parabolický případ pak se štěpí u reálných projektivit na dva: hyperbolická projektivita má dva reálné samodružné body, eliptická projektivita má dva imaginární samodružné body, které jsou komplexně sdružené. K větě 87.2 o hyperbolických projektivitách můžeme nyní připojit obdobnou větu o eliptických projektivitách:

VĚTA 93.1. *Jsou-li* A , A^* (komplexně sdružené) *samodružné body eliptické projektivity na přímce* $\mathbf{P}_1$, *existuje komplexní číslo* λ *tak, že*

$$(93.1) \qquad |\lambda| = 1 , \quad \lambda \neq 1$$

a že, je-li X *kterýkoli nesamodružný bod přímky* $\mathbf{P}_1$, X' *obraz bodu* X , *potom dvojpoměr* $(AA^*XX') = \lambda$. *Obráceně, jsou-li dány na* $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ *dva imaginární komplexně sdružené body* A , A^* *a je-li dáno komplexní číslo* λ *splňující* (93.1), *potom ke každému bodu* X *přímky* $\mathbf{P}_1$ *existuje na* $\mathbf{P}_1$ *právě jeden bod* X' *tak, že* $(AA^*XX') = \lambda$. *Bod* X' *je obrazem bodu* X *při eliptické projektivitě na přímce* $\mathbf{P}_1$, *jejíž samodružné body jsou* A , A^*.

DŮKAZ. Nehledě na část týkající se znamení čísla λ , dá se důkaz věty 87.2 přenést do komplexního oboru s tím výsledkem, že jestliže neparabolická (reálná nebo imaginární) projektivita na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ má samodružné body A , B , potom existuje komplexní číslo λ tak, že $0 \neq \lambda \neq 1$ a že mezi libovolným (reálným nebo komplexním) nesamodružným bodem X a jeho obrazem X' platí vztah $(ABXX') = \lambda$; že také obráceně, jsou-li dány dva různé komplexní body A , B a komplexní číslo $\lambda (0 \neq \lambda \neq 1)$, relace $(ABXX') = \lambda$ definuje na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ neparabolickou projektivitu se samodružnými body A , B . Jestliže nyní běží o eliptickou projektivitu, je samodružný bod $B = A^*$ komplexně sdružený k samodružnému bodu A . Mimo to, je-li bod X reálný, je také jeho obraz X' reálný; jestliže ve vztahu $(AA^*XX') = \lambda$ každý bod nahradíme bodem s ním komplexně sdruženým, dostaneme vztah $(A^*AXX') = \lambda^*$, kde λ^* je číslo komplexně sdružené s číslem λ . Na druhé straně podle (76.10) je $(A^*AXX') = 1 : \lambda$. Tedy $\lambda\lambda^* = 1$ neboli $|\lambda| = 1$. Obráceně buďtež A , A^* dva (imaginární tedy různé) komplexně sdružené body a budiž $|\lambda| = 1'$. Máme dokázat, že projektivita určená vztahem $(AA^*XX') = \lambda$ je reálná, t. j., že je-li $X = X^*$, je také $X' = X'^*$. Avšak přechodem ke komplexně sdruženým bodům z relace $(AA^*XX') = \lambda$ dostaneme relaci $(A^*AXX'^*) = \lambda^*$, z níž podle (76.10) plyne $(AA^*XX'^*) = 1 : \lambda^*$. Ježto však $|\lambda| = 1$, je $1 : \lambda^* = \lambda$, tedy $(AA^*XX') = (AA^*XX'^*)$, takže $X' = X'^*$ podle věty 76.1 (vlastně podle její komplexní úpravy).

Věta 87.4 i se svým důkazem zůstává v platnosti v komplexním oboru a vede k definici involuce na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, která může být reálná nebo imaginární; při tom reálná involuce na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ je rozšířením involuce na $\mathbf{P}_1$ a je účelné ji ztotožnit s touto involucí na $\mathbf{P}_1$. Reálné involuce se dělí na hyperbolické a eliptické, při čemž nyní *každá* involuce má dva dvojné body, které u reálné involuce jsou buďto oba reálné (hyperbolické involuce) nebo jsou imaginární a komplexně sdružené (eliptická involuce).

Prvá část věty 87.5 platí i v komplexním oboru: Jsou-li A, B, C, D čtyři různé komplexní body na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, existuje na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ právě jedna involuce (reálná nebo imaginární) obsahující obě dvojice A, B; C, D. Rovněž i věta 87.6 platí v komplexním oboru: Jsou-li A, B dva různé body na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, existuje na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ právě jedna involuce (reálná nebo imaginární) s dvojnými body A, B, která vedle svých dvojných bodů obsahuje ještě právě ty dvojice X, X', pro které A, B, X, X' je harmonická čtveřice.

VĚTA 93.2. *Buďtež A, A^* dva imaginární komplexně sdružené body na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ a budiž K reálná projektivita na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, při které obrazem bodu A je bod A^*. Potom K je hyperbolická involuce.*

DŮKAZ. Ježto projektivita K je reálná a ježto body A, A^* jsou komplexně sdružené, je nejenom bod A^* obrazem bodu A, nýbrž také obráceně bod A je obrazem bodu A^*. Ježto $A \neq A^*$, plyne z věty 87.4, že K je involuce a zbývá dokázat, že K nemůže být eliptická. Předpokládejme opak. Potom K má dva imaginární komplexně sdružené dvojné body B, B^* a podle věty 87.6 (vlastně jejího komplexního zobecnění formulovaného výše) je $(BB^*AA^*) = -1$. Můžeme volit ar. zástupce A, A^*, B, B^* tak, že ar. body A, A^* jsou komplexně sdružené a stejně i B, B^*. Ježto B, B^* jsou imaginární, je $B \neq B^*$, takže existují komplexní čísla α, β tak, že $A = \alpha B + \beta B^*$. Potom je však také $A^* = (\alpha B + \beta B^*)^* = \beta^* B + \alpha^* B^*$ a podle definice dvojpoměru je

$$(BB^*AA^*) = \frac{\beta\beta^*}{\alpha\alpha^*} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 > 0\,.$$

Ježto
$$(BB^*AA^*) = -1 \,,$$
je to nemožné.

VĚTA 93.3. *Dvě různé involuce mají právě jednu společnou dvojici, která však nemusí být reálná ani tehdy, jestliže obě dané involuce jsou reálné. Jestliže však ze dvou daných různých reálných involucí je aspoň jedna eliptická, potom obě involuce mají společnou dvojici složenou ze dvou reálných a navzájem různých bodů.*

DŮKAZ. I. Buďtež K_1, K_2 dvě dané (reálné nebo imaginární) involuce, při čemž $K_1 \neq K_2$. Všimněme si nejprve toho případu, že K_1 a K_2 mají společný dvojný bod A. Potom dvojice A, A je společná oběma involucím a není možné, aby měly ještě jinou společnou dvojici. Neboť je-li $B_1 \neq A$ dvojný bod involuce K_1 a je-li $B_2 \neq A$ dvojný bod involuce K_2, je $B_1 \neq B_2$, ježto oběma dvojnými body je involuce (podle komplexního zobecnění věty 87.6) jednoznačně určena. Mají-li tedy involuce K_1, K_2 mimo A, A další společnou dvojici X, X', jsou body A, B_1, X, X' navzájem různé a stejně i body A, B_2, X, X' a podle komplexního zobecnění věty 87.6 je

$(AB_1XX') = (AB_2XX') = -1$, takže podle (76.12) je
$(XX'AB_1) = -1 = (XX'AB_2)$ a tudíž podle věty 76.1 je
$B_1 = B_2$, což je nemožné.

II. Všimněme si dále toho případu, že involuce K_1, K_2 nemají společný dvojný bod. Buďtež A_1, B_1 dvojné body involuce K_1; A_2, B_2 buďtež dvojné body involuce K_2. Potom jsou A_1, B_1, A_2, B_2 čtyři různé body na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ a podle komplexního zobecnění věty 87.5 existuje na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ involuce K_0 s dvojnými body A_0, B_0, do které náležejí obě dvojice A_1, B_1; A_2, B_2. Podle věty 87.6 je potom $(A_0B_0A_1B_1) = -1 = (A_0B_0A_2B_2)$, takže podle (76.12) je také $(A_1B_1A_0B_0) = -1 = (A_2B_2A_0B_0)$ a podle věty 87.6 je tudíž A_0, B_0 společná dvojice obou involucí K_1, K_2. Mimo dvojici A_0, B_0 nemohou involuce K_1, K_2 mít jinou společnou dvojici A_0', B_0', neboť ježto K_1, K_2 nemají společný dvojný bod, byly by A_0, B_0, A_0', B_0' čtyři různé body a přes to by měly obě navzájem různé involuce K_1, K_2 společné dvě dvojice A_0, B_0; A_0', B_0'; to však je v rozporu s větou 87.5.

III. Zbývá doplnit důkaz pro ten případ, že obě involuce K_1, K_2 jsou reálné. Mají-li K_1, K_2 společný dvojný bod A, potom dvojný bod $B_1 \neq A$ involuce K_1 musí být různý od dvojného bodu $B_2 \neq A$ involuce K_2, a proto bod A musí být reálný, neboť jinak by také komplexně sdružený bod $A^* \neq A$ byl společným dvojným bodem obou involucí. Z toho plyne, že v uvažovaném případě obě involuce K_1, K_2 jsou hyperbolické. Jestliže však reálné involuce K_1, K_2 nemají žádný společný dvojný bod a jestliže A_0, B_0 je jejich společná dvojice, plyne z reality obou involucí, že také A_0^*, B_0^* je společná dvojice, která podle II musí splynout s dvojicí A_0, B_0. Je tudíž buďto $A_0 = A_0^*$, $B_0 = B_0^*$, t. j. společná dvojice je reálná, nebo je $A_0 = B^*$, $B_0 = A_0^*$, t. j. obě involuce mají společnou dvojici tvaru A_0, A_0^*, kde $A_0^* \neq A_0$; tento druhý případ je podle věty 93.2 možný pouze tehdy, jestliže obě involuce jsou hyperbolické.

XIII

KVADRIKY A JEJICH PROJEKTIVNÍ VLASTNOSTI

94. KORELACE. Kolineární zobrazení K projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duální k $\mathbf{P}_m$ se jmenuje *korelace* prostoru $\mathbf{P}_m$; tedy korelace prostoru $\mathbf{P}_m$ přiřazuje každému bodu tohoto prostoru nadrovinu téhož prostoru. *Pro $m = 1$ není rozdílu mezi kolineací a korelací.*

Ježto k prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ je duálním původní prostor $\mathbf{P}_m$, korelace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ přiřazuje každé nadrovině prostoru $\mathbf{P}_m$ bod téhož prostoru. K dané korelaci K prostoru $\mathbf{P}_m$ je podle věty 79.2 inversní korelace K^{-1} prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Avšak dané korelaci K prostoru $\mathbf{P}_m$ přísluší ještě jiná korelace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, totiž *duální korelace* $\tilde{K}$, jejíž definice je obsažena v článku 83 (str. 55). Je-li ϱ libovolná nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$, potom jejím obrazem $K^{-1}\varrho$ při inversní korelaci K^{-1} je ten bod A prostoru $\mathbf{P}_m$, jehož obrazem KA při původní korelaci K je daná nadrovina ϱ ; obrazem $\tilde{K}\varrho$ nadroviny ϱ při duální korelaci $\tilde{K}$ je ten bod B prostoru $\mathbf{P}_m$, jímž procházejí ty nadroviny KX , které jsou obrazy jednotlivých bodů X nadroviny ϱ při původní korelaci K . Korelace K se nazývá *involutorní,* jestliže inversní korelace K^{-1} splyne s duální korelací $\tilde{K}$. Snadno se nahlédne, že *korelace K prostoru $\mathbf{P}_m$ je involutorní, právě když má tuto vlastnost: jsou-li A , B dva body prostoru $\mathbf{P}_m$ a jestliže nadrovina KA prochází bodem B , potom také nadrovina KB prochází bodem A* . V každém případě původní korelace K je inversní k inversní korelaci K^{-1}, a zároveň K je duální k duální korelaci $\tilde{K}$. Z toho plyne: *Je-li K involutorní korelace prostoru $\mathbf{P}_m$, je $K^{-1} = \tilde{K}$ involutorní korelace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$.*

Pro $m = 1$ je K involutorní, právě když pro $KA = B$ je vždy zároveň také $KB = A$; to nastane jednak, jestliže K je identická transformace přímky $\mathbf{P}_1$, jednak, jestliže K je involuce na přímce $\mathbf{P}_1$.

Nazveme *bilineární formou* v prostoru $\mathbf{P}_m$ (nebo ve $\mathbf{W}_{m+1}$, je-li

W_{m+1} ar. základ prostoru P_m) pravidlo f, které každé dvojici X, Y ar. bodů (při čemž záleží na pořadí bodů ve dvojici) přiřazuje reálné číslo $f(X, Y)$ tak, že jsou splněny následující čtyři vlastnosti:

$$f(X_1 + X_2, Y) = f(X_1, Y) + f(X_2, Y)\,; \tag{94.1}$$
$$f(X, Y_1 + Y_2) = f(X, Y_1) + f(X, Y_2)\,; \tag{94.2}$$
$$f(cX, Y) = c\,.\,f(X\,.\,Y)\,; \tag{94.3}$$
$$f(X, cY) = c\,.\,f(X, Y)\,. \tag{94.4}$$

Je-li dána ar. base

$$A_0, A_1, \ldots, A_m, \tag{94.5}$$

položme

$$f(A_r, A_s) = a_{rs} \tag{94.6}$$

pro $0 \leqq r \leqq m$, $0 \leqq s \leqq m$. Je-li potom

$$X = x_0A_0 + \ldots + x_mA_m, \qquad Y = y_0A_0 + \ldots + y_mA_m, \tag{94.7}$$

je

$$f(X, Y) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} a_{rs}x_ry_s\,. \tag{94.8}$$

Obráceně, jestliže při určité volbě ar. base (94.5) zvolíme libovolně reálná čísla a_{rs} ($0 \leqq r, s \leqq m$) a definujeme $f(X, Y)$ pomocí (94.7) a (94.8), platí (94.6) a (94.1) až (94.4), takže f je bilineární forma v P_m. Položme

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}. \tag{94.9}$$

Číslo Δ je závislé na volbě ar. base (94.5), neboť jestliže tuto ar. basi změníme na př. tak, že jeden její element A_r nahradíme elementem cA_r, kde ovšem musí být $c \neq 0$, je patrné, že Δ se změní v $c^2\Delta$. V dalším však uvidíme, že platnost rovnice $\Delta = 0$ je nezávislá na volbě ar. base (94.5).

Jestliže při libovolně daném ar. bodě A přiřadíme každému ar. bodu Y číslo $f(A, Y)$, plyne z (94.2) a (94.4), že vznikne lineární forma ve W_{m+1}, kterou označíme LA. Budiž $\tilde{\mathsf{W}}_{m+1}$ množina všech lineárních forem ve W_{m+1}, takže podle článku 74 $\tilde{\mathsf{W}}_{m+1}$ je ar. základ projektivního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duálního k prostoru $\mathbf{P}_m$. Tedy L je zobrazení prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ do prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, které podle (94.1) a (94.3) má vlastnosti:

$$L(X_1 + X_2) = LX_1 + LX_2\,, \qquad L(cX) = c\,.\,LX\,.$$

Zřejmě $L\mathbf{o} = \tilde{\mathbf{o}}$. Jestliže $LX = \tilde{\mathbf{o}}$ *pouze* pro $X = \mathbf{o}$, je patrné, že L je isomorfní zobrazení $\mathbf{W}_{m+1}$ na $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$. V tomto případě řekneme, že bilineární forma f je *regulární*; naproti tomu nazveme f *singulární*, existuje-li $A \neq \mathbf{o}$ tak, že $LA = \mathbf{o}$. Mezi singulární bilineární formy patří mimo jiné *nulová bilineární forma* f, pro kterou je identicky $f(X, Y) = 0$. Jestliže při určité volbě ar. base (94.5) platí (94.6), je patrné, že f je regulární, právě když soustava $m + 1$ lineárních rovnic

$$a_{0s}x_0 + a_{1s}x_1 + \ldots + a_{ms}x_m = 0$$
$$(0 \leqq s \leqq m)$$

má pouze triviální řešení $x_0 = x_1 = \ldots = x_m = 0$. Tedy: *regulární bilineární forma má determinant* $\Delta \neq 0$, *singulární bilineární forma má determinant* $\Delta = 0$. Tím je zjištěna správnost ohlášeného již fakta, že platnost rovnice $\Delta = 0$ je nezávislá na volbě ar. base (94.5).

Podle předcházejícího regulární bilineární forma f určuje isomorfní zobrazení L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ na vektorový prostor $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, které opět podle článku 79 vytvořuje kolineární zobrazení $K = \{L\}$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na duální projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$ neboli korelaci prostoru $\mathbf{P}_m$, o které řekneme stručně také, že je *vytvořena* bilineární formou f. Tímto způsobem vznikne nejobecnější korelace prostoru $\mathbf{P}_m$, neboť je-li L jakékoli isomorfní zobrazení $\mathbf{W}_{m+1}$ na $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, zvolme libovolně ar. basi (94.5) prostoru $\mathbf{P}_m$. Potom pro $0 \leqq r \leqq m$ je LA_r element prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, t. j. lineární forma ve $\mathbf{W}_{m+1}$, která ar. bodu

$$Y = y_0A_0 + y_1A_1 + \ldots + y_mA_m$$

přiřazuje číslo

$$a_{r0}y_0 + a_{r1}y_1 + \ldots + a_{rm}y_m\,;$$

při tom lineární formy LA_r $(0 \leqq r \leqq m)$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé, takže determinant (94.9) je různý od nuly a bilineární forma (94.8) je regulární. Je patrné, že tato bilineární forma vytvořuje danou korelaci K. Mimo to je zřejmé, že jestliže regulární bilineární forma f vytvořuje korelaci K prostoru $\boldsymbol{P}_m$, potom při každém $c \neq 0$ také bilineární forma cf je regulární a vytvořuje touž korelaci K, při čemž také obráceně *pouze* takové formy cf vytvořují danou korelaci K.

Singulární bilineární formy nebudeme v obecném případě probírat.

Ze souvislosti mezi pojmem ar. nadroviny a pojmem rovnice nadroviny (viz str. 21) plyne, že je-li K korelace prostoru $\boldsymbol{P}_m$ vytvořená regulární bilineární formou f a je-li $\{X\}$ libovolný bod prostoru $\boldsymbol{P}_m$, potom nadrovina $K\{X\}$ je totožná s množinou těch bodů $\{Y\}$, pro něž je $f(X, Y) = 0$.

K dané bilineární formě f můžeme určit druhou bilineární formu g tak, aby bylo identicky $g(X, Y) = f(Y, X)$; řekneme, že formy f, g jsou navzájem *transponované*. Při přechodu od f ke g podle (94.6) se v determinantu (94.9) pouze vymění řádky se sloupci, což nemá vlivu na hodnotu determinantu. Je-li tedy f regulární, je také g regulární. Předpokládejme, že f je regulární a označme K příslušnou korelaci prostoru $\boldsymbol{P}_m$; dále pak označme K_0 korelaci příslušnou transponované formě g. Potom je

$$(94.10) \qquad K_0 = \tilde{K}^{-1} \quad \text{neboli} \quad K_0^{-1} = \tilde{K}.$$

Neboť je-li $\{Y\}$ libovolně daný bod prostoru $\boldsymbol{P}_m$, budiž $\varrho = K_0\{Y\}$; tedy ϱ je množina těch bodů $\{X\}$, pro něž platí $g(X, Y) = 0$ neboli $f(X, Y) = 0$. To však znamená, že bod $\{X\}$ náleží do ϱ, právě když nadrovina $K\{X\}$ obsahuje bod $\{Y\}$; tudíž $\tilde{K}\varrho = \{Y\}$, z čehož plyne (94.10).

Podle (94.10) korelace K je involutorní, právě když splyne s K_0, t. j. jestliže obě transponované bilineární formy f, g vytvořují touž korelaci. To však znamená, že existuje číslo $c \neq 0$ tak, že je identicky $g(X, Y) = c \,.\, f(X, Y)$ neboli $f(Y, X) = c \,.\, f(X, Y)$. Potom je však též $f(X, Y) = c \,.\, f(Y, X)$ a tudíž

$$(94.11) \qquad f(X \,.\, Y) = c^2 \,.\, f(X, Y).$$

Forma f je regulární a tudíž není nulová, takže z (94.11) plyne, že $c^2 = 1$ neboli $c = \pm 1$. Zavedeme nyní tyto definice (ať už f je regulární či singulární): Bilineární forma f se jmenuje *symetrická*, je-li identicky

$$(94.12) \qquad f(Y, X) = f(X, Y);$$

jmenuje se *alternující*, je-li identicky

$$(94.13) \qquad f(Y, X) = -f(X, Y).$$

Dokázali jsme tedy, že korelace K vytvořená regulární bilineární formou f je involutorní, právě když forma f je buďto symetrická nebo alternující. Nyní korelace vytvořená bilineární formou f je vytvořena také každou bilineární formou tvaru cf $(c \neq 0)$ a není vytvořena žádnou jinou bilineární formou. Jsou tudíž dva druhy involutorních korelací: korelace vytvořené regulární symetrickou bilineární formou, které se jmenují *polární korelace* a jejichž studium tvoří hlavní obsah této kapitoly; za druhé pak korelace vytvořené regulární alternující bilineární formou, které se jmenují *nulové korelace* a jež probereme v kapitole XIV hlavně pro $m = 3$. Uvidíme ostatně, že nulové korelace existují pouze pro lichá m.

