VIII

KOSINUS A SINUS

50. ÚHEL ORIENTOVANÝCH SMĚRŮ. Mezi nejdůležitější pojmy metrické geometrie patří pojem úhlu, který se v této knize dosud nevyskytl. Studiu tohoto pojmu jsou věnovány zbývající dvě kapitoly tohoto svazku. V této kapitole probereme řadu elementárních vzorců, ve kterých se vyskytuje vlastně pouze pojem kosinu a sinu spíše než geometrický pojem úhlu, o kterém pojednáme až v kapitole následující.

Je-li $\boldsymbol{u}$ nenulový vektor, nazvali jsme směrem množinu $\{\boldsymbol{u}\}$ všech vektorů tvaru $a\boldsymbol{u}$, kde a probíhá všecka reálná čísla. Nazveme nyní *orientovaným směrem* a označme $\{\boldsymbol{u}\}^+$ množinu všech vektorů tvaru $a\boldsymbol{u}$, kde a probíhá nyní pouze *kladná* reálná čísla. Místo výrazu směr užijeme někdy určitějšího výrazu *neorientovaný směr*. V každém (neorientovaném) směru $\{\boldsymbol{u}\}$ jsou obsaženy dva orientované směry: jednak $\{\boldsymbol{u}\}^+$, jednak $\{-\boldsymbol{u}\}^+$; pravíme, že tyto dva orientované směry jsou *navzájem opačné*. Dva orientované směry $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{\boldsymbol{v}\}^+$ nazveme *lineárně nezávislé*, jestliže neorientované směry $\{\boldsymbol{u}\}$, $\{\boldsymbol{v}\}$ jsou mezi sebou různé neboli jestliže vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé.

V každém orientovaném směru $\{\boldsymbol{u}\}^+$ je obsažen právě jeden *vektor jednotkový*, t. j. takový, jehož velikost je rovna jedné.

Pojem *úhlu dvou orientovaných směrů* vznikne abstrakcí z pojmu dvojice $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{\boldsymbol{v}\}^+$ orientovaných směrů. Dvě takové dvojice

$$\{\boldsymbol{u}_1\}^+, \{\boldsymbol{v}_1\}^+; \{\boldsymbol{u}_2\}^+, \{\boldsymbol{v}_2\}^+ \tag{50.1}$$

určují podle definice týž úhel, jestliže

$$\frac{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{u}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_1|} = \frac{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{u}_2| \cdot |\boldsymbol{v}_2|}. \tag{50.2}$$

Všimněme si, že jestliže obě dvojice (50.1) splynou, existují kladná čísla a, b tak, že $\boldsymbol{u}_2 = a\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{v}_2 = b\boldsymbol{v}_1$, takže v tomto případě platí (50.2).

Rovněž si všimněme, že *úhel dvou orientovaných směrů je nezávislý na jejich pořadí.*

Číslo (50.2) se jmenuje *kosinus úhlu.* Úhly budeme značit řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \omega$. Kosinus úhlu α značíme $\cos\alpha$. Je tedy pro úhel α orientovaných směrů $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{\boldsymbol{v}\}^+$

(50.3) $$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|};$$

a jest $\alpha = \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\cos\alpha = \cos\beta$. Jsou-li $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *jednotkové* vektory, máme jednodušeji

(50.3′) $$\cos\alpha = \boldsymbol{uv}.$$

Pravíme, že α, β jsou *výplňkové úhly*, jestliže

(50.4) $$\cos\alpha + \cos\beta = 0.$$

Z definice je patrné, že *jestliže jeden z obou orientovaných směrů nahradíme orientovaným směrem k němu opačným, přejde jejich úhel ve výplňkový úhel.*

Úhel α nazveme *nulový*, jestliže $\cos\alpha = 1$, *přímý*, jestliže $\cos\alpha = -1$. Nulový a přímý úhel jsou tedy navzájem výplňkové.

Podle věty 9.2 máme pro každý úhel α

(50.5) $$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1;$$

mimo to vidíme, že *úhel dvou orientovaných směrů* $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{\boldsymbol{v}\}^+$ *je nulový tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{\boldsymbol{v}\}^+$ *splynou*, a tudíž *je přímý tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{\boldsymbol{v}\}^+$ *jsou navzájem opačné.* Jsou-li tedy $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{\boldsymbol{v}\}^+$ lineárně nezávislé, potom pro jejich úhel platí $|\cos\alpha| < 1$ a obráceně.

Úhel α nazveme *pravý*, je-li $\cos\alpha = 0$, *ostrý*, je-li $0 < \cos\alpha < 1$, *tupý*, je-li $0 > \cos\alpha > -1$. Úhel výplňkový k pravému je pravý, k ostrému tupý, k tupému ostrý. Úhel orientovaných směrů $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{\boldsymbol{v}\}^+$ je tedy pravý tehdy a jenom tehdy, jestliže směry $\{\boldsymbol{u}\}$, $\{\boldsymbol{v}\}$ jsou navzájem kolmé; na orientaci při tom nezáleží.

