XI

KOLINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

79. POJEM KOLINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ. V článku 14 jsme zavedli pojem isomorfismu vektorových prostorů a ukázali jsme, že dva vektorové prostory konečné dimense jsou isomorfní, právě když jejich dimense jsou si rovny. Buďtež nyní $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{P}'_m$ dva projektivní prostory téže dimense $m \geq 1$ a buďtež $\mathbf{W}_{m+1}$, $\mathbf{W}'_{m+1}$ jejich aritmetické základy, takže $\mathbf{W}_{m+1}$, $\mathbf{W}'_{m+1}$ jsou dva vektorové prostory téže dimense $m + 1$. Existuje tudíž isomorfní zobrazení L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}'_{m+1}$. Z definice isomorfního zobrazení je patrné, že L převádí každou lineární soustavu obsaženou ve $\mathbf{W}_{m+1}$ v lineární soustavu téže dimense obsaženou ve $\mathbf{W}'_{m+1}$. Ježto g. body prostoru $\mathbf{P}_m$ můžeme ztotožnit s lineárními soustavami dimense 1 obsaženými ve $\mathbf{W}_{m+1}$ a podobně pro g. body prostoru $\mathbf{P}'_m$, vidíme, že L určuje vzájemně jednoznačný vztah K mezi g. body prostoru $\mathbf{P}_m$ a g. body prostoru $\mathbf{P}'_m$. Pravíme, že K je *kolineární zobrazení* projektivního prostoru $\mathbf{P}'_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ *vytvořené* isomorfismem L. Kolineární zobrazení podle této definice je tedy prosté zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor téže dimense, který může, ale nemusí splynout s $\mathbf{P}_m$.

Následující vlastnosti jsou bezprostředně patrné z definice:

VĚTA 79.1. *Je-li K_1 kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ a je-li K_2 kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}'_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}''_m$, potom složené zobrazení $K_1 \circ K_2$ je kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}''_m$.*

VĚTA 79.2. *Je-li K kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$, potom inversní zobrazení K^{-1} je kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}'_m$ na prostor $\mathbf{P}_m$.*

VĚTA 79.3. *Identické zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ je kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na týž prostor $\mathbf{P}_m$.*

VĚTA 79.4. *Je-li K kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$, a je-li $\mathbf{P}_k$ lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}_m$, P'_k jeho obraz při K, potom $\mathbf{P}'_k$ je lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}'_m$, $\mathbf{P}_k$ a $\mathbf{P}'_k$ mají oba touž dimensi k a parciální zobrazení $K \mid \mathbf{P}_k$ je kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_k$ na prostor $\mathbf{P}'_k$.*

Podle definice je kolineární zobrazení K projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ vytvořeno isomorfním zobrazením L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}'_{m+1}$. Je-li c reálné číslo různé od nuly, položme $L_1X = c \, . \, LX$ pro každý ar. bod X a označme $L_1 = c \, . \, L$; potom také L_1 je isomorfní zobrazení $\mathbf{W}_{m+1}$ na $\mathbf{W}'_{m+1}$, které zřejmě vytvořuje totéž kolineární zobrazení $\mathbf{P}_m$ na $\mathbf{P}'_m$. Obráceně dokážeme snadno, že je-li L_1 isomorfní zobrazení $\mathbf{W}_{m+1}$ na $\mathbf{W}'_{m+1}$, které vytvořuje totéž kolineární zobrazení K, které vytvořuje L, existuje reálné číslo $c \neq 0$ tak, že $L_1 = cL$. Neboť zvolíme-li libovolně ar. bod $A \neq \mathbf{o}$ vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, mají ar. body $LA \neq \mathbf{o}$, $L_1A \neq \mathbf{o}$ touž polohu, takže existuje číslo $c \neq 0$ tak, že $L_1A = c \, . \, LA$. Máme dokázat, že také pro kterýkoli jiný ar. bod X prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ je $L_1X = c \, . \, LX$. Jestliže předně ar. body A, X jsou lineárně závislé, existuje číslo m tak, že $X = mA$ a podle definice isomorfismu je $LX = m \, . \, LA$, $L_1X = m \, . \, L_1A$, tedy $L_1X = c \, . \, LX$. Jestliže za druhé ar. body A, X jsou lineárně nezávislé, je $X \neq \mathbf{o}$ a oba ar. body $LX \neq \mathbf{o}$, $L_1X \neq \mathbf{o}$ mají touž polohu, takže existuje číslo a tak, že $L_1X = a \, . \, LX$. Mimo to je však též $A + X \neq \mathbf{o}$ a oba ar. body $L(A + X) \neq \mathbf{o}$, $L_1(A + X) \neq \mathbf{o}$ mají touž polohu, takže existuje číslo b tak, že $L_1(A + X) = b \, . \, L(A + X)$ neboli $c \, . \, LA + a \, . \, LX = b \, . \, LA + b \, . \, LX$, t. j. $(c - b) \, . \, LA + (a - b) \, . \, LX = \mathbf{o}$. Avšak zároveň s ar. body A, X jsou též ar. body LA, LX lineárně nezávislé, tedy $c - b = 0$, $a - b = 0$, takže $a = c$, t. j. $L_1X = c \, . \, LX$.

Podobně jako jsme označili $\{X\}$ g. bod odpovídající ar. bodům cX, kde c probíhá všecka čísla různá od nuly, označíme v důsledku právě dokázané věty $\{L\}$ projektivní zobrazení K vytvořené isomorfismem L, neboť odpovídá všem isomorfismům cL, $c \neq 0$.

Je-li f regulární afinní zobrazení eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ na eukleidovský prostor $\mathbf{E}'_m$, definujeme $f(\mathbf{u})$ podle věty 37.2 pro každý vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ a tím rozšíříme f v zobrazení množiny $\mathbf{W}_{m+1}$ všech vlastních i nevlastních ar. bodů prostoru $\mathbf{E}_m$ na množinu $\mathbf{W}'_{m+1}$ všech vlastních i nevlastních ar. bodů prostoru $\mathbf{E}'_m$. Toto rozšířené zobrazení f je podle výsledků článku 37 isomorfní, takže vytvořuje kolineární zobrazení $\{f\}$ projektivního prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ na projektivní prostor $\bar{\mathbf{E}}'_m$, které rovněž je rozšířením původního regulárního afinního zobrazení f. Pravíme, že $\{f\}$ je *projektivním rozšířením* daného afinního zobrazení f. Takové projektivní rozšíření $\{f\}$ zřejmě má tyto dvě vlastnosti:

(a) obrazem každého vlastního bodu prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ je vlastní bod prostoru $\bar{\mathbf{E}}'_m$;

(b) obrazem každého nevlastního bodu prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ je nevlastní bod prostoru $\bar{\mathbf{E}}'_m$.

Obráceně plyne z článku 37, že každé kolineární zobrazení prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ na prostor $\bar{\mathbf{E}}'_m$ je projektivním rozšířením určitého regulárního afinního zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na $\mathbf{E}'_m$. Ostatně je patrné, že je-li splněna jedna z obou vlastností (a), (b), je splněna také druhá a obě se dají stručně shrnout tak, že obrazem úběžné nadroviny prostoru $\mathbf{E}_m$ je úběžná nadrovina prostoru $\mathbf{E}'_m$.

Víme, že v prostoru $\mathbf{P}_m$ nelze udat více než $m + 1$ lineárně nezávislých g. bodů. Nazveme *geometrickou basí* (zkráceně g. basí) prostoru $\mathbf{P}_m$ uspořádanou soustavu

$$\{A_0\}, \ \{A_1\}, \ldots, \ \{A_m\}, \ \{A_{m+1}\} \tag{79.1}$$

$m + 2$ g. bodů s tou vlastností, že vynecháním kteréhokoli z nich vznikne $m + 1$ lineárně nezávislých g. bodů. Je-li (79.1) g. base pro $\mathbf{P}_m$, jest $A_0, A_1, \ldots, A_m$ ar. base, takže existují čísla $t_0, t_1, \ldots, t_m$ tak, že

$$A_{m+1} = t_0 A_0 + t_1 A_1 + \ldots + t_m A_m . \tag{79.2}$$

Při tom jsou všecka čísla $t_0, t_1, \ldots, t_m$ různá od nuly, neboť kdyby pro nějaké r $(0 \leqq r \leqq m)$ bylo $t_r = 0$, plynulo by ze (79.2), že by vynecháním g. bodu $\{A_r\}$ vznikla ze (79.1) soustava $m + 1$ lineárně závislých g. bodů. Obráceně se snadno dokáže, že platí-li (79.2) a jsou-li všecka čísla $t_0, t_1, \ldots, t_m$ různá od nuly, je (79.1) g. base pro $\mathbf{P}_m$.

Z předcházejícího je patrné, že je-li (79.1) g. base pro $\mathbf{P}_m$, je možné ar. zástupce daných g. bodů volit takže (79.2) má tvar

(79.3) $$A_{m+1} = A_0 + A_1 + \ldots + A_m .$$

Je-li tomu tak, pravíme, že g. base (79.1) je *vytvořena* ar. basí A_0, $A_1, \ldots, A_m$. Zřejmě každá ar. base vytvořuje g. basi. Obráceně je každá g. base vytvořena nekonečně mnoha ar. basemi; je-li A_0, $A_1, \ldots, A_m$ jedna z nich, potom nejobecnější taková ar. base má tvar $cA_0, cA_1, \ldots, cA_m$, kde číslo c je různé od nuly, jinak je však libovolné.

Zřejmá je

Věta 79.5. *Při kolineárním zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ přejde každá g. base prostoru $\mathbf{P}_m$ v g. basi prostoru $\mathbf{P}'_m$.*

Obráceně platí

Věta 79.6. *Buďtež $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{P}'_m$ projektivní prostory téže dimense m. Budiž* (79.1) *g. base prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž*

(79.4) $$\{A'_0\}, \{A'_1\}, \ldots, \{A'_m\}, \{A'_{m+1}\}$$

g. base prostoru $\mathbf{P}'_m$. Potom existuje právě jedno kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$, při kterém g. base (79.1) *přejde v g. basi* (79.4).

Důkaz. Můžeme předpokládat, že ar. zástupci g. bodů (79.1) jsou voleni tak, že platí (79.3), a že ar. zástupci g. bodů (79.4) jsou voleni tak, že platí

(79.5) $$A'_{m+1} = A'_0 + A'_1 + \ldots + A'_m .$$

Je-li nyní $\{L\}$ žádané kolineární zobrazení, je zřejmé, že existují reálná čísla $c_0, c_1, \ldots, c_m$, vesměs různá od nuly, s tou vlastností, že

(79.6) $$LA_0 = c_0A'_0 , LA_1 = c_1A'_1 , \ldots , LA_m = c_mA'_m .$$

Obráceně rovnice tvaru (79.6), kde čísla $c_0, c_1, \ldots, c_m$ jsou různá od nuly, definují vždy kolineární zobrazení $\{L\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$ při kterém g. base (79.1) přejde v g. basi (79.4), právě když je splněna podmínka $\{LA_{m+1}\} = \{A'_{m+1}\}$. Podle (79.3) a (79.5) je však

$$LA_{m+1} = c_0A'_0 + c_1A'_1 + \ldots + c_mA'_m ;$$

porovnání se (79.5) ukazuje, že podmínka je splněna, právě když všecka čísla $c_0, c_1, \dots, c_m$ jsou si rovna. Ježto $\{L\} = \{c_0 L\}$, můžeme předpokládat, že

$$LA_0 = A'_0 ,\ LA_1 = A'_1 ,\ \dots ,\ LA_m = A'_m .$$

Věta 79.6 je tedy správná s tímto dodatkem: *Je-li g. base* (79.1) *vytvořena ar. basí*

$$A_0 , A_1 , \dots , A_m \tag{79.7}$$

a je-li g. base (79.4) *vytvořena ar. basí*

$$A'_0 , A'_1 , \dots , A'_m , \tag{79.8}$$

potom kolineární zobrazení, o kterém je řeč ve větě 79.6, *je vytvořeno tím isomorfním zobrazením ar. základu prostoru* $\mathbf{P}_m$ *na ar. základ prostoru* $\mathbf{P}'_m$, *při kterém ar. base* (79.7) *přejde v ar. basi* (79.8).