Pro $m = 1$ jsme již na str. 99 konstatovali, že involutorní korelace je buďto identická transformace přímky $\mathbf{P}_1$ nebo je to involuce na $\mathbf{P}_1$. Snadno si uvědomíme, že identická transformace přímky $\mathbf{P}_1$ je (jediná) nulová korelace na $\mathbf{P}_1$, a že involuce na $\mathbf{P}_1$ jsou totožné s polárními korelacemi na $\mathbf{P}_1$.

Poznámka. V předcházejícím textu tohoto článku jsme měli na zřeteli *reálný* projektivní prostor $\mathbf{P}_m$. Je však zřejmé, že celý obsah tohoto článku se ve všech podrobnostech přenese na $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$, jestliže všude reálná čísla nahradíme čísly komplexními. Korelace prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ je buďto reálná nebo imaginární, při čemž reálná korelace prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ je komplexním rozšířením určité korelace prostoru $\mathbf{P}_m$. Také v textu následujících článků této kapitoly si budeme všímat v podstatě pouze reálného prostoru $\mathbf{P}_m$, při čemž opět značná část výsledků bude platná i pro $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ a budeme v případě potřeby užívat přenesení na $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ některých výsledků v textu odvozených pro $\mathbf{P}_m$, pokud takové přenesení je nasnadě.

95. KVADRATICKÉ FORMY. Budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Budiž dána symetrická bilineární forma f v $\mathbf{P}_m$, regulární nebo singulární, ne však nulová. Zvolíme-li určitou ar. basi (94.5) a zavedeme-li označení (94.6), platí opět (94.8). Ježto f je symetrická, máme nyní

$$(95.1) \qquad a_{rs} = a_{sr} \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r, s \leqq m .$$

Položme

$$(95.2) \qquad f_2(X) = f(X, X)$$

a nazvěme f_2 *kvadratickou formou* v P_m nebo ve W_{m+1}. Je tedy

$$(95.3) \qquad f_2(X) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} a_{rs} x_r x_s .$$

Při dané volbě ar. base je tedy kvadratická forma (95.3) homogenní mnohočlen druhého stupně v $m + 1$ proměnných $x_0, x_1, \dots, x_m$, který má při x_r^2 $(0 \leqq r \leqq m)$ koeficient a_{rr}, ale při $x_r x_s$ $(0 \leqq r < < s \leqq m)$ koeficient $2a_{rs}$, nikoli a_{rs}. Je to zcela libovolný homogenní mnohočlen druhého stupně v proměnných $x_0, x_1, \dots, x_m$ až na to, že nejsou všecky koeficienty současně rovny nule.

Kvadratická forma f_2 je jednoznačně určena symetrickou bilineární formou f, ale také obráceně kvadratická forma f_2 jednoznačně určuje výchozí symetrickou bilineární formu f, kterou nazveme *polární formou* příslušnou kvadratické formě f_2. Neboť z (94.1) a (94.2) plyne, že

$$f(X_1 + X_2, X_1 + X_2) = f(X_1, X_1) + f(X_2, X_2) + \\ + f(X_1, X_2) + f(X_2, X_1),$$

takže podle (94.12) a (95.2) je

$$(95.4) \qquad f_2(X_1 + X_2) = f_2(X_1) + f_2(X_2) + 2f(X_1, X_2)$$

neboli

$$2f(X_1, X_2) = f_2(X_1 + X_2) - f_2(X_1) - f_2(X_2),$$

takže forma f_2 skutečně jednoznačně určuje formu f. Ježto f není nulová, *není $f_2(X)$ identicky rovné nule.* Poznamenejme ještě, že podle (94.3), (94.4) a (95.2) je

$$(95.5) \qquad f_2(cX) = c^2 \cdot f_2(X) .$$

Kvadratická forma f_2 se jmenuje *regulární* nebo *singulární* podle toho, zda příslušná bilineární forma f je regulární či singulární. Uvidíme však, že studium singulárních kvadratických forem se dá v podstatě převést na studium regulárních kvadratických forem.

Předpokládejme, že daná kvadratická forma f_2 a tudíž i příslušná polární symetrická bilineární forma je singulární. Označme $\mathbf{W}_{k+1}$ množinu všech těch ar. bodů X, pro něž je $f(X, Y) = 0$ identicky pro všechny ar. body Y. Z (94.1) a (94.3) plyne, že $\mathbf{W}_{k+1}$ je lineární soustava obsažená ve $\mathbf{W}_{m+1}$, jejíž dimense budiž $k + 1$. Ježto f není nulová, je $k < m$; ježto f je singulární, je $k \geqq 0$; tedy $0 \leqq k \leqq \leqq m - 1$. Vektorový prostor $\mathbf{W}_{k+1}$ je ar. základem k-rozměrného lineárního podprostoru v širším smyslu S_k prostoru $\mathbf{P}_m$, který nazveme *vrcholem* singulární kvadratické formy f_2. Podle věty 13.1 můžeme zvolit ar. basi (94.5) prostoru $\mathbf{P}_m$ tak, aby $A_0, A_1, \ldots, A_k$ byla ar. base prostoru S_k. Z definice prostoru S_k a ze symetrie bilineární formy f plyne potom, že v (94.6) je $a_{rs} = 0$, jakmile aspoň jeden z obou indexů r, s je $\leqq k$. Tudíž (94.8) v našem případě zní

$$f(X, Y) = \sum_{r=k+1}^{m} \sum_{s=k+1}^{m} a_{rs} x_r y_s, \tag{95.6}$$

z čehož

$$f_2(X) = \sum_{r=k+1}^{m} \sum_{s=k+1}^{m} a_{rs} x_r x_s. \tag{95.7}$$

Při tom je

$$\begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,k+1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{95.8}$$

(pro $k = m - 1$ levá strana znamená číslo a_{mm}), neboť v opačném případě by bylo možné určit čísla $x_{k+1}, \ldots, x_m$ tak, aby nebyla všecka rovna nule a aby bylo

$$a_{k+1,s} x_{k+1} + \ldots + a_{ms} x_m = 0 \quad \text{pro} \quad k + 1 \leqq s \leqq m;$$

pro $X = \sum_{r=k+1}^{m} x_r A_r$ by potom podle (95.6) bylo $f(X, Y) = 0$ identicky v Y, což je nemožné, ježto X nenáleží do $\mathbf{W}_{k+1}$.

V případě $k = m - 1$ zní (95.6) jednoduše $f(X, Y) = a x_m^2$, kde $a \neq 0$. Položme $x_m = \varphi(X)$, takže

$$f(X, Y) = a\varphi(X)\,\varphi(Y), \quad f_2(X) = a[\varphi(X)]^2, \tag{95.9}$$

kde φ je lineární forma ve $\mathbf{W}_{m+1}$ neboli ar. nadrovina v $\mathbf{P}_m$.

Budiž za druhé $0 \leqq k \leqq m - 2$, takže vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$ mod $\mathbf{W}_{k+1}$ je ar. základem perspektivy $\pi(S_k; \mathbf{P}_m)$, která je projektivním prostorem dimense $m - k - 1$; je $1 \leqq m - k - 1 \leqq \leqq m - 1$. Z (95.6) plyne, že jestliže $X_1 \equiv X_2 \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, $Y_1 \equiv Y_2 \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, je $f(X_1, Y_1) = f(X_2, Y_2)$. Jestliže pro každý element X vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ označíme stručně $[X]$ element $X \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ prostoru $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, existuje bilineární forma F ve $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ taková, že je identicky

$$F([X], [Y]) = f(X, Y). \tag{95.10}$$

Zároveň s formou f je také forma F symetrická; mimo to z (95.8) plyne, že F je regulární. Obráceně, zvolíme-li libovolně regulární symetrickou bilineární formu F, ve $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ a definujeme-li f pomocí (95.10), je f singulární symetrická bilineární forma ve $\mathbf{W}_{m+1}$ a vrcholem příslušné kvadratické formy je S_k. Bylo by ostatně snadné odvodit tyto výsledky bez užití speciální ar. base.

96. REGULÁRNÍ A SINGULÁRNÍ KVADRIKY. Budiž opět $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Nazveme *kvadrikou prostoru* $\mathbf{P}_m$ neboli $(m - 1)$-*rozměrnou kvadrikou* a označíme $\mathbf{Q}_{m-1}$ množinu všech těch bodů $\{X\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, pro něž je $f_2(X) = 0$, kde f_2 je daná kvadratická forma v $\mathbf{P}_m$. Týmž způsobem definujeme kvadriky prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$, které dělíme na *reálné* a *imaginární*, při čemž reálná kvadrika prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ je vytvořena takovou kvadratickou formou prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$, která je (ve zřejmém smyslu) *komplexním rozšířením* kvadratické formy prostoru $\mathbf{P}_m$. Ukazuje se, že komplexní theorie kvadrik je snadným přenosem části reálné theorie, že však v reálné theorii jsou další důležité momenty, které nelze přenést na komplexní theorii. Abychom zachytili všecky podstatné prvky theorie a při tom se vyhnuli nudným opakováním týchž úsudků, soustředíme se na theorii reálných kvadrik prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$, t. j. budeme vycházet od *reálné* kvadratické formy f_2, ale budeme do příslušné kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ počítat nejen *reálné*, nýbrž i *imaginární* body $\{X\}$, pro které $f_2(X) = 0$. To je potřebné mimo jiné proto, že reálná kvadrika nemusí obsahovat vůbec žádný reálný bod.

Kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ dělíme na *regulární* a *singulární* podle toho, zda je reálná nebo singulární vytvořující kvadratická forma f_2. Zároveň s kvadratickou formou f_2 také každá kvadratická forma cf_2 (kde c je číslo různé od nuly, jinak však libovolné) vytvořuje touž kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$. Na otázku, jak dalece znalost kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ obráceně určuje kvadratickou formu f_2, odpovíme později; forma f_2 nemůže ovšem být určena kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ než až na libovolný konstantní faktor $c \neq 0$. Ukáže se, že znalost všech *reálných i imaginárních* bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve všech případech vystačí k určenosti kvadratické formy f_2 až na konstantní faktor $c \neq 0$, že však znalost všech *reálných* bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ k tomuto cíli postačí sice v některých případech, ne však ve všech.

Budiž nejprve dána *singulární* kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jejím *vrcholem* rozumíme vrchol S_k příslušné kvadratické formy f_2. S_k je tedy lineární podprostor v širším smyslu dimense k prostoru $\mathbf{P}_m$, $0 \leq k \leq m - 1$. Budiž nejprve $k = m - 1$, takže $S_k = S_{m-1}$ je nadrovina; z (95.9) plyne, že bod $\{X\}$ náleží do $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když náleží do S_{m-1}, takže kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je v tomto případě vlastně totožná s nadrovinou S_{m-1}, která je jejím vrcholem; je zvykem naši $\mathbf{Q}_{m-1}$ nazývat *dvojnásobnou nadrovinou.* Budiž dále $0 \leq k \leq m - 2$. V prostoru $\mathbf{P}_m$ můžeme zvolit $(m - k - 1)$-rozměrný lineární podprostor R_h $(h = m - k - 1$, tedy $1 \leq h \leq m - 1)$ tak, aby S_k a R_h byly totálně nezávislé (viz článek 82). Je-li $A_0, A_1, \dots, A_k$ ar. base pro S_k a je-li $A_{k+1}, \dots, A_m$ ar. base pro R_h, je $A_0, A_1, \dots, A_m$ ar. base pro $\mathbf{P}_m$ a platí (95.6) až (95.8). Z toho plyne, že průnik naší kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ s prostorem R_h je regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{h-1}$ prostoru R_h a dále: *kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ se skládá ze všech těch $(k + 1)$-rozměrných lineárních podprostorů prostoru $\mathbf{P}_m$, které jsou spojením jednotlivých bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{h-1}$ s vrcholem S_m*. Kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je tedy v uvažovaném případě v podstatě totožná s regulární kvadrikou $(m - k - 1)$-rozměrného projektivního prostoru $\pi(S_k, \mathbf{P}_m)$; tuto regulární kvadriku označíme $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$ a nazveme ji *perspektivou singulární kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena singulární kvadratickou formou f_2, které přísluší bilineární forma f, je $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$ vytvořena regulární kvadratickou formou F_2, které přísluší bilineární forma F definovaná v (95.10). Pravíme, že regulární kvadratická forma F_2 prostoru $\pi(S_k; \mathbf{P}_m)$ je *perspektivou singulární kvadratické formy f_2 prostoru $\mathbf{P}_m$*.

Z předcházejícího je patrné, že studium singulárních kvadrik se v podstatě redukuje na studium regulárních kvadrik v méněrozměrných prostorech. Proto si v následujícím budeme všímat hlavně regulárních kvadrik.

Pokud se týče regulárních kvadrik, všimněme si nejprve případu $m = 1$. Je-li pro $m = 1$ dána regulární kvadratická forma f_2 a je-li f její polární forma, můžeme nejprve zvolit $A_0 \neq \mathbf{o}$ tak, že $f_2(A_0) \neq 0$ neboli $f(A_0, A_0) \neq 0$; snadno se zjistí, že existuje $A_1 \neq \mathbf{o}$ tak, že $f(A_0, A_1) = 0$; ar. body A_0, A_1 jsou zřejmě lineárně nezávislé a je $f(A_1, A_1) \neq 0$, neboť jinak by bylo identicky $f(X, A_1) = 0$ a f by byla singulární. Tedy

$$(96.1) \qquad f_2(A_0) = a_0 \neq 0\,, \quad f_2(A_1) = a_1 \neq 0\,, \quad f(A_0, A_1) = 0\,.$$

Z toho však plyne [viz (94.6) až (94.8)], že pro $X = x_0A_0 + x_1A_1$ je

$$(96.2) \qquad f_2(X) = a_0x_0^2 + a_1x_1^2\,.$$

Tedy (reálná) *regulární kvadrika* $\mathbf{Q}_0$ *na přímce* $\mathbf{P}_1$ *se skládá ze dvou různých komplexních bodů*, které jsou reálné v případě $a_0a_1 < 0$, imaginární a komplexně sdružené v případě $a_0a_1 > 0$.

Tento výsledek můžeme podle předcházejícího aplikovat na singulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 2)$ s $(m - 2)$-rozměrným vrcholem S_{m-2}. Vidíme, že taková $\mathbf{Q}_{m-1}$ se skládá ze dvou různých nadrovin ϱ_1, ϱ_2 protínajících se ve vrcholu S_{m-2}, při čemž nadroviny ϱ_1, ϱ_2 buďto jsou reálné nebo jsou imaginární a komplexně sdružené.

Poznali jsme, že singulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ s $(m - 1)$-rozměrným vrcholem je (dvojnásobná) nadrovina a že singulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ s $(m - 2)$-rozměrným vrcholem se skládá ze dvou (reálných nebo imaginárních) nadrovin. Snadno se nahlédne, že v obou uvažovaných případech je

$$(96.3) \qquad f_2(X) = \varphi_1(X) \,.\, \varphi_2(X)\,,$$

kde φ_1, φ_2 jsou lineární formy (které mohou být imaginární, i když $\mathbf{Q}_{m-1}$ je reálná). Předpokládejme obráceně, že kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ má tu vlastnost, že obsahuje jako část nadrovinu ϱ a dokažme, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární s $(m - 1)$-rozměrným nebo $(m - 2)$-rozměrným vrcholem. Mají-li f, f_2 obvyklý význam, je $f_2(X) = 0$, kdykoli $\{X\}$ náleží do ϱ, takže podle (95.4) také $f(X_1, X_2) = 0$, kdykoli $\{X_1\}$ i $\{X_2\}$ náležejí do ϱ. Zvolme A tak, že $f_2(A) \neq 0$, takže $A \neq \mathbf{o}$ a $\{A\}$ nenáleží do ϱ. Ježto $f_2(A) = f(A, A) \neq 0$, není $f(A, X) = 0$ identicky; zřejmě $f(A, X) = 0$ je rovnice nadroviny σ. Může být $\sigma = \varrho$ nebo $\sigma \neq \varrho$; v každém případě však existuje $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor S_{m-2}, který je částí obou nadrovin ϱ, σ. Budiž $\{B\}$ libovolný bod prostoru S_{m-2}. Ježto $\{B\}$ náleží do ϱ, je $f(B, Y) = 0$ pro každý bod Y nadroviny ϱ; ježto B náleží do σ, je také $f(B, A) = 0$. Avšak každý ar. bod X má tvar $X = \lambda A + \mu Z$, kde buďto $Z = \mathbf{o}$ nebo $\{Z\}$ náleží do ϱ; ježto $f(B, X) = \lambda f(B, A) + \mu f(B, Z)$, je tudíž $f(B, X) = 0$ pro každý ar. bod X. To však znamená, že kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární a že její vrchol obsahuje všecky body prostoru S_{m-2}, takže dimense vrcholu buďto je rovna $m - 2$ nebo je rovna $m - 1$.

Často jsou užitečné tyto názvy. Každý bod regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ se nazývá jejím *regulárním bodem.* Je-li kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ singulární, potom každý bod jejího vrcholu se jmenuje *singulárním bodem* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, kdežto každý jiný bod náležející do $\mathbf{Q}_{m-1}$ se opět jmenuje jejím *regulárním bodem.* Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ dvojnásobná nadrovina (neboli je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ singulární a má-li její vrchol dimensi $m - 1$), je *každý* bod na $\mathbf{Q}_{m-1}$ jejím singulárním bodem, kdežto v každém jiném případě má $\mathbf{Q}_{m-1}$ *v komplexním oboru* také regulární body, nemusí však vždy mít *reálné* regulární body.

97. POLÁRNÍ VLASTNOSTI KVADRIK. Budiž zase $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ prostoru $\mathbf{P}_m$. Je-li f symetrická bilineární forma a je-li $f(A, B) = 0$, řekneme, že body A, B jsou *konjugovány* vzhledem k f; podle (94.3) a (94.4) nezáleží na volbě ar. zástupců A, B. Ježto forma f je symetrická, je konjugovanost dvou bodů *vzájemným* vztahem. Je-li f nulová, jsou každé dva body konjugovány a obráceně; v dalším budiž f nenulová. Bilineární forma f určuje kvadratickou formu f_2 a kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$. Konjugovanost vzhledem k f, vzhledem k f_2 a vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ nechť znamená jedno a totéž.