Vedle čísla $\cos\alpha$ je užitečné zavésti ještě číslo $\sin\alpha$ (čteme *sinus úhlu* α) definované takto:

(50.6) $$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Podle (50.5) a (50.6) máme pro každý úhel α:

$$(50.7) \qquad 0 \leqq \sin\alpha \leqq 1,$$

$$(50.8) \qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$(50.9) \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Kdežto z rovnosti $\cos\alpha = \cos\beta$ plyne $\alpha = \beta$, z rovnosti $\sin\alpha = \sin\beta$ plyne pouze, že buďto je $\alpha = \beta$ nebo α, β jsou navzájem výplňkové. Dva výplňkové úhly mají týž sinus; zejména nulový i přímý úhel má sinus rovný nule a obráceně, je-li $\sin\alpha = 0$, je α nulový nebo přímý úhel; pravý úhel má sinus rovný jedné a obráceně, je-li $\sin\alpha = 1$, je α pravý úhel.

51. ÚHEL PŘÍMEK A POLOPŘÍMEK. Budiž $\{\boldsymbol{u}\}$ směr přímky p; každý z obou orientovaných směrů $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{-\boldsymbol{u}\}^+$ přiřadíme určité orientaci přímky p a to tak, že $\{\boldsymbol{u}\}^+$ přísluší té orientaci, při které vektor $\boldsymbol{u}$ (a tudíž i každý vektor $a\boldsymbol{u}$, $a > 0$) je kladný. *Úhlem dvou orientovaných přímek* p, q rozumíme úhel příslušných orientovaných směrů. Tudíž úhel dvou souhlasně rovnoběžných orientovaných přímek je nulový a obráceně; úhel dvou nesouhlasně rovnoběžných orientovaných přímek je přímý a obráceně. Jsou-li p, q dvě navzájem kolmé přímky, potom při libovolné jejich orientaci jejich úhel je pravý a obráceně.

Jsou-li p, p' dvě souhlasně rovnoběžné orientované přímky a jsou-li také q, q' dvě souhlasně rovnoběžné orientované přímky, potom p, q určují týž úhel jako p', q'.

Každá polopřímka je částí určité přímky a určuje v této přímce určitou orientaci; *úhlem dvou polopřímek* rozumíme úhel příslušných orientovaných přímek.

Kosinus úhlu α dvou orientovaných přímek p, q můžeme definovat cestou více geometrickou než je původní definice. Je-li A libovolný bod přímky p, který neleží na přímce q, potom podle článku 33 bodem A prochází právě jedna přímka kolmo protínající přímku q; patu této kolmice označme A'; jestliže však bod A leží na přímce q, budiž $A' = A$. Bod A' nazveme *kolmý průmět bodu A na přímku q*. Budiž $B \neq A$ další bod přímky p, B' jeho kolmý průmět na přímku q, Dokážeme, že potom

$$(51.1) \qquad \overrightarrow{A'B'} = \cos\alpha \,.\, \overrightarrow{AB},$$

což je slíbená geometrická definice čísla $\cos\alpha$. Za účelem důkazu označme $\mathbf{u}$ jednotkový vektor na p, kladný při dané orientaci, a podobně $\mathbf{v}$ pro q, takže podle (50.3') je $\cos\alpha = \mathbf{uv}$. Podle definice orientované vzdálenosti jest

$$(51.2) \qquad B - A = \overrightarrow{AB} \,.\, \mathbf{u},$$

$$(51.3) \qquad B' - A' = \overrightarrow{A'B'} \,.\, \mathbf{v}.$$

Podle definice kolmých průmětů A', B' je však

$$(A - A')\,\mathbf{v} = 0, \ (B - B')\,\mathbf{v} = 0,$$

z čehož plyne

$$(B - A)\,\mathbf{v} = (B' - A')\,\mathbf{v}$$

a podle (51.3)

$$(51.4) \qquad (B - A)\,\mathbf{v} = \overrightarrow{A'B'} \,.\, |\mathbf{v}|^2 = \overrightarrow{A'B'}.$$

Ježto však $\cos\alpha = \mathbf{uv}$, podle (51.2) jest

$$(51.5) \qquad (B - A)\,\mathbf{v} = \cos\alpha \,.\, \overrightarrow{AB}$$

a z (51.4) a (51.5) plyne (51.1).

52. ÚHEL PŘÍMKY S LINEÁRNÍM PROSTOREM. V prostoru $\mathbf{E}_m$ budiž dán lineární podprostor $\mathbf{E}_k$.

Zavedeme definici, kterou jsme pro $k = 1$ zavedli již v předcházejícím článku. Jestliže bod A neleží v $\mathbf{E}_k$, potom podle článku 33 bodem A prochází právě jedna přímka, která kolmo protíná prostor $\mathbf{E}_k$; budiž A' pata této kolmice; leží-li však A v prostoru $\mathbf{E}_k$, budiž $A' = A$. Bod A' nazveme *kolmý průmět bodu A na prostor* $\mathbf{E}_k$. Budiž $\mathbf{W}_k$ zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{W}'_{m-k}$ zaměření totálně kolmé na $\mathbf{W}_k$; potom je bod A' kolmým průmětem bodu A na $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže předně bod A' náleží do $\mathbf{E}_k$ a za druhé vektor $A - A'$ náleží do $\mathbf{W}'_{m-k}$. Je-li $B \neq A$ další bod a je-li přímka AB kolmá na $\mathbf{E}_k$, potom kolmé průměty A', B' splynou; neboť ježto oba vektory $B - A$, $A - A'$ náležejí do $\mathbf{W}'_{m-k}$, platí totéž o vektoru $B - A'$. Obráceně, splynou-li kolmé průměty A', B', je přímka AB kolmá na $\mathbf{E}_k$; neboť ježto oba vektory $A - A'$, $B - A'$ náležejí do $\mathbf{W}'_{m-k}$, platí totéž o vektoru $B - A$.

