když $x_s = 0$ pro $0 \leqq s \leqq 2k - 1$. Tedy f je regulární, právě když $2k = m + 1$, a pro $2k < m + 1$ má f vrchol $\{A_{2k}, \ldots, A_m\}$ a tedy $d = m - 2k$.

V článku 94 jsme poznali, že každá regulární bilineární forma f prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořuje určitou korelaci K prostoru $\mathbf{P}_m$ a že obráceně každá korelace prostoru $\mathbf{P}_m$ je vytvořena nekonečně mnoha bilineárními formami, při čemž je-li f jedna z nich, jsou všecky tvaru cf, kde c je libovolné číslo různé od nuly. Korelaci K jsme nazvali *involutorní*, jestliže pro každý bod X platí, že kdykoli bod Y leží v nadrovině KX, leží také obráceně X v nadrovině KY. Poznali jsme, že K je involutorní, právě když vytvořující bilineární forma je buďto symetrická nebo alternující; v prvém případě jsme nazvali K polární korelací, ve druhém nulovou korelací. Je-li K polární korelace, víme, že existuje (bodově nebo formálně reálná) regulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, že pro každý bod X je KX jeho polární nadrovina vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$; bod X leží v nadrovině KX, právě když X leží v $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže existují reálné body X, které neleží v KX. Naproti tomu, je-li K nulová korelace, leží *každý* bod X prostoru $\mathbf{P}_m$ v nadrovině KX. Podle věty 114.2 pro sudé m neexistují a pro liché m existují nulové korelace prostoru $\mathbf{P}_m$. Pro $m = 1$ není rozdílu mezi bodem a nadrovinou a *jediná nulová korelace přímky* $\mathbf{P}_1$ *je její identická transformace.*

Budiž nyní dána v $\mathbf{P}_m$ *nenulová* alternující bilineární forma f, která může být regulární nebo singulární. Dva body $\{X\}$, $\{Y\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *konjugované* vzhledem k f, je-li $f(X, Y) = 0$; podle (114.1) je to vztah vzájemný a každý $\{X\}$ je (mimo jiné i) sám k sobě konjugován. Je-li $\{X\}$ singulárním bodem pro f, je konjugován s každým bodem prostoru $\mathbf{P}_m$; je-li však $\{X\}$ regulárním bodem pro f, potom množina všech bodů konjugovaných s bodem $\{X\}$ tvoří nadrovinu *procházející bodem* $\{X\}$, kterou nazveme *polární nadrovinou* bodu $\{X\}$ vzhledem k f. Smysl pojmů regulární nebo singulární formy, regulárního nebo singulárního bodu, konjugovaných bodů, polární nadroviny zůstane nezměněn, nahradíme-li formu f formou cf, kde $c \neq 0$. Je-li nyní

$$X = \alpha A + \beta B, \qquad Y = \gamma A + \delta B,$$

plyne z (94.1) až (94.4) a ze (114.1), že

$$f(X, Y) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, f(A, B)$$

a z toho následuje: *jestliže dva různé body přímky p jsou navzájem konjugovány vzhledem k f, jsou každé dva body přímky p konjugovány vzhledem k f*. Množinu $\mathbf{C}_m$ všech takových přímek p nazveme *lineárním komplexem* v prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořeným (nenulovou) alternující bilineární formou f. Zároveň s f také každá cf ($c \neq 0$) vytvořuje týž $\mathbf{C}_m$ a obráceně se snadno dokáže, že jestliže vedle f také druhá nenulová alternující bilineární forma g vytvořuje týž $\mathbf{C}_m$, existuje $c \neq 0$ tak, že je identicky $g = cf$. $\mathbf{C}_m$ je *regulární* nebo *singulární* podle toho, jaká je f; rovněž tak u pojmů *regulárního* nebo *singulárního bodu, konjugovaných bodů, polární nadroviny* atribut „vzhledem k $\mathbf{C}_m$" znamená totéž jako „vzhledem k f". Je-li f, a tedy i $\mathbf{C}_m$, singulární, potom *vrcholem* lineárního komplexu $\mathbf{C}_m$ rozumíme vrchol formy f. Je-li $\mathbf{C}_m$ regulární, potom nulová korelace K vytvořená lineárním komplexem $\mathbf{C}_m$ je nulová korelace vytvořená formou f; tedy nadrovina KX je polární nadrovina bodu $\{X\}$ vzhledem k $\mathbf{C}_m$. V každém případě, je-li A singulární bod pro $\mathbf{C}_m$, potom *každá* přímka jdoucí bodem A náleží do $\mathbf{C}_m$; je-li A regulární bod pro $\mathbf{C}_m$, potom do $\mathbf{C}_m$ náleží přímka p jdoucí bodem A, právě když p leží v polární nadrovině $\mathbf{P}_{m-1}$ bodu A vzhledem k $\mathbf{C}_m$, t. j. právě když p náleží do $\pi(A; \mathbf{P}_{m-1})$ [viz (81.1)].

Pro $m = 1$ je každý bod přímky $\mathbf{P}_1$ pouze sám k sobě konjugován vzhledem k f, takže $\mathbf{C}_1$ je prázdná množina. Pro $m = 2$ plyne z věty 114.2, že $\mathbf{C}_2$ je singulární a že jeho vrcholem je určitý bod A roviny $\mathbf{P}_2$; z toho snadno plyne, že $\mathbf{C}_2$ je prostě svazek přímek $\pi(A; \mathbf{P}_2)$. Pro $m = 3$ plyne z věty 114.2, že $\mathbf{C}_3$ může být regulární nebo singulární; je-li $\mathbf{C}_3$ singulární, je jeho vrcholem určitá přímka p prostoru $\mathbf{P}_3$ a snadno se dokáže, že $\mathbf{C}_3$ se skládá z přímky p a mimo ni ještě právě z těch přímek prostoru $\mathbf{P}_3$, které protínají přímku p. Je-li $\mathbf{C}_3$ regulární a je-li p libovolně daná přímka prostoru $\mathbf{P}_3$, dokáže se snadno, že množina všech těch bodů prostoru $\mathbf{P}_3$, které jsou konjugovány vzhledem (ke dvěma různým a tedy) ke všem bodům přímky p, tvoří opět přímku q, kterou nazveme *polárou* přímky p vzhledem k $\mathbf{C}_3$; je patrné, že polárou přímky q vzhledem k $\mathbf{C}_3$ je původní přímka p. Jestliže p náleží do $\mathbf{C}_3$, splyne se svou polárou q; jestliže p nenáleží do $\mathbf{C}_3$, nemají p a q žádný společný bod.

115. PŘÍMKOVÁ GEOMETRIE V $\mathbf{P}_3$. Budiž Ψ_m množina všech alternujících bilineárních forem v projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 3)$. Jsou-li f, g dvě takové formy, patří do Ψ_m také forma $f + g$; zároveň s f patří do Ψ_m také cf při každé volbě čísla c. Zvolíme-li libovolně ar. basi

$$A_0, A_1, \ldots, A_m$$

prostoru $\mathbf{P}_m$, potom ty bilineární formy ψ_{rs} $(0 \leqq r < s \leqq m)$, pro něž $\psi_{rs}(X, Y) = x_r y_s - x_s y_r$ pro $X = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_m A_m$, $Y = y_0 A_0 + y_1 A_1 + \ldots + y_m A_m$, tvoří basi pro Ψ_m. Tedy Ψ_m je vektorovým prostorem dimense $\frac{1}{2}m(m + 1)$ a tudíž ar. základem projektivního prostoru $\{\Psi_m\}$ dimense $\frac{1}{2}(m - 1)(m + 2)$. Podle předcházejícího článku existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi lineárními komplexy prostoru $\mathbf{P}_m$ a body prostoru $\{\Psi_m\}$. Omezíme se na nejdůležitější případ $m = 3$; pětirozměrný projektivní prostor $\{\Psi_3\}$ nazveme *Kleinovým prostorem*, označíme jej K_5 a každý bod prostoru K_5 nazveme *prvým Kleinovým obrazem* příslušného *lineárního komplexu* $\mathbf{C}_3$. Je-li $\mathbf{C}_3$ speciální, skládá se ze všech přímek protínajících určitou přímku p prostoru $\mathbf{P}_3$ (a z přímky p samé); prvý Kleinův obraz lineárního komplexu $\mathbf{C}_3$ nazveme v tomto případě také *Kleinovým obrazem přímky* p.