80. KONGRUENCE VE VEKTOROVÝCH PROSTORECH. Budiž dán vektorový prostor $\mathbf{V}_m$ dimense m a v něm obsažená lineární soustava $\mathbf{V}_k$ dimense k. Podle věty 13.1 je $k \leqq m$, při čemž rovnost $k = m$ nastane pouze v tom případě, že $\mathbf{V}_k$ splyne s celým $\mathbf{V}_m$. Jsou-li nyní $\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2$ dva vektory prostoru $\mathbf{V}_m$, pravíme, že $\mathbf{u}_1$ je *kongruentní* s $\mathbf{u}_2$ *podle modulu* $\mathbf{V}_k$ a píšeme

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2 \pmod{\mathbf{V}_k} , \tag{80.1}$$

jestliže vektor $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ náleží do lineární soustavy $\mathbf{V}_k$. Potom platí následující dvě věty:

VĚTA 80.1. *Platí-li* (80.1) *a*

$$\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}_2 \pmod{\mathbf{V}_k} , \tag{80.2}$$

platí také

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \pmod{\mathbf{V}_k} . \tag{80.3}$$

DŮKAZ. Vztah (80.1) znamená, že vektor $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ náleží do $\mathbf{V}_k$; vztah (80.2) znamená, že vektor $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ náleží do $\mathbf{V}_k$. Jsou-li oba vztahy správné, potom podle definice lineární soustavy náleží do $\mathbf{V}_k$ také

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) - (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$$

a to znamená, že je správný též vztah (80.3).

VĚTA 80.2. *Platí-li* (80.1) *a je-li c reálné číslo, platí také*

$$cu_1 \equiv cu_2 \ (\mathrm{mod} V_k) \ . \tag{80.4}$$

DŮKAZ. Vztah (80.1) znamená, že vektor $u_1 - u_2$ náleží do V_k, načež podle definice lineární soustavy do V_k náleží také

$$c(u_1 - u_2) = cu_1 - cu_2$$

a to znamená, že je správný též vztah (80.4).

Zvolme libovolnou basi

$$w_1 , \ \ldots , \ w_k \tag{80.5}$$

prostoru V_k. Podle věty 13.1 můžeme připojit další vektory

$$w_{k+1} , \ \ldots , \ w_m \tag{80.6}$$

tak, že (80.5) a (80.6) dohromady tvoří basi prostoru V_m. Jsou-li nyní

$$u_1 = a_1 w_1 + \ldots + a_m w_m ,$$

$$u_2 = b_1 w_1 + \ldots + b_m w_m$$

libovolné dva vektory prostoru V_m, potom platí (80.1), právě když vektor $u_1 - u_2$ je lineární kombinací vektorů (80.5), t. j. právě když

$$a_r = b_r \quad \text{pro} \quad k + 1 \leqq r \leqq m \ .$$

Z toho soudíme snadno, že platí:

VĚTA 80.3. *Vektory prostoru V_m můžeme rozdělit na třídy tak, že kongruence* (80.1) *platí, právě když oba vektory* u_1, u_2 jsou v téže třídě.

Množinu všech takových tříd označíme $V_m \, \mathrm{mod} V_k$ a třídu, do které patří vektor u, označíme $u \, \mathrm{mod} V_k$. Věty 80.1 a 80.2 vedou k následujícím dvěma definicím.

Součtem tříd $u \, \mathrm{mod} V_k$, $v \, \mathrm{mod} V_k$ rozumíme třídu $u + v \, \mathrm{mod} V_k$, která podle věty 80.1 je nezávislá na volbě vektorů u, v uvnitř obou tříd. Součinem třídy $u \, \mathrm{mod} V_k$ s reálným číslem c rozumíme třídu $cu \, \mathrm{mod} V_k$, která podle věty 80.2 je nezávislá na volbě vektoru u uvnitř jeho třídy. Snadno se zjistí, že v důsledku těchto definic $V_m \, \mathrm{mod} V_k$ tvoří nový vektorový prostor. Zřejmě platí:

VĚTA 80.4. *Tvoří-li vektory* (80.5) *basi pro* $\mathbf{V}_k$ *a spolu s vektory* (80.6) *basi pro* $\mathbf{V}_m$, *potom třídy*

$$(80.7) \qquad \mathbf{w}_{k+1} \operatorname{mod} \mathbf{V}_k, \ldots, \mathbf{w}_m \operatorname{mod} \mathbf{V}_k$$

tvoří basi pro $\mathbf{V}_m \operatorname{mod} \mathbf{V}_k$. Z toho plyne:

VĚTA 80.5. *Vektorový prostor* $\mathbf{V}_m \operatorname{mod} \mathbf{V}_k$ *má dimensi* $m - k$. *Je-li* $k = 0$, *t. j. je-li* $\mathbf{V}_k$ *triviální*, splyne prostor $\mathbf{V}_m \operatorname{mod} \mathbf{V}_k$ s prostorem $\mathbf{V}_m$. Je-li $k = m$, t. j. splyne-li $\mathbf{V}_k$ s $\mathbf{V}_m$, je $\mathbf{V}_m \operatorname{mod} \mathbf{V}_k$ triviální. Zajímavé jsou tudíž pouze případy $1 \leqq k \leqq m - 1$.

Buďtež nyní $\mathbf{V}_m$, $\tilde{\mathbf{V}}_m$ dva duálně sdružené vektorové prostory dimense m (viz článek 49; místo vodorovného pruhu užijeme vlnitého pruhu). Budiž $\mathbf{V}_k$ lineární soustava dimense k prostoru $\mathbf{V}_m$. Zvolme opět vektory (80.5) a (80.6) tak, že dohromady tvoří basi pro $\mathbf{V}_m$, při čemž (80.5) je base pro $\mathbf{V}_k$. K dané basi pro $\mathbf{V}_m$ utvořme duální basi

$$\tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_m$$

pro $\tilde{\mathbf{V}}_m$. Je-li

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{w}_1 + \ldots + x_m \mathbf{w}_m,$$
$$\tilde{\mathbf{v}} = y_1 \tilde{\mathbf{w}}_1 + \ldots + y_m \tilde{\mathbf{w}}_m,$$

je podle definice duálních basí

$$d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m .$$

Budiž $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k} = \{\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_m\}$. Jestliže $\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{V}_k$, $\tilde{\mathbf{v}}$ do $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$, je $x_r = 0$ pro $k + 1 \leqq r \leqq m$, $y_s = 0$ pro $1 \leqq s \leqq k$, takže $d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = 0$. Tedy $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$ je duální obraz lineární soustavy $\mathbf{V}_k$ (viz větu 49.5). Platí-li (80.1), potom $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ náleží do $\mathbf{V}_k$, takže (stále za předpokladu, že $\tilde{\mathbf{v}}$ náleží do $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$) $d(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{v}}) = 0$ neboli $d(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{v}}) = d(\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{v}})$. Z toho plyne, že jestliže $\tilde{\mathbf{v}}$ náleží do $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$, potom výraz $d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}})$ závisí pouze na třídě $\mathbf{u} \operatorname{mod} \mathbf{V}_k$ vektoru $\mathbf{u}$. Mimo to pro $k + 1 \leqq r, s \leqq m$

$$d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad r = s, \\ 0 & \text{pro} \quad r \neq s, \end{cases}$$

takže platí:

VĚTA 80.5. *Buďtež* $\mathbf{V}_m$, $\tilde{\mathbf{V}}_m$ *duálně sdružené vektorové prostory. Budiž* $\mathbf{V}_k$ *lineární soustava prostoru* $\mathbf{V}_m$, $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$ *její duální obraz ve* $\tilde{\mathbf{V}}_m$. *Potom vektorové prostory*

$$\mathbf{V}_m \operatorname{mod} \mathbf{V}_k, \quad \tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$$

jsou duálně sdružené. Je-li

$$(80.8) \qquad \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$$

taková base pro $\mathbf{V}_m$, *že* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ *je base pro* $\mathbf{V}_k$ *a je-li* $\tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_m$ *base pro* $\tilde{\mathbf{V}}_m$ *duální k basi* (80.8), *potom k basi* (80.7) *prostoru* $\mathbf{V}_m$ mod$\mathbf{V}_k$ *je duální base* $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_m$ prostoru $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$.

81. PERSPEKTIVA PROJEKTIVNÍHO PROSTORU. Budiž dán projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ ($m \geqq 1$). Duální projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$ se podle definice skládá z nadrovin neboli (m — 1)-rozměrných lineárních podprostorů $\mathbf{P}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$. Jestliže v této definici prostor $\mathbf{P}_m$ nahradíme prostorem $\tilde{\mathbf{P}}_m$, dostaneme, že projektivní prostor $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_m$ duální k $\tilde{\mathbf{P}}_m$ se skládá z (m — 1)-rozměrných lineárních podprostorů $\tilde{\mathbf{P}}_{m-1}$. My jsme však už v článku 74 si uvědomili, že vztah mezi oběma prostory $\mathbf{P}_m$, $\tilde{\mathbf{P}}_m$ se dá formulovat ve tvaru, v němž oba prostory $\mathbf{P}_m$, $\tilde{\mathbf{P}}_m$ vystupují úplně symetricky, že tedy prostor $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_m$ můžeme ztotožnit s prostorem $\mathbf{P}_m$. Geometrická povaha tohoto ztotožnění vysvítá z článku 75, kde jsme poznali, že lineární podprostor $\tilde{\mathbf{P}}_{m-1}$ není nic jiného než množina všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$ procházejících určitým bodem prostoru $\mathbf{P}_m$, který jsme nazvali *vrcholem* příslušného $\tilde{\mathbf{P}}_{m-1}$; ztotožnění $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_m$ s $\mathbf{P}_m$ pozůstává v tom, že každý $\tilde{\mathbf{P}}_{m-1}$ nahradíme jeho vrcholem.

Právě provedenou úvahu můžeme považovat za zvláštní případ $k = -1$ úvahy, ke které nyní přikročíme. O tom se čtenář snadno přesvědčí; v následujícím textu není případ $k = -1$ výslovně zahrnut.

Budiž dán projektivní prostor $\mathbf{P}_m$($m \geqq 2$) a určitý jeho k-rozměrný lineární podprostor v širším smyslu ($0 \leqq k \leqq m - 2$), který označíme Q. Dále označíme Q^* množinu všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$ obsahujících Q. Podle článku 75 je Q^* (m — k — 1)-rozměrným projektivním prostorem vnořeným do $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Každý lineární podprostor v širším smyslu prostoru Q^* je tudíž zároveň lineárním podprostorem v širším smyslu prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Nyní ke Q^*, jako ke každému projektivnímu prostoru, existuje duální projektivní prostor $\tilde{Q}^*$ téže dimense $m - k - 1$. Prvky prostoru $\tilde{Q}^*$ podle definice jsou všecky lineární podprostory v širším smyslu dimense $m - k - 2$ prostoru Q^*, neboli ty lineární podprostory

$\tilde{\mathbf{P}}_{m-k-2}$ v širším smyslu prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, které jsou obsaženy v Q^*. Nyní každý $\tilde{\mathbf{P}}_{m-k-2}$ podle článku 75 má za vrchol určitý lineární podprostor $\mathbf{P}_{k+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ a je množinou všech nadrovin (prostoru $\mathbf{P}_m$) procházejících prostorem $\mathbf{P}_{k+1}$. Mimo to náš $\tilde{\mathbf{P}}_{m-k-2}$ náleží do $\tilde{Q}^*$, právě když jeho vrchol $\mathbf{P}_{k+1}$ obsahuje vrchol prostoru Q^*, t. j. právě když $\mathbf{P}_{k+1}$ obsahuje Q. Označme

$$\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m) \tag{81.1}$$

množinu všech těch $(k+1)$-rozměrných lineárních podprostorů $\mathbf{P}_{k+1}$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, které obsahují daný k-rozměrný lineární podprostor (v širším smyslu) Q téhož $\mathbf{P}_m$. Zjistili jsme, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi prvky množiny $\tilde{Q}^*$ a prvky množiny (81.1) pozůstávající prostě v tom, že prvky množiny $\tilde{Q}^*$ jsou ty duální podprostory prostoru $\mathbf{P}_m$, jejichž vrcholy jsou prvky množiny (81.1). V důsledku toho ztotožníme $\tilde{Q}^*$ s (81.1), t. j. *považujeme* $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$ *za projektivní prostor duální ke* Q^*.