Budiž $\mathbf{P}_k$ lineární podprostor dimense k $(1 \leq k \leq m - 1)$ prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž $\mathbf{W}_{k+1}$ ar. základ prostoru $\mathbf{P}_k$. Bilineární forma f v $\mathbf{P}_m$ určuje bilineární formu F v $\mathbf{P}_k$: pro X, Y z $\mathbf{W}_{k+1}$ je $F(X, Y) =$

$= f(X, Y)$, avšak $F(X, Y)$ je definováno pouze pro případ, že X, Y náležejí do $\mathbf{W}_{k+1}$; při tom může být F nulová, i když f není nulová. Stejně jako z f vznikne F, vznikne z kvadratické formy f_2 kvadratická forma F_2. Jestliže F je nulová, je prostor $\mathbf{P}_k$ částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ a obráceně, je-li $\mathbf{P}_k$ částí $\mathbf{Q}_{m-1}$, je F nulová. Otázkou, které lineární podprostory leží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, budeme se později podrobně zabývat. Jestliže F není nulová, protne prostor $\mathbf{P}_k$ kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ v $(k - 1)$-rozměrné kvadrice $\mathbf{Q}_{k-1}$. Dva body prostoru $\mathbf{P}_k$ jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{k-1}$; jestliže $\mathbf{P}_k$ je částí $\mathbf{Q}_{m-1}$, jsou každé dva body prostoru $\mathbf{P}_k$ vzájemně konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Z definice je zřejmé: Bod $\{A\}$ leží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když je sám k sobě konjugován. Bod $\{A\}$ je singulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když je konjugován s *každým* bodem prostoru $\mathbf{P}_m$. Jestliže bod $\{A\}$ není singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom ať už $\{A\}$ leží či neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, množina všech bodů konjugovaných s bodem $\{A\}$ tvoří nadrovinu, která se jmenuje *polární nadrovinou* bodu $\{A\}$ vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$; při tom bod $\{A\}$ leží ve své polární nadrovině, právě když leží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ (a je ovšem jejím regulárním bodem). O singulárním bodě kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ pravíme, že *nemá určitou polární nadrovinu* vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže $\{A\}$ má určitou polární nadrovinu, potom v případě singulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ tato nadrovina obsahuje všechny singulární body, t. j. prochází vrcholem kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Jestliže kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je regulární, potom také příslušná bilineární forma f je regulární. Ježto f je symetrická, vytvořuje polární korelaci K, ve které právě obrazem každého bodu je jeho polární nadrovina vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$; K se nazývá *polarita vzhledem ke* $\mathbf{Q}_{m-1}$. Ježto korelace prostoru $\mathbf{P}_m$ je vzájemně jednoznačný vztah mezi prvky prostoru $\mathbf{P}_m$ a duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, je každá nadrovina ϱ prostoru $\mathbf{P}_m$ polární nadrovinou právě jednoho bodu, který se nazývá *pólem* nadroviny ϱ vzhledem k regulární kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Jinak tomu je v případě, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární kvadrika s k-rozměrným vrcholem S_k $(0 \leq k \leq m - 1)$. Je-li nejprve $k = m - 1$, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ dvojnásobnou nadrovinou S_{m-1}; bod, který leží v S_{m-1}, nemá určitou polární nadrovinu, kdežto polární nadrovina všech jiných bodů je jedna a táž, totiž nadrovina S_{m-1}. Je-li $0 \leqq k \leqq m - 2$, potom podle článku 96 kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ se skládá z $(k+1)$-rozměrných lineárních podprostorů, které v prostoru $\pi(S_k ; \mathbf{P}_m)$ tvoří $(m - k - 2)$-rozměrnou regulární kvadriku $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$, kterou jsme nazvali perspektivou singulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Body prostoru S_k nemají určitou polární nadrovinu vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Polární nadrovina každého jiného bodu prochází prostorem S_k, je tedy prvkem prostoru, který jsme v (81.2) označili $\tilde{\pi}(S_k ; \mathbf{P}_m)$ a který je duální k prostoru $\pi(S_k ; \mathbf{P}_m)$. Dva mimo S_k ležící body mají touž polární nadrovinu ϱ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když přímka je spojující protne S_k; oba body leží potom v témž $\mathbf{P}_{k+1}$ obsahujícím S_k; tento $\mathbf{P}_{k+1}$ je prvkem („bodem") prostoru $\pi(S_k ; \mathbf{P}_m)$ a jeho polární nadrovinou vzhledem k perspektivě $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$ je právě nadrovina ϱ. Můžeme také postupovat tak, že v $\mathbf{P}_m$ zvolíme $(m - k - 1)$-rozměrný lineární podprostor R_{m-k-1} totálně nezávislý na S_k, který protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v $(m - k - 2)$-rozměrné regulární kvadrice $\mathbf{Q}_{m-k-2}$. Je-li nyní $\{A\}$ libovolný bod prostoru $\mathbf{P}_m$, který neleží v S_k, potom spojení bodu $\{A\}$ s prostorem S_k je $(k+1)$-rozměrný lineární podprostor, jenž protne R_{m-k-1} v bodě $\{B\}$; v prostoru R_{m-k-1} je polární nadrovinou bodu $\{B\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-k-2}$ určitý $(m - k - 2)$-rozměrný lineární podprostor, jehož spojením s prostorem S_k je právě polární nadrovina bodu $\{A\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Pro $m = 2$ nadrovina je přímkou a místo polární nadrovina se pro $m = 2$ často říká prostě *polára*. Pro $m = 1$ nadrovina je bodem a pojem polární nadroviny daného bodu splývá s pojmem bodu konjugovaného s tímto bodem.

Jestliže kvadrika $\mathbf{Q}_0$ prostoru $\mathbf{P}_1$ je singulární, je jejím vrcholem bod S_0 a $\mathbf{Q}_0$ se skládá z tohoto jediného bodu (dvojnásobný bod); dva body přímky $\mathbf{P}_1$ jsou navzájem konjugované vzhledem k singulární $\mathbf{Q}_0$, právě když jeden z nich splyne s vrcholem S_0. Jestliže kvadrika $\mathbf{Q}_0$ prostoru $\mathbf{P}_1$ je regulární, potom se $\mathbf{Q}_0$ skládá ze dvou různých komplexních bodů A, B, které jsou buďto oba reálné nebo jsou imaginární a komplexně sdružené. V obou případech jsou A, B dvojnými body involuce na $\mathbf{P}_1$ (hyperbolické nebo eliptické) a polarita vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$ je totožná s touto involucí.

Dva body C_1, C_2 přímky $\mathbf{P}_1$ jsou konjugované vzhledem k naší regulární $\mathbf{Q}_0$, právě když nastane jeden z těchto tří případů: (1) $C_1 =$

$= C_2 = A$; (2) $C_1 = C_2 = B$; (3) všecky čtyři body A, B, C_1, C_2 jsou navzájem různé a tvoří harmonickou čtveřici.

Budiž nyní v prostoru $\mathbf{P}_m$ ($m \geqq 2$) dána jednak kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$, jednak přímka $\mathbf{P}_1$. Budeme zkoumat, jakou vzájemnou polohu mají $\mathbf{Q}_{m-1}$ a $\mathbf{P}_1$. Může se stát, že přímka $\mathbf{P}_1$ je částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; není-li tomu tak, protne $\mathbf{P}_1$ kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_0$; to znamená, že $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{Q}_{m-1}$ mají buďto jediný (reálný) společný bod, nebo právě dva komplexní společné body, buďto oba reálné nebo oba imaginární. Přímku, která má s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ právě dva společné *reálné* body, nazveme *sečnou* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; přímku, která nemá s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ žádný reálný společný bod (která tedy protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve dvou imaginárních komplexně sdružených bodech), nazveme *nesečnou*[1]) kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; přímku, která má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ společný jediný (reálný) bod A, nazveme *tečnou* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ v tomto bodě A (a v žádném jiném bodě); posléze přímku, která leží celá na $\mathbf{Q}_{m-1}$, považujeme za *tečnu* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ v každém bodě takové přímky.

Připomeňme si nyní, že dva body přímky $\mathbf{P}_1$ jsou konjugované vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když buďto celá přímka $\mathbf{P}_1$ je částí $\mathbf{Q}_{m-1}$ nebo uvažované body jsou konjugované vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, která je průnikem $\mathbf{P}_1$ s $\mathbf{Q}_{m-1}$. Z toho plyne především, že jestliže bod A kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ leží na přímce $\mathbf{P}_1$, je $\mathbf{P}_1$ tečnou kvadriky, právě když A je vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ konjugován s každým bodem přímky $\mathbf{P}_1$. V důsledku toho, je-li A singulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je *každá* přímka jdoucí bodem A tečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$; je-li však A regulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, má bod A vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ určitou polární nadrovinu ϱ, která prochází bodem A a jmenuje se *tečná nadrovina* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodě A; přímka jdoucí regulárním bodem A kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ je tečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodě A, právě když leží v tečné nadrovině ϱ. Uvědoměme si též, že přímka $\mathbf{P}_1$ procházející bodem A na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ může být tečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodě různém od bodu A pouze tehdy, když celá přímka $\mathbf{P}_1$ je částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Pro $m = 2$ pojem nadroviny splývá s pojmem přímky; kvadrika $\mathbf{Q}_1$ má v každém svém regulárním bodě A jedinou tečnu, která je zároveň polárou bodu A vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$.

---

[1]) Název „nesečna“ pochází od J. Vyšína.

Dále platí: Bod A je sám k sobě konjugován vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Dva *různé* body A, B jsou navzájem konjugované vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když nastane jeden z následujících tří případů: (1) celá přímka AB je částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; (2) přímka AB má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ společný jediný bod, který je totožný s jedním z obou daných bodů A, B; (3) žádný z obou bodů A, B neleží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, která má s přímkou AB společné dva různé reálné nebo imaginární body H, K, při čemž A, B, H, K je harmonická čtveřice. Z toho plyne, že známe-li všecky *reálné i imaginární* body kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je tím určena též polarita vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Potom je však (viz počátek článku 101) až na konstantní faktor určena také příslušná kvadratická forma f_2 i bilineární symetrická forma f. V kterých případech postačí znalost všech *reálných bodů* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, o tom si promluvíme až v článku 101.

98. DUÁLNÍ KVADRIKY. K danému projektivnímu prostoru $\mathbf{P}_m$ jsme zavedli v článku 74 duální projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Kvadriku prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ označme $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ a nazveme ji *duální kvadrikou* prostoru $\mathbf{P}_m$. Tak jako vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ máme pojem dvojice konjugovaných bodů tohoto prostoru, máme vzhledem k duální kvadrice $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ pojem (konjugovaných bodů duálního prostoru, t. j.) konjugovaných nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$. Jako $\mathbf{Q}_{m-1}$ může být i $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ buďto regulární nebo singulární. Je-li $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ regulární, potom pro libovolně danou nadrovinu ϱ prostoru $\mathbf{P}_m$ množina všech nadrovin konjugovaných s ϱ tvoří duální nadrovinu, t. j. skládá se ze všech nadrovin procházejících určitým bodem B prostoru $\mathbf{P}_m$, který nazveme *pólem* nadroviny ϱ vzhledem k duální kvadrice $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$; přechodu od $\mathbf{P}_m$ k $\tilde{\mathbf{P}}_m$ a tedy od $\mathbf{Q}_{m-1}$ ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ tedy odpovídá přechod od polární nadroviny bodu k pólu nadroviny. Jestliže nadrovina ϱ náleží do $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$, potom její pól nazýváme jejím *bodem dotyku*; přechodu od $\mathbf{P}_m$ k $\tilde{\mathbf{P}}_m$ a tedy od $\mathbf{Q}_{m-1}$ ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ tedy odpovídá přechod od tečné nadroviny bodu na $\mathbf{Q}_{m-1}$ k bodu dotyku nadroviny náležející do $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$. Dosud jsme předpokládali, že $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ je regulární. Budiž nyní $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ singulární. Potom existuje aspoň jedna taková nadrovina σ prostoru $\mathbf{P}_m$, k níž je vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ konjugována *každá* nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$; taková nadrovina σ nutně náleží do $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ a nazývá se singulární nadrovinou duální kvadriky $\tilde{Q}_{m-1}$; každá jiná nadrovina náležející do $\tilde{Q}_{m-1}$ se jmenuje regulární nadrovina duální kvadriky $\tilde{Q}_{m-1}$. (Je-li $\tilde{Q}_{m-1}$ regulární, potom ovšem každá nadrovina náležející do $\tilde{Q}_{m-1}$ je její regulární nadrovinou.) Je-li $\tilde{Q}_{m-1}$ singulární, potom k nadrovině ϱ *zpravidla* existuje opět určitý pól B vzhledem ke $\tilde{Q}_{m-1}$, což je bod té vlastnosti, že nadrovina je konjugována s ϱ vzhledem ke $\tilde{Q}_{m-1}$, právě když obsahuje bod B; výjimku tvoří singulární nadroviny duální kvadriky, které nemají určitý pól. Je-li $\tilde{Q}_{m-1}$ singulární, potom pojem, který při přechodu od P_m, Q_{m-1} k $\tilde{P}_m$, $\tilde{Q}_{m-1}$ odpovídá pojmu vrcholu singulární kvadriky Q_{m-1}, je pojem množiny všech singulárních nadrovin duální kvadriky $\tilde{Q}_{m-1}$. Tato množina tvoří duální podprostor v širším smyslu dimense k $(0 \leqq k \leqq \leqq m - 1)$ prostoru P_m a tedy podle článku 75 se skládá ze všech nadrovin procházejících určitým lineárním podprostorem v širším smyslu dimense $m - k - 1$, který označíme Σ_{m-k-1} a který podle terminologie článku 75 je vrcholem výše zmíněného duálního podprostoru; nazveme Σ_{m-k-1} *duálním vrcholem* singulární duální kvadriky $\tilde{Q}_{m-1}$.

Nyní je účelné vsunout tuto poznámku, která je snadným důsledkem našich definic. Je-li K kolineární zobrazení prostoru P_m na prostor P'_m a je-li v P_m dána kvadrika Q_{m-1}, je její obraz Q'_{m-1} při K opět kvadrikou prostoru Q_{m-1}. Obrazy dvou bodů konjugovaných vzhledem ke Q_{m-1} jsou dva body konjugované vzhledem ke Q'_{m-1}; je-li Q_{m-1} regulární nebo singulární, platí totéž o Q'_{m-1}; obrazem vrcholu singulární Q_{m-1} je vrchol obrazu Q'_{m-1} atd. atd. Tuto poznámku můžeme zejména aplikovat na ten případ, že prostor P'_m je totožný s duálním prostorem $\tilde{P}_m$, že tedy K je korelace prostoru P_m. Zvláště důležitý je následující speciální případ.

Budiž v prostoru P_m dána *regulární* kvadrika Q_{m-1}. Jestliže každému bodu prostoru P_m přiřadíme jeho polární nadrovinu vzhledem ke Q_{m-1}, dostaneme (viz str. 110) korelaci K prostoru P_m, kterou jsme nazvali polaritou vzhledem ke Q_{m-1}. Obrazem při K každého bodu kvadriky Q_{m-1} samotné je, jak víme, jeho tečná nadrovina. Tedy *množina všech tečných nadrovin regulární kvadriky* Q_{m-1} *tvoří regulární duální kvadriku* téhož prostoru, kterou nazveme *dualisací* původní regulární kvadriky Q_{m-1}.

Budiž Q_{m-1} regulární kvadrika prostoru P_m a budiž $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ její dualisace. Budiž A libovolný bod prostoru P_m a budiž $\varrho = KA$. Ježto polarita vzhledem ke $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ vznikne z polarity vzhledem ke Q_{m-1} provedením zobrazení K, je pólem nadroviny ϱ vzhledem ke $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ ten bod B, jímž procházejí obrazy při K jednotlivých bodů polární nadroviny bodu A vzhledem ke $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$, t. j. nadroviny ϱ. To však znamená, že $B = \tilde{K}\varrho$, kde $\tilde{K}$ je duální korelace ke K. Ježto však korelace K je involutorní, je $\tilde{K} = K^{-1}$, tedy $B = K^{-1}\varrho$, t. j. $B = A$. Tudíž *pól nadroviny ϱ vzhledem k regulární kvadrice Q_{m-1} je zároveň pólem téže nadroviny vzhledem k její dualisaci $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$*.

V článku 96 jsme poznali, že singulární kvadrika Q_{m-1} s k-rozměrným vrcholem S_k $(0 \leqq k \leqq m - 1)$ pro $k = m - 1$ splyne s nadrovinou S_{m-1} (a nazývá se dvojnásobnou nadrovinou), a v případě $0 \leqq k \leqq m - 2$ se skládá z $(k + 1)$-rozměrných lineárních podprostorů procházejících prostorem S_k, které tvoří regulární kvadriku prostoru $\pi(S_k ; \mathsf{P}_m)$. Aplikujeme-li na tento výsledek princip duality, dostaneme, že singulární duální kvadrika $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ s $(m - k - 1)$-rozměrným duálním vrcholem Σ_{m-k-1} $(0 \leqq k \leqq m - 1)$ pro $k = m - 1$ splyne s množinou všech nadrovin procházejících bodem Σ_0 (takovou $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ můžeme nazvat *dvojnásobným bodem*); v případě $0 \leqq k \leqq m - 2$ se $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ skládá ze všech těch nadrovin prostoru P_m, které procházejí některým $(m - k - 2)$-rozměrným tečným prostorem určité regulární duální kvadriky projektivního prostoru Σ_{m-k-1}, t. j. $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ je množinou všech nadrovin prostoru P_m procházejících těmi nadrovinami prostoru Σ_{m-k-1}, které jsou v tomto Σ_{m-k-1} tečnými nadrovinami určité regulární Q_{m-k-2}. V případě $k = m - 2$ se naše $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ skládá ze všech nadrovin procházejících jedním ze dvou daných komplexních bodů, jež jsou buďto reálné nebo jsou imaginární a komplexně sdružené.

Vraťme se k *regulární* kvadrice Q_{m-1} prostoru P_m a předpokládejme, že Q_{m-1} je vytvořena regulární symetrickou bilineární formou f prostoru P_m. Ukážeme, jak lze vypočíst regulární symetrickou bilineární formu φ duálního prostoru $\tilde{\mathsf{P}}_m$, která vytvořuje dualisaci $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ kvadriky Q_{m-1}. Zvolme v P_m ar. basi

$$(98.1) \qquad A_0, A_1, \ldots, A_m.$$

a budiž

$$(98.2) \qquad \tilde{A}_0 , \tilde{A}_1 , \dots , \tilde{A}_m$$

duální ar. base prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Existují čísla a_{rs} $(0 \leqq r,\ s \leqq m)$ tak, že $a_{rs} = a_{sr}$ a že pro

$$(98.3) \qquad X = x_0 A_0 + \dots + x_m A_m , \qquad Y = y_0 A_0 + \dots + y_m A_m$$

je

$$(98.4) \qquad f(X , Y) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} a_{rs} x_r y_s .$$

Ježto f je regulární, je

$$(98.5) \qquad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Nyní pro

$$(98.6) \qquad \tilde{X} = \xi_0 \tilde{A}_0 + \dots + \xi_m \tilde{A}_m , \qquad \tilde{Y} = \eta_0 \tilde{A}_0 + \dots + \eta_m \tilde{A}_m$$

položme

$$(98.7) \qquad \varphi(\tilde{X} , \tilde{Y}) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} & \xi_0 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} & \xi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} & \xi_m \\ \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_m & 0 \end{vmatrix} .$$

Ukážeme, že φ je žádaná bilineární forma v $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Máme tedy dokázat, že za předpokladu $\tilde{X} \neq \mathbf{o}$, $\tilde{Y} \neq \mathbf{o}$ je $\varphi(\tilde{X} , \tilde{Y}) = 0$, právě když nadroviny $\{\tilde{X}\}$, $\{\tilde{Y}\}$ jsou konjugované vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$. Předpokládejme tedy nejprve, že $\{\tilde{X}\}$, $\{\tilde{Y}\}$ jsou konjugované vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$. Budiž $\{Z\}$ pól nadroviny $\{\tilde{X}\}$ vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$, t. j. podle předcházejícího vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$; potom nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ prochází bodem $\{Z\}$. Je-li

$$(98.8) \qquad Z = z_0 A_0 + z_1 A_1 + \dots + z_m A_m ,$$

je aspoň jedno z čísel z_0, z_1, ..., z_m různé od nuly a je jednak

$$(98.9) \qquad z_0 \eta_0 + z_1 \eta_1 + \dots + z_m \eta_m = 0 ,$$

jednak

$$(98.10) \qquad a_{r0} z_0 + a_{r1} z_1 + \dots + a_{rm} z_m + b \xi_r = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m ,$$

kde $b \neq 0$. Avšak (98.9) a (98.10) je soustava $m + 1$ lineárních homogenních rovnic o $m + 1$ neznámých $z_0, z_1, \dots, z_m, b$ s netriviálním řešením, takže determinant soustavy je roven nule a tedy podle (98.7) je $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$. Za druhé předpokládejme, že $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$, při čemž opět $\tilde{X} \neq \mathbf{o}$, $\tilde{Y} \neq \mathbf{o}$. Soustava rovnic (98.9) a (98.10) má tedy determinant rovný nule a tudíž má netriviální řešení $z_0, z_1, \dots, z_m, b$. Není možné, aby bylo $Z = \mathbf{o}$, kde Z má význam (98.8), neboť potom by bylo $b \neq 0$ a rovnice (98.10) by daly $\tilde{X} = \mathbf{o}$. Také není možné, aby bylo $b = 0$, neboť potom by bylo $Z \neq \mathbf{o}$ a z rovnic (98.10) by plynulo, že determinant nalevo v (98.5) by byl roven nule. Je tudíž $Z \neq \mathbf{o}$, $b \neq 0$, načež z (98.10) plyne, že $\{\tilde{X}\}$ je polární nadrovina bodu $\{Z\}$, t. j. že $\{Z\}$ je pól nadroviny $\{\tilde{X}\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a tudíž i vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$. Avšak podle (98.9) bod $\{Z\}$ leží v nadrovině $\{\tilde{Y}\}$, takže $\{\tilde{X}\}$ a $\{\tilde{Y}\}$ jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Můžeme se ptát, jaký význam má forma (98.7), je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ singulární kvadrika s k-rozměrným vrcholem S_k, tedy $0 \leq k \leq m - 1$. Je-li především $k = 0$, t. j. je-li S_0 bod, je $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ pro $\tilde{X} \neq \mathbf{o}$, $\tilde{Y} \neq \mathbf{o}$, právě když aspoň jedna z obou nadrovin $\{\tilde{X}\}$, $\{\tilde{Y}\}$ prochází bodem S_0. Neboť $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ podle (98.7) znamená, že soustava rovnic (98.9) a (98.10) má netriviální řešení $z_0, z_1, \dots, z_m, b$, ve kterém je buďto $b = 0$ nebo $b \neq 0$. Je-li však $b = 0$, potom v (98.8) je $Z \neq \mathbf{o}$, (98.9) znamená, že nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ prochází bodem $\{Z\}$, a (98.10), kde $b = 0$, znamená, že bod $\{Z\}$ je singulární, t. j. že $\{Z\} = S_0$, takže nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ prochází bodem S_0. Jestliže za druhé je $b \neq 0$, je opět $Z \neq \mathbf{o}$, a (98.10) znamená, že nadrovina $\{\tilde{X}\}$ je polární nadrovinou bodu $\{Z\}$, takže $\{\tilde{X}\}$, jako každá polární nadrovina, prochází singulárním bodem S_0. Je-li nyní $1 \leq k \leq m - 1$, je $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ identicky. Neboť ježto singulární body tvoří nyní celý prostor S_k, obsahuje každá nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ aspoň jeden singulární bod $\{Z\}$, takže soustava (98.9) a (98.10) má netriviální řešení (ve kterém $b = 0$, ale na tom nezáleží) a determinant napravo v (98.7) je roven nule, t. j. $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$.

