III

PROSTORY VNOŘENÉ DO $\mathbf{E}_m$

18. LINEÁRNÍ PODPROSTORY EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Pravíme, že eukleidovský prostor $\mathbf{E}_k$ je *vnořen* do eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ nebo také, že $\mathbf{E}_k$ je *lineární podprostor* prostoru $\mathbf{E}_m$, jestliže každý bod prostoru $\mathbf{E}_k$ je zároveň bodem prostoru $\mathbf{E}_m$ a jestliže mimo to libovolné dva body prostoru $\mathbf{E}_k$ mají v tomto prostoru touž vzdálenost, jakou mají v prostoru $\mathbf{E}_m$. Vzhledem k této podmínce můžeme při daných bodech A, B prostoru $\mathbf{E}_k$ označit $\overline{AB}$ jejich vzdálenost: nezáleží na tom, míníme-li vzdálenost v $\mathbf{E}_k$ či vzdálenost v $\mathbf{E}_m$.

VĚTA 18.1. *Jsou-li A, B dva body prostoru $\mathbf{E}_k$ vnořeného do $\mathbf{E}_m$, potom střed C dvojice A, B v prostoru $\mathbf{E}_k$ je zároveň středem téže dvojice v prostoru $\mathbf{E}_m$.* To plyne z geometrické definice (4.3) středu C.

VĚTA 18.2. *Jsou-li*

$$A, B;\ A', B' \tag{18.1}$$

dvě dvojice bodů prostoru $\mathbf{E}_k$ vnořeného do $\mathbf{E}_m$, potom obě dvojice (18.1) *určují týž vektor prostoru $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, určují-li týž vektor prostoru $\mathbf{E}_m$.* Neboť v obou případech jest podmínkou, aby obě dvojice (5.6) měly týž střed, a to má podle věty 18.1 týž význam pro $\mathbf{E}_k$ jako pro $\mathbf{E}_m$.

Z věty 18.1 učiníme důležité důsledky. Plyne z ní, že zvolíme-li v $\mathbf{E}_k$ libovolně vektor $\mathbf{u}$, existuje v prostoru $\mathbf{E}_m$ jednoznačně určený vektor $f(\mathbf{u})$ tak, že každé umístění vektoru $\mathbf{u}$ v prostoru $\mathbf{E}_k$ je zároveň umístěním vektoru $f(\mathbf{u})$ v prostoru $\mathbf{E}_m$.

Učiníme proto velmi užitečnou dohodu, že budeme psáti prostě $\mathbf{u}$ místo $f(\mathbf{u})$, t. j. *každý vektor $\mathbf{u}$ vnořeného prostoru $\mathbf{E}_k$ považujeme zároveň za vektor prostoru $\mathbf{E}_m$.* Obráceně ovšem není pravda (ačli prostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}_m$ nesplynou), že by bylo možné každý vektor prostoru $\mathbf{E}_m$ považovat za vektor prostoru $\mathbf{E}_k$. O vektoru prostoru $\mathbf{E}_m$, který lze považovat za vektor prostoru $\mathbf{E}_k$, pravíme, že *leží v* $\mathbf{E}_k$. Jestliže u vektoru $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ známe jedno umístění, při kterém i počáteční i koncový bod leží v $\mathbf{E}_k$, už můžeme tvrdit, že $\mathbf{u}$ leží v $\mathbf{E}_k$; při každém takovém umístění vektoru $\mathbf{u}$ (ležícího v $\mathbf{E}_k$) v prostoru $\mathbf{E}_m$, při kterém počáteční bod leží v $\mathbf{E}_k$, musí také koncový bod ležet v $\mathbf{E}_k$. Vedle takových *umístění v prostoru* $\mathbf{E}_k$ má ovšem vektor $\mathbf{u}$ (opět ačli $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}_m$ nesplynou), v prostoru $\mathbf{E}_m$ ještě další umístění, při kterých ani počáteční ani koncový bod neleží v $\mathbf{E}_k$.

Z geometrických definic článku 6 plyne nyní, že nulový vektor prostoru $\mathbf{E}_k$ je zároveň nulovým vektorem prostoru $\mathbf{E}_m$, dále, že pro každý v $\mathbf{E}_k$ ležící vektor $\mathbf{u}$ má pojem opačného vektoru $-\mathbf{u}$ týž význam v prostoru $\mathbf{E}_k$ jako v prostoru $\mathbf{E}_m$ a že totéž platí o velikosti $|\mathbf{u}|$, posléze, že jestliže oba vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ leží v $\mathbf{E}_k$, má součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ týž význam v $\mathbf{E}_k$ jako v $\mathbf{E}_m$. Ze (7.7′) plyne nyní, že jestliže oba vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ leží v $\mathbf{E}_k$, má skalární součin $\mathbf{uv}$ týž význam v prostoru $\mathbf{E}_k$ jako v prostoru $\mathbf{E}_m$. Posléze z geometrické definice součinu $a\mathbf{u}$ vyslovené ke konci článku 8 vyplývá, že leží-li $\mathbf{u}$ v $\mathbf{E}_k$, potom pro každé reálné číslo a má součin $a\mathbf{u}$ týž význam v $\mathbf{E}_k$ jako v $\mathbf{E}_m$. V těchto výsledcích je zahrnuto:

VĚTA 18.3. *Je-li $\mathbf{E}_k$ vnořen do $\mathbf{E}_m$, potom zaměření $\mathbf{V}_k$ prostoru $\mathbf{E}_k$ je lineární soustava obsažená v zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$.*

VĚTA 18.4. *Je-li $\mathbf{E}_k$ vnořen do $\mathbf{E}_m$, jest $k \leqq m$, při čemž rovnost nastane pouze pro $\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_m$.*

DŮKAZ. Z věty 13.2 plyne, že $k \leqq m$. Je-li $k = m$, plyne z téže věty, že každý vektor prostoru $\mathbf{E}_m$ leží v $\mathbf{E}_k$. Zvolme nyní určitý bod A prostoru $\mathbf{E}_k$. Je-li X libovolný bod prostoru $\mathbf{E}_m$, musí vektor $X - A$ (jako každý vektor) ležet v $\mathbf{E}_k$ a protože počáteční bod A je v $\mathbf{E}_k$, je také koncový bod X v $\mathbf{E}_k$.