Zaveďme libovolnou ar. basi

$$A_0, A_1, A_2, A_3 \tag{115.1}$$

prostoru $\mathbf{P}_3$, jíž podle předchozího odpovídá ar. base

$$\psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{03}, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{23} \tag{115.2}$$

Kleinova prostoru K_5, kde pro $X = x_0 A_0 + \ldots + x_3 A_3$, $Y = y_0 A_0 + \ldots + y_3 A_3$

$$\psi_{rs}(X) = x_r y_s - x_s y_r,$$

$$r, s = 0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 1,2;\ 1,3;\ 2,3.$$

Alternující bilineární forma f, kde

$$\begin{aligned} f(X, Y) = {} & a_{01}(x_0 y_1 - x_1 y_0) + a_{02}(x_0 y_2 - x_2 y_0) + \\ & + a_{03}(x_0 y_3 - x_3 y_0) + a_{12}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + a_{13}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + \\ & + a_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2) \end{aligned} \tag{115.3}$$

má vzhledem k ar. basi (115.2) souřadnice

$$(115.4)\qquad a_{01}\,,\ a_{02}\,,\ a_{03}\,,\ a_{12}\,,\ a_{13}\,,\ a_{23}\,,$$

které také nazveme (nejsou-li všecky rovny nule, t. j. jestliže forma f není nulová) *homogenními souřadnicemi lineárního komplexu vytvořeného formou* f a je-li f singulární s vrcholem p, také *homogenními souřadnicemi přímky* p vzhledem k ar. basi (115.1).

Ar. bod (115.4) prostoru K_5 označme stručně (a); je-li $a \neq \mathbf{o}$, nechť pro jednoduchost týž symbol (a) znamená také příslušný g. bod prostoru K_5.

VĚTA 115.1. *Je-li přímka p prostoru $\mathbf{P}_3$ určena body*

$$(115.5)\qquad \begin{aligned} L &= \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3\,,\\ M &= \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3\,, \end{aligned}$$

potom čísla

$$(115.6)\qquad \begin{gathered} b_{01} = \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2\,,\quad b_{02} = \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3\,,\\ b_{03} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1\,,\\ b_{12} = \lambda_0\mu_3 - \lambda_3\mu_0\,,\quad b_{13} = \lambda_2\mu_0 - \lambda_0\mu_2\,,\\ b_{23} = \lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0 \end{gathered}$$

jsou homogenními souřadnicemi přímky p vzhledem k ar. basi (115.1). Neboť alternující bilineární forma g, kde

$$(115.7)\qquad g(X\,,Y) = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3\\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\,,$$

vytvořuje singulární lineární komplex s vrcholem p.

Položme

$$(115.8)\qquad \varphi_2(a) = a_{01}a_{23} - a_{02}a_{13} + a_{03}a_{12}\,,$$

takže φ_2 je kvadratická forma prostoru K_5; dále položme

$$(115.9)\qquad \begin{aligned} \varphi(a\,,b) = a_{01}b_{23} + a_{23}b_{01} - a_{02}b_{13} - a_{13}b_{02} &+ \\ + a_{03}b_{12} + a_{12}b_{03}&\,, \end{aligned}$$

takže φ je symetrická bilineární forma prostoru K_5 příslušná kvadratické formě φ_2. Vyjádření (115.8) formy φ_2 se týká ar. base (115.2); přejdeme-li od (115.2) k nové ar. basi

$$\chi_0\,,\ \chi_1\,,\ \chi_2\,,\ \chi_3\,,\ \chi_4\,,\ \chi_5 \tag{115.10}$$

prostoru K_5 spjaté se (115.2) rovnicemi

$$\chi_0 = \psi_{01} + \psi_{23}\,, \quad \chi_1 = \psi_{01} - \psi_{23}\,, \quad \chi_2 = \psi_{02} - \psi_{13}\,,$$
$$\chi_3 = \psi_{02} + \psi_{13}\,, \quad \chi_4 = \psi_{03} + \psi_{12}\,, \quad \chi_5 = \psi_{03} - \psi_{12}\,,$$

máme místo souřadnic (115.4) bilineární formy (115.3) nové souřadnice

$$c_0\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ c_3\,,\ c_4\,,\ c_5\,,$$

kde

$$a_{01} = c_0 + c_1\,, \quad a_{02} = c_2 + c_3\,, \quad a_{03} = c_4 + c_5\,,$$
$$a_{23} = c_0 - c_1\,, \quad a_{13} = c_3 - c_2\,, \quad a_{12} = c_4 - c_5\,,$$

takže kvadratická forma (115.8) má v nových souřadnicích tvar

$$c_0^2 - c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 + c_4^2 - c_5^2\,.$$

Tedy φ_2 je regulární kvadratická forma prostoru K_5 se signaturou (3,3).

VĚTA 115.2. *V Kleinově prostoru K_5 existuje regulární kvadrika se signaturou* (3,3), kterou nazveme *základní kvadrikou* prostoru K_5 a označíme Z_4, *s tou vlastností, že bod prostoru K_5 je Kleinovým obrazem přímky prostoru $\mathbf{P}_3$, právě když leží na Z_4*. Kvadrika Z_4 je vytvořena formou φ_2.

DŮKAZ se rozpadá na dvě části. I. Podle věty 115.1 přímka p určená body (115.5) má homogenní souřadnice (115.6); zřejmě však ve (115.7) je $g(L\,, M) = 0$, takže $\varphi_2(b) = 0$.

II. Budiž $\varphi_2(a) = 0$, kde čísla (115.4) nejsou vesměs rovna nule; máme dokázat, že forma (115.3) je singulární. Volíme-li $X_1 = a_{12}A_0 - a_{02}A_1 + a_{01}A_2$, plyne ze (115.3), že $f(X_1\,, Y) = \varphi_2(a)\,.\,y_3$, t. j. $f(X_1\,, Y) = 0$ identicky v Y. Je-li tedy $X_1 \neq \mathbf{o}$, je $\{X_1\}$ singulární bod pro f. Je-li však $X_1 = \mathbf{o}$, t. j. $a_{01} = a_{02} = a_{12} = 0$, dává (115.3) identitu $f(X\,, Y) = (a_{03}x_0 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2)\,y_3 - (a_{03}y_0 + a_{13}y_1 + a_{23}y_2)\,.\,x_3$; volíme-li $X_2 = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 \neq \mathbf{o}$ tak, aby bylo $a_{03}x_0 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = 0$, je $\{X_2\}$ singulární bod pro f.

VĚTA 115.3. *Přímka p prostoru $\mathbf{P}_3$ náleží do lineárního komplexu $\mathbf{C}_3$, právě když prvý Kleinův obraz $\mathbf{C}_3$ náleží do tečné nadroviny kvadriky Z_4 v tom jejím bodě, který je Kleinovým obrazem přímky p.*

Důkaz. Přímka p budiž určena body (115.5), takže má homogenní souřadnice (115.6). Lineární komplex $\mathbf{C}_3$ budiž vytvořen alternující bilineární formou (115.3). Máme dokázat, že $\varphi(a, b) = 0$, právě když $f(L, M) = 0$. Podle (115.3) a (115.6) je však dokonce vždy

$$\varphi(a, b) = f(L, M).$$

Věta 115.4. *Dvě různé přímky p, q prostoru $\mathbf{P}_3$ se protnou, právě když přímka Φ určená jejich Kleinovými obrazy leží celá na kvadrice Z_4. Je-li tomu tak, skládá se přímka Φ z Kleinových obrazů právě těch přímek prostoru $\mathbf{P}_3$, které v tomto prostoru vyplní svazek přímek obsahující p i q.* Přímku Φ nazveme *Kleinovým obrazem* našeho *svazku přímek.*

Důkaz. I. Jsou-li (a), (b) Kleinovy obrazy přímek p, q, plyne z věty 115.3, že (přímka q náleží do singulárního lineárního komplexu s vrcholem p, t. j. že) přímky p, q se protnou, právě když body (a), (b) jsou navzájem konjugovány vzhledem k Z_4. Avšak dva různé body (a), (b) kvadriky Z_4 jsou konjugovány vzhledem k Z_4, právě když přímka $(a)(b)$ leží celá na Z_4.

II. Jestliže přímka $(a)(b)$ leží celá na Z_4, budiž L průsečík přímek p, q, $M \neq L$ bod přímky p, $N \neq L$ bod přímky q. Ze (115.6) je patrné, že $(\lambda a + \mu b)$ je Kleinův obraz přímky, která spojuje bod L s bodem $\lambda M + \mu N$.

Ježto regulární kvadrika Z_4 prostoru K_5 má signaturu (3.3), plyne z článku 106, že existují roviny, jež jsou celé obsaženy v Z_4. Jaké to jsou roviny, o tom nás poučuje

Věta 115.5. *Kleinovy obrazy všech přímek procházejících daným bodem A prostoru $\mathbf{P}_3$ vyplní rovinu obsaženou v Z_4, kterou nazveme Kleinovým obrazem bodu A. Kleinovy obrazy všech přímek ležících v dané rovině ϱ prostoru $\mathbf{P}_3$ vyplní rovinu obsaženou v Z_4, kterou nazveme Kleinovým obrazem roviny ϱ. Obráceně, každá rovina obsažená v Z_4 je Kleinovým obrazem bodu nebo roviny prostoru $\mathbf{P}_3$.*

Důkaz plyne snadno z věty 115.4.