Budiž nyní vedle prostoru $\mathbf{E}_k$ dána ještě přímka p; označme p' a nazveme kolmým průmětem přímky p na prostor $\mathbf{E}_k$ množinu kolmých průmětů všech bodů přímky p. Jestliže přímka p je kolmá na prostor $\mathbf{E}_k$, potom podle předcházejícího průmět p' se redukuje na jediný bod. V tomto případě definujeme, že úhel α přímky p s prostorem $\mathbf{E}_k$ je úhel pravý, t. j. že $\cos\alpha = 0$. Předpokládejme nyní, že přímka p není kolmá na prostor $\mathbf{E}_k$, takže dva různé body přímky p mají vždy také různé kolmé průměty. Buďtež A, B dva různé body přímky p a buďtež A', B' jejich kolmé průměty na $\mathbf{E}_k$, takže body A', B' náležejí do $\mathbf{E}_k$ a vektory $A - A'$, $B - B'$ náležejí do $\mathbf{W}'_{m-k}$. Je-li nyní

$$C = A + t(B - A), \tag{52.1}$$

položme

$$C' = A' + t(B' - A'); \tag{52.1'}$$

bod C' náleží do $\mathbf{E}_k$ a vektor

$$C - C' = (1 - t)(A - A') + t(B - B')$$

náleží do $\mathbf{W}'_{m-k}$. Je tudíž bod (52.1') kolmým průmětem bodu (52.1), takže kolmým průmětem p' je přímka. Mimo to je patrné, že libovolně zvolené orientaci přímky p odpovídá určitá orientace jejího kolmého průmětu p'. Nazveme *úhlem přímky p s prostorem* $\mathbf{E}_k$ úhel α orientovaných přímek p, p'; změníme-li orientaci přímky p, změní se také orientace přímky p', takže úhel α je nezávislý na volbě orientace přímky p.

Jsou-li opět A, B dva různé body přímky p a jsou-li A', B' jejich kolmé průměty na $\mathbf{E}_k$, můžeme položit

$$A - A' = \mathbf{w}_1,\ B - B' = \mathbf{w}_2, \tag{52.2}$$

takže vektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ náležejí do $\mathbf{W}'_{m-k}$. Ježto vektor $B' - A'$ náleží do $\mathbf{W}_k$, jest

$$(B' - A') \,.\, (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) = 0. \tag{52.3}$$

Podle definice jest

$$\cos\alpha = \frac{(B - A)(B' - A')}{\overline{AB} \,.\, \overline{A'B'}}. \tag{52.4}$$

Avšak podle (52.2) jest

$$B - A = (B' - A') + (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1), \tag{52.5}$$

takže podle (52.3) jest

$$(B - A)(B' - A') = \overline{A'B'}^2; \tag{52.6}$$

mimo to z (52.3) a (52.6) plyne, že

$$\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2 + |\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1|^2. \tag{52.7}$$

Podle (52.4) a (52.6) jest

$$\overline{A'B'} = \cos\alpha \, . \, \overline{AB}. \tag{52.8}$$

Všimněme si, že (52.8) platí i pro ten případ, že přímka AB je kolmá na $\mathbf{E}_k$, neboť v tomto případě je $\cos\alpha = 0 = \overline{A'B'}$.

Z (52.8) plyne především, že je vždy

$$\cos\alpha \geqq 0, \tag{52.9}$$

t. j. úhel α přímky p s nadrovinou je nulový, ostrý nebo pravý (nemůže býti tupý ani přímý). Mimo to je patrné, že α *je úhel pravý tehdy a jenom tehdy, jestliže přímka p je kolmá na prostor* $\mathbf{E}_k$. Dokážeme dále, že α je *úhel nulový tehdy a jenom tehdy, jestliže přímka p je rovnoběžná s prostorem* $\mathbf{E}_k$. Jestliže totiž úhel α je nulový, jest $\cos\alpha = 1$, takže podle (52.7) a (52.8) je $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{o}$ a tedy podle (52.5) je $B - A = B' - A'$, takže vektor $B - A$ náleží do $\mathbf{W}_k$ a tedy přímka p je rovnoběžná s $\mathbf{E}_k$. Obráceně, je-li přímka p rovnoběžná s $\mathbf{E}_k$, potom vektor $B - A$ náleží do $\mathbf{W}_k$; podle (52.5) platí totéž o vektoru $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$, který však náleží do $\mathbf{W}'_{m-k}$; je tudíž $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{o}$, takže podle (52.7) a (52.8) je $\cos\alpha = 1$, t. j. α je nulový úhel.

Z definice úhlu přímky p s prostorem $\mathbf{E}_k$ je patrné, že tento úhel závisí pouze na směru přímky p a na zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$. Jinak řečeno, *jsou-li přímky p, p' rovnoběžné, jsou-li také prostory $\mathbf{E}_k, \mathbf{E}'_k$ rovnoběžné, potom úhel přímky p s prostorem $\mathbf{E}_k$ je roven úhlu přímky p' s prostorem $\mathbf{E}'_k$.*