Množina všech vektorů prostoru $\mathbf{E}_m$ tvoří vektorový prostor dimense m, který jsme v článku 16 označili $\mathbf{V}_m$ a nazvali zaměřením prostoru $\mathbf{E}_m$. Pro $1 \leqq k \leqq m$ jsou ve $\mathbf{V}_m$ obsaženy lineární soustavy dimense k; každou takovou lineární soustavu nazveme *k-směrem* prostoru $\mathbf{E}_m$; speciálně celé $\mathbf{V}_m$ je m-směr a je to jediný m-směr obsažený ve $\mathbf{V}_m$. Pro $1 \leqq k \leqq m - 1$ existuje ve $\mathbf{V}_m$ nekonečně mnoho k-směrů. Pro $k = 1$ mluvíme jednoduše o *směru* místo o jednosměru.

Je-li $\mathbf{E}_k$ vnořen do $\mathbf{E}_m$, potom podle věty 18.3 zaměření $\mathbf{V}_k$ prostoru $\mathbf{E}_k$ je určitý k-směr obsažený ve $\mathbf{V}_m$. *Lineární podprostor* $\mathbf{E}_k$ *daného* $\mathbf{E}_m$ *je jednoznačně určen, známe-li jeho zaměření* $\mathbf{V}_k$ *a jeden jeho bod* A. Neboť $\mathbf{E}_k$ se skládá ze všech bodů tvaru $A + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je libovolný vektor náležející do $\mathbf{V}_k$. Z tohoto důvodu budeme psáti

$$\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{V}_k\}. \tag{18.2}$$

Je-li

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{18.3}$$

libovolná base lineární soustavy $\mathbf{V}_k$, skládá se $\mathbf{E}_k$ ze všech bodů tvaru

$$X = A + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k \tag{18.4}$$

a proto místo (18.2) můžeme psáti

$$\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}. \tag{18.5}$$

Zaměření $\mathbf{V}_k$ prostoru $\mathbf{E}_k$ vnořeného do $\mathbf{E}_m$ je k-směr obsažený ve $\mathbf{V}_m$. Obráceně platí:

VĚTA 18.5. *Je-li A libovolný bod prostoru $\mathbf{E}_m$ a je-li $\mathbf{V}_k$ libovolný k-směr prostoru $\mathbf{E}_m$, potom* (18.2) *je lineární podprostor dimense k.*

DŮKAZ. Podle věty 15.2 existuje orthonormální base (18.3) lineární soustavy $\mathbf{V}_k$. Je-li vedle bodu (18.4) dán bod

$$Y = A + y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_k\mathbf{u}_k,$$

plyne z orthonormality base (18.3), že

$$\overline{XY} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_k - x_k)^2},$$

takže $\mathbf{E}_k$ je eukleidovský prostor dimense k, ve kterém

$$\langle A; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$$

je kartézská soustava souřadnic.

Buďtež

$$A_0, A_1, \ldots, A_k \tag{18.6}$$

libovolně dané body prostoru $\mathbf{E}_m$, z nichž aspoň dva jsou navzájem různé, takže aspoň jeden z vektorů

$$A_1 - A_0, \ldots, A_k - A_0 \tag{18.7}$$

je nenulový. Vektory (18.7) vytvářejí lineární soustavu $\mathbf{V}_h$, jejíž dimense h je $\leqq k$. Při tom je $k = h$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory (18.7) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Lineární podprostor $\{A_0; \mathbf{V}_h\}$ obsahuje všecky body (18.6). Obráceně, jsou-li všechny body (18.6) obsaženy v lineárním podprostoru $\mathbf{W}_l$ dimense l, potom všecky vektory (18.7) leží ve $\mathbf{W}_l$, takže lineární soustava $\mathbf{V}_h$ je částí lineární soustavy $\mathbf{W}_l$ a tudíž podle věty 13.2 je $h \leqq l$, při čemž $h = l$ pouze tehdy, jestliže $\mathbf{W}_l$ splyne s $\mathbf{V}_h$. Tedy lineární podprostor $\{A_0; \mathbf{V}_h\}$ dimense h obsahuje všecky body (18.6) a je to jediný lineární podprostor dimense h obsahující všecky body (18.6); pravíme, že body (18.6) *určují* podprostor $\{A_0; \mathbf{V}_h\}$. Je-li $\mathbf{E}_l$ libovolný lineární podprostor, potom $\mathbf{E}_l$ obsahuje všecky body (18.6) tehdy a jenom tehdy, jestliže $\mathbf{E}_l$ obsahuje jako část celý prostor $\{A_0; \mathbf{V}_h\}$. Pravíme, že body (18.6) jsou *mezi sebou lineárně závislé* nebo *nezávislé* podle toho, co platí o vektorech (18.7). Tento pojem je nezávislý na pořadí bodů (18.6), neboť podle předcházejícího body (18.6) jsou mezi sebou lineárně nezávislé tehdy a jenom tehdy, jestliže dimense jimi určeného lineárního podprostoru je rovna k. Dva různé body A, B jsou podle (11.5) vždy mezi sebou lineárně nezávislé. Proto dvěma různými body A, B vždy prochází právě jedna přímka, totiž přímka $\{A; B - A\}$, kterou nazýváme stručně přímka AB.

19. ROVNOBĚŽNOST LINEÁRNÍCH PODPROSTORŮ. Buďtež $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ dvà lineární podprostory téže dimense k základního $\mathbf{E}_m$.*) Mají-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ totéž zaměření, pravíme, že $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ jsou mezi sebou *rovnoběžné*. Z definice plynou snadno tyto jednoduché důsledky:

(19.1). Každý $\mathbf{E}_k$ je sám k sobě rovnoběžný.

(19.2). Jeli $\mathbf{E}_k$ rovnoběžný s $\mathbf{E}'_k$ a zároveň $\mathbf{E}'_k$ rovnoběžný s $\mathbf{E}''_k$, je také $\mathbf{E}_k$ rovnoběžný s $\mathbf{E}''_k$.