99. FORMÁLNĚ A BODOVĚ REÁLNÉ KVADRIKY. Kvadratickou formu f_2 nazveme *kladnou*, jestliže $f_2(X) \geq 0$ pro každý ar. bod X; nazveme f_2 *zápornou*, jestliže $f_2(X) \leq 0$ pro každý ar. bod X. Ježto f_2

není identicky rovna nule, není možné, aby jedna a táž f_2 byla zároveň kladná i záporná; naproti tomu se může stát, že daná f_2 není ani kladná, ani záporná.

Kvadratickou formu f_2 nazveme *definitně kladnou*, je-li $f_2(X) > 0$ pro každý ar. bod $X \neq \mathbf{o}$; *definitně zápornou*, je-li $f_2(X) < 0$ pro každý ar. bod $X \neq \mathbf{o}$, *definitní*, je-li f_2 buďto definitně kladná nebo definitně záporná. Zřejmě každá definitně kladná f_2 je zároveň kladná, každá definitně záporná f_2 je zároveň záporná. Na otázku, do jaké míry je tomu také tak obráceně, dává odpověď:

VĚTA 99.1. *Budiž f_2 kladná nebo záporná kvadratická forma. Potom f_2 je definitní, právě když je regulární.*

DŮKAZ. Je-li f_2 singulární, má reálný singulární bod $\{X\}$ a je $f_2(X) = 0$, $X \neq \mathbf{o}$, takže f_2 nemůže být definitní. Obráceně nechť f_2 není definitní a pro určitost nechť f_2 je kladná. Ježto f_2 není definitní, existuje bod $\{A\}$ tak, že $f_2(A) = 0$. Stačí dokázat, že $\{A\}$ je singulární. Nechť naopak $\{A\}$ je regulární. Potom existuje bod $\{B\}$ tak, že $f(A, B) = c \neq 0$; ježto $f_2(A) = f(A, A) = 0$, je $\{B\} \neq \{A\}$. Pro libovolné t je podle (94.4) a (95.4), ježto $f_2(A) = 0$,

$$f_2(A + tB) = 2t \,.\, f(A, B) + t^2 \,.\, f(B) = t(2c + dt),$$

kde $d = f_2(B)$. Zřejmě lze zvolit reálné číslo t tak, aby bylo $t(2c + dt) < 0$, t. j. $f_2(A + tB) < 0$; to je však nemožné, ježto f_2 je kladná.

Kvadratickou formu f_2 nazveme *semidefinitní*, je-li kladná nebo záporná, není-li však definitní; f_2 nazveme *indefinitní*, není-li ani kladná, ani záporná. Každá kvadratická forma f_2 náleží tudíž do právě jedné ze tří kategorií: definitní, semidefinitní, indefinitní. Podle věty 99.1 prvá kategorie obsahuje pouze regulární a druhá pouze singulární formy; třetí kategorie obsahuje jak regulární, tak i singulární formy.

VĚTA 99.2. *Je-li kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2, potom $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje aspoň jeden regulární reálný bod, právě když f_2 je indefinitní.*

DŮKAZ. Je-li f_2 definitní, potom $\mathbf{Q}_{m-1}$ zřejmě neobsahuje vůbec žádný reálný bod. Je-li f_2 semidefinitní, plyne z důkazu věty 99.1, že každý reálný bod kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární. Budiž posléze f_2 indefinitní. Potom existují body $\{A\}$, $\{B\}$ tak, že

$$(99.1) \qquad f_2(A) > 0 , \qquad f_2(B) < 0 .$$

Podle 95.4 je

$$f_2(A + tB) = f_2(A) + 2t \, . \, f_2(B) + t^2 \, . \, f_2(B) \, .$$

Z toho plyne podle (99.1), že přímka AB protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v právě dvou reálných bodech $\{C_1\}$, $\{C_2\}$. Bod $\{C_1\}$ je *regulárním* bodem kvadriky Q_{m-1}, neboť každá přímka procházející singulárním bodem podle str. 112 je tečnou kvadriky, má tedy s $\mathbf{Q}_{m-1}$ buďto jediný společný bod nebo je celá částí kvadriky.

Kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme: (1) *formálně reálnou*, neobsahuje-li žádný reálný regulární bod; (2) *bodově reálnou*, obsahuje-li nějaký reálný regulární bod. Regulární formálně reálná kvadrika neobsahuje tedy vůbec žádný reálný bod; množina všech reálných bodů singulární formálně reálné kvadriky není prázdná a je totožná s vrcholem kvadriky. Z toho plyne snadno, že polarita vzhledem k formálně reálné $\mathbf{Q}_{m-1}$, která není dvojnásobnou nadrovinou, nikterak není určena znalostí množiny všech reálných bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. V článku 101 poznáme, že u bodově reálné $\mathbf{Q}_{m-1}$ je tomu naopak.

Z vět 99.1 a 99.2 plyne

VĚTA 99.3. *Kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ budiž vytvořena kvadratickou formou f_2. Potom $\mathbf{Q}_{m-1}$ je bodově reálná, právě když f_2 je indefinitní; $\mathbf{Q}_{m-1}$ je regulární a formálně reálná, právě když f_2 je definitní; $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární a formálně reálná, právě když f_2 je semidefinitní.*

VĚTA 99.4. *Singulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, jejíž vrchol má dimensi $m - 1$, je formálně reálná.* Neboť taková kvadrika podle článku 96 neobsahuje vůbec žádné (ani reálné, ani imaginární) regulární body.

Všimněme si specielně kvadriky $\mathbf{Q}_0$ prostoru $\mathbf{P}_1$ vytvořené kvadratickou formou f_2. Jestliže $\mathbf{Q}_0$ je singulární, potom podle věty 99.4 je $\mathbf{Q}_0$ formálně reálná, takže podle věty 99.3 je f_2 semidefinitní. Jestliže $\mathbf{Q}_0$ je regulární, skládá se $\mathbf{Q}_0$ ze dvou různých komplexních bodů C_1, C_2, které jsou buďto oba reálné ($\mathbf{Q}_0$ je bodově reálná) nebo jsou imaginární a komplexně sdružené (Q_0 je formálně reálná); v prvém případě je Q_0 indefinitní, ve druhém definitní.

Budiž nyní dána kvadrika Q_{m-1} prostoru P_m vytvořená kvadratickou formou f_2 a tudíž také každou kvadratickou formou tvaru cf_2, kde $c \neq 0$ je libovolná konstanta. Při dané volbě formy f_2 můžeme ty body $\{X\}$ prostoru P_m, které neleží na Q_{m-1}, rozdělit na dvě třídy podle toho, zda je $f_2(X) > 0$ či $f_2(X) < 0$; z (95.5) plyne, že nezáleží na volbě ar. zástupce g. bodu $\{X\}$. Nazveme *kladnými vzhledem ke* Q_{m-1} ty body $\{X\}$, pro něž je $f_2(X) > 0$, *zápornými vzhledem ke* Q_{m-1} ty body $\{X\}$, pro něž je $f_2(X) < 0$; řekneme potom, že kvadrika Q_{m-1} je *orientována*, čímž míníme právě rozlišení bodů $\{X\}$ ležících mimo Q_{m-1} na kladné a záporné. Určitěji mluvíme o orientaci *vytvořené* formou f_2; jsou zřejmě právě dvě různé orientace kvadriky Q_{m-1}, při čemž pro $c > 0$ orientace vytvořená formou cf_2 je táž jako orientace vytvořená formou f_2, kdežto pro $c < 0$ dostáváme *opačnou orientaci*.

Je-li P_k lineární podprostor prostoru P_m, který není celý obsažen v Q_{m-1}, potom P_k protne Q_{m-1} v kvadrice Q_{k-1}. Je-li Q_{m-1} vytvořena kvadratickou formou f_2, je Q_{k-1} vytvořena kvadratickou formou F_2, pro kterou je $F_2(X) = f_2(X)$ při všech $\{X\}$ prostoru P_k a F_2 se liší od f_2 pouze tím, že $f_2(X)$ je definováno i tam, kde $F_2(X)$ definováno není. Proto forma f_2, která orientuje kvadriku Q_{m-1}, orientuje zároveň také kvadriku Q_{k-1}; pravíme potom, že Q_{k-1} je *souhlasně orientována* s Q_{m-1}. Je-li dána určitá orientace pro Q_{m-1}, potom pro každý P_k vnořený do P_m, který není částí Q_{m-1} a který tudíž protne P_k v kvadrice Q_{k-1}, uvažujeme vždy takovou Q_{k-1} v orientaci souhlasné s orientací danou pro Q_{m-1}. Poznamenejme ještě, že je-li forma f_2 definitní, je zřejmě také F_2 definitní; je-li f_2 semidefinitní, je buďto definitní nebo semidefinitní; je-li však f_2 indefinitní, může F_2 náležet do kterékoli z našich tří kategorií.

Je-li kvadrika Q_{m-1} formálně reálná, potom podle věty 99.3 buďto množina bodů kladných vzhledem ke Q_{m-1} nebo množina bodů záporných vzhledem ke Q_{m-1} je prázdná, kdežto u bodově reálné Q_{m-1} není prázdnou žádná z obou množin. Je-li zejména $m = 1$, potom Q_0 je bodově reálná, právě když se skládá ze dvou různých reálných bodů; jestliže tedy na přímce P_1, jejíž částí je Q_0, máme dva body A_0, A_1, z nichž jeden je kladný a druhý záporný vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, skládá se $\mathbf{Q}_0$ ze dvou různých reálných bodů. Předpokládejme nyní, že na $\mathbf{P}_1$ jsou dány dva body A_0, A_1 konjugované vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, z nichž žádný neleží na $\mathbf{Q}_0$. Potom jsou body A_0, A_1 různé a vzhledem k ar. basi A_0, A_1 má vytvořující kvadratická forma f_2 tvar (96.2). Jestliže f_2 je indefinitní, plyne z (96.2) snadno, že jeden z bodů A_0, A_1 je kladný a druhý záporný vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$; mimo to je f_2 jistě regulární, takže f_2, není-li indefinitní, je nutně definitní a $\mathbf{Q}_0$ neobsahuje žádný reálný bod.

Z předcházejících úvah snadno plyne správnost následujících dvou vět.

VĚTA 99.5. *Jestliže ze dvou různých bodů A, B prostoru $\mathbf{P}_m$ jeden je kladný a druhý záporný vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, je přímka AB sečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$.*

VĚTA 99.6. *Jestliže dva různé body A, B prostoru $\mathbf{P}_m$ jsou konjugovány vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, ale žádný z nich neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, je přímka AB buďto sečnou nebo nesečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$* (tedy není tečnou); *v prvém případě je jeden z bodů A, B kladný a druhý záporný vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, ve druhém jsou buďto oba kladné nebo oba záporné vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$.*

Poznámka. Bodově reálná $\mathbf{Q}_0$ se skládá ze dvou různých reálných bodů A_0, A_1 a obráceně libovolná dvojice různých reálných bodů tvoří bodově reálnou kvadriku $\mathbf{Q}_0$. Je-li $X = x_0A_0 + x_1A_1$ a položíme-li $f_2(X) = x_0x_1$, potom kvadratická forma f_2 vytvořuje $\mathbf{Q}_0$. Tvar formy f_2 ukazuje bezprostředně, že z obou intervalů A_0A_1 (viz článek 78) jeden obsahuje mimo A_0, A_1 právě ještě všecky body kladné vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, druhý pak právě ještě všecky body záporné vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$. Změna orientace $\mathbf{Q}_0$ má pouze ten vliv, že oba intervaly A_0A_1 se mezi sebou vymění.

100. SIGNATURA KVADRATICKÉ FORMY. Budiž dána kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořená kvadratickou formou f_2. Budeme se zabývat takovými ar. basemi

$$A_0, A_1, \ldots, A_m \tag{100.1}$$

prostoru P_m, které dávají kvadratické formě f_2 a tudíž i příslušné bilineární formě f jednoduchý tvar, který nás povede k důležitým důsledkům. Pravíme, že *ar. base* (100.1) je *polární* vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ (nebo vzhledem k f_2, nebo vzhledem k f), jestliže

$$(100.2) \qquad f(A_r, A_s) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r, s \leqq m\,;\; r \neq s$$

neboli jestliže každé dva body $\{A_r\}$, $\{A_s\}$, $r \neq s$ jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li (100.1) polární base, položme

$$(100.3) \qquad \varepsilon_r = f_2(A_r) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m\,.$$

Potom pro

$$X = x_0 A_0 + \ldots + x_m A_m\,, \qquad Y = y_0 A_0 + \ldots + y_m A_m$$

podle (94.6) až (94.8) a (100.2), (100.3) je

$$(100.4) \qquad f_2(X) = \varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2\,,$$

$$(100.5) \qquad f(X, Y) = \varepsilon_0 x_0 y_0 + \varepsilon_1 x_1 y_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m y_m\,.$$

Označme: n počet těch r $(0 \leqq r \leqq m)$, pro něž je $\varepsilon_r = 0$; p počet těch r, pro něž je $\varepsilon_r > 0$; q počet těch r, pro něž je $\varepsilon_r < 0$. Číslo n nazveme *nulitou* a dvojici (p, q) *signaturou*[1]) kvadratické formy f_2 vzhledem k polární basi (100.1). Zřejmě

$$(100.6) \qquad n + p + q = m + 1\,.$$

Jestliže místo formy f_2 vezmeme formu cf_2, kde $c \neq 0$, potom místo ε_r dostaneme $c\varepsilon_r$, takže nulita zůstane beze změny a můžeme mluvit o *nulitě kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$. Signatura (p, q) zůstane beze změny pro $c > 0$, kdežto pro $c < 0$ přejde v signaturu (q, p); můžeme tedy mluvit o *signatuře* (p, q) *orientované kvadriky* $\mathbf{Q}^{\bullet}_{m-1}$, která při přechodu k opačné orientaci přejde v signaturu (q, p).

VĚTA 100.1. *Je-li* (100.1) *polární ar. base pro kvadriku* $\mathbf{Q}_{m-1}$, *potom pro* $0 \leqq r \leqq m$ *bod* $\{A_r\}$ *buďto neleží na kvadrice* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *nebo je jejím singulárním bodem.*

DŮKAZ. Podle (100.4) je $f_2(A_r) = \varepsilon_r$, takže $\{A_r\}$ leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když $\varepsilon_r = 0$; potom však pro $Y = y_0 A_0 + y_1 A_1 + \ldots + y_m A_m$ podle (100.5) je $f_2(A_r, Y) = \varepsilon_r y_r$, takže v případě $\varepsilon_r = 0$ bod A_r je singulární.

---

[1]) Obvykle se v literatuře dává název signatura číslu $p - q$.

VĚTA 100.2. *Zvolme ar. bod A_0 tak, že $\{A_0\}$ buďto neleží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ nebo je jejím singulárním bodem. Potom existuje ar. base* (100.1) *polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a obsahující daný A_0.*

DŮKAZ. Pro $m = 1$ je to správné, neboť je-li $\{A_0\}$ singulární bod pro Q_0, je $f(A_0, A_1) = 0$ pro každou volbu ar. bodu A_1 (lineárně nezávislého na A_0, aby vznikla ar. base), a je-li $f_2(A_0) \neq 0$, existuje právě jeden bod $\{A_1\}$ tak, že $f(A_0, A_1) = 0$, při čemž zřejmě $\{A_0\} \neq$ $\neq \{A_1\}$. Ježto tedy věta platí pro $m = 1$, můžeme při obecném důkaze předpokládat, že $m \geqq 2$ a že obdobná věta pro $(m - 1)$-rozměrný projektivní prostor je dokázána. Jestliže nyní $\{A_0\}$ neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, budiž ϱ jeho polární nadrovina, která, jak víme, neprochází daným bodem; jestliže však $\{A_0\}$ je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, zvolme nadrovinu ϱ libovolně až na podmínku, aby neprocházela bodem $\{A_0\}$. Je-li nyní

$$A_1, \ldots, A_m \tag{100.7}$$

libovolná ar. base pro ϱ, potom A_0 spolu se (100.7) tvoří ar. basi pro $\mathbf{P}_m$ a jistě je $f(A_0, A_r) = f(A_r, A_0) = 0$ pro $1 \leqq r \leqq m$. Jestliže nyní ϱ je částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, jsou každé dva body nadroviny ϱ konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže platí (100.2). Jestliže však ϱ není částí $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom ϱ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$ a ježto dva body nadroviny ϱ jsou podle článku 97 konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$, bude platit (100.2), zvolíme-li za (100.7) ar. basi pro ϱ polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$, která podle předpokladu existuje.

Následující věta má za následek, že nulita kvadratické formy f_2 vzhledem k polární ar. basi (100.1) je nezávislá na volbě této ar. base. Při formulaci věty je už přihlédnuto k této nezávislosti.

VĚTA 100.3. *Nulita n kvadratické formy f_2 je rovna nule, je-li f_2 regulární. Je-li však f_2 singulární, je $n > 0$ a dimense vrcholu formy f_2 je rovna $n - 1$.*

DŮKAZ. Ze (100.5) plyne, že pro

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

bod $\{X\}$ je singulární, právě když

$$\varepsilon_0x_0 = \varepsilon_1x_1 = \ldots = \varepsilon_mx_m = 0,$$

t. j. právě když $x_r = 0$ pro každý takový index r $(0 \leqq r \leqq m)$, pro který je $\varepsilon_r \neq 0$. Je-li $n = 0$, je $\varepsilon_r = 0$ pro všecka r $(0 \leqq r \leqq m)$, takže f_2 nemá žádný singulární bod, t. j. f_2 je regulární. Je-li $n > 0$, existuje právě n takových indexů r, pro něž $\varepsilon_r = 0$; pro určitost budiž $\varepsilon_r = 0$ pro $0 \leqq r \leqq n - 1$; $\varepsilon_r \neq 0$ pro $n \leqq r \leqq m$. Potom $\{X\}$ je singulární, právě když X je lineárně závislý na $A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}$; f_2 je tudíž singulární a dimense vrcholu je rovna $n - 1$. Tím je důkaz skončen; z něho plyne, že platí:

VĚTA 100.4. Je-li (100.1) *polární ar. base pro singulární kvadratickou formu* f_2, *potom* (100.1) *obsahuje jako část ar. basi vrcholu formy* f_2. Jestliže nulita n je rovna jedné, má f_2 jediný singulární bod a smysl věty v tomto případě je ten, že existuje index r $(0 \leqq r \leqq m)$ tak, že $\{A_r\}$ je singulárním bodem pro f_2.

Ze (100.4) plyne bezprostředně:

VĚTA 100.5. *Budiž* (p, q) *signatura kvadratické formy* f_2 *prostoru* $\mathbf{P}_m$. *Forma* f_2 *je: kladná, právě když* $q = 0$, *záporná, právě když* $p = 0$; *definitní kladná, právě když* $p = m + 1$; *definitní záporná, právě když* $q = m + 1$.

Poznámka. Všimněme si případu $m = 1$. Podle věty 100.3 je $n = 0$ pro regulární f_2, $n = 1$ pro singulární f_2. Je-li f_2 singulární, potom podle (100.6) je $p + q = 1$ a máme dvě možné signatury (1,0); (0,1), z nichž podle věty 100.5 nastane prvá pro kladnou f_2, druhá pro zápornou f_2. Je-li f_2 regulární, potom podle (100.6) je $p + q = 2$ a máme tři možné signatury (2,0); (1,1); (0,2). Podle věty 100.5 signatura je (2,0), právě když f_2 je definitní kladná; signatura je (0,2), právě když f_2 je definitní záporná. Tudíž (viz větu 99.1) signatura je (1,1), právě když f_2 je indefinitní.

Nyní vyslovíme základní větu.