Je-li $k = 1$, je nejen p, nýbrž i $\mathbf{E}_k$ přímka. Porovnáme-li (52.8) s (51.1), vidíme, že je-li α úhel dvou *neorientovaných* přímek p, q, β úhel týchž orientovaných přímek, potom platí (52.9) a

$$\cos\alpha = |\cos\beta|. \tag{52.10}$$

Budiž nyní $k = m - 1$, t. j. α je nyní *úhel přímky p s nadrovinou* $\mathbf{E}_{m-1}$. Je-li k přímka kolmá na $\mathbf{E}_{m-1}$ a je-li φ úhel přímek p, k, dokážeme, že

$$(52.11) \qquad \sin\alpha = \cos\varphi.$$

To je zřejmé pro případ, že přímka p je kolmá na $\mathbf{E}_{m-1}$, neboť potom úhel α je pravý, t. j. $\sin\alpha = 1$, úhel φ je nulový, t. j. $\cos\varphi = 1$. Není-li přímka p kolmá na $\mathbf{E}_{m-1}$, je podle předcházejícího $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \neq \mathbf{o}$. Směr $\{\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1\}$ je kolmý na $\mathbf{E}_{m-1}$, t. j. je to směr přímky k, takže

$$\cos\varphi = \frac{(B - A)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)}{\overline{AB} \,.\, |\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1|}.$$

Podle (52.3) a (52.5) je však

$$(B - A)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) = |\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1|^2,$$

tedy

$$(52.12) \qquad |\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1| = \cos\varphi \,.\, \overline{AB}.$$

Ježto $A \neq B$, plyne z (52.7), (52.8) a (52.12), že $\cos^2\alpha + \cos^2\varphi = 1$, takže podle (50.8) je $\sin^2\alpha = \cos^2\varphi$ a ježto $\sin\alpha \geqq 0$ podle (50.7), $\cos\varphi \geqq 0$ podle (52.9), dostáváme (52.11).

Je-li v $\mathbf{E}_m$ zvolena kartézská soustava souřadnic a je-li

$$a_1x_1 + \bullet + a_0 = 0$$

rovnice nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$, potom pro $\mathbf{a} = (a_1, \bullet)$ jest $\{\mathbf{a}\}$ směr kolmý na $\mathbf{E}_{m-1}$. Je-li tudíž $\{\mathbf{b}\}$ směr přímky p, potom pro úhel α přímky p s nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$ máme podle (52.11) vzorec

$$(52.13) \qquad \sin\alpha = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}|}.$$

53. ÚHLY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU. Budiž dán obyčejný prostor $\mathbf{E}_3$. Za předpokladu, že $\mathbf{E}_3$ je orientován, zavedli jsme v článku 35 vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dvou vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Pro velikost vektorového součinu máme podle (35.11)

$$(53.1) \qquad |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 \,.\, |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{uv})^2.$$

Je-li jeden z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ roven $\mathbf{o}$, je $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ v souhlase s II. na str. 98. Je-li však $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, budiž φ úhel orientovaných směrů $\{\mathbf{u}\}^+$, $\{\mathbf{v}\}^+$, takže

$$|\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}| = \cos\varphi \,.\, \mathbf{uv}.$$

Podle (50.7), (50.8) a (53.1) jest

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sin\varphi \,.\, |\boldsymbol{u}| \,.\, |\boldsymbol{v}|. \tag{53.2}$$

Poznámka. Vzorcům (53.1) a (53.2) platným v $\boldsymbol{E}_3$ odpovídají v $\boldsymbol{E}_2$ (podle IV na str. 98) vzorce

$$[\boldsymbol{uv}]^2 = |\boldsymbol{u}|^2 \,.\, |\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{uv})^2, \tag{53.1'}$$

$$[\boldsymbol{uv}] = \pm \sin\varphi \,.\, |\boldsymbol{u}| \,.\, |\boldsymbol{v}|. \tag{53.2'}$$

Poznamenejme, že při změně orientace prostoru jak φ tak i $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ zůstane beze změny.

Je-li v $\boldsymbol{E}_3$ dána přímka p se směrem $\{\boldsymbol{w}\}$ a rovina ϱ se zaměřením $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, potom podle věty 35.9 je $\{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\}$ směr kolmý na ϱ, takže podle (35.9) a (52.11) máme pro úhel ψ přímky p a rovinou ϱ

$$\sin\psi = \frac{[\boldsymbol{uvw}]}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \,.\, |\boldsymbol{w}|}. \tag{53.3}$$

Vedle úhlu dvou přímek a úhlu přímky s rovinou máme v prostoru $\boldsymbol{E}_3$ ještě *úhel dvou rovin,* který nyní budeme definovat. Obdobně by se dal definovat obecně úhel dvou nadrovin v prostoru $\boldsymbol{E}_m$.

Buďtež dány dvě roviny ϱ, σ v prostoru $\boldsymbol{E}_3$. *Úhlem rovin* ϱ, σ rozumíme úhel přímek k_1, k_2, při čemž je k_1 kolmá na ϱ, k_2 kolmá na σ. Z definice plyne, že úhel dvou rovin je závislý pouze na jejich zaměřeních. Jinak řečeno, jsou-li roviny ϱ, ϱ' rovnoběžné, jsou-li také roviny σ, σ' rovnoběžné, potom úhel rovin ϱ, σ je roven úhlu rovin ϱ', σ'.

Jestliže při zvolené kartézské soustavě souřadnic je

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0 \tag{53.4}$$

rovnice roviny ϱ,

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0 \tag{53.5}$$

rovnice roviny σ, potom pro úhel ψ obou rovin platí

$$\cos\psi = \frac{|\boldsymbol{ab}|}{|\boldsymbol{a}| \,.\, |\boldsymbol{b}|}, \tag{53.6}$$

při čemž $\boldsymbol{a} = (a_1, \bullet)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \bullet)$.