(19.3). Dva rovnoběžné lineární podprostory téže dimense buďto splynou nebo nemají žádný společný bod.

(19.4). Je-li dán lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ a bod B, potom bodem B prochází právě jeden lineární podprostor téže dimense k rovnoběžný s $\mathbf{E}_k$.

---

*) Podle věty 18.4 nemá $\mathbf{E}_1$ jiného lineárního podprostoru než sama sebe. Proto předpokládáme, že $m \geqq 2$.

Podle definice dva lineární podprostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ téže dimense k jsou mezi sebou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, jestliže jejich zaměření $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}'_k$ splynou. Víme-li však o zaměřeních $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}'_k$ pouze tolik, že na př. $\mathbf{V}'_k$ je částí $\mathbf{V}_k$, už můžeme soudit, že $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ jsou mezi sebou rovnoběžné. Neboť ježto lineární soustava $\mathbf{V}'_k$ dimense k je částí lineární soustavy $\mathbf{V}_k$ téže dimense k, je $\mathbf{V}'_k = \mathbf{V}_k$ podle věty 13.2. To nás vede k následující definici: Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ dva lineární podprostory různých dimensí, při čemž třeba $h < k$, nazýváme je *rovnoběžné,* jestliže zaměření prostoru $\mathbf{E}_h$ je částí zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$. Z definice je patrné:

(19.5). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné, jsou-li také $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}_l$ rovnoběžné a je-li $h < k < l$, jsou též $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_l$ rovnoběžné.

(19.6). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné, jsou-li dále $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}'_h$ rovnoběžné, jsou-li posléze $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ rovnoběžné, jsou také $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}'_k$ rovnoběžné.

(19.7). Je-li $\mathbf{E}_h$ částí $\mathbf{E}_k$, jsou $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné.

(19.8). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné a je-li $h < k$, potom buďto $\mathbf{E}_h$ je částí $\mathbf{E}_k$ nebo $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ nemají žádný společný bod.

(19.9). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}'_h$ rovnoběžné a je-li $\mathbf{E}'_h$ částí $\mathbf{E}_k$, potom $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ jsou rovnoběžné.

(19.10). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné a je-li $h < k$, potom vedeme-li bodem B libovolně zvoleným v $\mathbf{E}_k$ prostor $\mathbf{E}'_h$ rovnoběžně s $\mathbf{E}_h$, jest $\mathbf{E}'_h$ částí $\mathbf{E}_k$.

Čtenář nechť si jasně uvědomí názorný smysl těchto vět pro $m = 3$, $h = 1$, $k = 2$; v tomto speciálním případě dostane dobře známé věty z elementární stereometrie.

Speciálně dvě *přímky* (lineární podprostory dimense 1) jsou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, mají-li týž směr. O směru $\{\mathbf{u}\}$ pravíme, že *leží v lineárním podprostoru* $\mathbf{E}_k$, jestliže $\{\mathbf{u}\}$ je částí zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$, což nastane tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{u}$ leží v $\mathbf{E}_k$. O směrech $\{\mathbf{u}_1\}, \ldots, \{\mathbf{u}_k\}$ pravíme, že jsou *mezi sebou lineárně závislé* nebo *nezávislé* podle toho, co platí o vektorech $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. K této definici jsme oprávněni, ježto

$$\{\mathbf{u}_1\} = \{\mathbf{v}_1\}, \ldots, \{\mathbf{u}_k\} = \{\mathbf{v}_k\}$$

tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$(*) \qquad \mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{v}_k = a_k\mathbf{u}_k, a_1 \ldots a_k \neq 0,$$

neboť za předpokladu (*) z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ plyne totéž o vektorech $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ a obráceně.

Speciálně dva směry $\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2\}$ jsou mezi sebou lineárně závislé tehdy a jenom tehdy, jestliže splynou. O přímkách $p_1, \ldots, p_k$ pravíme, že jsou *mezi sebou lineárně závislé* nebo *nezávislé* podle toho, co platí o jejich směrech. Speciálně dvě přímky p, q jsou mezi sebou lineárně závislé tehdy a jenom tehdy, jestliže jsou rovnoběžné.

Z předcházejícího plynou snadno tyto výsledky:

(19.11). Dvě přímky jsou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, mají-li týž směr. Dvě mezi sebou rovnoběžné přímky nazýváme stručně *rovnoběžky*.

(19.12). Přímka p je rovnoběžná s lineárním podprostorem $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže směr přímky p leží v $\mathbf{E}_k$.

(19.13). Je-li přímka p rovnoběžná s lineárním podprostorem $\mathbf{E}_k$, potom rovnoběžka s přímkou p procházející bodem libovolně zvoleným v $\mathbf{E}_k$ leží v $\mathbf{E}_k$, t. j. je částí $\mathbf{E}_k$. Obráceně:

(19.14). Jestliže přímka p je rovnoběžná s některou přímkou ležící v $\mathbf{E}_k$, potom p je rovnoběžná s $\mathbf{E}_k$.

(19.15). Lineární podprostory $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}'_k$ $(h \leqq k)$ jsou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, jestliže každá přímka, která leží v $\mathbf{E}_h$, je rovnoběžná s $\mathbf{E}'_k$. Obráceně:

(19.16). Jestliže v prostoru $\mathbf{E}_h$ leží h mezi sebou lineárně nezávislých přímek, z nichž každá je rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}'_k$ $(h \leqq k)$, potom také prostor $\mathbf{E}_h$ je rovnoběžný s $\mathbf{E}'_k$.

20. DVOJICE PŘÍMEK. Dvě přímky $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{u}\}$ téhož směru $\{\mathbf{u}\}$ jsme v článku 19 nazvali rovnoběžné, takže dvě splývající přímky jsou rovnoběžné.

VĚTA 20.1. *Dvě rovnoběžné přímky $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{u}\}$ splynou tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $B - A$ je lineárně závislý na vektoru $\mathbf{u}$.*

DŮKAZ. Splynou-li obě přímky, potom vektor $B - A$ leží v přímce $\{A; \mathbf{u}\}$ a je tudíž lineárně závislý na $\mathbf{u}$. Obráceně, je-li $B - A = c\mathbf{u}$, potom bod $B = A + c\mathbf{u}$ je společný oběma rovnoběžkám, které tedy splynou podle (19.3).