VĚTA 100.6. *Signatura* (p, q) *kvadratické formy* f_2 *prostoru* $\mathbf{P}_m$ *je nezávislá na volbě polární ar. base* (100.1).

DŮKAZ provedeme zatím pouze pro regulární f_2. Ježto pro $m = 1$ správnost naší věty (ať už f_2 je regulární či singulární) plyne z předcházející poznámky, můžeme při důkaze předpokládat, že $m \geqq 2$

a že pro dimensi $m - 1$ je (aspoň pro regulární formy) věta už dokázána. Důkaz potom rozdělíme na čtyři části.

I. Především je zřejmé, že signatura zůstane beze změny při změně pořadí ar. bodů, ze kterých se skládá polární ar. base.

II. Z věty 100.3 plyne, že f_2 je regulární, právě když ve (100.4) je $\varepsilon_r \neq 0$ pro všecka r $(0 \leqq r \leqq m)$.

III. Při dané ar. basi (100.1) polární vzhledem k f_2 označme ϱ polární nadrovinu bodu $\{A_0\}$ vzhledem k f_2. Označme F_2 kvadratickou formu prostoru ϱ, která vznikne z f_2, omezíme-li se na ty ar. body X, pro něž $\{X\}$ leží v ϱ; z vyjádření (100.4) formy f_2 vzhledem k její polární ar. basi (100.1) zřejmě vznikne vyjádření formy F_2 vzhledem k její polární ar. basi (100.7), položíme-li $x_0 = 0$. Z II plyne, že zároveň s formou f_2 také forma F_2 je regulární a ježto ϱ je projektivní prostor dimense $m - 1$, je signatura formy F_2 nezávislá na volbě její polární ar. base (100.7). Z toho plyne snadno, že signatura formy f_2 zůstane beze změny, jestliže polární ar. basi (100.1) změníme tak, aby se nezměnil g. bod $\{A_0\}$. Můžeme tedy beze změny signatury formy f_2 nahradit ar. body (100.7) kterýmikoli jinými ar. body

$$A'_1, \ldots, A'_m, \tag{100.8}$$

pokud jen (100.8) je opět polární ar. base pro F_2. Při tom podle věty (100.2) můžeme docílit toho, aby bod $\{A'_m\}$ splynul s libovolně daným bodem $\{C\}$ nadroviny ϱ, pro který $F_2(C) \neq 0$ neboli $f_2(C) \neq 0$.

IV. Buďtež nyní (100.1) a

$$B_0, B_1, \ldots, B_m \tag{100.9}$$

libovolné dvě ar. base polární vzhledem k f_2. Máme dokázat, že f_2 má touž signaturu jak vzhledem ke (100.1), tak i vzhledem ke (100.9). To plyne ze III, je-li $\{A_0\} = \{B_0\}$. Budiž tedy $\{A_0\} \neq \{B_0\}$ a označme ϱ, σ polární nadroviny bodů $\{A_0\}$, $\{B_0\}$ vzhledem k f_2; ježto f_2 je regulární, je $\varrho \neq \sigma$ a průnik φ nadrovin ϱ, σ je lineární podprostor v širším smyslu dimense $m - 2$ základního prostoru $\boldsymbol{P}_m$; φ je tedy nadrovinou $(m - 1)$-rozměrného projektivního prostoru ϱ. Má-li však F_2 týž význam jako ve III, víme, že F_2 je regulární forma v ϱ, takže (viz str. 104) existuje ve φ bod $\{C\}$ tak, že $F_2(C) \neq 0$, t. j. že $f_2(C) \neq 0$. Ježto bod $\{C\}$ náleží do obou nadrovin ϱ, σ a ježto $f_2(C) \neq 0$, podle závěru části III signatura f_2 se nezmění ani při přechodu od polární ar. base (100.1) k polární ar. basi tvaru

$$A_0, A'_1, \dots, A'_m, \tag{100.10}$$

ve které $\{A'_1\} = \{C\}$, ani při přechodu od ar. base (100.9) k ar. basi

$$B_0, B'_1, \dots, B'_m, \tag{100.11}$$

ve které $\{B'_1\} = \{C\}$. Ježto však $\{A'_1\} = \{B'_1\}$, plyne z I a III, že signatura f_2 se nezmění při přechodu od (100.10) ke (100.11), čímž je důkaz hotov.

Že věta 100.6, kterou jsme právě dokázali pro regulární f_2, platí též pro singulární f_2, je zřejmým důsledkem následující věty.

VĚTA 100.7. *Budiž f_2 singulární kvadratická forma prostoru $\mathbf{P}_m$ s k-rozměrným vrcholem S_k, tedy $0 \leqq k \leqq m - 1$. Je-li $k = m - 1$, je forma f_2 semidefinitní a její signatura je rovna* (1,0) *nebo* (0,1) *podle toho, zda f_2 je kladná či záporná. Je-li $0 \leqq k \leqq m - 2$, takže* (viz str. 107) *v $(m - k - 1)$-rozměrném projektivním prostoru $\pi(S_k\,;\,\mathbf{P}_m)$ existuje regulární kvadratická forma F_2, která je perspektivou formy f_2, je signatura singulární formy f_2 rovna signatuře regulární formy F_2.*

DŮKAZ. Pro $k = m - 1$ je $n = m$ podle věty 100.3, tedy $p + q = 1$ podle (100.6) a správnost našeho tvrzení plyne z vět 99.3, 99.4 a 100.5. Budiž tedy $0 \leqq k \leqq m - 2$. Je-li (100.1) polární ar. base vzhledem k f_2, potom, ježto signatura zřejmě nezávisí na pořadí ar. bodů (100.1), můžeme podle věty 100.3 předpokládat, že $\varepsilon_r = 0$, právě když $0 \leqq r \leqq k - 1$, takže pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + \dots + x_mA_m$ je $f_2(X) = \varepsilon_k x_k + \dots + \varepsilon_m x_m$ a $f_2(X) = F_2([X])$, kde $[X] = X \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, je-li $\mathbf{W}_{k+1}$ ar. base pro S_k. Zřejmě F_2 je perspektivou formy f_2 a signatura formy f_2 vzhledem k ar. basi (100.1) prostoru $\mathbf{P}_m$ je rovna signatuře formy F_2 nejprve vzhledem k ar. basi

$$A_{k+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}, \dots, A_m \bmod \mathbf{W}_{k+1};$$

ale ježto F_2 je regulární forma ve $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, víme, že její signatura je na této ar. basi nezávislá.

Poznamenejme ještě, že základní věta 100.6 se v algebře nazývá *zákon setrvačnosti kvadratických forem.*

101. PROJEKTIVNÍ KLASIFIKACE KVADRIK. Budiž dána kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$. Víme (viz str. 113), že znalost všech reálných i imaginárních bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ stačí k jednoznačnému určení polarity vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a všimli jsme si také (viz str. 119), že jestliže $\mathbf{Q}_{m-1}$ je formálně reálná a není dvojnásobnou nadrovinou, znalost všech reálných bodů kvadriky k tomu cíli nestačí. Jestliže však $\mathbf{Q}_{m-1}$ je bodově reálná, potom už znalost všech jejích reálných bodů stačí k určení polarity. Neboť budiž nejprve A bod, který leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$ a je tedy sám k sobě konjugován. Bod $X \neq A$ je konjugován k A, právě když přímka AX je tečnou kvadriky, t. j. právě když tato přímka je buďto celá částí kvadriky nebo s ní má společný pouze bod A. Za druhé nechť bod A prostoru $\mathbf{P}_m$ neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2, je tato forma podle věty 99.2 indefinitní, takže existuje bod B tak, že z čísel $f_2(A)$, $f_2(B)$ jedno je kladné a druhé záporné. Podle věty 99.5 protne přímka AB kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve dvou různých reálných bodech H, K. Je-li C bod přímky AB harmonicky sdružený s bodem A vzhledem k bodům H, K, je C konjugován s bodem A vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Body H, K jsou regulární body kvadriky (ježto přímka AB, která je obsahuje, není tečnou) a mají tudíž určité tečné nadroviny ϱ, σ a je $\varrho \neq \sigma$, neboť na př. bod H leží v ϱ, ale neleží v σ; znalost všech reálných bodů kvadriky podle předcházejícího stačí k určení nadrovin ϱ, σ. Ježto H je jediný bod přímky AB konjugovaný s H a ježto H neleží v σ, nemá $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor v širším smyslu $\mathbf{P}_{m-2}$, který je průnikem nadrovin ϱ a σ, společného bodu s přímkou AB, a spojení $\mathbf{P}_{m-2}$ s bodem C je nadrovina, která je patrně polární nadrovinou uvažovaného bodu A.

Známe-li polaritu vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, je tím určena jednoznačně až na libovolný číselný faktor $c \neq 0$ vytvořující kvadratická forma f_2 a tedy i příslušná bilineární forma f. Neboť především je polaritou určen pojem ar. base polární vzhledem k f_2. Je-li (100.1) taková ar. base, platí (100.5), takže rovnice polární nadroviny bodu $\{A + A_1 + \dots + A_m\}$ je $\varepsilon_0 x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m = 0$, z čehož plyne podle (100.4), že skutečně je f_2 určena až na číselný faktor.

Je-li kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořena kvadratickou formou f_2 a je-li $K = \{L\}$ kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$, potom existuje kvadratická forma g_2 tak, že pro každý ar. bod X prostoru P_m je $g_2(LX) = f_2(X)$; píšeme stručně $g_2 = Lf_2$. Kvadratická forma g_2 vytvořuje kvadriku Q'_{m-1} prostoru P'_m. Je-li dána pouze kvadrika Q_{m-1} a kolineární zobrazení K, jsou kvadratické formy f_2, g_2 a isomorfismus L určeny pouze až na číselný faktor $c \neq 0$, kvadrika Q'_{m-1} je však určena jednoznačně a je-li Q_{m-1} orientována, potom této orientaci odpovídá zcela určitá orientace kvadriky Q'_{m-1}. Pravíme, že Q_{m-1} *přejde při kolineárním zobrazení* K v Q'_{m-1}, což tedy znamená, že nejen obrazy všech reálných bodů kvadriky Q_{m-1} při kolineárním zobrazení K vyplní množinu všech reálných bodů kvadriky Q'_{m-1}, nýbrž, že také obrazy všech reálných i imaginárních bodů kvadriky Q_{m-1} při komplexním rozšíření kolineárního zobrazení K vyplní množinu všech reálných i imaginárních bodů kvadriky Q'_{m-1}. Víme-li pouze, že množina všech reálných bodů kvadriky Q_{m-1} má při kolineárním zobrazení K za obraz množinu všech reálných bodů kvadriky Q'_{m-1}, můžeme podle předcházejícího tvrdit, že Q_{m-1} přejde v Q'_{m-1} v tom případě, že Q_{m-1} (a tudíž také Q'_{m-1}) je bodově reálná.

V článku 100 jsme definovali pojem nulity a signatury kvadratické formy f_2 nejprve vzhledem k určité polární ar. basi, ale ve větách 100.3 a 100.6 jsme poznali, že pojmy nulity a signatury jsou nezávislé na volbě polární ar. base. Dále víme, že při přechodu od formy f_2 k formě cf_2 ($c \neq 0$) nulita se nemění, a signatura (p, q) se nemění při $c > 0$ a přejde v signaturu (q, p) při $c < 0$. Proto jsme již na str. 122 zavedli výrazy *nulita kvadriky* a *signatura orientované kvadriky.* Je účelné rozumět *signaturou neorientované kvadriky* obvyklou dvojici (p, q) s tou dohodou, že tentokrát nezáleží na pořadí obou čísel, ze kterých se dvojice skládá; můžeme také pro jasnost mluvit o *neorientované signatuře.*

VĚTA 101.1. *Jestliže (orientovaná) kvadrika* Q_{m-1} *prostoru* P_m *při kolineárním zobrazení* K *přejde v (orientovanou) kvadriku* Q'_{m-1} *prostoru* P'_m, *mají* Q_{m-1} *a* Q'_{m-1} *obě touž nulitu a touž signaturu.* Běží tu (a stejně i v následující větě) vlastně o dvě věty, z nichž v prvé uzávorkovaná slova se čtou, ve druhé se vynechají. Správnost obou vět je zřejmá.

VĚTA 101.2. *Jestliže nulita i signatura jsou stejné jak pro (orientovanou) kvadriku* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *prostoru* $\mathbf{P}_m$, *tak i pro (orientovanou) kvadriku* $\mathbf{Q}'_{m-1}$ *prostoru* $\mathbf{P}'_m$, *existuje kolineární zobrazení K prostoru* $\mathbf{P}_m$, *při kterém* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *přejde v* $\mathbf{Q}'_{m-1}$.

DŮKAZ. Budiž $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2, $\mathbf{Q}'_{m-1}$ kvadratickou formou g_2. (Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ orientována, volíme ovšem f_2 tak, aby bylo $f_2(X) > 0$ pro body $\{X\}$ kladné vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a podobně volíme též g_2; není-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ orientována, volíme f_2, g_2 tak, aby jejich signatury (p, q) byly stejné i co do pořadí čísel p, q. Zvolme ar. basi (100.1) prostoru $\mathbf{P}_m$ polární vzhledem k f_2 a budiž

$$B_0, B_1, \dots, B_m \tag{101.1}$$

ar. base prostoru $\mathbf{P}'_m$ polární vzhledem ke g_2. Budiž

$$\varepsilon_r = f_2(A_r), \qquad \eta_r = g_2(B_r) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m .$$

Ježto f_2 a g_2 mají podle předpokladu obě touž nulitu i touž signaturu, potom po případné změně pořadí ar. bodů (100.1), kterou nebudeme explicitně vyznačovat[1]), bude $\eta_r = 0$ pro právě ty indexy r, pro které $\varepsilon_r = 0$, a $\varepsilon_r \eta_r > 0$ pro ostatní indexy r $(0 \leqq r \leqq m)$. Budou tedy existovat čísla $t_r \neq 0$ tak, že

$$\varepsilon_r = t_r^2 \eta_r \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m . \tag{101.2}$$

Nyní pro

$$X = x_0 A_0 + \dots + x_m A_m , \qquad Y = y_0 B_0 + \dots + y_m B_m$$

je

$$f_2(X) = \varepsilon_0 x_r^2 + \dots + \varepsilon_m x_m^2 , \qquad g_2(Y) = \eta_0 y_0^2 + \dots + \eta_m y_m^2$$

a podle (101.2) rovnice

$$LA_0 = t_0 B_0 , \quad LA_1 = t_1 B_1 , \dots , LA_m = t_m B_m \tag{101.3}$$

určují isomorfismus L, při kterém $Lf_2 = g_2$, takže kolineární zobrazení $K = \{L\}$ má žádanou vlastnost.

Z vět 100.3 a 101.1 plyne, že jestliže kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ při kolineárním zobrazení přejde v kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$, potom je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ regulární, je také $\mathbf{Q}'_{m-1}$ regulární; je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ singulární, je také $\mathbf{Q}'_{m-1}$ singulární

[1]) Je účelné si zde všimnout, že je-li na př. $f_2(A_0) \,.\, g_2(B_0) > 0$, můžeme ponechat A_0 v pořadí prvním.

a dimense vrcholů obou kvadrik jsou si rovny. Mimo to je zřejmé, že obrazem regulárního bodu kvadriky Q_{m-1} je regulární bod kvadriky Q'_{m-1}, obrazem singulárního bodu singulární bod.

Signaturou kvadriky Q_{m-1} *vzhledem k bodu* A, který neleží na Q_{m-1}, rozumíme signaturu (p, q), která odpovídá té orientaci kvadriky Q_{m-1}, při které bod A je kladný. Jestliže $p = q$, má Q_{m-1} stejnou orientaci vzhledem ke všem bodům X, které neleží na Q_{m-1}, jestliže však $p \neq q$, je signatura vzhledem k některým X rovna (p, q), vzhledem k ostatním X rovna (q, p). Jestliže při kolineárním zobrazení K přejde kvadrika Q_{m-1} prostoru P_m v kvadriku Q'_{m-1} prostoru P'_m a jestliže $KA = B$, při čemž bod A neleží na Q_{m-1} (a tedy B neleží na Q'_{m-1}) potom podle věty 101 je signatura kvadriky Q_{m-1} vzhledem k bodu A rovna signatuře kvadriky Q'_{m-1} vzhledem k bodu B. Obráceně platí

VĚTA 101.3. *Nechť bod* A *prostoru* P_m *leží mimo kvadriku* Q_{m-1} *tohoto prostoru; nechť bod* B *prostoru* P'_m *leží mimo kvadriku* Q_{m-1} *prostoru* P'_m; *nechť obě kvadriky mají touž nulitu a nechť signatura kvadriky* Q_{m-1} *vzhledem k bodu* A *je rovna signatuře kvadriky* Q'_{m-1} *vzhledem k bodu* B. *Potom existuje kolineární zobrazení* K *prostoru* P_m *na prostor* P'_m, *při kterém* Q_{m-1} *přejde v* Q'_{m-1} *a obrazem bodu* A *je bod* B.

DŮKAZ plyne z důkazu věty 101.2, přihlédneme-li k poznámce pod čarou u tohoto důkazu.

VĚTA 101.4. *Nechť kvadrika* Q_{m-1} *prostoru* P_m *a kvadrika* Q'_{m-1} *prostoru* P'_m *mají obě touž nulitu a touž signaturu. Je-li* H *regulární bod kvadriky* Q_{m-1} *a je-li* H' *regulární bod kvadriky* Q'_{m-1}, *existuje kolineární zobrazení prostoru* P_m *na prostor* P'_m, *při kterém* Q_{m-1} *přejde v* Q'_{m-1} *a obrazem bodu* H *je bod* H'.

DŮKAZ rozdělíme na dvě části. I. Ježto H je regulární bod pro Q_{m-1}, lze jím vést sečnu kvadriky Q_{m-1}, jejíž druhý průsečík s Q_{m-1} označme K. Zvolme na přímce HK další dva body A_0, A_1 tak, aby H, K, A_0, A_1 byla harmonická čtveřice. Potom ani A_0, ani A_1 neleží na Q_{m-1} a bod A_1 leží v polární nadrovině bodu A_0 vzhledem ke Q_{m-1}. Ar. zástupce můžeme volit tak, že

$$H = A_0 + A_1\,, K = A_0 - A_1\,. \tag{101.4}$$

Je-li nejprve $m \geqq 2$, leží A_1 v polární nadrovině ϱ bodu A_0 vzhledem kb $\mathbf{Q}_{m-1}$, neleží však na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$, která je průnikem ϱ s $\mathbf{Q}_{m-1}$. Proto podle věty 100.2 aplikované na $\mathbf{Q}_{m-2}$ lze udat polární ar. basi pro $\mathbf{Q}_{m-2}$ obsahující A_1 a připojíme-li A_0, dostaneme polární ar. basi

$$A_0, A_1, \ldots, A_m \tag{101.5}$$

pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li snad $m = 1$, potom ovšem ar. body A_0, A_1 samy tvoří už polární basi (101.5). Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2 a je-li

$$\varepsilon_r = f_2(A_r) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m,$$

potom pro

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

je

$$f_2(X) = \varepsilon_0x_0^2 + \varepsilon_1x_1^2 + \ldots + \varepsilon_mx_m^2. \tag{101.6}$$

Ježto průsečíky přímky A_0A_1 s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ jsou (101.4), je

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon_1 \neq 0. \tag{101.7}$$

II. Podobně je-li $\mathbf{Q}'_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou g_2, existuje polární ar. base

$$B_0, B_1, \ldots, B_m$$

pro $\mathbf{Q}'_{m-1}$ tak, že

$$H' = B_0 + B_1 \tag{101.8}$$

a že pro

$$Y = y_0B_0 + y_1B_1 + \ldots + y_mB_m$$

je

$$g_2(Y) = \eta_0y_0^2 + \eta_1y_1^2 + \ldots + \eta_my_m^2.$$

Při tom mají f_2, g_2 obě touž nulitu a (jestliže v případě potřeby g_2 zaměníme za $-g_2$) také touž signaturu. Mimo to

$$\eta_0 = -\eta_1 \neq 0 \tag{101.9}$$

a jestliže v případě potřeby vyměníme B_0 a B_1, což nemá vlivu na platnost rovnice (101.8), je

$$\varepsilon_0\eta_0 > 0, \qquad \varepsilon_1\eta_1 > 0.$$

Po případné změně pořadí ar. bodů $B_2, \dots, B_m$ bude potom pro každé r $(0 \leqq r \leqq m)$ buďto $\varepsilon_r \eta_r > 0$ nebo $\varepsilon_r = \eta_r = 0$, takže existují čísla $t_r \neq 0$ tak, že platí (101.2), načež rovnice (101.3) určují isomorfismus L, při kterém $Lf_2 = g_2$, takže kolineace $K = \{L\}$ převádí Q_{m-1} v Q'_{m-1}. Mimo to podle (101.7) a (101.9) můžeme předpokládat, že $t_0 = t_1$, takže podle (101.4) a (101.8) je $K\{H\} = \{H'\}$.