Máme tedy následující výsledek. Budiž $m \geqq 2$, $0 \leqq k \leqq m-2$. Budiž dán m-rozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ a budiž dán jeho k-rozměrný lineární podprostor Q. Nazveme *perspektivou prostoru* $\mathbf{P}_m$ *z vrcholu* Q a označíme $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$ množinu všech těch $(k+1)$-rozměrných lineárních podprostorů $\mathbf{P}_{k+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí daným Q. Dokázali jsme, že (81.1) je projektivní prostor dimense $m-k-1$, k němuž duálním je ten duální podprostor prostoru $\mathbf{P}_m$, jehož vrcholem je Q. Tento duální podprostor, v předcházejícím označený Q^*, označíme

$$\tilde{\pi}(Q\,;\,\mathbf{P}_m)\,. \tag{81.2}$$

Tedy (81.2) je množina všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí daným Q.

Účelné je výslovně si povšimnout zvláště důležitého případu $k = m-2$. Zde je $m-k-1 = 1$, $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$ je jednorozměrný projektivní prostor úplně totožný s duálním prostorem $\tilde{\pi}(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$. Pravíme v tomto případě, že $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$ *je svazek nadrovin* v prostoru $\mathbf{P}_m$ a lineární podprostor Q (v širším smyslu) dimense $m-2$ nazýváme *vrcholem svazku.*

Vraťme se k obecnému případu, kdy o dimensi k lineárního podprostoru Q (v širším smyslu) předpokládáme pouze, že $0 \leqq k \leqq m-2$

a aplikujme výsledky článku 80. Zvolme libovolně ar. basi A_0, A_1, ..., A_k prostoru Q; z věty 13.1 plyne, že lze připojit dalších $m - k$ ar. bodů A_{k+1}, ..., A_m tak, že vznikne ar. base pro $\mathbf{P}_m$. Potom vektorový prostor $\mathbf{W}_{k+1} = \{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ je ar. základem pro Q, vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1} = \{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ je ar. základem pro $\mathbf{P}_m$. Ar. základ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ je vektorový prostor $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ duálně sdružený s $\mathbf{W}_{m+1}$, a ve $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ je obsažen duální obraz $\tilde{\mathbf{W}}_{m-k}$ lineární soustavy $\mathbf{W}_{k+1}$ obsažené ve $\mathbf{W}_{m+1}$. Z definice je patrné, že nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ prochází prostorem Q, právě když $d(X, \tilde{Y}) = 0$ pro každý bod $\{X\}$ prostoru Q, t. j. pro každý ar. bod X náležející $\mathbf{W}_{k+1}$; to však znamená, že ar. nadrovina $\tilde{Y}$ náleží do $\tilde{\mathbf{W}}_{m-k}$. Tedy $\tilde{\mathbf{W}}_{m-k}$ je ar. base pro $\tilde{\pi}(Q; \mathbf{P}_m)$; ježto vektorové prostory $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$, $\tilde{\pi}(Q; \mathbf{P}_m)$ jsou navzájem duální, plyne z věty 80.5:

VĚTA 81.1. *Budiž Q k-rozměrný* ($0 \leq k \leq m - 2$) *projektivní podprostor* (v širším smyslu) *m-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Je-li $\mathbf{W}_{k+1}$ ar. základ pro Q, $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ pro $\mathbf{P}_m$, potom $\mathbf{W}_{m+1}$* mod *$\mathbf{W}_{k+1}$ je ar. základ pro perspektivu $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$.*

O správnosti této věty se snadno přesvědčíme přímo. Budiž A_0, A_1, ..., A_k libovolně daná ar. base pro Q. Je-li $X \operatorname{mod} \mathbf{W}_{k+1} \neq \mathbf{o}$, jsou ar. body A_0, A_1, ..., A_k, X lineárně nezávislé a určují $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor

$$\mathbf{P}_{k+1} = \{A_0, A_1, \dots, A_k, X\}_a$$

obsahující Q, t. j. náležející do $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$. Bod $\{Y\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ náleží do $\mathbf{P}_{k+1}$, právě když

$$Y = a_0A_0 + a_1A_1 + \dots + a_kA_k + cX$$

neboli $Y \equiv cX \pmod{\mathbf{W}_{k+1}}$. Z toho je patrné, že prvky prostoru $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$ jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu s jednorozměrnými lineárními soustavami obsaženými ve $\mathbf{W}_{m+1} \operatorname{mod} \mathbf{W}_{k+1}$, v souhlase s tím, že $\mathbf{W}_{m+1} \operatorname{mod} \mathbf{W}_{k+1}$ je ar. base pro $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$.

82. PERSPEKTIVNÍ ZOBRAZENÍ. Dva lineární podprostory Q_k, R_h projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *totálně nezávislé*, jestliže jejich průnik je prázdný a jejich spojení je celý $\mathbf{P}_m$. O dimensích k, h dvou totálně nezávislých lineárních podprostorů Q_k, R_h podle (73.3) platí

$$k + h = m - 1. \tag{82.1}$$

Obráceně, jestliže o dimensích dvou lineárních podprostorů Q_k, R_h platí (82.1) a jestliže jejich průnik je prázdný, plyne ze (73.3), že spojení Q_k s R_h má dimensi m, takže toto spojení je celý $\mathbf{P}_m$, t. j. Q_k, R_h jsou totálně nezávislé. V následujícím předpokládáme, že $m \geqq 2$, $0 \leqq k \leqq m - 2$, takže podle (82.1) je $1 \leqq h \leqq m - 1$. Dále předpokládáme, že jsou dány totálně nezávislé prostory Q_k, R_h.

Je-li dán libovolný bod $\{X\}$ prostoru R_h, potom $\{X\}$ nenáleží do Q_k, ježto Q_k a R_h mají prázdný průnik; tudíž spojení prostoru Q_k s bodem $\{X\}$ je $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor $\mathbf{P}_{k+1}(X)$ prostoru $\mathbf{P}_m$ obsahující Q_k, t. j. $\mathbf{P}_{k+1}(X)$ je prvek prostoru $\pi(Q_k\,;\,\mathbf{P}_m)$. Obráceně, jestliže $\mathbf{P}_{k+1}$ je prvek prostoru $\pi(Q_k\,;\,\mathbf{P}_m)$, t.j. $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor obsahující Q_k, je zřejmé, že spojení $\mathbf{P}_{k+1}$ s R_h je celý $\mathbf{P}_m$, takže podle (73.3) průnik $\mathbf{P}_{k+1}$ s R_h obsahuje právě jeden bod $\{X\}$ a je zřejmé, že náš $\mathbf{P}_{k+1}$ splyne s $\mathbf{P}_{k+1}(X)$. Jestliže tedy každému bodu $\{X\}$ prostoru R_h přiřadíme $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor $\mathbf{P}_{k+1}(X)$, který je spojením bodu $\{X\}$ s prostorem Q_k, dostaneme prosté zobrazení prostoru R_h na prostor $\pi(Q_k\,;\,\mathbf{P}_m)$, které nazveme *perspektivním zobrazením prostoru R_h z vrcholu Q_k* (v prostoru $\mathbf{P}_m$). Z výsledků článku 81 plyne snadno, že *perspektivní zobrazení je kolineární*. Neboť je-li $A_0, A_1, \ldots, A_k$ ar. base pro Q_k a je-li $B_1, \ldots$ $\ldots, B_{m-k}$ ar. base pro $R_h = R_{m-k-1}$, potom — ježto průnik prostorů Q_k, R_h je prázdný — je patrné, že ar. body $A_0, A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots$ $\ldots, B_{m-k}$ dohromady tvoří ar. basi pro spojení Q_k s R_h, t. j. pro celý $\mathbf{P}_m$. Jestliže nyní každé lineární kombinaci X ar. bodů $B_1, \ldots, B_{m-k}$ přiřadíme $X \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, kde $\mathbf{W}_{k+1} = \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ je ar. base pro Q_k, dostaneme isomorfní zobrazení ar. base $B_1, \ldots, B_{m-k}$ prostoru R_h na ar. basi $B_1 \bmod \mathbf{W}_{k+1}, \ldots, B_{m-k} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ prostoru $\pi(Q_k\,;\,\mathbf{P}_m)$, a tímto isomorfním zobrazením vytvořené kolineární zobrazení prostoru R_h na prostor $\pi(Q_k\,;\,\mathbf{P}_m)$ zřejmě splyne s uvažovaným perspektivním zobrazením.

Buďtež nyní dány dva různé lineární podprostory R_h, R'_h téže dimense $h = m - k - 1$, z nichž každý je totálně nezávislý na Q_k. Budiž K_1 perspektivní zobrazení prostoru R_h z vrcholu Q_k a budiž K_2 perspektivní zobrazení prostoru R'_h z téhož vrcholu. Dále budiž K zobrazení složené ze zobrazení K_1 prostoru R_h na prostor $\pi(Q_k\,;\,\mathbf{P}_m)$

a ze zobrazení inversního ke K_2, které tudíž je zobrazením prostoru $\pi(Q_k\,;\,\mathbf{P}_m)$ na prostor R'_h. Podle vět 79.1 a 79.2 je K *kolineární* zobrazení prostoru R_h na prostor R'_h, které nazveme *promítnutím prostoru R_h na prostor R'_h z vrcholu Q_k*. Je-li $\{X\}$ libovolný bod prostoru R_h, dostaneme jeho obraz $\{X'\}$ při K, utvoříme-li nejprve spojení bodu $\{X\}$ s prostorem Q_k (toto spojení je $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor) a potom průnik tohoto spojení s prostorem R'_h. Zřejmě *zobrazení inversní k promítnutí prostoru R_h na prostor R'_h z vrcholu Q_k je promítnutím prostoru R'_h na prostor R_h z téhož vrcholu Q_k*. Obraz libovolného bodu $\{X\}$ prostoru R_h při promítnutí na R'_h z vrcholu Q nazveme *průmětem* bodu $\{X\}$ z vrcholu Q na prostor R'_h.

Zvláště důležitý je případ $h = m - 1$, kdy R_{m-1}, R'_{m-1} jsou dvě (navzájem různé) nadroviny. Podle (82.1) je nyní $k = 0$, t. j. vrchol Q_0 je v tomto případě *bod*. Podmínka totální nezávislosti zde prostě znamená, že *bod Q_0 neleží v žádné z obou nadrovin R_{m-1}, R'_{m-1}*. Spojení obou různých nadrovin R_{m-1}, R'_{m-1} je zřejmě celý $\mathbf{P}_m$, takže jejich průnik podle (73.3) je $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor (v případě $m = 2$ bod) $\mathbf{P}_{m-2}$. Je-li K promítnutí nadroviny R_{m-1} na nadrovinu R'_{m-1}, je zřejmé, že každý bod průniku $\mathbf{P}_{m-2}$, je *samodružný* při zobrazení K, t. j. že splyne se svým obrazem. Obráceně platí:

VĚTA 82.1. *Buďtež R_{m-1}, R'_{m-1} dvě různé nadroviny projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, takže jejich průnik $\mathbf{P}_{m-2}$ má dimensi $m - 2$. Budiž K kolineární zobrazení nadroviny R_{m-1} na nadrovinu R'_{m-1}, při kterém každý bod průniku $\mathbf{P}_{m-2}$ je samodružný. Potom existuje bod Q_0* (který neleží v žádné z obou daných nadrovin) *tak, že K je promítnutí nadroviny R_{m-1} na nadrovinu R'_{m-1}.*

DŮKAZ. Budiž $A_0, A_1, \ldots, A_{m-2}$ ar. base pro průnik $\mathbf{P}_{m-2}$. Připojme ar. bod A_{m-1} tak, aby vznikla ar. base pro R_{m-1}. Zvolme isomorfní zobrazení L ar. základu nadroviny R_{m-1} na ar. základ nadroviny R'_{m-1}, které vytvořuje dané kolineární zobrazení K. Je-li $\mathbf{W}_{m-1}$ ar. základ pro $\mathbf{P}_{m-2}$, potom v L je obsaženo parciální zobrazení $L \mid \mathbf{W}_{m-1}$, které vytvořuje *identické* kolineární zobrazení $\mathbf{P}_{m-2}$ na $\mathbf{P}_{m-2}$. Ježto místo L jsme mohli zvolit cL ($c \neq 0$, viz str. 41), je patrné, že můžeme předpokládat, že parciální zobrazení $L \mid \mathbf{W}_{m-1}$ samo je identickým zobrazením vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m-1}$. Je tedy

$LA_r = A_r$ pro $0 \leqq r \leqq m - 2$; položme ještě $LA_{m-1} = A_m$. Potom je

$$R_{m-1} = \{A_0, \dots A_{m-2}, A_{m-1}\}_g ;$$
$$R'_{m-1} = \{A_0 \dots A_{m-2}, A_m\}_g .$$

Ježto nadroviny R_{m-1}, R'_{m-1} jsou navzájem různé, dokáže se snadno, že $S = A'_{m-1} - A_{m-1} \neq \mathbf{o}$ a že bod $\{S\}$ neleží ani v nadrovině R_{m-1}, ani v nadrovině R'_{m-1}. Zřejmě však K převádí libovolný bod $\{X\}$ nadroviny R_{m-1} v bod $\{X'\}$, kde

$$X = x_0A_0 + \dots + x_{m-2}A_{m-2} + x_{m-1}A_{m-1} ,$$
$$X' = x_0A_0 + \dots + x_{m-2}A_{m-2} + x_{m-1}A'_{m-1} .$$

Je tudíž $X' = X + x_{m-1} . S$ a z toho plyne snadno, že K je promítnutí nadroviny R_{m-1} na nadrovinu R'_{m-1} z vrcholu $\{S\}$.