VĚTA 20.2. *Dvě různé rovnoběžky leží v jednoznačně určené rovině.*

DŮKAZ. Jsou-li $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B, \mathbf{u}\}$ dvě různé rovnoběžky, jest $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ a podle věty 20.1 vektor $B - A$ není lineárně závislý na vektoru $\mathbf{u}$, z něhož plyne snadno, že vektory $\mathbf{u}, B - A$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Tudíž existuje rovina $\{A; \mathbf{u}, B - A\}$, která zřejmě obsahuje obě dané rovnoběžky. Obráceně je patrné, že $\{A; \mathbf{u}, B - A\}$ je jediná taková rovina.

Ježto dvěma různými body prochází jediná přímka, mají dvě různé přímky nejvýše jeden společný bod. Jestliže dvě přímky p, q jsou navzájem různé a mají společný bod A, pravíme, že p, q jsou dvě *různoběžné přímky*, krátce *různoběžky*; bod A nazýváme jejich *průsečík*. Rovnoběžnost a různoběžnost se navzájem vylučují. Výrok, že přímky p, q se *protínají* v bodě A, znamená, že p, q jsou různoběžné a že A je jejich průsečík. Posléze p, q jsou dvě *mimoběžné přímky*, krátce *mimoběžky*, nejsou-li ani rovnoběžné ani různoběžné.

Vyšetřujme vzájemnou polohu dvou daných přímek $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$. Z předcházejícího je patrné, že *dané přímky jsou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, jestliže lineární soustava* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ *má dimensi* 1, *a splynou tehdy a jenom tehdy, jestliže lineární soustava* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, B - A\}$ *má dimensi* 1. Zbývá vyšetřit případ lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Přímky $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$ jsou v tomto případě různoběžné nebo mimoběžné podle toho, zdali mají či nemají společný bod. Je-li však C společný bod obou přímek (průsečík), existují čísla c_1, c_2 tak, že

$$C = A + c_1\mathbf{u}, \quad C = B + c_2\mathbf{v}, \tag{20.1}$$

z čehož plyne

$$B - A = c_1\mathbf{u} - c_2\mathbf{v}, \tag{20.2}$$

t. j. vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Obráceně, je-li vektor $B - A$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, existují čísla c_1, c_2 tak, že platí (20.2). Potom však obě rovnice (20.1) definují týž bod C, který je průsečíkem obou přímek. Tím jsou dokázány věty:

VĚTA 20.3. *Dvě přímky* $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$ *jsou různoběžné tehdy a jenom tehdy, jestliže jsou vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *mezi sebou lineárně nezávislé a je-li vektor* $B - A$ *na nich lineárně závislý.*

Věta 20.4. *Dvě přímky* $\{A;\, \mathbf{u}\}$, $\{B;\, \mathbf{v}\}$ *jsou mimoběžné tehdy a jenom tehdy, jsou-li vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $B - A$ *mezi sebou lineárně nezávislé.*

Z těchto vět plyne dále:

Věta 20.5. *Dvě různoběžné přímky* $\{A;\, \mathbf{u}\}$, $\{B;\, \mathbf{v}\}$ *leží v jednoznačně určené rovině*, totiž v rovině $\{A;\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

Věta 20.6. *Dvě mimoběžné přímky* $\{A;\, \mathbf{u}\}$, $\{B;\, \mathbf{v}\}$ *leží v jednoznačně určeném* $\mathbf{E}_3$, *totiž v* $\{A;\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, B - A\}$.

Věta 20.7. *Dvě přímky, které leží obě v téže rovině, jsou buďto různoběžné nebo* ~~*mimoběžné*~~. $\parallel$

21. PŘÍČKY DVOU MIMOBĚŽEK. Buďtež dány dvě mimoběžky p, q; p budiž přímka $\{A;\, \mathbf{u}\}$, q budiž přímka $\{B;\, \mathbf{v}\}$. Podle věty 20.6 leží p, q v prostoru $\{A;\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, B - A\}$, který označíme prostě $\mathbf{E}_3$. Přímky p, q nemají žádný společný bod. Je-li X libovolný bod přímky p, Y libovolný bod přímky q, potom přímku XY nazveme *příčkou mimoběžek* p, q. Jest

$$X = A + x\mathbf{u}, \quad Y = B + y\mathbf{v}. \tag{21.1}$$

Každá příčka mimoběžek p, q leží ovšem v právě definovaném $\mathbf{E}_3$.

Naším prvým úkolem bude určit příčku mimoběžek p, q, která má daný směr $\{\mathbf{w}\}$. Směr $\{\mathbf{w}\}$ musí ovšem ležeti v $\mathbf{E}_3$, takže existují čísla a, b, c tak, že

$$\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c(B - A). \tag{21.2}$$

Hledaná příčka bude přímka XY, při čemž čísla x, y ve (21.1) máme určit. Podmínka, které jsou podrobena tato čísla x, y, jest, aby směr $\{Y - X\}$ splynul s daným směrem $\{\mathbf{w}\}$, t. j. aby existovalo číslo z tak, že

$$Y - X = z\mathbf{w}. \tag{21.3}$$

Máme tedy určit čísla x, y, z tak, aby platilo (21.1) a (21.3). Dosadíme-li ze (21.1) do (21.3), dostaneme

$$B - A + y\mathbf{v} - x\mathbf{u} = z\mathbf{w}$$

neboli podle (21.2)

$$(az + x)\,\mathbf{u} + (bz - y)\,\mathbf{v} + (cz - 1)(B - A) = \mathbf{o}. \tag{21.4}$$