Poznámka. V článku 105 jsme dokázali, že na dvojrozměrné regulární kvadrice se signaturou (2,2) leží dvě soustavy reálných přímek tak, že dvě různé přímky téže soustavy se protnou, dvě přímky různých soustav se neprotnou. Podobně se dá dokázat, že na čtyřrozměrné regulární kvadrice se signaturou (3,3) leží dvě soustavy reálných rovin tak, že dvě různé roviny téže soustavy mají za průnik bod a že dvě roviny různých soustav buďto mají za průnik přímku nebo mají průnik prázdný. Tento fakt se v důsledku věty 115.5 jeví velmi názorně na kvadrice Z_4 : zde roviny jedné soustavy jsou Kleinovy obrazy bodů prostoru $\mathbf{P}_3$, roviny druhé soustavy pak Kleinovy obrazy rovin prostoru $\mathbf{P}_3$.

Druhým Kleinovým obrazem lineárního komplexu $\mathbf{C}_3$ nazveme množinu Γ_3 Kleinových obrazů všech přímek, ze kterých se skládá $\mathbf{C}_3$. Je-li (a) prvý Kleinův obraz $\mathbf{C}_3$, potom podle věty 115.3 Γ_3 je průnik kvadriky Z_4 s polární nadrovinou T_4 bodu (a) vzhledem ke čtyřrozměrné kvadrice Z_4 . Tudíž Γ_3 je trojrozměrná kvadrika; jestliže $\mathbf{C}_3$ je regulární, leží (a) mimo Z_4 (viz větu 115.2), takže podle věty 102.1 je Γ_3 regulární trojrozměrná kvadrika s (neorientovanou) signaturou (3,2); jestliže $\mathbf{C}_3$ je singulární s vrcholem p , potom podle věty 102.2 je Γ_3 singulární trojrozměrná kvadrika se signaturou (2,2), jejímž jediným singulárním bodem je Kleinův obraz přímky p .

Každé dva různé lineární komplexy $\mathbf{C}_3$ a $\mathbf{C}_3'$ určují *svazek lineárních komplexů*, složený z těch lineárních komplexů, jejichž prvé Kleinovy obrazy vyplní v prostoru K_5 přímku $\Phi = (a)(b)$, kde (a) , (b) jsou prvé Kleinovy obrazy lineárních komplexů $\mathbf{C}_3$ a $\mathbf{C}_3'$. Průnik obou lineárních komplexů $\mathbf{C}_3$ a $\mathbf{C}_3'$, který označíme L , se nazývá *lineární kongruence* v $\mathbf{P}_3$; každá přímka náležející do L náleží do všech lineárních komplexů svazku a L je průnikem kterýchkoli dvou lineárních komplexů svazku. Přímku Φ prostoru K_5 nazveme *prvým Kleinovým obrazem lineární kongruence* L .

Podle možných vzájemných poloh přímky Φ a kvadriky Z_4 máme čtyři různé druhy lineárních kongruencí L :

(1) Celá přímka Φ leží na kvadrice Z_4 ; L je *rozpadlá lineární kongruence.*

(2) Přímka Φ je sečnou kvadriky Z_4 ; L je *hyperbolická lineární kongruence.*

(3) Přímka Φ je nesečnou kvadriky Z_4 ; L je *eliptická lineární kongruence.*

(4) Přímka Φ je tečnou kvadriky Z_4, ale neleží celá na Z_4; L je *parabolická lineární kongruence.*

V případě (1) podle věty 115.4 existuje v $\mathbf{P}_3$ svazek přímek $\pi(A; \varrho)$, kde A je bod a ϱ jím procházející rovina prostoru $\mathbf{P}_3$; L se skládá z těch přímek prostoru $\mathbf{P}_3$, která protnou každou přímku svazku $\pi(A; \varrho)$. Je patrné, že L se rozpadá na dvě části, a to jednak na množinu všech přímek prostoru $\mathbf{P}_3$ procházejících bodem A, jednak na množinu všech přímek prostoru $\mathbf{P}_3$ ležících v rovině ϱ; průnikem obou částí je svazek $\pi(A; \varrho)$. Obráceně obdržíme z každého svazku přímek $\pi(A; \varrho)$ právě popsaným způsobem rozpadlou lineární kongruenci L.

V případě (2) můžeme předpokládat, že prvé Kleinovy obrazy lineárních komplexů $\mathbf{C}_3$ a $\mathbf{C}_3'$ jsou průsečíky přímky Φ se základní kvadrikou Z_4. Podle věty 115.2 jsou lineární komplexy $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_3'$ singulární, a jejich vrcholy jsou podle věty 115.4 dvě *neprotínající se* přímky p, q prostoru $\mathbf{P}_3$. Tedy hyperbolická kongruence L se skládá ze všech těch přímek prostoru $\mathbf{P}_3$, které protínají p i q; přímky p a q se jmenují *řídící přímky* hyperbolické lineární kongruence. Obráceně kterékoli dvě reálné neprotínající se přímky p, q prostoru $\mathbf{P}_3$ jsou řídícími přímkami určité hyperbolické kongruence.

V případě (3) eliptické lineární kongruence je vše stejné jako v předchozím případě až na to, že *řídící přímky* p, q jsou nyní dvě imaginární komplexně sdružené přímky bez společného bodu, tedy bez reálných bodů.

V případě (4) můžeme předpokládat, že Kleinův obraz (115.3) lineárního komplexu $\mathbf{C}_3$ je bod dotyku přímky Φ se základní kvadrikou Z_4. Kleinův obraz (115.9) lineárního komplexu $\mathbf{C}_3'$ leží mimo Z_4 v tečné nadrovině k Z_4 v bodě (115.3). Lineární komplex $\mathbf{C}_3$ je singulární; jeho vrcholem budiž přímka p prostoru $\mathbf{P}_3$, která je (v tomto případě jedinou) *řídící přímkou* parabolické lineární kongruence L. Lineární komplex $\mathbf{C}_3'$ je regulární a obsahuje přímku p; polární rovina vzhledem k $\mathbf{C}_3'$ libovolného bodu přímky p prochází přímkou p; jestliže každému bodu X přímky p přiřadíme jeho polární rovinu ψX vzhledem k $\mathbf{C}_3'$, dostaneme projektivní zobrazení ψ přímky p na svazek $\pi(p; \mathbf{P}_3)$. Parabolická lineární kongruence L se skládá ze všech svazků přímek tvaru $\pi(X, \psi X)$, kde X probíhá přímku p. Dokážeme, že také obráceně, zvolíme-li v $\mathbf{P}_3$ libovolně přímku p a projektivní zobrazení ψ

přímky p na svazek rovin $\pi(p , \mathsf{P}_3)$, potom jestliže X probíhá přímku p , všecky svazky přímek tvaru $\pi(X , \psi X)$ dohromady dávají parabolickou lineární kongruenci s řídící přímkou p . Za tím účelem zvolme (115.1) tak, aby body $\{A_0\}$, $\{A_1\}$ ležely na dané přímce p a aby obrazem libovolného bodu $\{\lambda A_0 + \mu A_1\}$ při projektivitě ψ byla rovina spojující přímku p s bodem $\{\lambda A_2 + \mu A_3\}$. Žádaná lineární kongruence bude vytvořena singulárním lineárním komplexem C_3 s vrcholem p a regulárním lineárním komplexem C'_3 , zvolíme-li C'_3 tak, aby obsahoval přímku p a aby libovolný bod X této přímky měl vzhledem k C'_3 polární rovinu ψX . Je patrné, že alternující bilineární forma f , kde $f(X , Y) = x_0y_2 - x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3$, má tuto vlastnost.

Druhým Kleinovým obrazem lineární kongruence L nazveme množinu Ω Kleinových obrazů všech přímek, ze kterých se skládá L . V důsledku věty 115.3 je Ω průnik kvadriky Z_4 s trojrozměrným lineárním podprostorem prostoru K_5 , který se skládá ze všech bodů vzhledem k Z_4 konjugovaných s každým bodem přímky Φ . Čtenář snadno odůvodní, že Ω je dvojrozměrná kvadrika, která v případě rozpadlé L se skládá ze dvou rovin protínajících se v přímce (jež je vrcholem uvažované kvadriky Ω), v případě hyperbolické L je Ω regulární se signaturou (2,2), v případě eliptické L je Ω regulární se signaturou (3,1), v případě parabolické L je Ω singulární s jednobodovým vrcholem a se signaturou (2,1).