83. KOLINEACE. Isomorfní zobrazení m-rozměrného vektorového prostoru $\boldsymbol{V}_m$ na týž prostor se nazývá *automorfismus* prostoru $\boldsymbol{V}_m$.

Je-li

(83.1) $$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$$

base vektorového prostoru $\boldsymbol{V}_m$, kterou stručně označíme $\boldsymbol{B}$, a je-li

(83.2) $$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$$

jiná (nebo třeba i táž) base prostoru $\boldsymbol{V}_m$, existují čísla $a_{11}, \dots, a_{mm}$ tak, že

(83.3) $$\boldsymbol{v}_r = a_{r1}\boldsymbol{u}_1 + \dots + a_{rm}\boldsymbol{u}_m \quad \text{pro } 1 \leqq r \leqq m .$$

Determinant

(83.4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

je vždy *různý od nuly*; označíme jej

$$[\boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_m]^{\boldsymbol{B}}$$

a nazveme jej (viz str. 31) *determinantem přechodu* od base (83.1) k basi (83.2). O determinantech přechodu platí věta:

VĚTA 83.1. *Jsou-li* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ *tři base vektorového prostoru* $\mathbf{V}_m$, *je determinant přechodu od base* $\mathbf{B}$ *k basi* $\mathbf{B}''$ *roven součinu determinantu přechodu od base* $\mathbf{B}$ *k basi* $\mathbf{B}'$ *s determinantem přechodu od base* $\mathbf{B}'$ *k basi* $\mathbf{B}''$.

To vše je obsaženo v článku 29, kde jsme sice předpokládali, že $\mathbf{V}_m$ je zaměření eukleidovského $\mathbf{E}_m$, je však patrné, že tento předpoklad je nepodstatný.

Budiž nyní f automorfismus vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$. Je-li (83.1) base prostoru $\mathbf{V}_m$, je

$$f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_m) \tag{83.5}$$

nová base téhož $\mathbf{V}_m$; determinant přechodu od base (83.1) k basi (83.5) označme Δ. Jestliže místo base (83.1) uvažujeme jinou basi (83.2), potom místo (83.5) máme basi

$$f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_m) \tag{83.6}$$

a můžeme označit Δ' determinant přechodu od (83.2) k (83.6). Z věty 83.1 se však snadno dokáže, že $\Delta = \Delta'$. Je-li totiž D determinant přechodu od base (83.1) k basi (83.2), je D roven determinantu (83.4), kde čísla $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ jsou definována vztahy (83.3). Z definice automorfismu je však patrné, že zároveň se vztahy (83.3) platí také vztahy

$$f(\mathbf{v}_r) = a_{r1}f(\mathbf{u}_1) + \ldots + a_{rm}f(\mathbf{u}_m), \quad (1 \leqq r \leqq m);$$

tudíž D je zároveň determinant přechodu od base (83.5) k basi (83.6). Nyní podle věty (83.1) determinant přechodu od base (83.1) k basi (83.6) je jednak roven součinu determinantu přechodu od base (83.1) k basi (83.2) s determinantem přechodu od base (83.2) k basi (83.6), t. j. roven $D\Delta'$, jednak je roven determinantu přechodu od base (83.1) a basi (83.5) s determinantem přechodu od base (83.5) k basi (83.6), t. j. roven ΔD. Je tudíž $D\Delta' = \Delta D$ a ježto $D \neq 0$, je $\Delta = \Delta'$. Pozorný čtenář jistě konstatoval, že jsme zde vlastně znovu provedli úvahu již provedenou v prvém svazku na str. 110, což pro jasnost výkladu bylo žádoucí.

Ježto tedy determinant přechodu Δ od base (83.1) k basi (83.5) je nezávislý na volbě base (83.1), můžeme Δ nazvat *determinantem* *automorfismu* f; poznamenejme výslovně, že je vždy $\Delta \neq 0$. Z věty 83.1 nyní snadno plyne:

VĚTA 83.2. *Jsou-li* f, g *dva automorfismy vektorového prostoru* $\mathbf{V}_m$ *a jsou-li* Δ_1, Δ_2 *jejich determinanty, je také* $f \circ g$ *automorfismus prostoru* $\mathbf{V}_m$ *a jeho determinant je roven součinu* $\Delta_1\Delta_2$.

Budiž nyní dán m-rozměrný projektivní prostor P_m a budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ jeho ar. základ, takže $\mathbf{W}_{m+1}$ je $(m+1)$-rozměrný vektorový prostor. Kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na týž prostor $\mathbf{P}_m$ se nazývá *kolineace* prostoru $\mathbf{P}_m$. Každá kolineace K prostoru $\mathbf{P}_m$ je tedy vytvořena nějakým automorfismem L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, při čemž pro každé $c \neq 0$ také automorfismus cL vytvořuje touž kolineaci. Obráceně (viz str. 41), jestliže oba automorfismy L, L_1 vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ vytvořují touž kolineaci projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, existuje $c \neq 0$ tak, že $L_1 = cL$. Je-li $\Delta \neq 0$ determinant automorfismu L, potom zřejmě determinant automorfismu cL je roven $c^{m+1}.\,\Delta$. Jestliže číslo m je sudé, lze zvolit $c \neq 0$ tak, aby číslo $c^{m+1}.\,\Delta$ nabylo libovolně předepsané hodnoty různé od nuly. Je-li však m liché, je $c^{m+1} > 0$ pro všecka $c \neq 0$ a znamení čísla $c^{m+1}.\,\Delta$ je nezávislé na volbě c. Proto *pro lichá* m zavádíme tuto definici: kolineace K prostoru $\mathbf{P}_m$ (liché m) se jmenuje *přímá*, jestliže vytvořující automorfismus L má determinant $\Delta > 0$, *nepřímá*, jestliže $\Delta < 0$. Potom (viz str. 31) *přímá kolineace převádí každou ar. basi prostoru* $\mathbf{P}_m$ (liché m) *v ar. basi s ní souhlasnou, nepřímá v ar. basi nesouhlasnou.* Tedy *kolineace prostoru* $\mathbf{P}_m$ (liché m) *zachovává orientaci prostoru* $\mathbf{P}_m$, *právě když je přímá.* Z věty 83.2 plyne

VĚTA 83.3. *Buďtež* K_1, K_2 *dvě kolineace projektivního prostoru* $\mathbf{P}_m$, *kde* m *je liché. Jsou-li* K_1, K_2 *obě přímé nebo obě nepřímé, je složená kolineace* $K_1 \circ K_2$ *přímá, je-li však* K_1 *přímá,* K_2 *nepřímá nebo* K_1 *nepřímá,* K_2 *přímá, je* $K_1 \circ K_2$ *nepřímá.*

Z vět 79.1, 79.2 a 83.3 plyne:

VĚTA 83.4. *Množina všech kolineací projektivního prostoru* $\mathbf{P}_m$ *je transformační grupa. Je-li* m *liché, potom také množina všech přímých kolineací prostoru* $\mathbf{P}_m$ *je transformační grupa.*

Budiž K kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ (prozatím nezáleží na tom, zda je $\mathbf{P}_m = \mathbf{P}'_m$ či

$\mathbf{P}_m \neq \mathbf{P}'_m$). Jestliže bod $\{X\}$ opíše v prostoru $\mathbf{P}_m$ nadrovinu ϱ, potom podle věty 79.4 bod $K\{X\}$ opíše v prostoru $\mathbf{P}'_m$ nadrovinu, kterou označíme $\tilde{K}(\varrho)$. Dokážeme, že $\tilde{K}$ je *kolineární* zobrazení prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duálního k $\mathbf{P}_m$ na prostor $\tilde{\mathbf{P}}'_m$ duální k $\mathbf{P}'_m$ a nazveme $\tilde{K}$ *duálním kolineárním zobrazením* k danému kolineárnímu zobrazení K.

Poznámka. Pro $m = 1$ prostory $\mathbf{P}_1$, $\tilde{\mathbf{P}}_1$ splynou; ježto pro $m = 1$ splyne pojem nadroviny s pojmem bodu, je zřejmé, že *pro* $m = 1$ *duální kolineace* $\tilde{K}$ *splyne s původní kolineací* K.

Budiž L isomorfní zobrazení ar. základu $\mathbf{W}_{m+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ na ar. základ $\mathbf{W}'_{m+1}$ prostoru $\mathbf{P}'_m$, které vytvořuje kolineární zobrazení K. Zvolme ar. basi

(83.7) $$A_0, A_1, \ldots, A_m$$

prostoru $\mathbf{P}_m$; (83.7) přejde při L v ar. basi

(83.8) $$A'_0, A'_1, \ldots, A'_m$$

prostoru $\mathbf{P}'_m$, kde tedy

(83.9) $$A'_r = LA_r \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m\,.$$

Budiž $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ ar. základ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ a budiž $\tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$ ar. základ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}'_m$. Existuje ar. base

(83.10) $$\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$$

prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ a ar. base

(83.11) $$\tilde{A}'_0, \tilde{A}'_1, \ldots, \tilde{A}'_m$$

prostoru $\tilde{\mathbf{P}}'_m$ tak, že (83.7) a (83.10), jakož i (83.8) a (83.11), jsou navzájem duální. Nyní existuje isomorfní zobrazení $\tilde{L}$ prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ na prostor $\tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$, pro které

(83.12) $$\tilde{A}'_r = \tilde{L}\tilde{A}_r \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m$$

a snadno se přesvědčíme, že $\tilde{K} = \{\tilde{L}\}$ je žádané duální kolineární zobrazení k danému kolineárnímu zobrazení. Neboť z definice duálních basí plyne, že je-li X libovolný prvek prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{Y}$ libovolný prvek prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, je

(83.13) $$d(X, \tilde{Y}) = d(LX, \tilde{L}\tilde{Y})\,.$$

Je-li nyní $\varrho = \{\tilde{Y}\}$ libovolná nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$, takže $\tilde{K}\varrho$ je nadrovina prostoru $\mathbf{P}'_m$, potom bod $\{X\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ náleží do ϱ, právě když $d(X, \tilde{Y}) = 0$; bod $\{X'\}$ prostoru $\mathbf{P}'_m$ náleží do $\tilde{K}\varrho$, právě když $d(X', \tilde{L}\tilde{Y}) = 0$. Z (83.13) tudíž plyne, že opíše-li $\{X\}$ nadrovinu ϱ, opíše $\{LX\} = K\{X\}$ nadrovinu $\tilde{K}\varrho$.

V předcházejícím jsme každému isomorfnímu zobrazení L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ přiřadili určité isomorfní zobrazení $\tilde{L}$ duálního vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, které můžeme nazvat *duálním* k původnímu isomorfnímu zobrazení L. Při tom jsme definovali $\tilde{L}$ pomocí zvolené base (83.7) vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$; snadno se však nahlédne, že vztah mezi L a $\tilde{L}$ je úplně popsán v (83.13), že tedy nezáleží na volbě base (83.7). Všimněme si, že ve vztahu (83.13) máme úplnou symetrii mezi $\mathbf{W}_{m+1}$, $\mathbf{W}'_{m+1}$ na jedné straně, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$ na straně druhé. Můžeme tedy říci, že L, $\tilde{L}$ jsou *navzájem duální*, takže také K, $\tilde{K}$ jsou *navzájem duální*, což je ovšem patrné i přímo z definice $\tilde{K}$.