Ježto vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $B - A$ jsou lineárně nezávislé, bude vektorová rovnice (21.4) splněna tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$cz = 1, \tag{21.5}$$

$$- az = x, \; bz = y. \tag{21.6}$$

Rovnici (21.5) nelze vyhověti, je-li $c = 0$, t. j. podle (21.2), jestliže směr $\{\mathbf{w}\}$ náleží do dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Zvolíme-li libovolně bod C, můžeme říci, že aby žádaná příčka existovala, nesmí její směr ležet ve dvojsměru, který je zaměřením roviny $\{C; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ rovnoběžné s oběma přímkami p, q. Je-li tato podmínka splněna, potom ve (21.2) je $c \neq 0$ a můžeme jednoznačně určit nejprve z z rovnice (21.5), potom x a y z rovnic (21.6). Výsledek:

VĚTA 21.1. *Chceme-li ke dvěma daným mimoběžkám p, q určit příčku daného směru $\{\mathbf{w}\}$, musí daný směr ležet v trojrozměrném prostoru $\mathbf{E}_3$ obsahujícím obě přímky p, q, avšak $\{\mathbf{w}\}$ nesmí ležet ve dvojsměru obsahujícím směry obou přímek p, q. Jsou-li tyto dvě podmínky splněny, existuje právě jedna příčka mimoběžek p, q mající daný směr $\{\mathbf{w}\}$.*

Zvolme nyní v prostoru $\mathbf{E}_3$ bod M tak, aby neležel na žádné z obou daných mimoběžek p, q, a hledejme příčku mimoběžek p, q procházející bodem M. Ježto vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $B - A$ tvoří basi prostoru $\mathbf{E}_3$, existují čísla a, b, c tak, že

$$M = A + a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c(B - A). \tag{21.7}$$

Žádaná příčka protne p v bodě tvaru $A + x\mathbf{u}$, q v bodě tvaru $B + y\mathbf{v}$ a její směr je tudíž určen vektorem

$$(B + y\mathbf{v}) - (A + x\mathbf{u}) = - x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + (B - A).$$

Čísla x, y máme určit tak, aby příčka procházela bodem M, t. j. tak, aby existovalo číslo z, pro něž

$$M = A + x\mathbf{u} + z(- x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + B - A).$$

Porovnáme-li s (21.7), dostaneme podmínku

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c(B - A) = x(1 - z)\,\mathbf{u} + yz\mathbf{v} + z(B - A),$$

která vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $B - A$ je splněna tehdy a jenom tehdy, jestliže předně $z = c$ a za druhé

$$(1 - c)\,x = a, \; cy = b. \tag{21.8}$$

Je-li $c \neq 0$, $c \neq 1$, určíme x, y jednoznačně ze (21.8), takže existuje právě jedna příčka mimoběžek p, q procházející bodem M. Je-li však $c = 0$ nebo $c = 1$, dokážeme snadno, že žádná taková příčka neexistuje.

Budiž nejprve $c = 0$. To znamená, že (21.7) zní

$$M = A + a\mathbf{u} + b\mathbf{v},$$

t. j. bod M leží v rovině vedené přímkou p rovnoběžně s přímkou q. Ježto bod M neleží na přímce p, je $b \neq 0$, avšak $c = 0$, takže druhé rovnici (21.8) nelze vyhověti.

Budiž za druhé $c = 1$. To znamená, že (21.7) zní

$$M = B + a\mathbf{u} + b\mathbf{v},$$

t. j. bod M leží v rovině vedené přímkou q rovnoběžně s přímkou p. Ježto bod M neleží na přímce q, je $a \neq 0$, avšak $c = 1$, takže prvé rovnici (21.8) nelze vyhověti. Výsledek:

VĚTA 21.2. *Chceme-li ke dvěma daným mimoběžkám p, q určit příčku procházející daným bodem M, který neleží ani na přímce p ani na přímce q, musí bod M ležet v trojrozměrném prostoru $\mathbf{E}_3$ obsahujícím obě přímky p, q, avšak M nesmí ležet ani v rovině vedené přímkou p rovnoběžně s přímkou q, ani v rovině vedené přímkou q rovnoběžně s přímkou p. Jsou-li tyto tři podmínky splněny, existuje právě jedna příčka mimoběžek p, q procházející bodem M.*

22. PŘÍMKA A LINEÁRNÍ PODPROSTOR. V eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ budiž dána jednak přímka $\{A; \mathbf{u}\}$, kterou označíme p, jednak lineární podprostor

$$\mathbf{E}_k = \{B; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

dimense k. Případ $k = 1$ byl probrán v článku 20; budiž tedy $k \geqq 2$. Ježto $k \leqq m - 1$, jest $m \geqq 3$.

Jestliže vektor $\mathbf{u}$ náleží do k-směru

$$\mathbf{V}_k = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\},$$

je přímka *p rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$*. Tento případ nastane mimo jiné, jestliže p leží v $\mathbf{E}_k$. Při tom p leží v $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže nejen $\boldsymbol{u}$, nýbrž i $B - A$ náleží do $\mathbf{V}_k$. Jestliže p neleží v $\mathbf{E}_k$, potom existuje jediný $\mathbf{E}_{k+1}$, který obsahuje jak p, tak i $\mathbf{E}_k$, totiž

$$\mathbf{E}_{k+1} = \{A; \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, B - A\}.$$

Zbývá případ, že $\boldsymbol{u}$ nenáleží do $\mathbf{V}_k$, takže vektory

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \tag{22.1}$$

jsou lineárně nezávislé. V tomto případě přímka p se nazývá *různoběžná* nebo *mimoběžná s prostorem* $\mathbf{E}_k$ podle toho, zda p má či nemá s $\mathbf{E}_k$ společný bod. V prvém případě společný bod P (který je zřejmě jediný) se jmenuje *průsečík* přímky p s prostorem $\mathbf{E}_k$; také pravíme, že p a $\mathbf{E}_k$ se *protínají* v bodě P. V tomto případě existují čísla $a, b_1, \ldots, b_k$ tak, že

$$P = A + a\boldsymbol{u}, \quad P = B + b_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + b_k\boldsymbol{v}_k, \tag{22.2}$$

z čehož plyne

$$B - A = a\boldsymbol{u} - b_1\boldsymbol{v}_1 - \ldots - b_k\boldsymbol{v}_k, \tag{22.3}$$

t. j. vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů (22.1). Obráceně, je-li vektor $B - A$ lineární kombinací vektorů (22.1), existují čísla $a, b_1, \ldots, b_k$ tak, že platí (22.3). Potom však obě rovnice (22.2) definují týž bod P, který je průsečíkem přímky p s prostorem $\mathbf{E}_k$.