VĚTA 115.6. *Budiž q polára přímky p vzhledem k regulárnímu lineárnímu komplexu C_3 . Jestliže p nenáleží do C_3 , je $p \neq q$ a spojnice Φ Kleinových obrazů přímek p , q prochází prvým Kleinovým obrazem lineárního komplexu C_3 . Jestliže p náleží do C_3 , je $p = q$ a tečna k Z_4 v Kleinově obrazu přímky p prochází prvým Kleinovým obrazem C_3 .*

DŮKAZ. V případě $p = q$ je věc jasná (viz větu 115.3). Budiž $p \neq q$ a budiž Φ spojnice Kleinových obrazů přímek p , q . Φ je prvým Kleinovým obrazem hyperbolické lineární kongruence L s řídícími přímkami p , q a je třeba pouze ukázat, že celá L je částí C_3 . To je však jasné, neboť L se skládá ze svazků přímek tvaru $\pi(A , \varrho)$, kde A je bod přímky p a rovina ϱ spojuje bod A s přímkou q , je tedy polární rovinou bodu A vzhledem k C_3 .

116. MÖBIUSŮV PROSTOR. Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$, budiž N jeho úběžná nadrovina a budiž $\mathbf{A}_{m-2}$ jeho absolutní kvadrika.

Nazveme $(m-1)$-*sférou* a označme $\mathbf{S}_{m-1}$ takovou kvadriku projektivního prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$, která obsahuje jako část $(m-2)$-rozměrnou kvadriku $\mathbf{A}_{m-2}$. Je rozeznávat dva případy. Předně máme takové $(m-1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$, které neobsahují jako část celou úběžnou nadrovinu N; nazveme je *středové* $(m-1)$-*sféry*. (Připomeňme si, že podle článku 107 pouze takové kvadriky prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ počítáme mezi kvadriky prostoru $\mathbf{E}_m$, které neobsahují jako část celou nadrovinu N.) Podle článku 108 jsou tři druhy středových $\mathbf{S}_{m-1}$. Předně máme bodově reálné regulární $\mathbf{S}_{m-1}$, které jsme nazvali $(m-1)$-rozměrnými koulemi a kterým nyní budeme říkat $(m-1)$-*koule*; připomeňme si, že 1-koule jsou totožné s kružnicemi. Za druhé máme formálně reálné regulární $\mathbf{S}_{m-1}$, které nazveme stručně *formální* $\mathbf{S}_{m-1}$. Posléze patří mezi středové $\mathbf{S}_{m-1}$ ještě formálně reálné singulární $\mathbf{S}_{m-1}$ s jednobodovým vrcholem v konečnu, které nazveme stručně *bodové* $\mathbf{S}_{m-1}$. Vrcholem bodové $\mathbf{S}_{m-1}$ je e. bod A a obráceně každý e. bod A je vrcholem právě jedné bodové $\mathbf{S}_{m-1}$, která se skládá ze všech minimálních přímek prostoru $\mathbf{E}_m$ jdoucích bodem A, který je jediným jejím reálným bodem. Každá středová $\mathbf{S}_{m-1}$ má určitý e. bod A za svůj *střed*; je-li $\mathbf{S}_{m-1}$ regulární, je střed A pólem nadroviny N vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$; je-li $\mathbf{S}_{m-1}$ bodová, je středem její vrchol.

Vedle středových $\mathbf{S}_{m-1}$ máme ještě takové $(m-1)$-sféry, které obsahují jako část celou úběžnou nadrovinu N; sem patří mimo jiné dvojnásobná nadrovina N, kterou označíme N^2. Ostatní $\mathbf{S}_{m-1}$ obsahující N jako část nazveme *planární* $(m-1)$-*sféry* a označíme je $\mathbf{T}_{m-1}$; množina všech bodů v konečnu každé $\mathbf{T}_{m-1}$, kterou označíme $[\mathbf{T}_{m-1}]$, je podle článku 96 (str. 108) nadrovina prostoru $\mathbf{E}_m$ a obráceně pro každou nadrovinu ϱ prostoru $\mathbf{E}_m$ máme právě jednu $\mathbf{T}_{m-1}$ tak, že $\varrho = [\mathbf{T}_{m-1}]$.

V článku 109 jsme poznali, že množina $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$ všech kvadrik projektivního prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ tvoří projektivní prostor dimense $\frac{1}{2}m(m+3)$, jehož ar. základem je množina všech kvadratických forem v $\bar{\mathbf{E}}_m$ (nulovou formu nevyjímajíc). Je patrné, že množina všech $(m-1)$-sfér, kterou označíme M_{m+1}, tvoří lineární podprostor prostoru $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$, tedy opět projektivní prostor. Zvolme v $\mathbf{E}_m$ *kartézskou* soustavu souřadnic

$$\langle P ; \mathbf{e}_1 , \dots , \mathbf{e}_m \rangle . \tag{116.1}$$

Ar. body $P , \mathbf{e}_1 , \dots , \mathbf{e}_m$ tvoří tedy ar. basi projektivního prostoru $\overline{\mathbf{E}}_m$ a pro libovolný ar. bod X položíme

$$X = x_0P + x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_m\mathbf{e}_m , \tag{116.2}$$

při čemž, jak víme, koeficient x_0 je nezávislý na volbě kartézské soustavy souřadnic (116.1). Prostor M_{m+1} má dimensi $m + 1$, neboť je patrné, že jeho ar. basí jsou kvadratické formy

$$g_0 , g_1 , \dots , g_m , g_{m+1} , \tag{116.3}$$

kde při označení (116.2) je

$$\begin{aligned} g_0(X) &= x_1^2 + \dots + x_m^2 , \; g_{m+1}(X) = x_0^2 , \\ g_r(X) &= - 2x_0x_r \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m . \end{aligned} \tag{116.4}$$

Kvadratická forma

$$F_2 = t_0g_0 + t_1g_1 + \dots + t_mg_m + t_{m+1}g_{m+1} , \tag{116.5}$$

kde nejsou všecka čísla

$$t_0 , t_1 , \dots , t_m , t_{m+1} , \tag{116.6}$$

jejichž souhrn stručně označíme (t), současně rovna nule, vytvořuje $(m - 1)$-sféru $\mathbf{S}_{m-1}$. Čísla (116.6) jsou souřadnicemi kvadratické formy F_2 a zároveň *homogenními souřadnicemi* $(m - 1)$*-sféry* $\mathbf{S}_{m-1}$ [odpovídajícími kartézské soustavě souřadnic (116.1) prostoru $\mathbf{E}_m$, ale jak ještě uvidíme, souřadnice t_0 je nezávislá na volbě soustavy (116.1)]. Je patrné, že pro N^2 a pro každou $\mathbf{T}_{m-1}$ je $t_0 = 0$, kdežto pro středové $\mathbf{S}_{m-1}$ je $t_0 \neq 0$; pro N^2 je také $t_1 = \dots = t_m = 0$ a ovšem $t_{m+1} \neq 0$.

Prostor M_{m+1} budeme nazývat *Möbiusovým prostorem.* Avšak místo abychom jako dosud body prostoru M_{m+1} úplně ztotožňovali s $(m - 1)$-sférami $\mathbf{S}_{m-1}$, bude účelné zaujmout obecnější stanovisko, že body prostoru M_{m+1} jsou jakékoli objekty, jen když tyto objekty jsou v určitém vzájemně jednoznačném vztahu s $(m - 1)$-sférami. Bod Möbiusova prostoru, který odpovídá dané $(m - 1)$-sféře $\mathbf{S}_{m-1}$, nazveme *prvým Möbiusovým obrazem* této $(m - 1)$-sféry. Prvý Möbiusův obraz $(m - 1)$-sféry N^2 nazveme *severním pólem* a označíme jej σ. Homogenní souřadnice (116.1) $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$ jsou zároveň homogenními souřadnicemi jejího prvého Möbiusova obrazu; poznamenejme, že σ má všecky své homogenní souřadnice, až na poslední, rovny nule. Dále poznamenejme, že *budeme brát v úvahu pouze reálné body Möbiusova prostoru* M_{m+1}.

Položme nyní

$$\varphi_2(t) = t_1^2 + \ldots + t_m^2 - t_0 t_{m+1}. \tag{116.7}$$

Kvadratická forma φ_2 vytvořuje v prostoru M_{m+1} m-rozměrnou kvadriku, kterou nazveme *základní kvadrikou* prostoru M_{m+1} a označíme M'_m. Snadno se zjistí, že M'_m *je regulární eliptická kvadrika procházející severním pólem* σ, dále že je $\varphi_2(t) > 0$ pro body prostoru M_{m+1} vně M'_m, $\varphi_2(t) < 0$ pro body uvnitř M'_m. Snadno se dá dokázat, že kvadratická forma φ_2 je nezávislá na volbě kartézské soustavy souřadnic (116.1). To přenecháváme čtenáři, protože pro nás je důležitý pouze fakt, že základní kvadrika M'_m je nezávislá na volbě kartézské soustavy (116.1), a správnost tohoto faktu je bezprostředním důsledkem následující věty.

VĚTA 116.1. *Bod Möbiusova prostoru* M_{m+1}, *různý od severního pólu* σ, *je prvým Möbiusovým obrazem bodové* $\mathbf{S}_{m-1}$, *právě když leží na základní kvadrice* M'_m.