V dosavadních úvahách tohoto článku byly P_m a P'_m dva zcela libovolné m-rozměrné projektivní prostory. Může se ovšem stát, že $\mathsf{P}_m = \mathsf{P}'_m$. V tomto případě může zejména být také $\mathsf{Q}_{m-1} = \mathsf{Q}'_{m-1}$, načež věta 101.4 praví, že jsou-li H, H' kterékoli dva body kvadriky Q_{m-1}, existuje kolineace K prostoru P_m převádějící Q_{m-1} v samu sebe, při které obrazem bodu H je bod H'. Věta 101.3 nás vede k této definici. Jestliže v signatuře (p, q) je $p \neq q$, nazveme *kladnou* tu orientaci kvadriky Q_{m-1}, při které je $p > q$; nazveme *vnějškem* kvadriky Q_{m-1} množinu všech bodů kladných a *vnitřkem* množinu bodů záporných při kladné orientaci. Potom věta 101.3 praví, že jestliže oba body A, B leží mimo kvadriku Q_{m-1}, potom existuje kolineace K prostoru P_m převádějící Q_{m-1} v samu sebe, při které obrazem bodu A je bod B, právě když buďto oba body A, B leží vně nebo oba leží uvnitř Q_{m-1}. Jestliže však v signatuře je $p = q$, potom taková definice vnitřku a vnějšku kvadriky selže a jsou-li A, B dva zcela libovolné body prostoru P_m mimo Q_{m-1}, vždy existuje kolineace K prostoru P_m převádějící Q_{m-1} v sebe samu, při které obrazem bodu A je bod B.

Může se také státi, že prostor $\mathsf{P}'_m = \tilde{\mathsf{P}}_m$ je duální k prostoru P_m. Zde je zvláště důležitý případ, že Q_{m-1} je *regulární* kvadrika a že K je polarita vzhledem ke Q_{m-1}, takže $\mathsf{Q}'_{m-1} = \tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ je dualisace kvadriky Q_{m-1}. Z věty 101.1 plyne, že *regulární kvadrika* Q_{m-1} *a její dualisace* $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ *mají obě touž signaturu.* Jestliže Q_{m-1} je orientována, potom právě vyslovená věta platí s tou dohodou, že je třeba $\tilde{\mathsf{Q}}_{m-1}$ orientovat *souhlasně* s Q_{m-1}, t. j. tak, aby polární nadrovina ϱ bodu A ležícího mimo Q_{m-1} byla kladná, právě když bod A je kladný. Taková dohoda je ostatně účelná pouze pro $m \geqq 2$. Je-li $m = 1$ a je-li Q_0 bodově reálná a regulární, skládá se Q_0 ze dvou různých reálných bodů, dualisace $\tilde{\mathsf{Q}}_0$ se skládá z týchž dvou bodů a přes to orientace $\tilde{\mathsf{Q}}_0$, která by podle vyslovené definice byla souhlasná s danou orientací pro Q_0, je jak se snadno zjistí, k ní *opačná.*

102. PRŮNIK KVADRIKY S NADROVINOU; ELIPTICKÉ KVADRIKY. Tento článek obsahuje pouze některé doplňky k obsahu předcházejícího článku, v podstatě dvojího druhu. Nejprve si položíme otázku, jaký je průnik kvadriky s nadrovinou, při čemž se v textu omezíme na regulární kvadriky. Případ singulárních kvadrik nechť probere čtenář sám opíraje se o pojem perspektivy $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$ singulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$.

VĚTA 102.1. *Nechť nadrovina ϱ není tečnou nadrovinou regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ $(m \geqq 2)$. Potom ϱ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v regulární $\mathbf{Q}_{m-2}$. Orientujeme-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, aby pól A nadroviny ϱ byl kladný a je-li (p, q) signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je $p > 0$ a signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-2}$ je rovna $(p-1, q)$.*

DŮKAZ. Ježto ϱ není tečnou nadrovinou, leží její pól mimo $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže podle věty 100.2 existuje polární ar. base (100.1) tak, že $\{A_0\}$ je pól nadroviny ϱ. Z vytvořující formy (100.4) kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ vznikne potom vytvořující forma kvadriky $\mathbf{Q}_{m-2}$, položíme-li $x_0 = 0$. Z toho plyne správnost věty podle definice signatury.

VĚTA 102.2. *Budiž H bod regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ $(m \geqq 2)$.* (H předpokládáme reálný, takže $\mathbf{Q}_{m-1}$ je bodově reálná.) *Tečná nadrovina ϱ v bodě H protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$, která má H za jediný singulární bod. Je-li (p, q) signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je $p > 0$, $q > 0$ a signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ je rovna $(p-1, q-1)$.*

DŮKAZ. Podle části I důkazu věty 101.4 existuje polární ar. base (100.1) pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, že $H = A_0 + A_1$. Podle (101.6) je potom $x_0 \mp x_1 = 0$ rovnice nadroviny ϱ a podle (101.6) a (101.7) pro $x_0 + x_1 = 0$ je $f_2(X) = \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2$, z čehož plyne správnost věty podle definice signatury.

Eliptickou kvadrikou nazveme takovou kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$, jejíž neorientovaná signatura má tvar $(p, 1)$, kde $p > 1$. Podle vět 99.3 a 100.5 eliptická kvadrika je bodově reálná; podle (100.6) je $m \geqq 2$. Orientovaná signatura je rovna $(p, 1)$, je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ kladně orientována.

Poznámka 1. Podle věty 100.7 singulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ je eliptická, právě když její perspektiva $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$, která je regulární kvadrikou, je eliptická. V důsledku toho vlastnosti singulárních eliptických kvadrik jsou snadným důsledkem vlastností regulárních eliptických kvadrik, na které se proto můžeme omezit.

Poznámka 2. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ regulární eliptická kvadrika, je také její dualisace $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ eliptická, ježto, jak víme, $\mathbf{Q}_{m-1}$ a $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ mají obě touž signaturu.

VĚTA 102.3. *Tečná nadrovina ϱ regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ $(m \geqq 2)$ v jejím bodě H nemá s kvadrikou mimo H žádný jiný reálný bod společný, právě když $\mathbf{Q}_{m-1}$ je eliptická.*

DůKAZ. Je-li $\mathbf{Q}_{m-2}$ průnik ϱ s $\mathbf{Q}_{m-1}$ a má-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ signaturu (p, q), kde $p \geqq q$, potom podle věty 102.2 je $q \geqq 1$ a $\mathbf{Q}_{m-2}$ má signaturu $(p - 1, q - 1)$. Není-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická, je $\mathbf{Q}_{m-2}$ bodově reálná podle vět 99.3 a 100.5; je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická, je $\mathbf{Q}_{m-2}$ podle týchž vět formálně reálná. Z toho plyne správnost naší věty, ježto $\mathbf{Q}_{m-2}$ má podle věty 102.2 jediný singulární bod H.

VĚTA 102.4. *V prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 2)$ budiž dána regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ a mimo ni bod A. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická a je-li A jejím vnitřním bodem, je každá přímka jdoucí bodem A sečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Obráceně, jestliže každá přímka jdoucí bodem A je sečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická a A je jejím vnitřním bodem.*

DůKAZ. Budiž (p, q) signatura $\mathbf{Q}_{m-1}$ vzhledem k bodu A, takže A je kladný vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, a budiž ϱ polární nadrovina bodu A, která neprochází bodem A, takže každá přímka jdoucí bodem A má s ϱ právě jeden společný bod. Podle věty 102.1 je $p > 0$, $\mathbf{Q}_{m-1}$ protne ϱ v regulární $\mathbf{Q}_{m-2}$ a signatura $\mathbf{Q}_{m-2}$ (v orientaci souhlasné s orientací zvolenou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$) je rovna $(p - 1, q)$. Je-li nyní $p = 1$, je každý bod X nadroviny ϱ záporný vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a podle věty 99.5 je přímka AX sečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li však $p \geqq 2$, existuje v ϱ bod X kladný vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, a ježto A a X jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, je přímka AX podle věty 99.6 nesečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Snadno se však dokáže, že je $p = 1$, právě když $\mathbf{Q}_{m-1}$ je eliptická a zároveň A je jejím vnitřním bodem.

VĚTA 102.5. *Budiž $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická kvadrika prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 3)$ a budiž ϱ nadrovina, která není tečnou nadrovinou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže pól A nadroviny ϱ leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, leží všecky body nadroviny ϱ vně $\mathbf{Q}_{m-1}$,* *takže* Q_{m-1} *nemá s* ϱ *žádný společný bod. Jestliže však A leží vně* Q_{m-1}, *protne* ϱ *kvadriku* Q_{m-1} *v eliptické* Q_{m-2}. Správnost této věty je bezprostředním důsledkem úvah provedených v předcházejícím důkaze.

103. KUŽELOSEČKY. Název *kuželosečka* dáme bodově reálné regulární kvadrice Q_1 projektivní roviny P_2. Obecně, je-li Q_1 kvadrika roviny P_2 s nulitou n a signaturou (p, q), při čemž můžeme (není-li pro Q_1 předepsána orientace) předpokládat, že $p \geqq q$, je podle (100.6) $n + p + q = 3$ a ježto $n \leqq 2$, máme celkem pět možných případů:

(1) $\quad n = 2, \quad p = 1, \quad q = 0;$
(2) $\quad n = 1, \quad p = 2, \quad q = 0;$
(3) $\quad n = 1, \quad p = 1, \quad q = 1;$
(4) $\quad n = 0, \quad p = 3, \quad q = 0;$
(5) $\quad n = 0, \quad p = 2, \quad q = 1.$

Z předcházejících výkladů je patrné: v případě (1) je Q_1 dvojnásobná přímka; v případě (2) se Q_1 skládá ze dvou komplexně sdružených imaginárních přímek, které se protnou v jediném reálném bodě kvadriky Q_1; v případě (3) se Q_1 skládá ze dvou různých reálných přímek; v případě (4) je Q_1 regulární a formálně reálná, nemá tudíž vůbec žádný reálný bod; v případě (5) je Q_1 kuželosečka. Tedy kuželosečky jsou totožné s eliptickými kvadrikami dvojrozměrného prostoru P_2 a bod roviny P_2, který neleží na kuželosečce Q_1, leží buďto uvnitř nebo vně Q_1. Z věty 102.4 plyne, že *přímka, která obsahuje bod ležící uvnitř kuželosečky* Q_1, je její sečnou. Z toho plyne jednak, že *každý bod tečny s jedinou výjimkou bodu dotyku leží vně kuželosečky* a že *každá nesečna leží celá vně kuželosečky.* O sečnách plyne z poznámky na konci článku 99, že *jsou-li H, K průsečíky sečny* P_1 *s kuželosečkou* Q_1, *leží z obou intervalů HK až na body H, K samy jeden uvnitř a druhý vně kuželosečky.* Ježto signatura kuželosečky Q_1 při kladné orientaci je (2,1), je patrné, že je-li A_0, A_1, A_2 ar. base polární vzhledem ke Q_1, leží jeden ze tří bodů A_0, A_1, A_2 uvnitř Q_1, ostatní dva vně Q_1. Z toho plyne podle vět 99.6 a 100.2, že *pól sečny vzhledem ke kuželosečce* Q_1 *leží vně* Q_1, *pól nesečny uvnitř* Q_1.

Viděli jsme, že bodem daným uvnitř kuželosečky neprochází žádná reálná tečna kuželosečky. Naproti tomu bodem A daným vně kužellosečky Q_1 procházejí dvě různé reálné tečny t_1, t_2 (jejich body dotyku jsou průsečíky Q_1 s polárou bodu A) ; tyto dvě tečny rozdělí svazek přímek $\pi(A\ ;\ P_2)$ na dva intervaly t_1t_2, z nichž prvý obsahuje sečny a druhý nesečny kuželosečky.

VĚTA 103.1. *Buďtež A_1, A_2 dva různé body na kuželosečce Q_1 a buďtež t_1, t_2 tečny ke Q_1 v těchto bodech. Libovolná přímka p svazku $\pi(A_1, P_2)$ různá od t_1 i od A_1A_2 protne Q_1 v určitém bodě X různém od A_1 i od A_2 ; budiž potom $\varphi(p)$ přímka A_2X svazku $\pi(A_2\ ;\ P_2)$; mimo to budiž ještě $\varphi(t_1) = A_1A_2$, $\varphi(A_1A_2) = t_2$. Potom je φ projektivní zobrazení svazku $\pi(A_1\ ;\ P_2)$ na svazek $\pi(A_2\ ;\ P_2)$.*

DŮKAZ. Budiž A_0 průsečík tečen t_1, t_2. Je-li Q_1 vytvořena kvadratickou formou f_2 a je-li f příslušná bilineární forma, je zřejmě $f_2(A_1) = f_2(A_2) = 0$, $f(A_0, A_1) = f(A_0, A_2) = 0$, ale $f(A_1, A_2) \neq 0$, $f_2(A_0) \neq 0$ a můžeme předpokládat, že $f(A_1, A_2) = \frac{1}{2}$, načež pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2$ je $f_2(X) = x_1x_2 - cx_0^2$, kde $c \neq 0$. Stačí dokázat, že jestliže přímka p spojuje bod A_1 s bodem $sA_0 + tA_2$, potom přímka $\varphi(p)$ spojuje bod A_2 s bodem $tA_0 + csA_1$; což se snadno verifikuje jak pro $s = 0$, tak i pro $t = 0$ a pro $st \neq 0$ plyne z toho, že obě přímky p, $\varphi(p)$ obsahují bod $X = stA_0 + cs^2A_1 + t^2A_2$, který leží na Q_1, ježto $f_2(X) = 0$.

Obráceně platí:

VĚTA 103.2. *Buďtež A_1, A_2 dva různé body v rovině P_2 a budiž dáno projektivní zobrazení φ svazku přímek $\pi(A_1\ ;\ P_2)$ na svazek přímek $\pi(A_2\ ;\ P_2)$, při kterém společná přímka A_1A_2 není svým vlastním obrazem. Potom existuje kuželosečka Q_1, která obsahuje bod A_1, bod A_2 a mimo to ještě právě ty body, které jsou průsečíky přímek p, $\varphi(p)$, kde $p \neq A_1A_2$, $\varphi(p) \neq A_1A_2$. Jsou-li t_1, t_2 tečny kuželosečky Q_1 v bodech A_1, A_2, je $\varphi(t_1) = A_1A_2$, $\varphi(A_1A_2) = t_2$.*

DŮKAZ. Existuje bod A_0 tak, že A_0 neleží na přímce A_1A_2 a že $\varphi(A_0A_1) = A_1A_2$, $\varphi(A_1A_2) = A_0A_2$. Dále je patrné, že existuje číslo $c \neq 0$ tak, že jestliže přímka p spojuje bod A_1 s bodem $sA_0 + tA_2$, potom přímka $\varphi(p)$ spojuje bod A_2 s bodem $tA_0 + csA_1$. Snadno se nahlédne, že kvadratická forma f_2, pro kterou při $X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2$ je $f_2(X) = x_1x_2 - cx_0^2$, vytvořuje kuželosečku Q_1, která má všecky žádané vlastnosti.

Je-li nyní dána kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ v rovině $\mathbf{P}_2$ a kuželosečka $\mathbf{Q}_1'$ v rovině $\mathbf{P}_2'$ a zobrazení ψ kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$, zvolme libovolně bod A_1 na $\mathbf{Q}_1$ a bod A_1' na $\mathbf{Q}_1'$ a označme φ to (zřejmě při dané volbě bodů A_1, A_1' jednoznačně určené) zobrazení svazku $\pi(A_1 ; \mathbf{P}_2)$ na svazek $\pi(A_1' ; \mathbf{P}_2)$, při kterém pro každou polohu bodu X na $\mathbf{Q}_1$ pro $X' = \psi(X)$ je $\varphi(A_1X) = A_1'X'$, kde pro $X = A_1$ znamená A_1X tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě A_1, pro $X' = A_1'$ znamená $A_1'X'$ tečnu ke $\mathbf{Q}_1'$. Je-li zobrazení φ projektivní, pravíme, že ψ je *projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$*. Že při tom nezáleží na volbě pomocných bodů A_1, A_1' plyne z věty 103.1. Následující tři věty jsou zřejmé:

VĚTA 103.3. *Je-li ψ_1 projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$ a je-li ψ_2 projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1'$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1''$, potom složené zobrazení $\psi_1 \circ \psi_2$ je projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1''$.*

VĚTA 103.4. *Zobrazení inversní k projektivnímu zobrazení kuželosečky na kuželosečku je rovněž projektivní.*

VĚTA 103.5. *Nechť při kolineárním zobrazení K roviny $\mathbf{P}_2$ na rovinu $\mathbf{P}_2'$ přejde kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ v kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$. Potom parciální zobrazení $K \mid \mathbf{Q}_1$ kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$ je projektivní.*

Zvláštním případem věty 103.5 je

VĚTA 103.6. *Jestliže každému bodu X na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ přiřadíme tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě X, vznikne projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na její dualisaci.*

VĚTA 103.7. *Jsou-li A_1, A_2, A_3 tři různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ a jsou-li B_1, B_2, B_3 tři různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1'$, existuje právě jedno projektivní zobrazení ψ kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$, při kterém $\psi(A_r) = B_r$ pro $r = 1, 2, 3$.* Tato věta je snadným důsledkem obdobné věty o projektivním zobrazení přímky na přímku, která je zvláštním případem ($m = 1$) věty 79.6.

VĚTA 103.8. *Budiž ψ projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ v rovině $\mathbf{P}_2$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$ v rovině $\mathbf{P}_2'$. Potom existuje právě jedno kolineární zobrazení K roviny $\mathbf{P}_2$ na rovinu $\mathbf{P}_2'$ tak, že parciální zobrazení $K \mid \mathbf{Q}_1$ splyne s daným zobrazením ψ.*

DůKAZ. Předpokládejme nejprve, že kolineární zobrazení K existuje a dokažme, že je jednoznačně určeno. Za tím účelem zvolme na $\mathbf{Q}_1$ tři různé body A_1, A_2, A_3 a položme $B_1 = \psi(A_1)$, $B_2 = \psi(A_2)$, $B_3 = \psi(A_3)$, takže B_1, B_2, B_3 jsou tři různé body na $\mathbf{Q}_1'$. Dále budiž A_0 průsečík tečen ke $\mathbf{Q}_1$ v bodech A_1, A_2; B_0 budiž průsečík tečen ke $\mathbf{Q}_1'$ v bodech B_1, B_2. Je patrné, že existuje-li K, je $B_r = KA_r$ $(0 \leqq r \leqq 3)$. Dále je však patrné, že body A_0, A_1, A_2, A_3 tvoří g. basi pro $\mathbf{P}_2$ a že body B_0, B_1, B_2, B_3 tvoří g. basi pro $\mathbf{P}_2'$. Jednoznačnost K plyne nyní z věty 79.6. Z téže věty však plyne také, že existuje kolineární zobrazení K roviny $\mathbf{P}_2$, při kterém $B_r = KA_r$ $(0 \leqq r \leqq 3)$. Je třeba ukázat, že potom parciální zobrazení $K \mid \mathbf{Q}_1$ splyne se zobrazením ψ. K tomu cíli však stačí odvodit, že $\mathbf{Q}_1$ při K přejde v $\mathbf{Q}_1'$, neboť potom $K \mid \mathbf{Q}_1$ je projektivní zobrazení $\mathbf{Q}_1$ na $\mathbf{Q}_1'$, které splyne s ψ podle věty 103.7. Avšak [viz (79.3)] ar. zástupce uvažovaných g. bodů lze volit tak, aby bylo

$$(103.1) \qquad A_3 = A_0 + A_1 + A_2 ; \qquad B_3 = B_0 + B_1 + B_2 ,$$

načež $K = \{L\}$, kde

$$(103.2) \qquad LA_r = B_r \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq 3 .$$

Avšak jako při důkazu věty 103.1 vidíme, že existují čísla $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ tak, že $\mathbf{Q}_1$ je vytvořena kvadratickou formou f_2 a $\mathbf{Q}_1'$ kvadratickou formou g_2, jestliže pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2$ je $f_2(X) = x_1x_2 - c_1x_0^2$ a pro $Y = y_0B_0 + y_1B_1 + y_2B_2$ je $g_2(Y) = y_1y_2 - c_2y_0^2$. Ježto však A_3 leží na $\mathbf{Q}_1$ a B_3 leží na $\mathbf{Q}_1'$, plyne ze (103.1), že $c_1 = c_2 = 1$, takže $f_2(X) = x_1x_2 - x_0^2$, $g_2(X) = y_1y_2 - y_0^2$ a ze (103.2) plyne, že obrazem $\mathbf{Q}_1$ při K je $\mathbf{Q}_1'$.