Celkem jsme poznali, že:

(a) přímka p leží v prostoru $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jsou-li oba vektory $\boldsymbol{u}$, $B - A$ lineárně závislé na vektorech $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$;

(b) přímka p je rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$, neleží však v $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\boldsymbol{u}$ jest a vektor $B - A$ není lineárně závislý na vektorech $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$;

(c) přímka p je různoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé a vektor $B - A$ je na nich lineárně závislý;

(d) přímka p je mimoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $B - A$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé.

Všimli jsme si již, že v případě (b) leží p a $\mathbf{E}_k$ v jednoznačně určeném $\mathbf{E}_{k+1}$. Také v případě (c) leží p a $\mathbf{E}_k$ v jednoznačně určeném

$$\mathbf{E}_{k+1} = \{A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}.$$

Naproti tomu v případě (d) nemohou p a $\mathbf{E}_k$ ležet v témž $\mathbf{E}_{k+1}$, protože $\mathbf{E}_{k+1}$ nemůže obsahovat $k + 2$ lineárně nezávislé vektory. V případě (d) leží p a $\mathbf{E}_k$ v jednoznačně určeném

$$\mathbf{E}_{k+2} = \{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, B - A\}.$$

Zřejmě případ (d) nemůže nastat pro $k = m - 1$, takže *jestliže přímka p a prostor $\mathbf{E}_{m-1}$ nejsou rovnoběžné, jsou různoběžné.*

23. DVOJICE ROVIN. Budiž $m \geqq 3$. Dvě roviny $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ s týmž zaměřením $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ jsme v článku 19 nazvali *rovnoběžné.* Snadno se dokáže, že dvě rovnoběžné roviny $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ splynou tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, takže jsou-li naše dvě roviny různé, jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, B - A$ mezi sebou lineárně nezávislé. Dvě různé rovnoběžné roviny $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ leží tedy v jednoznačně určeném

$$\mathbf{E}_3 = \{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, B - A\}.$$

Dvě roviny ϱ, σ se jmenují *různoběžné,* jestliže jejich společné body tvoří přímku, která se jmenuje jejich *průsečnice.* Výrok, že dvě roviny ϱ, σ se *protínají* v přímce p, znamená, že roviny ϱ, σ jsou různoběžné a že p je jejich průsečnice. Dvě rovnoběžné roviny nemohou býti různoběžné, neboť dvě rovnoběžné roviny buďto splynou nebo nemají žádný společný bod.

V trojrozměrném prostoru $\mathbf{E}_3$ platí, že jestliže roviny ϱ, σ nejsou rovnoběžné, potom jsou různoběžné. Neboť budiž ϱ rovina $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, σ rovina $\{B; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Čtyři vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ prostoru $\mathbf{E}_3$ musí býti mezi sebou lineárně závislé. Tedy existují čísla a_1, a_2, b_1, b_2 tak, že

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 \tag{23.1}$$

a že nejsou všecka čtyři čísla a_1, a_2, b_1, b_2 současně rovna nule. Ježto však vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé a ježto totéž platí o vektorech $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, jest vektor (23.1) různý od $\mathbf{o}$. Označíme-li $\mathbf{w}_0$ vektor (23.1), plyne z věty 13.1, že lze určiti vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ tak, že

$$\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}; \{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_2\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}. \tag{23.2}$$

(Podle věty 12.8 lze dokonce za $\mathbf{w}_1$ volit jeden z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, za $\mathbf{w}_2$ jeden z vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.) Potom ϱ je rovina $\{A; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1\}$, σ je rovina

$\{B; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_2\}$. Vektory $\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{w}_1$ jsou ovšem mezi sebou lineárně nezávislé; vektor $\boldsymbol{w}_2$ není jejich lineární kombinací, neboť jinak by roviny ϱ, σ zřejmě byly rovnoběžné. Proto vektory

$$\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \tag{23.3}$$

jsou mezi sebou lineárně nezávislé a tvoří tudíž basi prostoru $\boldsymbol{E}_3$. Z toho plyne, že vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů (23.3), t. j., že existují čísla a_0, a_1, a_2 tak, že

$$B - A = a_0\boldsymbol{w}_0 + a_1\boldsymbol{w}_1 + a_2\boldsymbol{w}_2. \tag{23.4}$$

Existuje tudíž bod

$$C = A + a_1\boldsymbol{w}_1 = B - a_0\boldsymbol{w}_0 - a_2\boldsymbol{w}_2,$$

který leží v obou rovinách ϱ, σ. Z toho plyne dále, že přímka $\{C; \boldsymbol{w}_0\}$ je částí obou rovin ϱ, σ. Mimo přímku $\{C; \boldsymbol{w}_0\}$ nemohou míti roviny ϱ, σ další společný bod, neboť jinak by splynuly, což nelze, ježto nejsou rovnoběžné. Tedy roviny ϱ, σ jsou různoběžné a přímka $\{C; \boldsymbol{w}_0\}$ je jejich průsečnice.

Obráceně platí, že dvě různoběžné roviny ϱ, σ leží v jednoznačně určeném $\boldsymbol{E}_3$. Neboť budiž $\{C; \boldsymbol{w}_0\}$ průsečnice obou rovin. Z věty 13.1 plyne, že existují vektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ tak, že zaměření roviny ϱ je $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1\}$, zaměření roviny σ je $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_2\}$. Ježto roviny ϱ, σ nejsou rovnoběžné, opět se snadno odůvodní, že vektory (23.3) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Avšak zřejmě ϱ je rovina $\{C; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1\}$, σ je rovina $\{C; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_2\}$ a tudíž obě roviny leží v trojrozměrném $\{C; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, který je zřejmě jediným $\boldsymbol{E}_3$ obsahujícím obě roviny ϱ, σ.