Je-li $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1\}$ zaměření roviny ϱ, $\{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2\}$ zaměření roviny σ, platí (53.6) pro $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}_2$, takže podle (35.11) jest

$$(53.7) \qquad \cos\psi = \frac{|\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \,.\, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1\mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1\mathbf{u}_2|}{|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1| \,.\, |\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}_2|}.$$

Dosud jsme mluvili pouze o úhlu ψ dvou *neorientovaných* rovin, pro který podle článku 52 platí vždy $\cos\psi \geqq 0$. Nyní přejdeme k definici *úhlu dvou orientovaných rovin*. Předpokládejme nejprve, že nejen roviny ϱ, σ, nýbrž i prostor $\mathbf{E}_3$ jest orientován. Je-li $\{\mathbf{a}\}$ směr kolmý na ϱ, potom o orientovaném směru $\{\mathbf{a}\}^+$ pravíme, že je *kladně kolmý na orientovanou rovinu* ϱ, jestliže pro bod P roviny ϱ a pro $t > 0$ platí, že body $P + t\mathbf{a}$ leží v kladném poloprostoru vyťatém orientovanou rovinou ϱ ve smyslu článku 30, při čemž zřejmě nezáleží na poloze bodu P v rovině ϱ. Je-li ještě orientovaný směr $\{\mathbf{b}\}^+$ kladně kolmý na orientovanou rovinu σ, potom úhel φ orientovaných rovin ϱ, σ definujeme jako úhel orientovaných směrů $\{\mathbf{a}\}^+$, $\{\mathbf{b}\}^+$, takže

$$(53.6') \qquad \cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}|}.$$

Jestliže při zvolené kartézské soustavě souřadnic jsou (53.4), (53.5) rovnice rovin ϱ, σ, při čemž

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 \geqq 0$$

v kladném poloprostoru vyťatém orientovanou rovinou ϱ,

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 \geqq 0$$

v kladném poloprostoru vyťatém orientovanou rovinou σ, platí (53.6′) pro $\mathbf{a} = (a_1, \bullet)$, $\mathbf{b} = (b_1, \bullet)$. Je-li $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ kladná base orientované roviny ϱ, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ kladná base orientované roviny σ, potom (viz III na str. 98)

$$(53.7') \qquad \cos\varphi = \frac{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \,.\, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1\mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2| \,.\, |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

Srovnáme-li (53.6) a (53.6′) nebo (53.7) a (53.7′), vidíme, že mezi úhlem ψ neorientovaných rovin ϱ, σ a úhlem φ týchž orientovaných rovin platí vztah

$$(53.8) \qquad \cos\psi = |\cos\varphi|.$$

Při změně orientace jedné z obou rovin ϱ, σ úhel φ přejde v úhel výplňkový, při současné změně orientace obou rovin ϱ, σ se úhel φ nemění. Rovněž tak φ se nemění při změně orientace prostoru $\boldsymbol{E}_3$. Úhel ψ dvou neorientovaných rovin ϱ, σ nemůže býti ani tupý ani přímý; úhel ψ je pravý tehdy a jenom tehdy, jsou-li roviny ϱ, σ navzájem kolmé; ψ je nulový tehdy a jenom tehdy, jsou-li ϱ, σ navzájem rovnoběžné. Úhel φ dvou navzájem rovnoběžných orientovaných rovin ϱ, σ je nulový při souhlasné rovnoběžnosti, přímý při nesouhlasné rovnoběžnosti.

S pojmem úhlu dvou orientovaných rovin těsně souvisí pojem *úhlu dvou polorovin*. Omezme se na nejdůležitější a v elementárním vyučování jedině uvažovaný případ dvou polorovin ϱ_0, σ_0, kde ϱ_0 leží v rovině ϱ, σ_0 v rovině σ a obě poloroviny jsou vyťaty touž přímkou p. Předpokládejme nejprve, že přímka p jest orientována. Potom lze právě jedním způsobem orientovat rovinu ϱ tak, aby ϱ_0 byla *kladná* polorovina vyťatá v ϱ přímkou p; podobně lze právě jedním způsobem orientovat rovinu σ tak, aby σ_0 byla kladná polorovina vyťatá v σ přímkou p. Za těchto předpokladů definujeme úhel φ polorovin ϱ_0, σ_0 jako úhel orientovaných rovin ϱ, σ. Změníme-li orientaci přímky p, změní se současně orientace obou rovin ϱ, σ a úhel φ zůstane tudíž beze změny. Snadno se dokáže, že za učiněných předpokladů úhel φ je nulový tehdy a jenom tehdy, jestliže poloroviny ϱ_0, σ_0 splynou; úhel φ je přímý tehdy a jenom tehdy, jestliže poloroviny ϱ_0, σ_0 jsou navzájem opačné (což vyžaduje splynutí rovin ϱ, σ); úhel φ je pravý tehdy a jenom tehdy, jestliže roviny ϱ, σ jsou navzájem kolmé.