Následující dvě věty jsou zřejmé:

VĚTA 83.5. *Budiž L_1 isomorfní zobrazení vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}'_{m+1}$, L_2 isomorfní zobrazení $\mathbf{W}'_{m+1}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}''_{m+1}$. Buďtež $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}''_{m+1}$, $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ duální k $\mathbf{W}_{m+1}$, $\mathbf{W}'_{m+1}$, $\mathbf{W}''_{m+1}$, L_1, L_2. Potom je také $\tilde{L}_1 \circ \tilde{L}_2$ duální k $L_1 \circ L_2$.*

VĚTA 83.6. *Budiž K_1 kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$, K_2 kolineární zobrazení $\mathbf{P}'_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}''_m$. Buďtež $\tilde{\mathbf{P}}_m$, $\tilde{\mathbf{P}}'_m$, $\tilde{\mathbf{P}}''_m$, $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ duální k $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{P}'_m$, $\mathbf{P}''_m$, K_1, K_2. Potom je také $\tilde{K}_1 \circ \tilde{K}_2$ duální k $K_1 \circ K_2$.*

Budiž nyní $\mathbf{P}_m = \mathbf{P}'_m$, tedy také $\tilde{\mathbf{P}}_m = \tilde{\mathbf{P}}'_m$, $\mathbf{W}_{m+1} = \mathbf{W}'_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1} = \tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$. Potom L je automorfismus vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{L}$ je k němu duální automorfismus vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$. Nechť platí (83.9) a nechť ar. base (83.10), (83.11) jsou duální k ar. basím (83.7), (83.8), takže platí také (83.12). Nyní existují čísla $a_{00}, \ldots, a_{mm}$, $\alpha_{00}, \ldots, \alpha_{mm}$ tak, že

$$(83.14) \qquad A_r = a_{r0}A'_0 + \ldots + a_{rm}A'_m \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m,$$

$$(83.15) \qquad \tilde{A}'_s = \alpha_{s0}\tilde{A}_0 + \ldots + \alpha_{sm}\tilde{A}_m \quad \text{pro} \quad 0 \leqq s \leqq m.$$

Determinant

$$(83.16) \qquad \begin{vmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

je determinant automorfismu L^{-1} inversního k automorfismu L, takže z věty 83.2 plyne (sr. důkaz věty 39.5), že determinant automorfismu L je převrácená hodnota determinantu (83.16). Mimo to ovšem

$$\begin{vmatrix} \alpha_{00} & \dots & \alpha_{0m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m0} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \tag{83.17}$$

je determinant automorfismu $\tilde{L}$. Budiž nyní $0 \leqq r \leqq m$, $0 \leqq s \leqq m$. Podle (83.14) je

$$d(A_r, \tilde{A}'_s) = a_{r0}d(A'_0, \tilde{A}'_s) + \dots + a_{rm}d(A'_m, \tilde{A}'_s)$$

a ježto (83.8), (83.11) jsou navzájem duální, je

$$d(A_r, \tilde{A}'_s) = a_{rs}. \tag{83.18}$$

Avšak podle (83.15) je též

$$d(A_r, \tilde{A}'_s) = \alpha_{s0}d(A_r, \tilde{A}_0) + \dots + \alpha_{sm}d(A_r, \tilde{A}_m)$$

a ježto (83.7), (83.10) jsou navzájem duální, je

$$d(A_r, \tilde{A}'_s) = \alpha_{sr}. \tag{83.19}$$

Z (83.18) a (83.19) plyne, že $a_{rs} = \alpha_{sr}$ pro $0 \leqq r, s \leqq m$, takže determinanty (83.16) a (83.17) si jsou rovny. Platí tudíž:

VĚTA 83.7. *Budiž L automorfismus vektorového prostoru, a budiž $\tilde{L}$ automorfismus duálního vektorového prostoru duální k automorfismu L. Potom determinant automorfismu $\tilde{L}$ je převrácená hodnota determinantu automorfismu L.*

Z věty 83.7 plyne:

VĚTA 83.8. *Budiž K kolineace projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, kde m je liché. Budiž $\tilde{K}$ duální kolineace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Je-li K přímá, je také $\tilde{K}$ přímá, je-li K nepřímá, je také $\tilde{K}$ nepřímá.*

84. HOMOLOGIE. V tomto článku předpokládáme, že $m \geqq 2$. Budiž dán projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ a budiž $\tilde{\mathbf{P}}_m$ k němu duální.

Je-li K kolineace prostoru $\mathbf{P}_m$, potom bod prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *samodružným* při K, splyne-li se svým obrazem. Rovněž tak část prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *samodružnou* při K, splyne-li se svým obrazem. Při tom nikterak nemusí bod samodružné části být samodružným, ba dokonce samodružná část nemusí obsahovat vůbec žádný samodružný bod. Mohli bychom také část C prostoru $\boldsymbol{P}_m$ nazvat *samodružnou v širším smyslu* při K , jestliže obraz C při K je částí množiny C . Nás však budou vedle samodružných bodů zajímat pouze samodružné lineární podprostory prostoru $\boldsymbol{P}_m$, a jestliže takový podprostor $\boldsymbol{P}_k$ $(1 \leqq k \leqq m - 1)$ je samodružný v širším smyslu při K , potom $\boldsymbol{P}_k$ je samodružný při K . Neboť obraz $\boldsymbol{P}'_k$ podprostoru $\boldsymbol{P}_k$ podle věty 79.4 je lineární podprostor téže dimense k jako $\boldsymbol{P}_k$ a jestliže $\boldsymbol{P}'_k$ je částí $\boldsymbol{P}_k$, nutně $\boldsymbol{P}'_k$ splyne s $\boldsymbol{P}_k$.

Kolineace H prostoru $\boldsymbol{P}_m$ se nazývá *homologie* prostoru $\boldsymbol{P}_m$, jestliže H je různá od identické transformace prostoru $\boldsymbol{P}_m$ a jestliže existuje g. bod S tak, že každá přímka procházející bodem S je samodružná; g. bod S se jmenuje *středem homologie* H . Bod S je nutně samodružný při H ; neboť ježto $m \geqq 2$, můžeme bodem S vést dvě různé přímky p , q , které jsou obě samodružné, takže obrazem průsečíku S přímek p , q je průsečík týchž přímek, t. j. opět bod S . Homologie nemůže mít více než jeden střed. Neboť nechť existují dva různé g. body S_1 , S_2 tak, že každá přímka jdoucí některým z nich je samodružná při kolineaci H prostoru P_m; máme dokázat, že potom každý bod prostoru P_m je samodružný. Jestliže předně g. bod X neleží na přímce S_1S_2 , potom přímky S_1X , S_2X jsou navzájem různé a obě jsou samodružné, z čehož jako výše plyne, že bod X je samodružný. Jestliže nyní přímka p je různá od přímky S_1S_2 , potom p obsahuje dva různé body ležící mimo přímku S_1S_2 , tedy dva různé samodružné body, takže p je samodružná přímka. Každým bodem prostoru $\boldsymbol{P}_m$ procházejí tedy dvě různé samodružné přímky, takže každý bod prostoru $\boldsymbol{P}_m$ je samodružný.

VĚTA 84.1. *Budiž H homologie prostoru $\boldsymbol{P}_m$. Potom existuje v prostoru $\boldsymbol{P}_m$ nadrovina ϱ, jejíž každý bod je samodružný při H .*

Poznámka. Z důkazu věty 84.1 usoudíme, že existuje *jediná* taková nadrovina ϱ ; nazveme ji *osovou nadrovinou* (pro $m = 2$ krátce *osou*) homologie H .

DŮKAZ. Zvolme ar. bod S tak, že $\{S\}$ je střed homologie H . Homologii H lze vytvořit takovým automorfismem L ar. základu $\boldsymbol{W}_{m+1}$ prostoru $\boldsymbol{P}_m$, že

$$LS = S . \tag{84.1}$$

Připojme další ar. body $B_1, \dots, B_m$ tak, aby $S, B_1, \dots, B_m$ byla ar. base pro P_m. Potom pro $1 \leqq r \leqq m$ existují reálná čísla c_r, b_r tak, že

$$LB_r = c_r B_r + b_r S\,; \tag{84.2}$$

to plyne z toho, že podle definice středu homologie bod $\{LB_r\}$ leží na přímce $B_r S$. Budiž nyní $1 \leqq r < s \leqq m$. Podle (84.2) je

$$L(B_r + B_s) = c_r B_r + c_s B_s + (b_r + b_s) S\,.$$

Podle definice středu homologie je však ar. bod nalevo lineární kombinací ar. bodů $B_r + B_s$, S a ježto ar. body B_r, B_s, S jsou lineárně nezávislé, je to jen tak možné, že $c_r = c_s$. Tím je dokázáno, že všecka čísla $c_1, \dots, c_m$ si jsou rovna, neboli že

$$LB_r = cB_r + b_r S \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,. \tag{84.3}$$

Nyní jsou dvě možnosti. Jestliže předně $c \neq 1$, potom pro $1 \leqq r \leqq m$ lze určit číslo t_r tak, aby bylo $(c - 1)t_r = b_r$, načež podle (84.1) a (84.3) je

$$L(B_r + t_r S) = c(B_r + t_r S) \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,.$$

Položme

$$A_r = B_r + t_r S \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,.$$

Potom $S, A_1, \dots, A_m$ je ar. base pro $\boldsymbol{P}_m$ a jest

$$LS = S\,, \quad LA_r = cA_r \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,, \tag{84.4}$$

při čemž $c \neq 1$ a zřejmě též $c \neq 0$. Z (84.4) snadno odvodíme, že bod $\{X\}$, kde

$$X = xS + x_1 A_1 + \dots + x_m A_m$$

je samodružný bod, právě když buďto splyne s bodem $\{S\}$ nebo leží v nadrovině

$$\varrho = \{A_1, \dots, A_m\}_g\,. \tag{84.5}$$

Je-li ϱ' nadrovina různá od nadroviny ϱ, existuje v ϱ' bod různý od $\{S\}$, který neleží v ϱ a který tudíž není samodružný. Tím jsme hotovi s případem, že v (84.3) je $c \neq 1$. Zbývá případ, že

$$LB_r = B_r + b_r S \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,.$$

Ježto platí (84.1) a ježto $\{L\}$ není identická transformace, nemůže být $b_r = 0$ pro $1 \leqq r \leqq m$, takže můžeme předpokládat, že třeba

$b_m = b \neq 0$. Pro $1 \leqq r \leqq m - 1$ určíme t_r tak, aby bylo $b_r + t_r b = 0$ a položíme $A_r = B_r + t_r A_m$ pro $1 \leqq r \leqq m - 1$, $A_m = B_m$. Potom $S, A_1, \ldots, A_m$ je ar. base pro $\boldsymbol{P}_m$ a je

$$(84.6) \qquad LS = S, \quad LA_r = A_r \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m - 1,$$
$$LA_m = A_m + bS,$$

kde $b \neq 0$. Z (84.6) snadno odvodíme, že bod $\{X\}$ je samodružný, právě když leží v nadrovině

$$(84.7) \qquad \varrho = \{S, A_1, \ldots, A_{m}\}_{\varrho}.$$

Je-li ϱ' nadrovina různá od nadroviny ϱ, existuje v ϱ' bod různý od $\{S\}$, který neleží v ϱ a který tudíž není samodružný.

Tím je dokončen důkaz věty 84.1 a také je zjištěna správnost poznámky vyslovené po znění věty. Zároveň jsme zjistili, že je-li dána homologie H se středem $\{S\}$, je možné určit ar. body $A_1, \ldots, A_m$ tak, aby $S, A_1, \ldots, A_m$ byla ar. base pro P_m a aby bylo $H = \{L\}$, při čemž buďto platí (84.4), při čemž $0 \neq c \neq 1$, nebo platí (84.6), při čemž $b \neq 0$. Obráceně je patrné, že je-li $S, A_1, \ldots, A_m$ ar. base prostoru $\boldsymbol{P}_m$ a definujeme-li kolineaci $H = \{L\}$ prostoru $\boldsymbol{P}_m$ buďto rovnicemi (84.4), ve kterých $0 \neq c \neq 1$, nebo rovnicemi (84.6), ve kterých $b \neq 0$, je H homologie prostoru $\boldsymbol{P}_m$ se středem homologie $\{S\}$, při čemž nadrovina homologie ϱ je dána výrazem (84.5) v případě (84.4), výrazem (84.7) v případě (84.6). Z toho je patrné, že v případě (84.4) nadrovina homologie neobsahuje střed homologie, kdežto v případě (84.6) naopak nadrovina homologie prochází středem homologie. V případě (84.4) číslo c se jmenuje *invariant homologie* H; víme, že $0 \neq c \neq 1$. V případě (84.6) invariant homologie H je roven 1. V případě (84.4) má invariant c význam dvojpoměru. Neboť je-li bod $\{X\}$ různý od $\{S\}$ a neleží-li $\{X\}$ v osové nadrovině (84.5), budiž $\{B\}$ průsečík přímky SX s nadrovinou (84.5) a budiž $\{X'\}$ obraz bodu $\{X\}$; potom je

$$(84.8) \qquad (BSXX') = c.$$

Neboť při vhodné volbě ar. zástupců je $X = S + B$, $X' = S + cB$, načež (84.8) plyne z definice dvojpoměru.