Jsou-li A_1, A_2, A_3, A_4 čtyři různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$, definujeme jejich *dvojpoměr*

$$(103.3) \qquad (A_1, A_2, A_3, A_4; \mathbf{Q}_1)$$

tak, že zvolíme libovolně pomocný bod C na $\mathbf{Q}_1$ a definujeme (103.3) jako dvojpoměr čtyř (zřejmě navzájem různých) přímek CA_1, CA_2, CA_3, CA_4 svazku $\pi(C; \mathbf{P}_2)$. Jestliže snad $C = A_r$ pro některé r $(1 \leqq r \leqq 4)$, znamená CA_r tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě C. Na volbě pomocného bodu C při tom nezáleží, jak plyne z vět 86.1 a 103.1. Z týchž vět je patrné, že platí

VĚTA 103.9. *Jsou-li* A_1, A_2, A_3, A_4 *čtyři různé body na kuželosečce* $\mathbf{Q}_1$ *a jsou-li* B_1, B_2, B_3, B_4 *čtyři různé body na kuželosečce* $\mathbf{Q}_1'$, *potom existuje projektivní zobrazení* $\mathbf{Q}_1$ *na* $\mathbf{Q}_1'$, *při kterém* A_1, A_2, A_3, A_4 *v daném pořadí mají obrazy* B_1, B_2, B_3, B_4, *právě když*

$$(A_1, A_2, A_3, A_4; \mathbf{Q}_1) = (B_1, B_2, B_3, B_4; \mathbf{Q}_1') .$$

Stejně jako pojem dvojpoměru se dá přenést z přímky na kuželosečku pojem *intervalu*. Jsou-li A, B dva různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$, potom intervalem AB na Q_1 rozumíme množinu těch bodů X na $\mathbf{Q}_1$, pro které při libovolně zvoleném C na $\mathbf{Q}_1$ přímky CX tvoří ve svazku $\pi(C; \mathbf{P}_2)$ interval s krajními přímkami CA, CB; pro $C = X$ opět přímkou CX rozumíme tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě C. Zase je jasné, že nezáleží na volbě pomocného bodu C a že při daných A, B kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ se skládá z právě dvou intervalů AB, které mají společné pouze body A, B, při čemž (viz větu 78.1), jsou-li C_1; C_2 dva body na $\mathbf{Q}_1$ různé navzájem a různé od A i od B, náležejí oba body C_1, C_2 do téhož intervalu na $\mathbf{Q}_1$, právě když dvojpoměr $(A, B, C_1, C_2; \mathbf{Q}_1)$ je kladný. V důsledku toho je možné užít následující věty ke geometrické interpretaci pojmu intervalu na kuželosečce.

VĚTA 103.10. *Jsou-li* A, B, C, D *čtyři různé body na kuželosečce* $\mathbf{Q}_1$, *leží průsečík* H *přímek* AB, CD *mimo* $\mathbf{Q}_1$. *Leží-li* H *vně* $\mathbf{Q}_1$, *je dvojpoměr* $(A, B, C, D; \mathbf{Q}_1)$ *kladný; leží-li* H *uvnitř* $\mathbf{Q}_1$, *je tento dvojpoměr záporný.*

DŮKAZ věty 103.10 provedeme až v následujícím článku (str. 142).

104. PROJEKTIVITY A INVOLUCE NA KUŽELOSEČCE. *Projektivitou na kuželosečce* $\mathbf{Q}_1$ rozumíme projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na touž kuželosečku $\mathbf{Q}_1$. Z definice je patrné, že theorie projektivit na kuželosečce je v podstatě totožná s theorií projektivit na přímce v tom smyslu, že každá věta jedné theorie vede takřka automaticky k příslušné větě theorie druhé. Avšak ačkoli jsme theorii projektivit na přímce už probírali, je nicméně účelné zdržet se trochu i u theorie projektivit na kuželosečce, ježto některé pojmy této theorie (zejména pojem involuce) jsou geometricky názornější než příslušné věty z theorie projektivit na přímce.

V celém článku předpokládáme, že v rovině $\mathbf{P}_2$ je dána určitá kuželosečka $\mathbf{Q}_1$. Podle vět 103.5 a 103.8 máme vzájemně jednoznačný vztah mezi projektivitami ψ na $\mathbf{Q}_1$ na jedné straně a kolineacemi K v $\boldsymbol{P}_2$ na straně druhé, při čemž kolineaci K se předpokládá, že převádí kuželosečku $\mathbf{Q}_1$ v touž kuželosečku $\mathbf{Q}_1$. Předpokládejme nejprve, že je dána určitá ψ a tedy i určitá K. Je účelné nazírat na obě transformace tak, že se vztahují nejen na reálné, nýbrž i na imaginární body. Je zřejmé, že transformace ψ je identická, právě když K je identická. Vyloučíme-li tento případ, máme dvě možnosti: projektivita ψ je buďto *parabolická* s jediným (nutně reálným) samodružným bodem, nebo ψ je *neparabolická* se dvěma různými (reálnými nebo imaginárními) samodružnými body; neparabolická projektivita ψ pak je buďto *hyperbolická* (s reálnými samodružnými body) nebo *eliptická* (s imaginárními komplexně sdruženými samodružnými body).

Předpokládejme nejprve, že projektivita ψ na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ je parabolická se samodružným bodem H. Zřejmě je bod H samodružným i pro příslušnou kolineaci K roviny $\boldsymbol{P}_2$. Dokážeme, že H je *jediným* samodružným bodem pro kolineaci K. Za tím účelem předpokládejme, že existuje bod $H' \neq H$ samodružný při K a nejprve učiňme předpoklad, že přímka HH' je různá od tečny t ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě H. Potom však přímka HH' je samodružná při K a protne $\mathbf{Q}_1$ v bodě různém od H a opět samodružném při K, tedy samodružném i při ψ, což je však nemožné. Jestliže bod H' leží na tečně t, potom jeho polára vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$ je samodružná při K, je různá od t a prochází bodem H, což se právě už ukázalo nemožným.

Předpokládejme za druhé, že projektivita ψ na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ je neparabolická se dvěma různými (reálnými nebo imaginárními) samodružnými body H_1, H_2. Zřejmě jsou body H_1, H_2 samodružné i pro příslušnou kolineaci K. Dále je při K samodružná také přímka $h = H_1H_2$ a samodružný při K je i pól H_0 přímky h vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$. Částí kolineace K je projektivita $\varphi = K \mid h$ na přímce h, která má samodružné body H_1, H_2. Jsou nyní dvě možnosti. Buďto projektivita φ je identita, načež *každý* bod přímky h je samodružný při kolineaci K; nebo φ není identita, načež mimo body H_1, H_2 *žádný* bod přímky h není samodružný při K. V každém případě pak platí, že jestliže bod $C \neq H$ neleží na přímce h, nemůže C být samodružný při K. Neboť je-li $C \neq H$ samodružný bod při K, nemůže C ležet zároveň na obou přímkách HH_1, HH_2; pro určitost nechť C neleží na přímce HH_1. Potom přímka H_1C je samodružná při K a protne $\mathbf{Q}_1$ v bodě $C_0 \neq H_1$, který je zřejmě samodružný při K. Jestliže nyní C neleží na přímce h, je také $C_0 \neq H_2$. Máme tedy na kuželosečce Q_1 tři různé body H_1, H_2, C_0 samodružné při K a tudíž také samodružné při ψ, z čehož plyne podle věty 103.7, že ψ je identická transformace kuželosečky K, což jsme však vyloučili.

Je-li ψ parabolická projektivita se samodružným bodem H, nazveme *středem projektivity* ψ bod H a *osou projektivity* ψ tečnu h ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě H. Je-li ψ neparabolická projektivita se samodružnými body H_1, H_2, nazveme *osou projektivity* ψ přímku H_1H_2 a *středem projektivity* ψ její pól vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$. Podle těchto definic má každá neidentická projektivita ψ na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ určitý střed H a určitou osu h, při čemž přímka h je polárou bodu H vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$. Dále je patrné: *střed parabolické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *leží na* $\mathbf{Q}_1$ *a její osa je tečnou ke* $\mathbf{Q}_1$; *střed hyperbolické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *leží vně* $\mathbf{Q}_1$ *a její osa je sečnou* $\mathbf{Q}_1$; *střed eliptické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *leží uvnitř* $\mathbf{Q}_1$ *a její osa je nesečnou* $\mathbf{Q}_1$. Mimo to *osa parabolické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *je tečnou ke* $\mathbf{Q}_1$ *ve svém jediném samodružném bodě; osa neparabolické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *protne* $\mathbf{Q}_1$ *ve svých dvou samodružných bodech.*

Je-li ψ neparabolická projektivita na $\mathbf{Q}_1$ se samodružnými body H_1, H_2 (reálnými nebo imaginárními), může se stát, jak jsme si všimli, že každý bod přímky $h = H_1H_2$ je samodružný při kolineaci K, takže K je homologie, osa projektivity h je osou homologie, střed projektivity H je středem homologie. Nastane-li tento případ a je-li A libovolný bod na h různý od H_1 i od H_2, A' jeho obraz při ψ a tudíž i při K, potom podle článku 84 přímka HA je samodružná, t. j. obraz A' bodu A leží na přímce HA a na téže přímce musí ležet také obraz bodu A', který tudíž splyne s A, t. j. ψ je involuce. Obráceně, je-li ψ involuce a je-li opět A' obraz bodu A ($H_1 \neq A \neq H_2$), je A obrazem bodu A' (oboje nejen při ψ, nýbrž i při K), takže přímka AA' je samodružná při K a protne přímku h, která je rovněž samodružná při K, v bodě C samodružném při K, a ježto $H_1 \neq C \neq H_2$, je každý bod přímky h samodružný při K a ψ je involuce. Vidíme tedy, že pojem *involuce na kuželosečce* má velmi názorný smysl, zachycený v následující větě.

VĚTA 104.1. *Leží-li bod* H *mimo kuželosečku* $\mathbf{Q}_1$, *je bod* H *středem* *involuce* ψ *na* $\mathbf{Q}_1$ *, jejíž dvojné body* (reálné nebo imaginární) *jsou body dotyku tečen ke* $\mathbf{Q}_1$ *procházejících bodem* H *. Tyto dvojné body leží tedy na poláře* h *bodu* H *vzhledem ke* $\mathbf{Q}_1$ *, která je osou involuce* ψ *. Každá sečna kuželosečky* $\mathbf{Q}_1$ *procházející bodem* H *protne* $\mathbf{Q}_1$ *v dvojici bodů* A *,* A' *involuce* ψ *. Obráceně, je-li* A *,* A' *dvojice bodů involuce* ψ *a je-li* $A \neq A'$ *, prochází přímka* AA' *bodem* H *. Involuce* ψ *je hyperbolická, leží-li* H *uvnitř* $\mathbf{Q}_1$ *, eliptická, leží-li* H *vně* $\mathbf{Q}_1$ *.*

Z každé věty o involucích na přímce plyne bezprostředně příslušná věta o involucích na kuželosečce a obráceně. Při tom, jak bylo již poznamenáno, pro involuce na kuželosečce mívají tyto věty názornější smysl. Tak na př. víme (viz větu 87.5), že jsou-li A , B , C , D čtyři různé body, existuje právě jedna involuce obsahující obě dvojice A , B ; C , D . Na kuželosečce je to bezprostředně patrné z věty 104.1; je patrné též, že průsečík H přímek AB , CD je středem naší involuce, takže tato je hyperbolická, leží-li H vně $\mathbf{Q}_1$, eliptická, leží-li H uvnitř $\mathbf{Q}_1$. Na druhé straně víme z věty 87.5, že dvojpoměr $(ABCD)$ je v hyperbolickém případě kladný, v eliptickém záporný. Porovnáme-li oba výsledky a všimneme-li si věty 78.1, dostaneme důkaz správnosti věty 103.10. Takřka samozřejmou se nyní jeví věta 93.3, jejíž dřívější důkaz byl dosti složitý. Jsou-li H , H' středy dvou daných involucí ψ , ψ' na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ a je-li $\psi \neq \psi'$, je také $H \neq H'$. Přímka HH' protne $\mathbf{Q}_1$, není-li tečnou, ve dvou (reálných nebo imaginárních) bodech A , B ; a je-li HH' tečnou pro $\mathbf{Q}_1$, budiž $A = B$ její bod dotyku. V každém případě je A , B společná dvojice obou involucí ψ , ψ', které ani v komplexním oboru nemají žádnou jinou společnou dvojici. Jestliže na př. involuce ψ je eliptická, leží bod H uvnitř $\mathbf{Q}_1$, takže přímka HH' jistě je sečnou, body A , B jsou reálné a navzájem různé.

VĚTA 104.2. *Buďtež* φ_1 *,* φ_2 *dvě různé involuce na kuželosečce* $\mathbf{Q}_1$ *, takže* $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ *je projektivita na* $\mathbf{Q}_1$ *. Jsou-li* C_1 *,* C_2 *středy involucí* φ_1 *,* φ_2 *, je přímka* C_1C_2 *osou projektivity* ψ *.*

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že přímka C_1C_2 není tečnou ke $\mathbf{Q}_1$, že tedy má s $\mathbf{Q}_1$ společné dva různé (reálné nebo imaginární) body H_1 , H_2 . Podle věty 104.1 (případně přenesené na komplexní obor) je každý z obou bodů H_1 , H_2 obrazem druhého jak při φ_1 , tak i při φ_2 , takže oba body H_1 , H_2 jsou samodružné při ψ , a přímka

H_1H_2 neboli přímka C_1C_2 je tedy osou projektivity ψ. Jestliže přímka C_1C_2 je tečnou ke $\mathbf{Q}_1$ a H je její bod dotyku, soudíme opět podle věty 104.1, že H je samodružným bodem při ψ a je třeba pouze ještě dokázat, že bod $A \neq H$ kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ nemůže být samodružným při ψ. To však plyne podle věty 104.1 ze zřejmého faktu, že obraz bodu A při φ_1 nemůže splynout s obrazem bodu A při φ_2.

Ukážeme nyní, že dokázanou větu 104.2 lze obrátit.

VĚTA 104.3. *Budiž h osa projektivity ψ na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$. Zvolme libovolně bod C_1 na přímce h s tou podmínkou, aby C_1 neležel na $\mathbf{Q}_1$. Potom existuje na přímce h právě jeden bod C_2, ležící rovněž mimo $\mathbf{Q}_1$, pro který je $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, kde φ_1, φ_2 jsou involuce na $\mathbf{Q}_1$ se středy C_1, C_2.*

DŮKAZ. Tím, že mluvíme o ose projektivity ψ, předpokládáme už, že ψ není identická transformace kuželosečky $\mathbf{Q}_1$. Mimo to involuce φ_1 je totožná s inversní transformací φ_1^{-1} a z toho plyne snadno, že je-li φ_2 projektivita na $\mathbf{Q}_1$, platí $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, právě když $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$. Stačí tedy dokázat, že projektivita φ_2 definovaná rovnicí $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$ je involuce, jejíž střed C_2 leží na přímce h. Jestliže projektivita ψ je neparabolická, je to zřejmé. Neboť potom h protne $\mathbf{Q}_1$ ve dvou různých (reálných nebo imaginárních) bodech H_1, H_2, jež jsou samodružné při ψ. Ježto střed C_1 involuce φ_1 leží na přímce h, je každý z obou bodů H_1, H_2 podle věty 104.1 obrazem druhého při involuci φ_1 a ježto H_1, H_2 jsou samodružné při ψ, platí to, co bylo právě vysloveno pro φ_1, také pro projektivitu $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$, která tudíž podle věty 87.4 přenesené na kuželosečku je rovněž involucí; z věty 104.1 pak plyne, že střed C_2 involuce φ_2 leží na h. Jestliže však projektivita ψ je parabolická, potom užití věty 87.4 selže. V tomto případě přímka h je tečnou kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ a označíme H její bod dotyku, který je (jediným) samodružným bodem parabolické projektivity ψ. Zvolme nyní na $\mathbf{Q}_1$ libovolně bod $A \neq H$ a označme B jeho obraz při ψ, takže $A \neq B \neq H$. Přímka AC_1 protne kuželosečku vedle bodu A ještě v bodě $A' \neq A$ a ovšem je též $A' \neq H$. Je-li $A' \neq B$, budiž C_2 průsečík přímky $A'B$ s přímkou h; je-li však $A' = B$, budiž C_2 průsečík přímky h s tečnou ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě B. V každém případě je $C_1 \neq C_2 = H$ a z věty 104.1 plyne, že bod C_2 je středem involuce na $\mathbf{Q}_1$, pro kterou je H dvojným bodem a která obsahuje dvojici

A', B. Označíme-li φ_2 involuci se středem C_2, plyne z věty 104.2, že projektivita $\varphi_1 \circ \varphi_2$ má osu h, je tedy parabolická se samodružným bodem H. Mimo to však bod $A \neq X$ má při $\varphi_1 \circ \varphi_2$ zřejmě týž obraz B jako při ψ, takže podle věty 87.3 (přenesené na kuželosečku) je $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

VĚTA 104.4. *Nechť A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 leží na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$. Některé z těchto bodů mohou také splynout; splyne-li bod A_r s bodem A_s* $(1 \leqq r \leqq s \leqq 6)$, *rozumějme přímkou A_rA_s tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě A_r. Předpokládejme však, že jsou navzájem různé jak body A_1, A_3, A_5, tak i body A_2, A_4, A_6, dále pak, že je $A_1 \neq A_4$, $A_2 \neq A_5$, $A_3 \neq A_6$. Potom jsou navzájem různé jak přímky*

(104.1) $$A_1A_2\,;\quad A_4A_5\,,$$

tak přímky

(104.2) $$A_2A_3\,;\quad A_5A_6$$

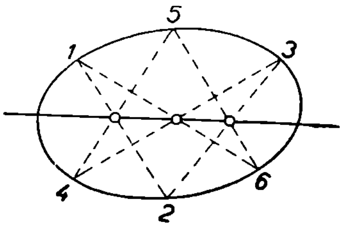
a tak posléze i přímky

(104.3) $$A_3A_4\,;\quad A_1A_6\,.$$

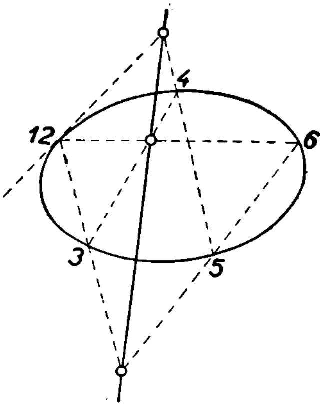
Je-li B_1 průsečík přímek (104.1), *B_2 průsečík přímek* (104.2), *B_3 průsečík přímek* (104.3), *jsou body B_1, B_2, B_3 navzájem různé a leží všecky tři na téže přímce.*

DŮKAZ. Přímky (104.1) jsou navzájem různé, ježto podle předpokladu je jak $A_1 \neq A_4$, tak i $A_1 \neq A_5$ a přímka A_4A_5 nemůže mít s kuželosečkou společný bod různý jak od A_4, tak i od A_5; stejně se dokáže, že jsou navzájem různé také obě přímky (104.2) a rovněž i obě přímky (104.3). Existují tudíž všecky tři body B_1, B_2, B_3 a je patrné, že žádný z nich neleží na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$. Mimo to, kdyby na př. bod B_1 splynul s bodem B_2, splynuly by navzájem obě přímky A_1A_2, A_2A_3 a tudíž i oba body A_1, A_3; stejně jako $B_1 \neq B_2$ se dokáže též $B_1 \neq B_3$, $B_2 \neq B_3$. Nyní podle věty 103.7 existuje na $\mathbf{Q}_1$ projektivita ψ, při které $\psi(A_1) = A_4$, $\psi(A_5) = A_2$, $\psi(A_3) = A_6$. Protože je na př. $A_1 \neq A_4$, není ψ identická transformace kuželosečky $\mathbf{Q}_1$. Dokážeme-li, že všecky tři body B_1, B_2, B_3 leží na ose h projektivity ψ, budeme hotovi. Stačí, provedeme-li důkaz pro bod B_1. Za tím účelem uvažujme na $\mathbf{Q}_1$ involuci φ_1 se středem B_1 a položme $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$, takže $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ (ježto $\varphi_1 = \varphi_1^{-1}$). Ježto B_1 je průsečík přímek (104.1), je $\varphi_1(A_2) = A_1$, $\varphi_1(A_4) = A_5$; ježto $\psi(A_1) = A_4$, $\psi(A_5) = A_2$ a ježto $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$, je $\varphi_2(A_2) = A_4$, $\varphi_2(A_4) = A_2$ a podle věty 87.4 (přenesené na kuželosečku) je φ_2 involuce. Ježto φ_1, φ_2 jsou involuce a ježto $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, plyne z věty 104.2, že střed B_1 involuce φ_1 leží na ose h projektivity ψ, což jsme právě měli dokázat.