Zvolme libovolně bod P na přímce p a budiž q_1 polopřímka s počátkem P obsažená v polorovině ϱ_0 a kolmá na p (což znamená ovšem, že přímka, jejíž částí je polopřímka q_1, je kolmá na p); podobně budiž q_2 polopřímka s počátkem P obsažená v polorovině σ_0 a kolmá na p. Za těchto předpokladů dokážeme, že úhel φ polorovin ϱ_0, σ_0 je roven úhlu polopřímek q_1, q_2. Při důkaze můžeme předpokládat, že byla zvolena určitá orientace jednak pro přímku p, jednak pro prostor $\boldsymbol{E}_3$. Budiž $\boldsymbol{u}$ jednotkový vektor na přímce p, kladný při dané orientaci přímky p; budiž $\boldsymbol{v}_1$ takový jednotkový vektor, že polopřímka q_1 je množina všech bodů

$$P + t\boldsymbol{v}_1,\ t \geqq 0;$$

podobně budiž $\boldsymbol{v}_2$ takový jednotkový vektor, že polopřímka q_2 je množina všech bodů

$$P + t\mathbf{v}_2, \ t \geqq 0.$$

Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$ jsou orthonormální a stejně i vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_2$. Tudíž existují jednotkové vektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ tak, že $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_1$, jakož i $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2$ jsou kladné orthonormální base pro $\mathbf{E}_3$. Podle definice je φ úhel orientovaných směrů $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, t. j. $\cos\varphi = \mathbf{w}_1 . \mathbf{w}_2$; máme dokázati, že φ je úhel orientovaných směrů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, t. j. že $\cos\varphi = \mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2$.

To znamená, že je třeba pouze dokázati, že $\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 . \mathbf{w}_2$. Dvojsměr $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1\}$, jakož i dvojsměr $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2\}$, jsou kolmé na směr $\{\mathbf{u}\}$ a tudíž $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1\} = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2\}$, takže existují čísla c, s, c', s' tak, že

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= c\mathbf{v}_1 + s\mathbf{w}_1, \\ \mathbf{w}_2 &= c'\mathbf{v}_1 + s'\mathbf{w}_1. \end{aligned}$$

Ježto vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_1$ jsou orthonormální a ježto totéž platí o vektorech $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2$, jest

$$c^2 + s^2 = 1, \ c'^2 + s'^2 = 1, \ cc' + ss' = 1. \tag{53.9}$$

Ježto $(c, s) \neq (0, 0)$, plyne z poslední rovnice (53.9), že existuje číslo λ tak, že $c' = -\lambda s$, $s' = \lambda c$; podle druhé rovnice (53.9) je však $\lambda = \pm 1$.

Mimo to je

$$[\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1\mathbf{w}_1] > 0, \ [\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2\mathbf{w}_2] > 0;$$

z toho plyne, že $\lambda > 0$, takže $\lambda = 1$, tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= c\mathbf{v}_1 + s\mathbf{w}_1, \\ \mathbf{w}_2 &= -s\mathbf{v}_1 + c\mathbf{w}_1. \end{aligned}$$

Ježto vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_1$ jsou orthonormální, jest $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = c$, $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 = c$, tedy $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2$, což jsme měli dokázati.

54. TROJÚHELNÍK. Slovem *trojúhelník* rozumíme v této kapitole trojici bodů A, B, C, při čemž se předpokládá, že A, B, C neleží všecky tři na téže přímce, z čehož plyne, že body A, B, C jsou navzájem různé. Body A, B, C nazveme *vrcholy trojúhelníka*: trojúhelník sám označíme $\triangle ABC$. Na pořádku vrcholů při tom nezáleží. Všecky tři body A, B, C leží v jednoznačně určené rovině, totiž v rovině $\mathbf{E}_2 = \{A; B - A, C - A\}$.

Čísla

$$a = \overline{BC}, \ b = \overline{AC}, \ c = \overline{AB} \tag{54.1}$$

nazveme *stranami* $\triangle ABC$. Mimo to se v následujícím vyskytnou tři úhly α, β, γ:

α je úhel polopřímek AB; AC;
β je úhel polopřímek BA, BC;
γ je úhel polopřímek CA, CB.

Pravíme, že α, β, γ jsou *úhly* $\triangle ABC$.

Jest

$$a = |C - B|, \; b = |C - A|, \; c = |B - A|.$$

Podle definice kosinu jest

$$(B - A)(C - A) = bc \,.\, \cos\alpha; \tag{54.2}$$

podle (7.7′) je však

$$2(B - A)(C - A) = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2,$$

takže podle (54.1) jest

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha, \tag{54.3}$$

což je t. zv. *kosinová věta.* Zřejmě je ve vzorci (54.3), a stejně i v následujících vzorcích tohoto článku, dovolena libovolná permutace vrcholů A, B, C, tedy libovolná permutace symbolů a, b, c spolu se současnou příslušnou permutací symbolů α, β, γ.

Současně s (54.2) platí na př.

$$(C - B)(A - B) = ac \,.\, \cos\beta$$

neboli

$$(B - C)(B - A) = ac \,.\, \cos\beta. \tag{54.2′}$$

Avšak

$$B - A = (B - C) + (C - A),$$

takže

$$c^2 = (B - A)(B - A) = (B - A)(B - C) + (B - A)(C - A)$$

a podle (54.2) a (54.2′) jest

$$c^2 = ac \;\cos\beta + bc \;\cos\alpha$$

neboli

$$c = a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha, \tag{54.3}$$

což je t. zv. *věta o průmětu.*

Podle (53.2′) je

$$[A - B, B - C] = \pm\, ac \,.\, \sin\beta,$$
$$[A - B, A - C] = \pm\, bc \,.\, \sin\alpha,$$

avšak

$$A - C = (A - B) + (B - C),$$

takže

$$[A - B, B - C] = [A - B, A - C],$$

tedy

$$a \sin\beta = b \sin\alpha, \tag{54.4}$$

což je t. zv. *sinová věta.*

55. TROJHRAN. Slovem *trojhran* rozumíme v této kapitole trojici polopřímek VA_1, VA_2, VA_3 s týmž počátkem V, při čemž se předpokládá, že dané polopřímky neleží všecky tři v této rovině a jsou tudíž navzájem různé. Bod V nazveme *vrchol trojhranu*, polopřímky VA_1, VA_2, VA_3 *hrany trojhranu*; na pořadí hran nezáleží. Celý trojhran leží v jednoznačně určeném $\mathbf{E}_3 = \{V; A_1 - V, A_2 - V, A_3 - V\}$; nazveme jej trojhran $VA_1A_2A_3$.