VĚTA 84.2. *Nechť kolineace H projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ různá od identické transformace má tu vlastnost, že existuje nadrovina ϱ, jejíž každý bod je samodružným při H. Potom H je homologie prostoru $\mathbf{P}_m$.* Je jasné, že ϱ bude osovou nadrovinou homologie H.

DŮKAZ. Zvolme ar. basi $A_0, A_1, \dots, A_m$ prostoru $\mathbf{P}_m$ tak, aby bylo

$$\varrho = \{A_1, \dots, A_m\}_\varrho .$$

Ježto parciální zobrazení $H \mid \varrho$ je identická transformace nadroviny ϱ, je patrné, že $H = \{L\}$, kde $LA_r = A_r$ pro $1 \leqq r \leqq m$. Dále je

$$LA_0 = cA_0 + c_1A_1 + \dots + c_mA_m$$

neboli $LA_0 = cA_0 + B$, kde $B = c_1A_1 + \dots + c_mA_m$, tedy $LB = B$. Ježto $\{L\}$ není identická transformace, je $LA_0 \neq A_0$ neboli $S \neq \mathbf{o}$, kde $S = (c - 1)A_0 + B$. Pro

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \dots + x_mA_m$$

je $LX = X + x_0S$, speciálně $LS = S$, takže bod $\{S\}$ je samodružný. Je-li $\{X\} \neq \{S\}$, je $\{LX\} \neq \{S\}$ a bod $\{LX\} = \{X + x_0S\}$ leží na přímce SX, takže tato přímka je samodružná. Tudíž H je homologie se středem $\{S\}$.

Homologie H projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ se jmenuje *speciální*, jestliže její invariant c je roven jedné, neboli jestliže osová nadrovina prochází středem homologie.

V předcházejícím jsme podali důkazy vět 84.1 a 84.2 tak, že byly nezávislé jeden na druhém. Nyní si však ukážeme, že každá z obou vět 84.1, 84.2 je důsledkem druhé z nich, aplikujeme-li princip duality. Provedeme to m. j. proto, abychom na příkladě prokázali užitečnost principu duality při studiu projektivních prostorů.

Homologie H byla v předcházejícím definována tak, že existuje g. bod S (střed homologie) tak, že každá *přímka* jdoucí bodem S je samodružná při H (a že mimo to H není identická transformace prostoru $\mathbf{P}_m$); je však snadné si rozvážit, že ekvivalentním požadavkem je, aby každá *nadrovina* jsoucí bodem S byla samodružná při H. Jestliže takto upravenou definici aplikujeme na duální kolineaci $\tilde{H}$ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ odvozenou z kolineace H prostoru $\mathbf{P}_m$, vidíme, že $\tilde{H}$ je homologie prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, jestliže existuje nadrovina ϱ tak, že každý její bod je samodružný při $\tilde{H}$. Avšak samodružnost bodu (nebo nadroviny) při $\tilde{H}$ je zřejmě totéž jako samodružnost při H. Tedy $\tilde{H}$ je homologie prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, právě když existuje nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$, jejíž každý bod je samodružný při H. Nyní věta 84.1 praví, že je-li H homologie prostoru $\mathbf{P}_m$, je $\tilde{H}$ homologie prostoru $\mathbf{P}_m$; věta 84.2 pak praví, že je-li $\tilde{H}$ homologie prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, je H homologie prostoru $\mathbf{P}_m$. Tedy každá z obou vět 84.1 a 84.2 plyne z druhé užitím principu duality.

Budiž f regulární afinní transformace eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ a budiž $\{f\}$ její projektivní rozšíření na prostor $\overline{\mathbf{E}}_m$. Potom úběžná nadrovina ϱ je samodružná při kolineaci $\{f\}$ prostoru $\overline{\mathbf{E}}_m$ a je nasnadě otázka, kdy $\{f\}$ je homologie s osovou nadrovinou ϱ. Snadno se dokáže, že tomu tak je (s vyloučením případu, že f je identická transformace), právě když f je buďto homothetická transformace nebo translace. Mimo to se lehko dokáže, že invariant homologie $\{f\}$ je roven koeficientu homothetie v případě homothetické transformace, a je roven jedné v případě translace. Homologie $\{S\}$ je speciální, právě když f je translace.

85. DETERMINANT KOLINEACE V SAMODRUŽNÉM BODĚ NEBO NADROVINĚ.

Budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Automorfismus L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ vytvořuje kolineaci $\{L\}$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$; táž kolineace je však vytvořena také jinými automorfismy, totiž automorfismy tvaru cL, kde číslo c je různé od nuly, jinak je však libovolné. Nyní v článku 83 jsme pro každý automorfismus prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ definovali jeho determinant; je-li Δ determinant automorfismu L, je $c^{m+1}\Delta$ determinant automorfismu cL, a ježto všecky automorfismy cL $(c \neq 0)$ vytvořují touž kolineaci $\{L\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, nemůžeme mluvit o určitém determinantu kolineace. Jestliže však se nám v některých případech podaří uvažovaným kolineacím $\{L\}$ *jednoznačně* přiřadit vytvořující automorfismus L, můžeme determinant tohoto automorfismu prohlásit za determinant kolineace $\{L\}$.

Jeden takový případ dostaneme, uvažujeme-li takové kolineace prostoru $\mathbf{P}_m$, které mají daný samodružný bod $\{A\}$. Neboť taková kolineace je vytvořena automorfismem L, který má vlastnost

$$LA = A; \tag{85.1}$$

vlastnost (85.1) je zřejmě nezávislá na volbě ar. zástupce A g. bodu $\{A\}$ a určuje jednoznačně automorfismus vytvořující danou kolineaci. Determinant automorfismu L, splňujícího podmínku (85.1), nazveme *determinantem kolineace* $\{L\}$ *v jejím samodružném bodě* $\{A\}$. Z věty 83.2 plyne:

VĚTA 85.1. *Buďtež* K_1, K_2 *dvě kolineace prostoru* $\mathbf{P}_m$ *se společným samodružným bodem. Jsou-li* Δ_1, Δ_2 *determinanty kolineací* K_1, K_2 *v daném samodružném bodě, potom determinant složené kolineace* $K_1 \circ K_2$ *v témž samodružném bodě je roven součinu* $\Delta_1 \Delta_2$.

Kolineace prostoru $\mathbf{P}_m$ s daným samodružným bodem tvoří zřejmě transformační grupu prostoru $\mathbf{P}_m$; z věty 85.1 plyne, že ty z nich, jejichž determinant v daném samodružném bodě je roven jedné, tvoří podgrupu uvažované transformační grupy.

VĚTA 85.2. *Budiž* K *kolineace prostoru* $\mathbf{P}_m$ *a budiž* $\mathbf{P}_k$ *lineární podprostor, jehož každý bod je samodružný při* K. *Potom determinant kolineace* K *v samodružném bodě* $\{X\}$ *patřícím do* $\mathbf{P}_k$ *je týž pro všecky body* $\{X\}$ *prostoru* $\mathbf{P}_k$.

DŮKAZ. Buďtež $\{A\}$, $\{B\}$ dva různé body prostoru $\mathbf{P}_k$ a budiž $K = \{L_1\} = \{L_2\}$, při čemž $L_1 A = A$, $L_2 B = B$. Stačí dokázat, že $L_1 = L_2$. Víme, že existuje číslo c tak, že $L_2 = cL_1$; tudíž $L_1 B = cB$ a tedy $L_1(A + B) = A + cB$. Avšak bod $\{A + B\}$ náleží do P_k a je tedy samodružný, t. j. $L_1(A + B) = c'(A + B)$. Tudíž $A + cB = c'(A + B)$ neboli $(1 - c')A + (c - c')B = \mathbf{o}$ a ježto ar. body A, B jsou lineárně nezávislé, je $1 - c' = 0$, $c - c' = 0$, tedy $c = 1$, $L_1 = L_2$.

Obráceně předpokládejme, že kolineace K má týž determinant ve dvou různých samodružných bodech a ptejme se, zda každý bod přímky spojující tyto body musí být samodružný. Uvidíme, že odpověď je kladná pouze v tom případě, že číslo m je sudé. Neboť jsou-li $\{A\}$, $\{B\}$ dané samodružné body, existuje vytvořující automorfismus L tak, že $LA = A$; ježto $\{B\}$ je samodružný, existuje číslo $c \neq 0$ tak, že $LB = cB$. Determinant kolineace K v samodružném bodě $\{A\}$ je roven determinantu Δ automorfismu L; determinant kolineace K v samodružném bodě $\{B\}$ je roven determinantu automorfismu cL, t. j. je roven $c^{m+1}\Delta$. Ježto oba determinanty jsou si rovny a ježto

$\Delta \neq 0$, je $c^{m+1} = 1$ a z toho při sudém m plyne, že $c = 1$, tedy $LA = A$, $LB = B$, $L(xA + yB) = xA + yB$, takže každý bod přímky AB je samodružný. Je-li však m liché, může být rovnice $c^{m+1} = 1$ splněna také tak, že $c = -1$, načež přímka AB obsahuje pouze dva samodružné body.

Z (84.4) a (84.6) se snadno odvodí:

VĚTA 85.3. *Budiž H homologie prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 2)$ se středem homologie S a s osovou nadrovinou ϱ; budiž c invariant homologie H. Determinant homologie H v samodružném bodě S je roven c^m. Je-li A libovolný bod nadroviny ϱ, je determinant homologie H v samodružném bodě A roven* $1 : c$.

Uvažujme nyní takové kolineace K prostoru P_m, které mají danou samodružnou nadrovinu ϱ. Zvolme ar. nadrovinu $\tilde{A}$ tak, že $\varrho = \{\tilde{A}\}$ a ukažme, že je možno udat takový vytvořující automorfismus L kolineace K, že

$$d(LX, \tilde{A}) = d(X, \tilde{A}) \tag{85.2}$$

pro každý ar. bod X. Neboť zvolme ar. bod $A_0 \neq \mathbf{o}$ tak, že $\{A_0\}$ neleží v ϱ; jestliže $A_1, \ldots, A_m$ je ar. base pro ϱ, je zřejmě $A_0, A_1, \ldots \ldots, A_m$ ar. base pro $\mathbf{P}_m$. Ježto nadrovina ϱ je samodružná, body $K\{A_r\}$ $(1 \leqq r \leqq m)$ náležejí do ϱ a tudíž bod $K\{A_0\}$, stejně jako bod $\{A_0\}$, nenáleží do ϱ. Jestliže $K = \{L\}$, je

$$d(A_r, \tilde{A}) = 0 = d(LA_r, \tilde{A}) \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m, \tag{85.3}$$

avšak

$$d(A_0, \tilde{A}) \neq 0 \neq d(LA_0, \tilde{A})$$

a L lze zvolit tak, že

$$d(LA_0, \tilde{A}) = d(A_0, \tilde{A}). \tag{85.4}$$

Pro libovolný ar. bod X máme

$$X = x_0 . A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_m A_m,$$
$$LX = x_0 . LA_0 + x_1 . LA_1 + \ldots + x_m . LA_m,$$

takže podle (85.3)

$$d(A, \tilde{A}) = x_0 . d(A_0, \tilde{A}), \quad d(LX, \tilde{A}) = x_0 . d(LA_0, \tilde{A})$$

a z (85.4) plyne (85.2). Je patrné, že podmínka (85.2) jednoznačně určuje automorfismus L a že je nezávislá na volbě ar. zástupce $\tilde{A}$

nadroviny ϱ . Můžeme tudíž determinant automorfismu L nazvat *determinantem kolineace K v samodružné nadrovině ϱ* .