DŮKAZ. Je-li $t_0 = 0$ a zároveň $\varphi_2(t) = 0$, plyne ze (116.7), že $t_1^2 + \ldots + t_m^2 = 0$ a ježto bereme v úvahu pouze reálné body prostoru M_{m+1}, musí být $t_1 = \ldots = t_m = 0$, t. j. severní pól σ je jediný bod na M'_m, pro který je $t_0 = 0$. Předpokládejme nyní, že ve (116.5) je $t_0 \neq 0$, takže $(m - 1)$-sféra $\mathbf{S}_{m-1}$ vytvořená kvadratickou formou F_2 je středová; máme dokázat, že $\varphi_2(t) = 0$, právě když $\mathbf{S}_{m-1}$ je bodová. Nyní ze (116.4) a (116.5) plyne snadno, že pro $x_0 = 1$ [t. j. jestliže ar. bod X ve (116.2) je e. bod] je

$$F_2(X) = t_0[(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2] - \frac{1}{t_0} \cdot \varphi_2(t), \tag{116.8}$$

kde jsme položili

$$a_r = \frac{t_r}{t_0} \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m. \tag{116.9}$$

Ze (116.8) je patrné, že $\mathbf{S}_{m-1}$ je bodová, právě když $\varphi_2(t) = 0$, což se právě mělo dokázat. Zároveň jsme zjistili, že jsou-li (116.6) homogenní souřadnice středové $\mathbf{S}_{m-1}$, je její střed

$$A = P + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m , \tag{116.10}$$

kde čísla a_r $(1 \leqq r \leqq m)$ jsou udána ve (116.9). Mimo to plyne ze (116.8), že $\varphi_2(t) > 0$ pro $(m - 1)$-kouli $\mathbf{S}_{m-1}$, $\varphi_2(t) < 0$ pro formální $\mathbf{S}_{m-1}$.

Nazveme *Möbiusovým obrazem e. bodu A* prvý Möbiusův obraz bodové $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$, jejímž vrcholem je bod A. Větu (116.1) můžeme nyní vyslovit také takto: *Möbiusův obraz každého e. bodu A leží na M'_m a je různý od σ; obráceně každý od σ různý bod na M'_m je Möbiusovým obrazem určitého e. bodu A.* Mimo to ze (116.9) je patrné, že Möbiussův obraz e. bodu (116.10) má homogenní souřadnice

$$\begin{aligned} t_r &= a_r t_0 \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m , \\ t_{m+1} &= (a_1^2 + \ldots + a_m^2) t_0 , \end{aligned} \tag{116.11}$$

kde číslo $t_0 \neq 0$ je libovolné. Poslední rovnice (116.11) je důsledkem toho, že $\varphi_2(t) = 0$.

V následujícím budiž M_σ tečná nadrovina k základní kvadrice M'_m v severním pólu σ. Ze (116.7) plyne, že čísla (116.6) jsou homogenními souřadnicemi bodu na M_σ, právě když $t_0 = 0$. Ježto M'_m je regulární eliptická kvadrika, leží všecky body nadroviny M_σ, vyjma bod dotyku σ, vně základní kvadriky M'_m.

Správnost následujících dvou vět je snadným důsledkem předcházejících vývodů.

VĚTA 116.2. *Body nadroviny M_σ různé od severního pólu σ jsou totožné s prvými Möbiusovými obrazy planárních $\mathbf{S}_{m-1}$.*

VĚTA 116.3. *Body prostoru M_{m+1}, které leží vně M'_m, ale mimo nadrovinu M_σ, jsou totožné s prvými Möbiusovými obrazy $(m - 1)$-koulí. Body prostoru M_{m+1}, které leží uvnitř M'_m, jsou totožné s prvými Möbiusovými obrazy formálních $(m - 1)$-sfér.*

Budiž $\mathbf{S}_{m-1}$ středová $(m - 1)$-sféra se středem A. Přiřadíme každému e. bodu X reálné číslo, které nazveme *mocností bodu X vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$*. Jestliže předně $\mathbf{S}_{m-1}$ je bodová $(m - 1)$-sféra, je mocnost rovna $\overline{AX}^2$; je tedy rovna nule pro $X = A$, kladná pro

$X \neq A$. Je-li za druhé $\mathbf{S}_{m-1}$ $(m - 1)$-koule s poloměrem r , je mocnost rovna $\overline{AX}^2 - r^2$, je tedy rovna nule pro body X na $\mathbf{S}_{m-1}$, kladná pro body X vně $\mathbf{S}_{m-1}$, záporná pro body X uvnitř $\mathbf{S}_{m-1}$. Budiž posléze $\mathbf{S}_{m-1}$ formální $(m - 1)$-sféra; podle článku 107 (str. 157) je $\mathbf{S}_{m-1}$ středově sdružena s $(m - 1)$-koulí, jejíž poloměr budiž r ; mocnost bodu X vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$ je potom rovna $\overline{AX}^2 + r^2$, je tedy kladná pro všecky e. body X .

Jestliže kvadratická forma (116.5) vytvořuje středovou $(m - 1)$-sféru, takže $t_0 \neq 0$, dokáže se snadno na základě (116.8), že je-li X libovolný e. bod, je $F_2(X)$ rovné součinu čísla t_0 s mocností bodu X vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$, takže hodnota t_0 je nezávislá na volbě kartézské soustavy souřadnic (116.1). Je-li $t_0 = 1$ ve (116.5), pravíme, že F_2 je *normální kvadratická forma* středové $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$, a čísla (116.6) v případě $t_0 = 1$ nazveme *normálními souřadnicemi* této $(m - 1)$-sféry. Podle (116.9) jsou normální souřadnice t_r $(1 \leqq r \leqq m)$ středové $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$ totožné s kartézskými souřadnicemi jejího středu a ze (116.7) a (116.9) se snadno odvodí, že $t_{m+1} = t_1^2 + \ldots + t_m^2 - \varepsilon r^2$, kde $\varepsilon r^2 = 0$ pro bodovou $\mathbf{S}_{m-1}$, pro $(m - 1)$-kouli $\mathbf{S}_{m-1}$ je $\varepsilon = 1$ a r znamená její poloměr, pro formální $\mathbf{S}_{m-1}$ je $\varepsilon = -1$ a r znamená poloměr $(m - 1)$-koule středově sdružené s $\mathbf{S}_{m-1}$.

V předcházejícím je obsažena

VĚTA 116.4. *Je-li F_2 normální kvadratická forma středové $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$ a je-li X libovolný e. bod, je číslo $F_2(X)$ rovné mocnosti bodu X vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$.*

VĚTA 116.5. *Je-li (t') Möbiusův obraz e. bodu A* (takže $(t') \neq \sigma$ leží na M'_m), *potom tečná nadrovina kvadriky M'_m v bodě (t') se skládá z bodu (t') , z prvých Möbiusových obrazů všech $(m - 1)$-koulí procházejících bodem A a z prvých Möbiusových obrazů všech těch $\mathbf{T}_{m-1}$, pro něž nadrovina $[\mathbf{T}_{m-1}]$ prochází bodem A .*

DŮKAZ. Tečná nadrovina kvadriky M'_m v bodě (t') se skládá ze všech těch bodů (t), pro něž je $\varphi(t , t') = 0$, kde φ je bilineární forma příslušná kvadratické formě φ_2 , t. j.

$$(116.12) \qquad \varphi(t , t') = t_1 t'_1 + \ldots + t_m t'_m - \tfrac{1}{2}(t_0 t'_{m+1} + t_{m+1} t'_0) .$$

Je-li (t) prvý Möbiusův obraz $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$ vytvořené kvadratickou formou (116.5), máme dokázat, že $\varphi(t, t') = 0$, právě když $F_2(t') = 0$. Podle (116.10) a (116.11) je však $t'_r = a_r t'_0$ pro $1 \leq r \leq m$, $t'_{m+1} = (a_1^2 + \ldots + a_m^2)t'_0$, kde $t'_0 \neq 0$; podle (116.2) je tedy

$$\varphi(t, t') = t'_0[a_1 t_1 + \ldots + a_m t_m - \tfrac{1}{2}(a_1^2 + \ldots + a_m^2)t_0 - \tfrac{1}{2}t_{m+1}],$$

takže podle (116.4), (116.5) a (116.10) je

$$-2\varphi(t, t') = F_2(t').$$

Druhým Möbiusovým obrazem $(m - 1)$*-koule* $\mathbf{S}_{m-1}$ nazveme množinu Möbiusových obrazů všech bodů ležících na $\mathbf{S}_{m-1}$; *druhým Möbiusovým obrazem planární* $(m - 1)$-sféry $\mathbf{T}_{m-1}$ nazveme množinu složenou ze severního pólu σ a z Möbiusových obrazů všech bodů nadroviny $[\mathbf{T}_{m-1}]$. Z vět 116.2 a 116.4 se snadno odvodí