Označme: α_1 úhel polopřímek VA_2, VA_3; α_2 úhel polopřímek VA_1, VA_3; α_3 úhel polopřímek VA_1, VA_2; úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nazveme *hranové úhly trojhranu.* Pro $1 \leqq r \leqq 3$, $1 \leqq s \leqq 3$, $r \neq s$ označme ϱ_{rs} tu polorovinu vyťatou v rovině $\{V; A_r - V, A_s - V\}$ přímkou VA_r, ve které leží bod A_s. Označme: σ_1 úhel polorovin $\varrho_{12}, \varrho_{13}$; σ_2 úhel polorovin $\varrho_{21}, \varrho_{23}$; σ_3 úhel polorovin $\varrho_{31}, \varrho_{32}$; úhly $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nazveme *stěnové úhly trojhranu.*

Je-li dán trojhran $VA_1A_2A_3$, potom existují a jsou jednoznačně určeny vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$, pro které

$$|\boldsymbol{u}_1| = 1, \ |\boldsymbol{u}_2| = 1, \ |\boldsymbol{u}_3| = 1, \tag{55.1}$$
$$A_1 = V + x_1\boldsymbol{u}_1, \ A_2 = V + x_2\boldsymbol{u}_2, \ A_3 = V + x_3\boldsymbol{u}_3$$

s kladnými x_1, x_2, x_3. Obráceně je trojhran jednoznačně určen, známe-li jeho vrchol V a vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ splňující (55.1), které musí ovšem býti lineárně nezávislé, ale jinak jsou libovolné; takto určený trojhran můžeme označit $V\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3$. Pro hranové úhly platí zřejmě

$$\cos\alpha_1 = \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3, \ \cos\alpha_2 = \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1, \ \cos\alpha_3 = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2. \tag{55.2}$$

Je vhodné orientovati prostor $\boldsymbol{E}_3$ tak, aby bylo

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3] > 0, \tag{55.3}$$

takže podle věty 34.2 je také

$$[\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1] > 0, \ [\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2] > 0. \tag{55.3'}$$

Všimněme si nyní vektorových součinů $\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$. Jejich velikosti jsou podle (55.1) a (53.2) $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_3$. Můžeme tedy zavésti nové vektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ tak, že

$$|\boldsymbol{v}_1| = 1, \ |\boldsymbol{v}_2| = 1, \ |\boldsymbol{v}_3| = 1, \tag{55.4}$$

$$\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \sin\alpha_1 \,.\, \boldsymbol{v}_1, \ \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = \sin\alpha_2 \,.\, \boldsymbol{v}_2, \ \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \sin\alpha_3 \,.\, \boldsymbol{v}_3. \tag{55.5}$$

Podle definice vektorového součinu je na př.

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{x}] = (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \,.\, \boldsymbol{x}$$

neboli

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{x}] = \sin\alpha_3 \,.\, \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{x} \tag{55.6}$$

pro každý vektor $\boldsymbol{x}$, tedy především $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_3 = 0$, $\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_3 = 0$ a podle (55.3), ježto $\sin\alpha_3 > 0$, $\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3 > 0$. Celkem je

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1 > 0, \ \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_1 = 0, \ \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_1 = 0, \\ &\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_2 = 0, \ \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2 > 0, \ \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_2 = 0, \\ &\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_3 = 0, \ \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_3 = 0, \ \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3 > 0. \end{aligned} \tag{55.7}$$

Vektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ jsou jednoznačně určeny podmínkami (55.4) a (55.7). Všimněme si na př. vektoru $\boldsymbol{v}_3$! Ježto $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_3 = 0$, $\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_3 = 0$, je směr $\{\boldsymbol{v}_3\}$ kolmý na zaměření $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, čímž je již směr $\{\boldsymbol{v}_3\}$ jednoznačně určen. Kdyby nebylo další podmínky, mohli bychom místo vektoru $\boldsymbol{v}_3$ vzíti každý vektor tvaru $\lambda \,.\, \boldsymbol{v}_3$. Podmínka $|\boldsymbol{v}_3| = 1$ však omezuje λ na hodnoty ± 1 a podmínka $\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3 > 0$ vylučuje hodnotu $\lambda = -1$, takže vektor $\boldsymbol{v}_3$ je skutečně určen jednoznačně. Geometricky můžeme vektor $\boldsymbol{v}_3$ popsati takto. Především je směr $\{\boldsymbol{v}_3\}$ kolmý na zaměření $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ a jest $|\boldsymbol{v}_3| = 1$; tím je vektor $\boldsymbol{v}_3$ prozatím určen pouze až na znamení. Ježto však vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ jsou lineárně nezávislé, jest

$$\boldsymbol{v}_3 = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3,$$

tedy

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_3] = a_3[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3].$$

Ježto však $\sin\alpha_3 > 0$, plyne z (55.6), že $[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_3] > 0$, takže podle (55.3) je $a_3 > 0$, čímž je zřejmě také znamení vektoru $\mathbf{v}_3$ jednoznačně určeno.