Budiž nyní $m \geq 4$ a opět budiž ϱ rovina $\{A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, σ rovina $\{B; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$. Dimense lineární soustavy

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \tag{23.5}$$

je zřejmě rovna jednomu z čísel 2, 3, 4. Jestliže dimense lineární soustavy (23.5) je rovna dvěma, dokáže se snadno, že roviny ϱ, σ jsou rovnoběžné.

Předpokládejme, že dimense lineární soustavy (23.5) je rovna třem. Opakujíce úvahu provedenou výše, dospějeme opět k vektoru různému od $\boldsymbol{o}$, který má tvar (23.1). Označíme-li $\boldsymbol{w}_0$ vektor (23.1), určíme opět vektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ tak, že platí (23.2), takže ϱ je rovina $\{A; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1\}$, σ je rovina $\{B; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_2\}$. Mají-li roviny ϱ, σ společný nějaký bod C, mají společnou přímku $\{C; \mathbf{w}_0\}$ a jsou různoběžné. K tomuto výsledku dojdeme — viz (23.4) — jestliže vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů (23.3) nebo, což jest zřejmě totéž, jestliže vektor $B - A$ náleží do (23.5). Ježto však $m \geqq 4$, je možný také případ, že vektor $B - A$ není lineární kombinací vektorů (23.3), takže vektory

$$\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, B - A$$

jsou lineárně nezávislé. V tomto případě podle předcházejícího roviny ϱ, σ nemají žádný společný bod, mají však společný směr $\{\mathbf{w}_0\}$. Zřejmě $\{\mathbf{w}_0\}$ je jediný společný směr obou rovin ϱ, σ, neboť jinak by se snadno dokázalo, že by roviny ϱ, σ byly rovnoběžné. Mimo to je patrné, že obě roviny ϱ, σ leží ve čtyřrozměrném $\{A; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, B - A\}$, který je zřejmě jediným $\mathbf{E}_4$ obsahujícím obě roviny ϱ, σ.

Zbývá případ, že dimense lineární soustavy (23.5) je rovna čtyřem. V tomto případě roviny ϱ, σ nemohou míti žádný společný směr, neboť jinak bychom opět měli netriviální vztah tvaru (23.1) a dimense lineární soustavy (23.5) by byla menší než 4. Jinak se uvažovaný případ štěpí na dva podpřípady. Předně předpokládejme — což musí nastat, je-li $m = 4$ — že vektor $B - A$ náleží do lineární soustavy (23.5). Potom existují čísla a_1, a_2, b_1, b_2 tak, že

$$B - A = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 \tag{23.6}$$

a můžeme zavésti bod

$$C = A + a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = B - b_1\mathbf{v}_1 - b_2\mathbf{v}_2, \tag{23.7}$$

který leží v obou rovinách ϱ, σ. Bod C je jediný společný bod obou rovin ϱ, σ, neboť jinak by obě roviny měly společný směr, což je nemožné. Snadno se dokáže, že roviny ϱ, σ leží v tomto případě ve čtyřrozměrném $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, který je jediným $\mathbf{E}_4$ obsahujícím obě roviny ϱ, σ.

Posléze je ještě možné, že dimense lineární soustavy (23.5) je rovna čtyřem a že vektor $B - A$ nenáleží do této soustavy. V tomto případě, který může nastati pouze pro $m \geqq 5$, jsou vektory

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, B - A$$

mezi sebou lineárně nezávislé. O rovinách ϱ, σ víme, že nemají žádný společný směr. Nemají však také žádný společný bod, neboť z existence společného bodu (23.7) by plynul vztah (23.6), který je nyní nemožný. Obě roviny ϱ, σ leží v daném případě v jednoznačně určeném pětirozměrném $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, B - A\}$.

24. SPOJENÍ A PRŮNIK DVOU LINEÁRNÍCH SOUSTAV.

V předcházejících článcích jsme probírali v několika zvláštních případech vzájemnou polohu dvou lineárních podprostorů eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Docílené výsledky jsou obsaženy ve výsledcích článku 25. Napřed však bude účelné provésti obecnou úvahu, která je předmětem tohoto článku. Budiž dán libovolný vektorový prostor $\mathbf{V}$ ve smyslu článku 10. Ve $\mathbf{V}$ buďtež dány dvě lineární soustavy $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$. Budiž $\mathbf{S}$ množina všech vektorů tvaru

$$\mathbf{u}' + \mathbf{u}'',$$

kde $\mathbf{u}'$ je libovolný vektor náležející do $\mathbf{W}'$, $\mathbf{u}''$ libovolný vektor náležející do $\mathbf{W}''$. Jest

$$(\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_1'') + (\mathbf{u}_2' + \mathbf{u}_2'') = (\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2') + (\mathbf{u}_1'' + \mathbf{u}_2''), \tag{24.1}$$

$$a(\mathbf{u}' + \mathbf{u}'') = a\mathbf{u}' + a\mathbf{u}''. \tag{24.2}$$

Ze (24.1) plyne, že součet dvou vektorů náležejících do $\mathbf{S}$ sám náleží do $\mathbf{S}$; ze (24.2) plyne, že také součin libovolného reálného čísla s vektorem náležejícím do $\mathbf{S}$ náleží do $\mathbf{S}$. Je tudíž $\mathbf{S}$ lineární soustava, kterou nazveme *spojením lineárních soustav* $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$. Dále budiž $\mathbf{P}$ množina všech vektorů, které náležejí zároveň do $\mathbf{W}'$ i do $\mathbf{W}''$; zřejmě také $\mathbf{P}$ je lineární soustava, která se jmenuje *průnik lineárních soustav* $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$.