VĚTA 116.6. *Je-li* $\mathbf{S}_{m-1}$ *buďto* $(m - 1)$*-koule nebo planární* $(m - 1)$*-sféra, potom druhý Möbiusův obraz* $(m - 1)$*-sféry* $\mathbf{S}_{m-1}$ *je průnik* M'_m *s polární nadrovinou prvého Möbiusova obrazu* $(m - 1)$*-sféra* $\mathbf{S}_{m-1}$. Ježto M'_m je m-rozměrná regulární eliptická kvadrika, je tedy (viz věty 102.1 a 116.2) uvažovaný druhý Möbiusův obraz $(m - 1)$*-rozměrnou regulární eliptickou kvadrikou.*

117. SVAZKY KOULÍ. V tomto článku podržíme všecka označení zavedená v předcházejícím článku.

Ježto $(m - 1)$-sféry jsou zvláštními případy kvadrik projektivního prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$, je *svazek* $(m - 1)$*-sfér* zvláštním případem svazku kvadrik v $\bar{\mathbf{E}}_m$. Svazek $(m - 1)$-sfér je tedy zřejmě množina takových $(m - 1)$-sfér, jejichž prvé Möbiusovy obrazy vyplní přímku prostoru M_{m+1}, kterou označíme Φ. Svazek sám označíme Σ. Svazek Σ je určen dvěma libovolně zvolenými navzájem různými $(m - 1)$-sférami $\mathbf{S}'_{m-1}$, $\mathbf{S}''_{m-1}$, vytvořenými dvěma lineárně nezávislými kvadratickými formami F'_2, F''_2 tvaru (116.5), jejichž souřadnice buďtež (t'), (t''). Týmiž symboly (t'), (t'') označíme také prvé Möbiusovy obrazy $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}'_{m-1}$, $\mathbf{S}''_{m-1}$.

Svazek Σ nazveme *planární*, jestliže přímka Φ leží v nadrovině M_σ. Je třeba rozeznávat dva případy podle toho, zda přímka Φ prochází či neprochází severním pólem σ. Snadno se dokáže, že v prvém případě Σ obsahuje N^2 a mimo to ještě všecky planární $(m - 1)$-sféry

T_{m-1} takové, že příslušné nadroviny $[T_{m-1}]$ tvoří svazek nadrovin rovnoběžných s danou nadrovinou prostoru E_m ; ve druhém případě pak Σ se skládá ze všech planárních $(m — 1)$-sfér T_{m-1} takových, že příslušné nadroviny $[T_{m-1}]$ tvoří svazek nadrovin prvního druhu prostoru E_m , t. j. soustavu všech nadrovin procházejících určitým lineárním podprostorem E_{m-2} prostoru E_m (pro $m = 2$ určitým bodem roviny E_2) .

Jestliže přímka Φ neleží v nadrovině M_σ , potom, jak uvidíme, svazek Σ obsahuje nekonečně mnoho $(m — 1)$-koulí a proto říkáme, že Σ je *svazek* $(m — 1)$*-koulí*. Takový svazek Σ nazveme: (1) *hyperbolický*, je-li Φ nesečnou pro M'_m ; (2) *eliptický*, je-li Φ sečnou pro M'_m ; (3) *parabolický*, je-li Φ tečnou pro M'_m .

Počněme tím zvláštním případem eliptického svazku $(m$-$1)$-koulí, který dostaneme, jestliže přímka Φ prochází severním pólem σ ; ježto Φ je sečnou pro M'_m , má Φ s M'_m mimo σ ještě jeden další společný bod, který je Möbiusovým obrazem e. bodu A . Můžeme předpokládat, že S'_{m-1} je bodová $(m — 1)$-sféra s vrcholem A a že $S''_{m-1} = N^2$. Dále můžeme předpokládat, že F'_2 je normální kvadratická forma pro S'_{m-1} , takže $F'_2(X) = \overline{AX}^2$ pro každý e. bod X , dále pak, že $F''_2(X) = 1$ pro každý e. bod X . Potom Σ obsahuje mimo N^2 ještě právě ty $(m — 1)$-sféry, jimž přísluší normální kvadratická forma $F_2 = F'_2 - \lambda F''_2$. Je-li X e. bod, je $F_2(X) = \overline{AX}^2 - \lambda$. Z toho je patrné, že Σ obsahuje mimo N^2 ještě právě všecky středové $(m — 1)$-sféry se středem A . Proto náš Σ nazveme *soustředným svazkem* $(m — 1)$*-koulí* se středem A .

Jestliže svazek Σ $(m — 1)$-koulí není soustředný, potom přímka Φ má s nadrovinou M_σ společný právě jeden bod τ , který je různý od σ . Do Σ náleží planární $(m — 1)$-sféra T_{m-1} , jejímž prvým Möbiusovým obrazem je bod τ ; nadrovinu $[T_{m-1}]$ prostoru E_m označme krátce ϱ a nazveme ji *potenční nadrovinou* svazku Σ ; pro $m = 2$ je ϱ přímka roviny E_2 , která se často také nazývá *chordálou* svazku kružnic Σ .

Ježto M'_m je regulární eliptická kvadrika prostoru M_{m+1} , leží přímka Φ v případě hyperbolického svazku Σ celá vně M'_m , v případě parabolického svazku pak má Φ s M'_m společný právě jeden bod a jinak je celá vně M'_m ; posléze v případě eliptického svazku má Φ

s M'_m společné dva různé reálné body, které dělí Φ na dva intervaly, z nichž jeden leží vně a druhý uvnitř M'_m. Z toho plyne podle věty 116.3, že hyperbolický svazek Σ obsahuje mimo jedinou planární $(m-1)$-sféru $\boldsymbol{T}_{m-1}$ ještě pouze $(m-1)$-koule, parabolický svazek Σ obsahuje mimo $\boldsymbol{T}_{m-1}$ právě jednu bodovou $(m-1)$-sféru a jinak už jen $(m-1)$-koule. Posléze eliptický svazek Σ obsahuje mimo $\boldsymbol{T}_{m-1}$ právě dvě bodové $(m-1)$-sféry a vedle toho ještě jednak nekonečně mnoho $(m-1)$-koulí, jednak nekonečně mnoho formálních $(m-1)$-sfér. V celku tedy každý neplanární svazek Σ obsahuje nekonečně mnoho $(m-1)$-koulí, jak bylo výše už ohlášeno. (Planární svazky i soustředné svazky jsou v následujícím vyloučeny.)

Můžeme předpokládat, že F'_2 je normální kvadratická forma středové $(m-1)$-sféry $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ a že F''_2 vytvořuje planární $(m-1)$-sféru $\boldsymbol{T}_{m-1}$. Je tedy $t'_0 = 1$, $t''_0 = 0$; mimo to se snadno dokáže, že je-li $\boldsymbol{u} = (t''_1, \ldots, t''_m)$, je $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ a směr $\{\boldsymbol{u}\}$ je kolmý na potenční nadrovinu ϱ. Libovolná $(m-1)$-sféra $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ je vytvořena normální kvadratickou formou $F_2 = F'_2 + \lambda F''_2$ se souřadnicemi $(t) = (t' + \lambda t'')$. Je $t_0 = 1$, takže ze (116.9) plyne, že střed $(m-1)$-sféry $\boldsymbol{S}_{m-1}$ má v kartézské soustavě (116.1) souřadnice $t_r = t'_r + \lambda t''_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$. Je-li tedy A' střed $\boldsymbol{S}'_{m-1}$, má $\boldsymbol{S}_{m-1}$ střed $A' + \lambda\boldsymbol{u}$. Tedy *středy všech středových $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ vyplní přímkou kolmou na potenční nadrovinu ϱ*. Tato přímka se jmenuje *středná* svazku Σ; každý její bod je středem právě jedné $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ. Mocnost e. bodu X vzhledem k $\boldsymbol{S}_{m-1}$ je rovná

$$F_2(X) = F'_2(X) + \lambda F''_2(X)\,.$$

Jestliže X leží v potenční nadrovině ϱ, je $F''_2(X) = 0$ a mocnost $F_2(X)$ je nezávislá na λ; jestliže však X leží mimo ϱ, je $F''_2(X) \neq 0$ a X nemůže mít touž mocnost vzhledem ke dvěma různým středovým $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ. Tedy *potenční nadrovina ϱ je množina těch e. bodů X, které mají touž mocnost vzhledem ke všem středovým $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ*. Mimo to, jestliže e. bod X neleží v potenční nadrovině ϱ, tu, je-li dáno jakékoli reálné číslo c, existuje právě jedna středová $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ, vzhledem k níž má e. bod X danou mocnost c.