Dokázali jsme prvou z nerovností

$$[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_3] > 0,\ [\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{v}_1] > 0,\ [\mathbf{u}_3\mathbf{u}_1\mathbf{v}_2] > 0 \tag{55.8}$$

a stejně se dokáží ostatní dvě. Orientujeme-li rovinu $\mathbf{E}_2' = \{V; A_1 - V, A_2 - V\}$ tak, aby $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ byla její kladná base a rovinu $\mathbf{E}_2'' = \{V; A_1 - V, A_3 - V\}$, tak, aby $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3$ byla její kladná base, potom úhel σ_1 polorovin $\varrho_{12}, \varrho_{13}$ je podle článku 53 roven úhlu orientovaných rovin $\mathbf{E}_2', \mathbf{E}_2''$, který podle téhož článku a podle (55.8) je roven úhlu orientovaných směrů $\{\mathbf{v}_3\}^+, \{-\mathbf{v}_2\}^+$, takže podle (55.4) a (50.3′) platí první ze vzorců

$$\cos\sigma_1 = -\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3,\ \cos\sigma_2 = -\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1,\ \cos\sigma_3 = -\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \tag{55.9}$$

a stejně se dokáží ostatní dva. Všimněme si, že ze vztahů (55.7) plyne podle věty 34.6, že součin $[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3] \, . \, [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3]$ je kladný, takže podle (55.3)

$$[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3] > 0. \tag{55.10}$$

Je-li

$$B_1 = V + y_1\mathbf{v}_1,\ B_2 = V + y_2\mathbf{v}_2,\ B_3 = V + y_3\mathbf{v}_3,$$

kde y_1, y_2, y_3 jsou kladná čísla, potom $VB_1B_2B_3$ neboli $V\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ je nový trojhran, který se nazývá *polárním trojhranem* původního trojhranu $VA_1A_2A_3$ neboli $V\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3$. Vztahy (55.1), (55.4) a (55.7) se nezmění, vyměníme-li písmeno $\mathbf{u}$ s písmenem $\mathbf{v}$. Z toho plyne, že k trojhranu $VB_1B_2B_3$ polárním trojhranem je původní trojhran $VA_1A_2A_3$. Na základě rovnic (55.2) a (55.9) soudíme, že *hranové úhly polárního trojhranu jsou výplňkové ke stěnovým úhlům původního trojhranu, stěnové úhly polárního trojhranu jsou výplňkové ke hranovým úhlům původního trojhranu.* Znamená-li čárka výplňkové úhly, jsou tedy $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ hranové úhly trojhranu $VB_1B_2B_3$, $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ stěnové úhly téhož trojhranu. Máme-li tedy nějaký vztah platný mezi hranovými úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a stěnovými úhly $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, musí platit také vztah, který vznikne z původního vztahu záměnou

$$(55.11) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

za

$$(55.11') \qquad \sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'.$$

Vzorcům (55.5) platným pro trojhran $VA_1A_2A_3$ odpovídají u polárního trojhranu $VB_1B_2B_3$ vzorce

$$(55.12) \qquad \begin{gathered} \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3 = \sin\sigma_1 \,.\, \boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{v}_3 \times \boldsymbol{v}_1 = \sin\sigma_2 \,.\, \boldsymbol{u}_2, \\ \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \sin\sigma_3 \,.\, \boldsymbol{u}_3. \end{gathered}$$

Podle definice vektorového součinu je na př. $[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3] = (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \,.\, \boldsymbol{u}_3$. Ježto však

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3] = [\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1] = [\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2],$$

plyne ze (55.5), že

$$(55.13) \qquad \sin\alpha_1 \,.\, \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1 = \sin\alpha_2 \,.\, \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2 = \sin\alpha_3 \,.\, \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3 = [\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3].$$

Podobně plyne z (55.12), že

$$(55.14) \qquad \sin\sigma_1 \,.\, \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1 = \sin\sigma_2 \,.\, \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2 = \sin\sigma_3 \,.\, \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3 = [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3].$$

Z (55.13) a (55.14) plyne [viz též (55.3) a (55.10)], že

$$(55.15) \qquad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\sigma_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\sigma_2} = \frac{\sin\alpha_3}{\sin\sigma_3},$$

což je t. zv. *sinová věta.*

Podle (35.11) jest

$$(55.16) \qquad (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \,.\, (\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3, & \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3, & \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_1 \end{vmatrix}.$$

Levá strana v (55.16) je podle (55.5) rovná $\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \,.\, \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$, tedy rovna $-\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\sigma_1$ podle (55.9); pravá strana v (55.16) je podle (55.1) a (55.2) rovna $\cos\alpha_2 \cos\alpha_3 - \cos\alpha_1$. Tedy platí vzorec

$$(55.17) \qquad \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\sigma_1,$$

což je t. zv. *první kosinová věta.* Záměnou (55.11) za (55.11′) dostaneme t. zv. *druhou kosinovou větu*

$$(55.18) \qquad \cos\sigma_1 = -\cos\sigma_2 \cos\sigma_3 + \sin\sigma_2 \sin\sigma_3 \cos\alpha_1.$$

Ve vzorcích (55.17) a (55.18) můžeme ovšem libovolně permutovat indexy 1, 2, 3.