Je-li f regulární afinní transformace eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$, zvolme v $\mathbf{E}_m$ lineární soustavu souřadnic $\langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$. Budiž

$$f(P) = P + b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_m\mathbf{u}_m ,$$
$$f(\mathbf{u}_r) = a_{r1}\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{rm}\mathbf{u}_m \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m .$$

Determinant transformace f (definovaný na str. 110 prvního svazku) je roven

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} . \tag{85.5}$$

Nyní P , $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ je ar. base projektivního rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Projektivní rozšíření afinní transformace f (definované na str. 42) je vytvořeno automorfismem L ar. základu prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$, při kterém ar. bod

$$X = x_0P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m \tag{85.6}$$

přejde v ar. bod

$$LX = x_0f(P) + x_1f(\mathbf{u}_1) + \ldots + x_mf(\mathbf{u}_m) , \tag{85.7}$$

takže L má determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & \ldots & b_m \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} ,$$

který je roven determinantu (85.5). Je-li $\tilde{A}$, $\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_m$ ar. base projektivního prostoru duálního k $\bar{\mathbf{E}}_m$ duální k ar. basi P , $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$, je $\{\tilde{A}\}$ úběžná nadrovina a pro každý ar. bod X je číslo $d(X, \tilde{A})$ rovno koeficientu ar. bodu X a ježto ar. body (85.6), (85.7) mají týž koeficient x_0 , je splněna podmínka (85.2). Platí tedy:

VĚTA 85.4. *Budiž f regulární afinní transformace eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ a budiž $\{f\}$ její projektivní rozšíření na prostor $\bar{\mathbf{E}}_m$. Determinant kolineace $\{f\}$ v úběžné nadrovině, která je samodružná při $\{f\}$, je roven determinantu afinní transformace f .*

Budiž $\{\tilde{A}\}$ samodružná nadrovina kolineace $\{L\}$ prostoru P_m a předpokládejme, že automorfismus L ar. základu $\mathbf{W}_{m+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ splňuje podmínku (85.2). K automorfismu L jsme definovali na str. 55 duální automorfismus $\tilde{L}$ ar. základu $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ tak, že kolineace $\{\tilde{L}\}$ prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ je duální ke kolineaci $\{L\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$. Podle (83.13) je pro každý ar. bod X : $d(X, \tilde{A}) = d(LX, L\tilde{A})$, takže podle (85.2) je $d(Y, \tilde{L}\tilde{A} - \tilde{A}) = 0$ pro $Y = LX$. Avšak Y je zcela libovolný ar. bod, takže $\tilde{L}\tilde{A} = \tilde{A}$, t. j. $\tilde{L}$ splňuje vzhledem k samodružné nadrovině $\{\tilde{A}\}$, která je bodem duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, podmínku typu (85.1). Z věty 83.7 tudíž plyne:

VĚTA 85.5. *Budiž ϱ samodružná nadrovina kolineace K projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž $\tilde{K}$ duální kolineace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Potom determinant kolineace $\tilde{K}$ v samodružné nadrovině ϱ je roven převrácené hodnotě determinantu kolineace K v téže nadrovině ϱ.*

Z věty 85.5 plyne podle principu duality:

VĚTA 85.6. *Budiž S samodružný bod kolineace K projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž $\tilde{K}$ duální kolineace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Potom determinant kolineace $\tilde{K}$ v samodružném bodě S je roven převrácené hodnotě determinantu kolineace K v témž bodě S.* Při tom ovšem determinant kolineace $\tilde{K}$ v samodružném bodě S prostoru $\mathbf{P}_m$ znamená determinant kolineace $\tilde{K}$ v duální nadrovině, jejímž vrcholem je S.

86. PROJEKTIVNÍ ZOBRAZENÍ PŘÍMKY. Název kolineární vznikl z vlastnosti (obsažené ve větě 79.4), že obrazem každé přímky je přímka. Dá se dokázat (ale v této knize nebudeme důkaz provádět), že pro $m \geq 2$ každé zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$, při kterém obrazem každé přímky je přímka, je kolineární. Pro $m = 1$ celý prostor $\mathbf{P}_1$ je přímka a každé zobrazení $\mathbf{P}_1$ na $\mathbf{P}'_1$ má samozřejmě tu vlastnost, že obrazem přímky je přímka, a přes to ovšem nemusí být kolineárním. Pro $m = 1$ je zvykem slovo kolineární nahrazovat slovem projektivní; řídíce se tímto zvykem, budeme mluvit o *projektivním zobrazení* (projektivní) *přímky* $\mathbf{P}_1$ na (projektivní) přímku $\mathbf{P}'_1$, čímž míníme zobrazení $\mathbf{P}_1$ na $\mathbf{P}'_1$, které je kolineární ve smyslu definovaném v článku 79. Je-li $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}'_1$, máme kolineaci (projektivní) přímky $\mathbf{P}_1$, kterou budeme nazývat *projektivitou na přímce* $\mathbf{P}_1$.

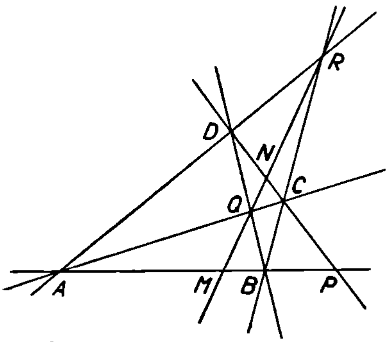
Poznámka. V klasické literatuře projektivní geometrie se mluví o „dvou projektivních bodových řadách", čímž se míní projektivní zobrazení přímky na přímku, o dvou „soumístných projektivních bodových řadách", čímž se míní projektivita na přímce. Taková a podobná terminologie je velmi běžná v projektivní geometrii, málo však zdůrazňuje logickou strukturu studovaných pojmů a výrazně se liší od terminologie, která je dnes běžná ve všech hlavních partiích matematiky. Nebudeme proto takové terminologie v této knize užívat.

Jsou-li dány dvě projektivní přímky $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}'_1$, při čemž může, ale nemusí být $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}'_1$, a jsou-li na každé z obou přímek dány tři různé body (v určitém pořadí), potom podle vět 79.5 a 79.6 existuje právě jedno projektivní zobrazení přímky $\mathbf{P}_1$ na přímku $\mathbf{P}'_1$, které převede prvé tři body ve druhé tři. Jak tomu je, jestliže místo tří bodů máme čtyři, o tom nás poučuje

Věta 86.1. *Jsou-li dány čtyři různé body A, B, C, D na přímce $\mathbf{P}_1$, a čtyři různé body A', B', C', D' na přímce $\mathbf{P}'_1$, potom projektivní zobrazení přímky $\mathbf{P}_1$ na přímku $\mathbf{P}'_1$, které převádí A, B, C, D po řadě v A', B', C', D', existuje, právě když dvojpoměr* $(ABCD)$ je roven dvojpoměru $(A'B'C'D')$.

Důkaz. Existuje-li takové projektivní zobrazení $K \doteq \{L\}$, potom při vhodné volbě ar. zástupců bude $LA = A'$, $LB = B'$, $LC = C'$, $LD = D'$. Existují čísla u_1, u_2, v_1, v_2 tak, že $C = u_1A + u_2B$, $D = v_1A + v_2B$. Ježto zobrazení L je isomorfní, je také $C' = u_1A' + u_2B'$, $D' = v_1A' + v_2B'$, takže podle definice dvojpoměru je $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Obráceně předpokládejme, že $(ABCD) = (A'B'C'D') = \lambda$, tedy $0 \neq \lambda \neq 1$ podle (76.4). Podle věty (79.6) existuje projektivní zobrazení K přímky $\mathbf{P}_1$ na přímku $\mathbf{P}'_1$, které převádí body A, B, C v body A', B', C'; K převádí bod D v jakýsi bod E přímky $\mathbf{P}'_1$ a podle již dokázaného je $(ABCD) = (A'B'C'E)$, tedy $(A'B'C'E) = (A'B'C'D')$, takže podle věty 76.1 je $E = D'$.

V projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 2)$ budiž dán $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor v širším smyslu Q. V článku 81 jsme nazvali svazkem nadrovin o vrcholu Q a označili $\pi(Q ; \mathbf{P}_m)$ množinu všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí podprostorem Q. Poznali jsme, že svazek nadrovin tvoří projektivní přímku, takže můžeme mluvit o dvojpoměru čtveřice (navzájem různých) nadrovin svazku. Jestliže nyní je v prostoru P_m mimo podprostor Q ještě dána přímka P_1, která nemá s Q společného bodu, jsou podprostory Q, P_1 totálně nezávislé a jestliže každému bodu $\{X\}$ přímky P_1 přiřadíme jím procházející (jednoznačně určenou) nadrovinu svazku, obdržíme perspektivní zobrazení P_1 na $\pi(Q\,;\mathsf{P}_m)$, které podle článku 82 je kolineární (projektivní). Jsou-li tedy A, B, C, D čtyři různé body přímky P_1 a jsou-li α, β, γ, δ jimi procházející nadroviny svazku $\pi(Q\,;\mathsf{P}_m)$, je $(ABCD) = (\alpha\beta\gamma\delta)$. Máme-li v P_m vedle Q dány dvě různé přímky P_1, P'_1, z nichž žádná neprotne Q, potom podle článku 82 promítnutí přímky P_1 na přímku P'_1 z vrcholu Q je projektivní zobrazení P_1 na P'_1. Jsou-li tedy A, B, C, D čtyři různé body přímky P_1 a jsou-li A', B', C', D' jejich průměty z vrcholu Q na přímku P'_1, je $(ABCD) = (A'B'C'D')$.



Obr. 1.

VĚTA 86.2 (viz obr. 1). *V projektivní rovině buďtež dány čtyři body A, B, C, D, z nichž žádné tři neleží v téže přímce.* (Body A, B, C, D jsou tudíž navzájem různé.) *Budiž: P průsečík přímek AB, CD; Q průsečík přímek AC, BD; R průsečík přímek AD, BC; M průsečík přímek AB, QR. Potom bod M je harmonicky sdružen s bodem P vzhledem k bodům A, B.*

DŮKAZ. Podáme napřed neúplný geometrický důkaz založený na právě odvozených vlastnostech dvojpoměru. Budiž N průsečík přímek CD, QR. Při promítnutí přímky AB na přímku CD z vrcholu Q mají body A, B, P, M průměty C, D, P, N, takže

$$(ABPM) = (CDPN)\,. \tag{86.1}$$

Při promítnutí přímky AB na přímku CD z vrcholu R mají body B, A, P, M průměty C, D, P, N, takže

$$(BAPM) = (CDPN)\,. \tag{86.2}$$

Porovnáme-li (86.1) s (86.2), máme $(ABPM) = (BAPM)$, takže podle (76.10) dvojpoměr $(ABPM) = \lambda$ vyhovuje rovnici $\lambda^2 = 1$ a ježto dvojpoměr není nikdy roven jedné, je $(ABPM) = -1$. Tento důkaz má tu mezeru, že není odůvodněno, proč body A, B, P, M jsou navzájem různé, specielně proč $M \neq P$. Nebudeme tuto mezeru vyplňovat, nýbrž místo toho podáme jednoduchý početní důkaz věty 86.2, opřený o vhodnou volbu ar. zástupců uvažovaných g. bodů. Ar. bod Q zvolíme libovolně. Potom zvolíme ar. body A, B tak, aby bylo $C = A + Q$, $D = B + Q$. Potom je $B - A = D - C$, $A + D = B + C$. Ježto bod $B - A$ leží na přímce AB, bod $D - C$ na přímce CD, je $B - A = D - C = P$ a podobně je též $A + D = B + C = R$. Nyní je $A + B = R - Q$ a z toho soudíme, že $A + B = M$. Ježto $P = B - A$, $M = A + B$, je $(ABPM) = -1$.