Ježto $F_2 = F'_2 + \lambda F''_2$, je patrné, že jestliže e. bod X nadroviny ϱ náleží do *jedné* středové $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ, náleží X do *každé* středové

$\mathbf{S}_{m-1}$ svazku Σ, kdežto e. bod X, který neleží v ϱ, náleží do *právě jedné* středové $\mathbf{S}_{m-1}$ svazku Σ. Při další diskusi je účelné (a podle předchozího také přípustné) předpokládat, že střed $(m-1)$-sféry $\mathbf{S}'_{m-1}$, která spolu s planární $(m-1)$-sférou $\mathbf{T}_{m-1}$ určuje náš svazek Σ, leží v potenční nadrovině ϱ. Kartézskou soustavu souřadnic (116.1) můžeme volit tak, že jejím počátkem P je střed $(m-1)$-sféry $\mathbf{S}'_{m-1}$ a mimo to tak, že $\varrho = \{P; \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$. Potom pro každý e. bod $X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_m\mathbf{u}_m$ je

$$F'_2(X) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - c\,,$$

kde $c = 0$, je-li $\mathbf{S}'_{m-1}$ bodová $(m-1)$-sféra, $c = r^2$, je-li $\mathbf{S}'_{m-1}$ $(m-1)$-koule s poloměrem $r > 0$, $c = -r^2$, je-li $\mathbf{S}'_{m-1}$ formální $(m-1)$-sféra středově sdružená s $(m-1)$-koulí poloměru $r > 0$. Mimo to je $F''_2(X) = ax_1$, $a \neq 0$; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = -2$. Libovolná $(m-1)$-sféra svazku Σ je vytvořena normální kvadratickou formou $F_2 = F'_2 + \lambda F''_2$, kde tedy

$$F_2(X) = (x_1 - \lambda)^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 - (\lambda^2 + c)\,.$$

Je-li nejprve $c = r^2 > 0$, máme pro každé λ $(m-1)$-kouli $\mathbf{S}_{m-1}$ se středem $P + \lambda\mathbf{u}_1$ a s poloměrem $\sqrt{\lambda^2 + r^2}$; Σ je hyperbolický svazek, do něhož mimo $\mathbf{T}_{m-1}$ náleží ještě právě ty $(m-1)$-koule, které protnou nadrovinu ϱ v $(m-2)$-kouli se středem P a poloměrem r (pro $m = 2$ je 0-koulí se středem P a poloměrem $r > 0$ rozumět dvojici reálných bodů A, B se středem P, pro kterou $\overline{AB} = 2r$). Obráceně se snadno dokáže, že je-li dána nadrovina ϱ a v ní $(m-2)$-koule $\mathbf{S}_{m-2}$, potom všecky ty $(m-1)$-koule, které procházejí danou $(m-2)$-koulí, spolu s tou planární $(m-1)$-sférou $\mathbf{T}_{m-1}$, pro kterou $[\mathbf{T}_{m-1}] = \varrho$, tvoří hyperbolický svazek $(m-1)$-koulí.

Je-li za druhé $c = 0$, máme pro $\lambda = 0$ bodovou $(m-1)$-sféru se středem P a pro každé $\lambda \neq 0$ $(m-1)$-kouli se středem $P + \lambda\mathbf{u}_1$ a s poloměrem $|\lambda|$; Σ je parabolický svazek, do něhož mimo $\mathbf{T}_{m-1}$ a mimo zmíněnou bodovou $(m-1)$-sféru náležejí ještě právě ty $(m-1)$-koule, které procházejí bodem P a v tomto bodě mají tečnou nadrovinu ϱ. Obráceně se snadno dokáže, že je-li dána nadrovina ϱ a v ní bod P, potom všecky ty $(m-1)$-koule, které procházejí bodem P a mají zde tečnou nadrovinu ϱ, spolu s bodovou $(m-1)$-sférou středu P a s tou planární $(m - 1)$-sférou, pro kterou $[\mathbf{T}_{m-1}] = \varrho$, tvoří parabolický svazek $(m - 1)$-koulí.

Je-li posléze $c = -r^2 < 0$, potom pro $|\lambda| = r$ dostáváme dvě bodové $(m - 1)$-sféry se středy $P_1 = P + \lambda \mathbf{u}_1$, $P_2 = P - \lambda \mathbf{u}_1$; nadrovina ϱ je nadrovinou souměrnosti úsečky P_1P_2. Pro $|\lambda| > r$ dostáváme $(m - 1)$-kouli se středem $P + \lambda \mathbf{u}_1$ a s poloměrem $\sqrt{\lambda^2 - r^2}$. Pro $|\lambda| < r$ dostáváme formální $(m - 1)$-sféru se středem $P + \lambda \mathbf{u}_1$, s níž je středově sdružená $(m - 1)$-koule s týmž středem a s poloměrem $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$. Σ je v uvažovaném případě eliptický svazek $(m - 1)$-koulí. Obráceně je patrné, že jsou-li dány dva různé e. body P_1, P_2, existuje právě jeden svazek Σ $(m - 1)$-koulí, do kterého náležejí obě bodové $(m - 1)$-sféry se středy P_1, P_2; svazek Σ je zřejmě eliptický. Jsou-li F_2', F_2'' normální kvadratické formy těchto bodových $(m - 1)$-sfér, je pro každý e. bod X

$$F_2'(X) = \overline{P_1X}^2, \qquad F_2''(X) = \overline{P_2X}^2.$$

Do svazku Σ náleží planární $(m - 1)$-sféra $\mathbf{T}_{m-1}$, pro kterou $[\mathbf{T}_{m-1}] = \varrho$ je nadrovinou souměrnosti úsečky P_1P_2; $\mathbf{T}_{m-1}$ je vytvořena kvadratickou formou $F_2' - F_2''$. Každým bodem A prostoru $\mathbf{E}_m$, různým od P_1 i od P_2, který leží mimo nadrovinu ϱ (takže $\overline{P_1A} \neq 0$, $\overline{P_2A} \neq 0$, $\overline{P_1A} \neq \overline{P_2A}$), prochází (právě jedna) $(m - 1)$-koule $\mathbf{S}_{m-1}$ svazku Σ, vytvořená kvadratickou formou $F_2 = F_2' - \lambda F_2''$, kde číslo λ se určí z rovnice $F_2'(A) = \lambda F_2''(A)$ neboli $\overline{P_1A}^2 = \lambda \,.\, \overline{P_2A}^2$. Je $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ a číslo $\lambda = c^2$ $(c > 0)$ je kladné; $(m - 1)$-koule $\mathbf{S}_{m-1}$ je množina těch bodů X, pro které $\overline{P_1X} : \overline{P_2X} = c$. Mimo popsané už $(m - 1)$-sféry obsahuje náš svazek Σ ještě nekonečně mnoho formálních $(m - 1)$-sfér $\mathbf{S}_{m-1}$. Střed Q takové $\mathbf{S}_{m-1}$ leží uvnitř úsečky P_1P_2, je však různý od středu P dvojice P_1, P_2. Je-li K $(m - 1)$-koule se středem P, která prochází bodem P_1 (a tedy i bodem P_2), potom se snadno dokáže, že $(m - 1)$-koule středově sdružená s uvažovanou $(m - 1)$-koulí $\mathbf{S}_{m-1}$ je jednoznačně určena tím, že má střed Q a že nadrovina vedená bodem Q kolmo na přímku P_1P_2 ji protne v téže $(m - 2)$-kouli, ve které protne K.

Pro $m = 2$ věta, že jsou-li dány v rovině $\mathbf{E}_2$ dva různé body P_1, P_2 a je-li dáno kladné číslo $c \neq 1$, potom množina všech těch e. bodů X, pro něž $\overline{P_1X} : \overline{P_2X} = c$, je kružnice, byla známa už slavnému starověkému geometrovi Apolloniovi z Pergy.

118. POKRAČOVÁNÍ O KOULÍCH. Budiž $1 \leqq d \leqq m$. *Lineární soustava* $(m - 1)$-*sfér* dimense d je množina Σ_d všech takových $(m-1)$-sfér, jejichž prvé Möbiusovy obrazy vyplní d-rozměrný lineární podprostor Φ_d prostoru M_{m+1}. Σ_d nazveme *planární*, jestliže Φ_d leží v nadrovině M_σ; planární Σ_m se skládá z N^2 a ze všech planárních $(m - 1)$-sfér. Je-li $d < m$, potom jestliže Φ_d neprochází bodem σ, skládá se Σ_d z těch planárních $(m - 1)$-sfér $\boldsymbol{T}_{m-1}$, pro něž nadroviny $[\boldsymbol{T}_{m-1}]$ tvoří d-rozměrnou lineární soustavu prvního druhu ve smyslu článku 48; jestliže Φ_d prochází bodem σ, potom Σ_d obsahuje N^2 a mimo to ty $\boldsymbol{T}_{m-1}$, pro něž nadroviny $[\boldsymbol{T}_{m-1}]$ tvoří d-rozměrnou lineární soustavu nadrovin druhého druhu.