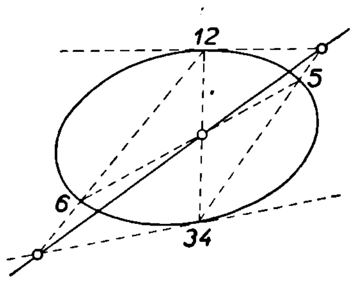
Věta 104.4 byla objevena r. 1640 B. Pascalem (tehdy šestnáctiletým) a je jednou z nejstarších vět projektivní geometrie; nazývá se *Pascalova věta*. Příslušná věta o duálních kuželosečkách $\tilde{Q}_1$ byla formulována teprve r. 1806 Ch. J. Brianchonem



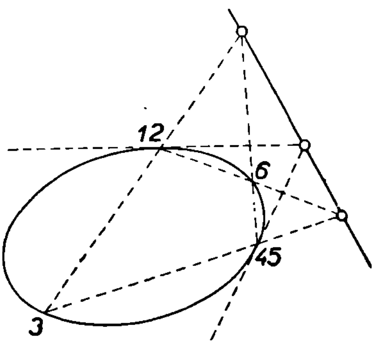
Obr. 2.



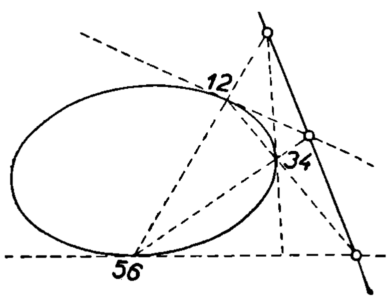
Obr. 3.



Obr. 5.



Obr. 4.



Obr. 6.

a říká se jí někdy *Brianchonova věta*. Obrazce na předcházející straně ilustrují Pascalovu větu; body $A_1, \ldots, A_6$ jsou stručně označeny číslicemi 1, ..., 6; (12 na př. znamená, že bod A_1 splývá s bodem A_2); body B_1, B_2, B_3 jsou vyznačeny kroužky.

105. KVADRIKY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU. Je-li n nulita a (p, q) signatura kvadriky $\mathbf{Q}_2$ prostoru $\boldsymbol{P}_3$, je podle (100.6) $n + p + q = 4$; mimo to $n \leqq 3$; není-li předepsána orientace kvadriky $\mathbf{Q}_2$, můžeme předpokládat, že $p \geqq q$. Pro $n = 3$ je $(p, q) = (1,0)$ a $\mathbf{Q}_2$ je dvojnásobná rovina. Pro $n = 2$ má $\mathbf{Q}_2$ za vrchol přímku p; signatura je buďto (1,1), načež $\mathbf{Q}_2$ se skládá ze dvou různých reálných rovin s průsečnicí p, nebo (2,0), načež $\mathbf{Q}_2$ se skládá ze dvou imaginárních komplexně sdružených rovin, jejichž průsečnicí je opět p. Pro $n = 1$ má $\mathbf{Q}_2$ za vrchol bod V; taková $\mathbf{Q}_2$ se jmenuje *kužel*; průnik kužele s rovinou ϱ neprocházející vrcholem V je regulární $\mathbf{Q}_1$ a kužel se skládá ze všech přímek spojujících V s jednotlivými body na $\mathbf{Q}_1$; signatura je buďto (3,0), načež $\mathbf{Q}_1$ a $\mathbf{Q}_2$ jsou formálně reálné a V je jediným reálným bodem na $\mathbf{Q}_2$, nebo signatura je (2,1), načež $\mathbf{Q}_1$ a $\mathbf{Q}_2$ jsou bodově reálné. V případě signatury (2,1) dělí kužel $\mathbf{Q}_2$ prostor $\boldsymbol{P}_3$ na vnějšek a vnitřek; $\mathbf{Q}_2$ je v tomto případě singulární eliptická kvadrika.

Zbývají *regulární* $\mathbf{Q}_2$, na které se omezíme v dalším průběhu tohoto článku. Pro signaturu máme tři možnosti: (4,0), (3,1), (2,2). Signatura (4,0) dává formálně reálnou regulární $\mathbf{Q}_2$, která nemá žádný reálný bod. Signatura (3,1) dává eliptickou regulární $\mathbf{Q}_2$, která, jak víme, dělí prostor $\boldsymbol{P}_3$ na vnitřek a vnějšek. Víme (viz větu 102.3), že tečná rovina takové $\mathbf{Q}_2$ v libovolném jejím bodě H nemá mimo H jiný reálný bod společný s $\mathbf{Q}_2$, takže na $\mathbf{Q}_2$ nejsou žádné reálné přímky. Dále víme (viz větu 102.5), že jestliže rovina ϱ není tečnou rovinou pro $\mathbf{Q}_2$, potom buďto celá ϱ leží vně $\mathbf{Q}_2$ nebo ϱ protne $\mathbf{Q}_2$ v kuželosečce; pól roviny ϱ vzhledem ke $\mathbf{Q}_2$ leží v prvém případě uvnitř a ve druhém vně $\mathbf{Q}_2$. Leží-li bod A uvnitř $\mathbf{Q}_2$, víme, že každá přímka jdoucí bodem A je sečnou kvadriky. Leží-li však A vně $\mathbf{Q}_2$, všimli jsme si už, že jeho polární rovina ϱ protne $\mathbf{Q}_2$ v kuželosečce $\mathbf{Q}_1$. Spojnice bodu A s jednotlivými body na $\mathbf{Q}_2$ jsou tečny ke $\mathbf{Q}_2$ vedené bodem A, které tedy vyplní bodově reálný *kužel tečen* $\mathbf{Q}_2'$ s vrcholem

A . Leží-li bod X mimo kužel tečen $\mathbf{Q}_2'$, nahlédneme snadno, že přímka AX je pro $\mathbf{Q}_2$ sečnou nebo nesečnou podle toho, zda bod X leží uvnitř či vně kužele tečen $\mathbf{Q}_2'$.

Zbývají regulární $\mathbf{Q}_2$ se signaturou (2,2). Z věty 102.2 plyne, že tečná rovina ke $\mathbf{Q}_2$ v libovolném jejím bodě H protne $\mathbf{Q}_2$ ve dvou reálných přímkách s průsečíkem H, t. j. každým bodem na uvažované $\mathbf{Q}_2$ procházejí právě dvě přímky obsažené v $\mathbf{Q}_2$, proto $\mathbf{Q}_2$ se signaturou (2,2) se jmenuje *regulární přímková* $\mathbf{Q}_2$. U takové $\mathbf{Q}_2$ nelze mluvit o vnitřku a vnějšku; z věty 102.1 plyne, že každá rovina ϱ, která není pro $\mathbf{Q}_2$ rovinou tečnou, protne $\mathbf{Q}_2$ v kuželosečce. Z toho plyne dále, že pro každou polohu bodu A mimo $\mathbf{Q}_2$ tvoří tečny ke $\mathbf{Q}_2$ vedené bodem A bodově reálný kužel tečen s vrcholem A. Jestliže přímka AX není tečnou, je sečnou nebo nesečnou podle toho, zda bod X leží vně či uvnitř kužele tečen s vrcholem A. (Opačně než u eliptické $\mathbf{Q}_2$!) Neboť orientujme $\mathbf{Q}_2$ tak, že A je kladný; souhlasně orientovaný průnik $\mathbf{Q}_2$ s polární rovinou ϱ bodu A má podle věty 102.1 signaturu (1,2) a můžeme předpokládat, že bod X leží v ϱ; je-li X uvnitř kužele tečen, je bod X kladný [ježto signatura je (1,2)] a podle věty 99.6 přímka AX je nesečnou pro $\mathbf{Q}_2$. Podobně soudíme v případě, že X je vně kužele tečen.

VĚTA 105.1. *Nechť přímka p leží na regulární přímkové $\mathbf{Q}_2$ prostoru $\mathbf{P}_3$. Jestliže každému bodu X na přímce p přiřadíme tečnou rovinu kvadriky $\mathbf{Q}_2$ v bodě X, dostaneme projektivní zobrazení přímky p na svazek rovin $\pi(p\ ;\ \mathbf{P}_3)$.* Neboť naše přiřazení je částí polarity vzhledem ke $\mathbf{Q}_2$.

VĚTA 105.2. *Všecky přímky ležící na regulární přímkové $\mathbf{Q}_2$ je možné rozdělit na dvě soustavy tak, že dvě různé přímky na $\mathbf{Q}_2$ náležejí do různých soustav, právě když se protnou.* Je zřejmé, že takové rozdělení je možné jen jediným způsobem. Mluvíme-li o *soustavách přímek* na regulární přímkové $\mathbf{Q}_2$, míníme vždy soustavy, o kterých je řeč ve větě 105.2.

DŮKAZ. Víme, že každým bodem H na $\mathbf{Q}_2$ procházejí právě dvě přímky této kvadriky, které dohromady tvoří průnik $\mathbf{Q}_2$ s tečnou rovinou bodu H. Zvolme nyní libovolně bod H_0 na $\mathbf{Q}_2$ a označme p_0, q_0 obě jím procházející přímky naší kvadriky. Přímku p_0 dejme do prvé soustavy, přímku q_0 do druhé. Každým od H_0 různým bodem přímky

p_0 prochází mimo p_0 ještě právě jedna přímka kvadriky $\mathbf{Q}_2$; dejme ji do druhé soustavy. Každým od H_0 různým bodem přímky q_0 prochází mimo q_0 ještě právě jedna přímka kvadriky $\mathbf{Q}_2$: dejme ji do prvé soustavy. Všimněme si, že jsme jistě nedali žádnou přímku zároveň do obou soustav, neboť taková přímka by nutně ležela v tečné rovině τ_0 bodu H_0 , která však protne $\mathbf{Q}_2$ pouze v přímkách p_0 , q_0 . Na druhé straně jsme umístili každou přímku ležící na $\mathbf{Q}_2$ do jedné z obou soustav. Neboť budiž H libovolný bod na $\mathbf{Q}_2$ a budiž τ jeho tečná rovina. Jestliže H leží mimo p_0 i mimo q_0 , nemůže H ležet v τ_0 , t. j. H není konjugován s H_0 vzhledem ke $\mathbf{Q}_2$ a tudíž ani H_0 neleží v τ . Tedy roviny τ_0 , τ se protnou v přímce r , která neprochází žádným z bodů H_0 , H a protne $\mathbf{Q}_2$ ve dvou bodech, z nichž jeden leží na p_0 a druhý na q_0 . Spojnice těchto dvou bodů s bodem H jsou však právě obě přímky kvadriky $\mathbf{Q}_2$ jdoucí bodem H , z nichž tedy jedna protne p_0 a druhá protne q_0 . Máme tedy skutečně všecky přímky kvadriky $\mathbf{Q}_2$ rozděleny do dvou soustav a je patrné, že jestliže dvě různé přímky kvadriky $\mathbf{Q}_2$ se protnou, potom náleží každá z nich do jiné soustavy, ať již průsečíkem je bod H_0 , či některý jiný bod jedné z obou přímek p_0 , q_0 , či posléze bod H ležící mimo p_0 i mimo q_0 . Zbývá dokázat, že naopak, jestliže máme na $\mathbf{Q}_2$ přímku p prvé soustavy a přímku q druhé soustavy, potom p a q se protnou. To je zřejmé, je-li $p = p_0$ nebo $q = q_0$. Není-li tomu tak, usuzujeme takto. Přímka p neprotne přímku p_0 vůbec, přímka q pak protne p_0 v nějakém bodě $A \neq H_0$. Spojením přímky p s bodem A je rovina ϱ , jejíž průnik s $\mathbf{Q}_2$ obsahuje přímku p a mimo to ještě bod A , takže se snadno nahlédne, že uvažovaný průnik se skládá z přímky p a z nějaké přímky jdoucí bodem A , která musí splynout s přímkou q , neboť bodem A procházejí na $\mathbf{Q}_2$ pouze dvě přímky p_0 , q a prvá z nich neleží spolu s p v téže rovině. Tedy přímky p , q leží obě v rovině ϱ , tudíž se protnou.

VĚTA 105.3. *Buďtež p_1 , p_2 dvě různé přímky téže soustavy na regulární přímkové kvadrice $\mathbf{Q}_2$.* (Podle věty 105.2 nemají tedy přímky p_1 , p_2 žádný společný bod.) *Potom existuje takové projektivní zobrazení φ přímky p_1 na přímku p_2 , že bod X_2 přímky p_2 je obrazem bodu X_1 přímky p_1 , právě když přímka X_1X_2 leží na $\mathbf{Q}_2$.* Zřejmě tyto přímky X_1X_2 vyplní na $\mathbf{Q}_2$ tu soustavu, do které nenáležejí dané přímky p_1 , p_2 .

DůKAZ. Je snadné sestavit geometrický důkaz; to přenecháme čtenáři a podáme početní důkaz. Existuje ar. base A_0, A_1, A_2, A_3 prostoru $\boldsymbol{P}_3$ tak, že A_0, A_1 je ar. base přímky p_1 a A_2, A_3 je ar. base přímky p_2. Snadno se nahlédne, že v kvadratické formě f_2, které vytvořuje $\mathbf{Q}_2$, jsou pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$ všecky koeficienty rovny nule až na koeficienty při $x_0x_2, x_1x_2, x_0x_3, x_1x_3$, t. j

$$f_2(X) = ax_0x_2 + bx_1x_2 + cx_0x_3 + dx_1x_3 .$$

Podmínky pro singulární bod jsou

$$ax_2 + cx_3 = 0 , \quad bx_2 + dx_3 = 0 ,$$
$$ax_0 + bx_1 = 0 , \quad cx_0 + dx_1 = 0 ;$$

ježto $\mathbf{Q}_2$ je regulární, lze jím vyhovět pouze triviálně, t. j. $ad - bc \neq 0$. Položíme-li nyní

$$LA_0 = cA_2 - aA_3 , \qquad LA_1 = dA_2 - bA_3 ,$$

je $\varphi = \{L\}$ projektivní zobrazení přímky p_1 na přímku p_2, které má žádanou vlastnost, ježto se snadno verifikuje, že pro $X_1 = x_0A_0 + x_1A_1 \neq \mathbf{o}$, $X_2 = LX_1$ celá přímka X_1X_2 leží na $\mathbf{Q}_2$.

VĚTA 105.4. *Nechť přímky p_1, p_2 prostoru $\boldsymbol{P}_3$ nemají společný bod. Budiž dáno projektivní zobrazení φ přímky p_1 na přímku p_2. Potom existuje v $\boldsymbol{P}_3$ regulární přímková kvadrika $\mathbf{Q}_2$* (obsahující obě dané přímky), *vzhledem k níž má φ vlastnost uvažovanou ve větě* 105.3.

DůKAZ. Můžeme zvolit ar. basi A_0, A_1, A_2, A_3 prostoru $\boldsymbol{P}_3$ tak, že A_0, A_1 je ar. base pro p_1, že A_2, A_3 je ar. base pro p_2 a že obrazem bodu $\{x_0A_0 + x_1A_1\}$ při φ je bod $\{x_0A_2 + x_1A_3\}$. Potom se však snadno verifikuje, že je-li $f_2(X) = x_0x_3 - x_1x_2$, vytvořuje f_2 žádanou kvadriku $\mathbf{Q}_2$.

106. LINEÁRNÍ PROSTORY NA KVADRIKÁCH. Budeme se zabývat v tomto článku pouze regulárními kvadrikami; výsledky se snadno přenesou na singulární kvadriky užitím článku 96, což přenecháváme čtenáři. Budiž tedy dána regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\boldsymbol{P}_m$ a budiž $\boldsymbol{P}_k$ lineární podprostor, který celý leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Dokážeme, že

$$k \leqq \frac{m-1}{2} . \tag{106.1}$$

Ježto Q_{m-1} je regulární, převede polarita vzhledem ke Q_{m-1} lineární podprostor P_k v duální podprostor $\tilde{P}_k$ téže dimense k, t. j. (viz článek 75), ve množinu všech těch nadrovin prostoru P_m, které procházejí všemi body určitého $(m - k - 1)$-rozměrného lineárního podprostoru v širším smyslu P'_{m-k-1}. Snadno se nahlédne, že do P'_{m-k-1} náležejí všecky ty body prostoru P_m, které jsou vzhledem ke Q_{m-1} konjugovány s každým bodem prostoru P_k. Ježto však P_k je částí kvadriky Q_{m-1}, jsou každé dva body prostoru P_k mezi sebou konjugovány vzhledem ke Q_{m-1} a z toho plyne, že prostor P_k je částí prostoru P'_{m-k-1}, že tedy $k \leqq m - k - 1$, z čehož následuje nerovnost (106.1). Pro $m = 1$ a pro $m = 2$ ze (106.1) plyne $k = 0$, t. j. regulární Q_0 a regulární Q_1 neobsahuje žádné přímky, což jsme ostatně již věděli. Pro $m \geqq 3$ ze (106.1) plyne, že *dimense lineárního podprostoru obsaženého v regulární* Q_{m-1} *je při lichém* m *nejvýš rovna* $\frac{1}{2}(m - 1)$, *při sudém* m *nejvýš rovna* $\frac{1}{2}m - 1$.

Na otázku, zdali obráceně regulární Q_{m-1} obsahuje lineární podprostory právě udané maximální dimense, je *v komplexním oboru* odpověď kladná, a dokonce platí, že každý bod na Q_{m-1} a každý v Q_{m-1} obsažený lineární podprostor nižší dimense je obsažen v nějakém lineárním podprostoru výše vyčíslené maximální dimense. Ježto pro $m = 1$ a $m = 2$ je věta správná (počítáme-li body za lineární podprostory dimense 0), můžeme ji dokázat indukcí. Je-li H libovolně daný bod na Q_{m-1}, kde $m \geqq 3$, potom podle té části věty 102.2, ve které se nemluví o signatuře a která zřejmě platí i v komplexním oboru, tečná nadrovina τ bodu H protne Q_{m-1} v Q_{m-2} s jediným singulárním bodem H; zvolíme-li v τ lineární podprostor P_{m-2}, protne jej Q_{m-1} v regulární Q_{m-2} a Q_{m-1} se skládá ze všech přímek spojujících H s jednotlivými body na Q_{m-2}. Nyní podle předpokladu na Q_{m-2} leží lineární podprostor dimense $\frac{1}{2}(m - 3)$ při lichém m (pro $m = 3$ prostě bod), dimense $\frac{1}{2}m - 2$ při sudém m (pro $m = 4$ opět prostě bod). Spojení tohoto lineárního podprostoru s bodem H je žádaný ve Q_{m-1} obsažený lineární podprostor P_k, kde $k = \frac{1}{2}(m - 1)$ při lichém m, $k = \frac{1}{2}m - 1$ při sudém m. Je-li původně dán ve Q_{m-1} obsažený a bodem H procházející lineární podprostor P_h, $h < k$, dokáže se snadno (opět indukcí), že P_k lze volit tak, aby obsahoval daný P_h. Také je patrné, že Q_{m-1} obsahuje nekonečně mnoho lineárních podprostorů $\boldsymbol{P}_k$ maximální dimense, a pro $m \geqq 4$ jich libovolně daným bodem H kvadriky $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ prochází nekonečně mnoho, kdežto pro $m = 3$ jenom dva.

V reálném oboru závisí maximální dimense k lineárního podprostoru regulární kvadriky $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ na její signatuře (p, q). Ježto nezáleží na orientaci, můžeme předpokládat, že $p \geqq q$. Podle (100.6) a podle věty 100.3 je

$$p + q = m + 1 . \tag{106.2}$$

Pro $q = 0$ je $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ formálně reálná a neobsahuje žádné reálné body. Pro $q = 1$ je $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ eliptická a podle věty 102.3 neobsahuje žádné reálné přímky. Pro $q \geqq 2$ však $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ obsahuje lineární podprostory a jejich maximální dimense je rovna $k = q - 1$. Důkaz se opět provede indukcí na základě věty 102.2, kde si tentokrát musíme všimnout i části týkající se signatury; důkaz je tak podobný výše provedenému důkazu pro komplexní obor, že jej můžeme přenechat čtenáři. I v reálném oboru platí, že každý bod na $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ a každý v $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ obsažený lineární podprostor nižší dimense je obsažen v lineárním prostoru maximální dimense obsaženém v $\boldsymbol{Q}_{m-1}$.

Ježto $k = q - 1$, můžeme ze (106.2) vypočíst signaturu, známe-li k. Je-li tedy $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ bodově reálná regulární kvadrika prostoru $\boldsymbol{P}_m$ a je-li $\boldsymbol{Q}'_{m-1}$ bodově reálná regulární kvadrika prostoru $\boldsymbol{P}'_m$, potom v důsledku vět 100.3, 101.1 a 101.2 existuje kolineární zobrazení prostoru $\boldsymbol{P}_m$ na prostor $\boldsymbol{P}'_m$ převádějící $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ v $\boldsymbol{Q}'_{m-1}$, právě když maximální dimense lineárního podprostoru je táž u kvadriky $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ jako u kvadriky $\boldsymbol{Q}'_{m-1}$.