87. PROJEKTIVITY NA PŘÍMCE. Budiž K projektivita na přímce $\mathbf{P}_1$. Není-li K identická transformace přímky $\mathbf{P}_1$, plyne z věty 79.6, že existují nejvýš dva samodružné body při K. Projektivita K se nazývá: *hyperbolická*, má-li dva různé samodružné body, *eliptická*, nemá-li žádný samodružný bod, *parabolická*, má-li jediný samodružný bod. Zvolíme-li libovolně ar. basi A, B přímky $\mathbf{P}_1$, je $K = \{L\}$, kde

$$LA = \alpha A + \beta B, \quad LB = \gamma B + \delta B, \tag{87.1}$$

při čemž

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{87.2}$$

Bod $\{xA + yB\}$ je samodružný při K, právě když ar. bod $L(xA + yB)$ je lineárně závislý na ar. bodě $xA + yB$, t. j. právě když

$$\begin{vmatrix} x & \alpha x + \gamma y \\ y & \beta x + \delta y \end{vmatrix} = 0$$

neboli

$$\beta x^2 + (\delta - \alpha)xy - \gamma y^2 = 0. \tag{87.3}$$

Je-li

$$D = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4\Delta, \tag{87.4}$$

je tedy: $D > 0$ *pro hyperbolické projektivity*, $D < 0$ *pro eliptické projektivity*, $D = 0$ *jednak pro parabolické projektivity, jednak pro identickou transformaci* charakterisovanou vztahy:

$$\beta = \gamma = 0\,, \qquad \alpha = \delta \neq 0\,. \tag{87.3}$$

Ježto číslo $m = 1$ je liché, můžeme podle článku 83 rozdělit projektivity na přímce na *přímé*, u kterých je $\Delta > 0$, a *nepřímé*, u kterých je $\Delta < 0$. Je-li přímka $\mathbf{P}_1$ orientována, potom orientace, geometricky popsaná v článku 77 vlastnostmi symbolu (77.2), zůstává beze změny po provedení přímé projektivity, přejde však v orientaci opačnou po provedení nepřímé projektivity.

VĚTA 87.1. *Nepřímá projektivita na přímce je vždy hyperbolická.* Neboť je-li $\Delta < 0$, potom podle (87.4) je $D > 0$. Podle dokázané věty každá eliptická i každá parabolická projektivita je přímá, kdežto hyperbolická projektivita může být přímá nebo nepřímá.

VĚTA 87.2. *Jsou-li A, B samodružné body hyperbolické projektivity na přímce $\mathbf{P}_1$, existuje číslo λ tak, že*

$$0 \neq \lambda \neq 1 \tag{87.4}$$

a že, je-li X kterýkoli nesamodružný bod přímky $\mathbf{P}_1$, X' obraz bodu X, potom dvojpoměr $(ABXX') = \lambda$. Obráceně, jsou-li dány na přímce $\mathbf{P}_1$ dva různé body A, B a je-li dáno reálné číslo λ splňující (87.4), *přiřaďme bodu A bod A, bodu B bod B a každému jinému bodu X přímky $\mathbf{P}_1$ ten bod X'* (jednoznačně určený podle věty 76.1), *pro který platí $(ABXX') = \lambda$; dostaneme na přímce $\mathbf{P}_1$ hyperbolickou projektivitu se samodružnými body A, B. Naše projektivita je přímá pro kladné λ, nepřímá pro záporné λ.*

DŮKAZ. Jsou-li A, B samodružné body dané hyperbolické projektivity $\{L\}$, potom v (87.1) je $\beta = \gamma = 0$, takže podle (87.2) je $\alpha \neq 0$, $\delta \neq 0$ a ježto $\{L\}$ není identická transformace, je $\alpha \neq \delta$. Je-li $X = xA + yB$, je $LX = \alpha x A + \delta y B$, takže pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ je $(A, B, X, LX) = \lambda$, kde $\lambda = \alpha : \delta$, takže platí (87.4). Podle (87.2) je $\Delta = \alpha\delta$, takže pro $\lambda > 0$ je $\Delta > 0$ a projektivita je přímá, pro $\lambda < 0$ je $\Delta < 0$ a projektivita je nepřímá. Obráceně, je-li dáno λ tak, že platí (87.4) a je-li $(ABXX') = \lambda$, potom $\{X'\} = \{LX\}$, položíme-li $LA = \lambda A$, $LB = B$; $\{L\}$ je žádaná projektivita.

VĚTA 87.3. *Buďtež dány tři různé body* A, B, C *na přímce* $\mathbf{P}_1$. *Potom existuje na* $\mathbf{P}_1$ *právě jedna parabolická projektivita* K *se samodružným bodem* A, *při které obrazem bodu* B je bod C.

DŮKAZ. Zvolme libovolně ar. zástupce A, B, C a budiž $C = uA + vB$, tedy $uv \neq 0$. Existuje-li K, je vytvořena isomorfismem L, pro který

$$LA = A, \qquad LB = x(uA + vB),$$

kde $x \neq 0$. Běží pouze o to, že lze určit x právě jedním způsobem tak, aby pro $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = xu$, $\delta = xv$ výraz D [viz (87.4)] byl roven nule. To je však zřejmé, neboť $D = (xv - 1)^2$.

VĚTA 87.4. *Budiž* K *taková projektivita na přímce* $\mathbf{P}_1$, *že existují dva různé body, z nichž každý je obrazem druhého při* K. *Je-li potom* X *libovolný bod přímky* $\mathbf{P}_1$ *a je-li* X' *jeho obraz při* K, *je také obráceně bod* X *obrazem bodu* X' *při* K.

DŮKAZ. Budiž $K = \{L\}$ a volme v (87.1) za A, B dané dva body, z nichž každý je obrazem druhého. Potom je $\alpha = \delta = 0$ a je-li $X = xA + yB$, $X' = LX$, je $X' = \gamma yA + \beta xB$, tedy $LX' = \beta\gamma \,.\, (xA + yB)$, takže $K\{X'\} = \{X\}$.

Projektivita K na přímce $\mathbf{P}_1$, která má tu vlastnost, že je-li X' obraz libovolného bodu X, je také obráceně X obrazem bodu X', se nazývá *involuce na přímce* $\mathbf{P}_1$, není-li identickou transformací přímky $\mathbf{P}_1$. Věta 87.4 praví, že existují-li dva různé body, z nichž každý je obrazem druhého při projektivitě K, potom K je involuce a je-li X' obrazem bodu X, pravíme, že dvojice

$$X, X' \tag{87.5}$$

je *dvojice involuce* K. Místo abychom na involuci K nazírali jako na transformaci přímky $\mathbf{P}_1$, je účelné nazírat na involuci jako na množinu bodových dvojic (87.5). Také na libovolnou projektivitu K bychom mohli nazírat jako na množinu dvojic (87.5), kde $KX = X'$, ale v obecném případě bychom musili přihlížet k pořadí obou bodů, ze kterých se skládá dvojice (87.5), kdežto v případě involuce *nezáleží na pořadí bodů, ze kterých se skládá dvojice involuce.* Je-li S samodružný bod involuce K, potom dvojice S, S je jednou dvojicí involuce a obráceně, jestliže dvojice S, S složená ze dvou splývajících bodů je dvojicí involuce, je S samodružný bod. Proto u involucí se místo názvu samodružný bod užívá zpravidla názvu *dvojný bod.* Tedy *hyperbolická involuce má dva dvojné body, eliptická involuce nemá žádný dvojný bod.* Jiného případu není, neboť z následující věty plyne, že *involuce nemůže být parabolická.* Napřed však ještě poznamenejme, že z definice involuce plyne, že je-li K involuce na přímce P_1 a je-li X libovolný bod přímky P_1, existuje právě jedna dvojice involuce K, do které náleží bod X. Jsou-li tedy X_1, X_1'; X_2, X_2' dvě různé dvojice téže involuce, potom žádný z g. bodů X_2, X_2' nemůže splynout s žádným z bodů X_1, X_1'. Splynou-li X_1 a X_1', je X_1 dvojný bod; splynou-li X_2 a X_2', je X_2 dvojný bod. Ježto involuce nemůže mít více než dva dvojné body, je ve všech nekonečně mnoha dvojicích (87.5) involuce K, s výjimkou nejvýš dvou dvojic, g. bod X různý od g. bodu X'.

VĚTA 87.5. *Buďtež A, B, C, D čtyři různé g. body na projektivní přímce P_1. Potom existuje na přímce P_1 právě jedna involuce obsahující obě dvojice A, B; C, D. Tato involuce je hyperbolická, je-li dvojpoměr $(ABCD) > 0$, eliptická, je-li $(ABCD) < 0$.*

DŮKAZ. Ježto $\{A\} \neq \{B\}$, bude při vhodné volbě ar. zástupců uvažovaných g. bodů

$$C = A + B, \qquad D = \lambda A + B,$$

kde $0 \neq \lambda \neq 1$. Podle definice dvojpoměru je $(ABCD) = \lambda$. Nyní involuce, do níž náleží dvojice A, B, je vytvořena isomorfismem L ar. základu přímky P_1, při kterém $LA = B$, $LB = \mu A$, $\mu \neq 0$. Z věty 87.4 plyne, že $\{L\}$ je involuce při každé volbě čísla $\mu \neq 0$. Nyní $L(A + B) = \mu A + B$, takže C, D je dvojice involuce $\{L\}$, právě když $\mu = \lambda$. Existuje tudíž právě jedna involuce $\{L\}$ s žádanou vlastností, pro niž v (87.1) je $\alpha = \delta = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = \lambda$, takže podle (87.4) je $D = 4\lambda$ a tudíž pro $\lambda > 0$ je $D > 0$ a involuce je hyperbolická, pro $\lambda < 0$ je $D < 0$ a involuce je eliptická; případ $D = 0$ je vyloučen.

VĚTA 87.6. *Buďtež A, B dva různé body na projektivní přímce P_1. Existuje právě jedna hyperbolická involuce s dvojnými body A, B. Mimo své dvojné body* (z nichž každý dává jednu dvojici) *obsahuje tato involuce ještě právě ty dvojice X, X', pro které A, B, X, X' je harmonická čtveřice.*

Důkaz. Ve větě 87.2 jsou popsány všecky hyperbolické projektivity se samodružnými body A, B; každá z nich odpovídá určité volbě čísla λ, kde $0 \neq \lambda \neq 1$ a zřejmě máme dokázat, že involuci dostaneme, právě když $\lambda = -1$. Je-li však bod X různý od bodů A, B a je-li X' jeho obraz při uvažované projektivitě, je $(ABXX') = \lambda$ a tedy $(ABX'X) = 1 : \lambda$ podle (76.14). Involuci tudíž máme, právě když $1 : \lambda = \lambda$, t. j. právě když $\lambda = -1$, ježto $\lambda = 1$ je vyloučeno.

Věta 87.7. *Eliptická involuce je přímá projektivní transformace. Hyperbolická involuce je nepřímá projektivní transformace.*

Důkaz. Případ eliptické involuce je obsažen ve větě 87.1. Případ hyperbolické involuce je obsažen ve větě 87.2, ježto podle důkazu věty 87.6 v uvažovaném případě je $\lambda = -1$.

Všimněme si ještě, jaký tvar mají involuce v tom případě, když $\mathbf{P}_1 = \bar{\mathbf{E}}_1$ je projektivní uzávěr eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$. Zde máme především hyperbolické involuce s jedním dvojným bodem v nekonečnu a ovšem druhým v konečnu, který označíme S. Taková involuce podle vět 76.3 a 87.6 obsahuje mimo své dvojné body ještě právě ty dvojice e. bodů A, B, jejichž středem je e. bod S.

Ponecháme-li tento případ stranou, potom existuje e. bod P, který spolu s úběžným bodem $\{\mathbf{u}\}$ tvoří dvojici dané involuce K; můžeme předpokládat, že $|\mathbf{u}| = 1$. Bod P se nazývá *střed involuce* K. Potom každý z obou g. bodů $\{P\}$, $\{\mathbf{u}\}$ je obrazem druhého při K, takže K je vytvořena automorfismem L, při kterém $LP = c\mathbf{u}$, $L\mathbf{u} = P$, kde $c \neq 0$. Tedy $L(P + x\mathbf{u}) = xP + c\mathbf{u}$, takže obrazem e. bodu $X = P + x\mathbf{u}$, $x \neq 0$ je e. bod $X' = P + x'\mathbf{u}$, kde $xx' = c$. Ježto $|\mathbf{u}| = 1$, je $x = \overrightarrow{PX}$, $x' = \overrightarrow{PX'}$. Tedy *involuce K vedle dvojice složené z jejího středu P a z úběžného bodu obsahuje právě ještě ty dvojice e. bodů X, X', pro něž*

$$\overrightarrow{PX} \, . \, \overrightarrow{PX'} = c \,, \tag{87.6}$$

kde $c \neq 0$ je konstanta, která spolu se středem P jednoznačně určuje involuci K. Snadno se dokáže, že je-li $c > 0$, je K hyperbolická a má dvojné body

$$P \pm \sqrt{c} \, . \, \mathbf{u} \,;$$

je-li $c < 0$, je K eliptická.