Jestliže Φ_d neleží v nadrovině M_σ, potom Σ_d obsahuje nekonečně mnoho $(m - 1)$-koulí a pravíme, že Σ_d je *lineární soustava* $(m - 1)$-*koulí* dimense d. Vedle případu $d = 1$ probraného v předchozím článku je nejdůležitější případ $d = m$. Jediný planární Σ_m jsme už popsali výše; není-li Σ_m planární, pravíme, že Σ_m je *trs* $(m - 1)$-*koulí*. Příslušná Φ_m je nadrovina prostoru M_{m+1} různá od M_σ; budiž φ pól nadroviny Φ_m vzhledem k M'_m. Bod φ je prvým Möbiusovým obrazem určité $(m - 1)$-sféry, kterou nazveme *základní* $(m - 1)$-*sférou* trsu. Jsou-li (t') homogenní souřadnice bodu φ (a tedy také homogenní souřadnice základní $(m - 1)$-sféry), potom Σ_m se skládá z těch $(m - 1)$-sfér (t), pro něž platí $\varphi(t, t') = 0$ neboli [viz (116.12)]

$$2(t_1t'_1 + \ldots + t_mt'_m) = t_0t'_{m+1} + t_{m+1}t'_0 . \tag{118.1}$$

Jsou čtyři možné případy, jejichž geometrický popis se snadno odůvodní na základě (118.1) třeba tak, že napřed vhodně specialisujeme kartézskou soustavu souřadnic (116.1). Počneme případem planární základní $(m - 1)$-sféry $\boldsymbol{T}'_{m-1}$ a položme $[\boldsymbol{T}'_{m-1}] = \varrho$; Σ_m se skládá z N^2, ze všech těch planárních $(m - 1)$-sfér $\boldsymbol{T}_{m-1}$, pro něž nadrovina $[\boldsymbol{T}_{m-1}]$ je kolmá na ϱ a ze všech těch středových $(m - 1)$-sfér, jejichž středy leží v ϱ. Jestliže za druhé základní $(m - 1)$-sféra je bodová $\boldsymbol{S}_{m-1}$ se středem A, potom Σ_m se skládá ze všech planárních $\boldsymbol{T}_{m-1}$, pro něž nadrovina ϱ prochází bodem A, z jediné bodové $(m - 1)$-sféry, jíž je samotná základní $(m - 1)$-sféra $\boldsymbol{S}_{m-1}$, a ze všech $(m - 1)$-koulí procházejících bodem A. Jestliže posléze základní $(m - 1)$-sféra $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ je regulární středová $(m - 1)$-sféra se středem A, položme

$c = r^2 > 0$, je-li S'_{m-1} $(m - 1)$-koule s poloměrem r, a položme $c = -r^2 < 0$, je-li S'_{m-1} formální $(m - 1)$-sféra středově sdružená s $(m - 1)$-koulí poloměru r. V tomto případě Σ_m se skládá jednak ze všech planárních $(m - 1)$-sfér T_{m-1}, pro něž nadrovina $[T_{m-1}]$ prochází bodem A, jednak ze všech těch středových S_{m-1}, vzhledem k nimž má bod A mocnost rovnou číslu c. V případě $c < 0$ všecky tyto středové S_{m-1} jsou $(m - 1)$-koulemi, kdežto v případě $c > 0$ do Σ_m náležejí vedle $(m - 1)$-koulí také bodové i formální S_{m-1}, při čemž bodová S_{m-1} se středem X náleží do Σ_m, právě když bod X leží na $(m - 1)$-kouli S'_{m-1}.

O dvou $(m - 1)$-koulích S_{m-1}, S'_{m-1} pravíme, že jsou navzájem *orthogonální*, jestliže jejich prvé Möbiusovy obrazy jsou navzájem konjugované vzhledem k M'_m; každá z nich náleží tedy do trsu $(m-1)$-koulí, jehož základní $(m - 1)$-sférou je druhá z nich. Snadno se dokáže, že dvě navzájem orthogonální $(m - 1)$-koule S_{m-1}, S'_{m-1} jsou navzájem různé a určují hyperbolický svazek $(m - 1)$-koulí, takže mají v případě $m = 2$ dva společné body a v případě $m \geqq 3$ nekonečně mnoho společných bodů; jestliže pak je A společný bod dvou $(m - 1)$-koulí S_{m-1}, S'_{m-1}, jsou tyto navzájem orthogonální, právě když jejich tečné nadroviny v bodě A stojí na sobě kolmo.

Lineární systémy Σ_d $(1 < d < m)$ nebudeme probírat.

Budiž nyní dána v E_m určitá regulární středová $(m - 1)$-sféra S_{m-1}, kterou nazveme *základní $(m - 1)$-sférou inverse*, a budiž A její střed, který nazveme *pólem inverse*. Budiž α Möbiusův obraz bodu A. Budiž $E_m - A$ množina, která vznikne z E_m odstraněním bodu A. Budeme definovat transformaci j množiny $E_m - A$, kterou nazveme *inversí vzhledem k* S_{m-1}. Za tím účelem budiž β prvý Möbiusův obraz $(m - 1)$-sféry S_{m-1} a Ψ polární nadrovina bodu β vzhledem k M'_m. Bod β neleží ani na M'_m, ani v M_σ a proto nadrovina Ψ neprochází ani bodem α, ani bodem σ. Snadno se dokáže, že homologie H prostoru M_{m+1} se středem β, s osovou nadrovinou Ψ a s invariantem -1 převádí kvadriku M'_m v samu sebe, při čemž $H\sigma = \alpha$ je Möbiusův obraz bodu A a obráceně $H\alpha = \sigma$. Slíbená definice inverse j spočívá v tom, že je-li X bod množiny $E_m - A$ a ξ jeho Möbiusův obraz, je $j(X)$ ten bod množiny $E_m - A$, jehož Möbiusovým obrazem je bod $H\xi$.

Základní vlastnosti inverse plynou přímo z její definice. Především je patrné, že je-li $j(X) = Y$, je také obráceně $j(Y) = X$. Je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ $(m - 1)$-koulí, potom každý její bod je samodružný při j a obráceně každý při j samodružný bod leží na $\boldsymbol{S}_{m-1}$; je-li X uvnitř $\boldsymbol{S}_{m-1}$, je $j(X)$ vně; je-li X vně $\boldsymbol{S}_{m-1}$, je $j(X)$ uvnitř. Je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ formální $(m - 1)$-sféra, nemá j samodružných bodů. Je-li ϱ nadrovina procházející bodem A, je $\varrho - A$ samodružná množina při j. Je-li ϱ nadrovina neprocházející bodem A, potom množina $j(\varrho)$ spolu s bodem A tvoří $(m - 1)$-kouli; obráceně, jestliže $(m - 1)$-koule $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ prochází bodem A, potom $j(\boldsymbol{S}'_{m-1} - A)$ je nadrovina neprocházející bodem A. Je-li $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ $(m - 1)$-koule neprocházející bodem A, potom totéž platí o $j(\boldsymbol{S}'_{m-1})$; jestliže $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ náleží do trsu $(m - 1)$-koulí se základní $(m - 1)$-sférou $\boldsymbol{S}_{m-1}$, je $j(\boldsymbol{S}'_{m-1}) = \boldsymbol{S}'_{m-1}$.

Jestliže bod $X \neq A$ neleží na $\boldsymbol{S}_{m-1}$ a je-li $Y = j(X)$, plyne z článku 117, že bodová $(m - 1)$-sféra se středem X, bodová $(m - 1)$-sféra se středem Y a $(m - 1)$-sféra $\boldsymbol{S}_{m-1}$ náležejí do téhož (eliptického) svazku $(m - 1)$-koulí, jehož střednou je přímka XY, která tudíž obsahuje též bod A, t. j. bod $Y = j(X)$ leží na přímce AX, kterou označíme p. Nyní svazek $(m - 1)$-koulí je zvláštním případem svazku kvadrik, takže podle věty 109.4 jsou body X, Y dvojnými body involuce na přímce p, do které náleží dvojice B_1, B_2 průsečíků přímky p a $\boldsymbol{S}_{m-1}$. To však znamená, že body B_1, B_2 jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům X, Y a to lze vyslovit tak, že dvojice X, Y náleží do involuce φ na přímce p, jejímiž dvojnými body jsou B_1, B_2. Je-li však $\boldsymbol{u}$ jednotkový vektor na přímce p, je zřejmě: (1) $B_1 = A + r\boldsymbol{u}$, $B_2 = A - r\boldsymbol{u}$, je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ $(m - 1)$-koule s poloměrem r, (2) $B_1 = A + ir\boldsymbol{u}$, $B_2 = A - ir\boldsymbol{u}$, je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ formální $(m - 1)$-sféra středově sdružená s $(m - 1)$-koulí poloměru r. Z toho snadno plyne (viz konec článku 87), že

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AY} = \begin{matrix} r^2 \\ -r^2 \end{matrix}\begin{cases} \text{v případě (1)}, \\ \text{v případě (2)}. \end{cases} \tag{118.2}$$

Ve (118.2) je obsažena elementární definice inverse. Další vlastnosti inverse nebudeme probírat.