Nás bude zajímat ten případ, že $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$ jsou netriviální lineární soustavy vytvořené konečným počtem vektorů. Budiž

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h \tag{24.3}$$

base pro $\mathbf{W}'$,

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \tag{24.4}$$

base pro $\mathbf{W}''$, takže $\mathbf{W}'$ má dimensi h, $\mathbf{W}''$ má dimensi k. Snadno se nahlédne, že vektory (24.3) a (24.4) dohromady vytvoří lineární soustavu $\mathbf{S}$, která tudíž také má konečnou dimensi, kterou označíme s. Lineární soustava $\mathbf{P}$ má podle věty 13.2 rovněž konečnou dimensi, kterou označíme p. Cílem tohoto článku je důkaz obecného vzorce

$$h + k = s + p. \tag{24.5}$$

Uvažme napřed, že nulový vektor $\mathbf{o}$ rozhodně náleží do $\mathbf{P}$. Vyšetřme nejprve ten případ, že pouze vektor $\mathbf{o}$ náleží do $\mathbf{P}$. V tomto případě je $\mathbf{P} = \{\mathbf{o}\}$, $p = 0$ a máme dokázati, že $s = h + k$. Že tomu tak skutečně jest, plyne z toho, že v případě $\mathbf{P} = \{\mathbf{o}\}$ vektory (24.3) a (24.4) dohromady jsou lineárně nezávislé. Je-li totiž

$$a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_h\mathbf{u}_h + b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}, \tag{24.6}$$

jest

$$a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_h\mathbf{u}_h = -(b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_k\mathbf{v}_k). \tag{24.7}$$

Potom však vektor (24.7) náleží do $\mathbf{P}$, je tedy roven $\mathbf{o}$, takže všecky koeficienty ve (24.6) jsou rovny nule.

Přistupme k obecnému důkazu vzorce (24.5), který je již dokázán pro $p = 0$. Je-li $p > 0$, budiž

$$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p \tag{24.8}$$

base pro $\mathbf{P}$. Podle věty 13.1 můžeme base (24.3), (24.4) lineárních soustav $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$ voliti tak, že

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{u}_p = \mathbf{w}_p; \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_p = \mathbf{w}_p.$$

Lineární soustava $\mathbf{S}$ se dá vytvořiti vektory (24.8), (24.9), (24.10), kde vektory

$$\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_h \tag{24.9}$$

odpadnou pro $p = h$, vektory

$$\mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_k \tag{24.10}$$

odpadnou pro $p = k$. Je-li s celkový počet vektorů (24.8), (24.9), (24.10), splňuje číslo s rovnici (24.5). Je tudíž třeba pouze ukázati, že vektory (24.8), (24.9), (24.10) dohromady jsou lineárně nezávislé.

Budiž

$$\begin{aligned}(c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_p\mathbf{w}_p) + (a_{p+1}\mathbf{u}_{p+1} + \ldots + a_h\mathbf{u}_h) +\\ + (b_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} + \ldots + b_k\mathbf{v}_k) = \mathbf{o},\end{aligned} \tag{24.11}$$

kde opět druhá nebo třetí závorka může odpadnout. Rovnici (24.11) můžeme napsat ve tvaru

$$(24.12) \qquad \begin{aligned} &(c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_p\mathbf{w}_p) + (a_{p+1}\mathbf{u}_{p+1} + \ldots + a_h\mathbf{u}_h) = \\ &= -(b_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} + \ldots + b_k\mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

Obě strany ve (24.12) znamenají vektor, který náleží jak do $\mathbf{W}'$ tak i do $\mathbf{W}''$ a tudíž do $\mathbf{P}$. Z toho plyne nejprve, že všecky koeficienty a i všecky koeficienty b jsou rovny nule, načež také všecky koeficienty c ve (24.12) jsou rovny nule.

25. DVOJICE LINEÁRNÍCH PODPROSTORŮ EUKLEIDOVSKÉHO $\mathbf{E}_m$. Buďtež nyní dány v eukleidovském $\mathbf{E}_m$ dva lineární podprostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$. Budiž $\mathbf{W}'$ zaměření prostoru $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{W}''$ zaměření prostoru $\mathbf{E}''_k$. Platí vzorec (24.5), ve kterém h, k, s, p jsou dimense lineárních soustav $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$; $\mathbf{S}$ je spojení a $\mathbf{P}$ průnik lineárních soustav $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$. Při tom je ovšem

$$(25.1) \qquad 0 \leqq p \leqq h, \; 0 \leqq p \leqq k$$

a mimo to $s \leqq m$, takže podle (24.5) je

$$(25.2) \qquad p \geqq h + k - m.$$

Je-li $p = 0$, neexistuje žádný směr, který by ležel zároveň v $\mathbf{E}_h$ i v $\mathbf{E}''_h$; tento případ podle (25.2) může nastati pouze tehdy, jestliže $h + k \leqq m$. Je-li $p > 0$, potom existují směry obsažené v prostoru $\mathbf{P}$. Prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ jsou rovnoběžné, platí-li buďto $p = h$ nebo $p = k$ (nebo oboje).

Jestliže prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ mají nějaký společný bod C, jest $\mathbf{E}'_h = \{C; \mathbf{W}'\}$, $\mathbf{E}''_k = \{C; \mathbf{W}''\}$ a pro $p > 0$ všecky společné body vyplní lineární prostor $\{C; \mathbf{P}\}$ dimense p; pro $p = 0$ je zřejmě C *jediný* společný bod obou prostorů $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$. Dále je patrné, že existuje-li společný bod, leží oba prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ v jednoznačně určeném lineárním podprostoru $\{C; \mathbf{S}\}$ dimense $s = h + k - p$ a neleží v žádném lineárním podprostoru dimense menší než s.

Obecně zvolme bod A v prostoru $\mathbf{E}'_h$, bod B v prostoru $\mathbf{E}''_k$, takže $\mathbf{E}'_h = \{A; \mathbf{W}'\}$, $\mathbf{E}''_k = \{B; \mathbf{W}''\}$. Existuje-li společný bod C, jest

$$(25.3) \qquad C = A + \mathbf{u}, \; C = B - \mathbf{v},$$

takže vektor $\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{W}'$, vektor $\mathbf{v}$ do $\mathbf{W}''$.

Potom jest

$$B - A = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \tag{25.4}$$

takže vektor $B - A$ náleží do lineární soustavy $\mathbf{S}$. Obráceně jestliže vektor $B - A$ náleží do $\mathbf{S}$, lze určit vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tak, že $\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{W}'$, $\mathbf{v}$ do $\mathbf{W}''$ a že platí (25.4). Potom však obě rovnice (25.3) definují týž bod C, který je společný oběma prostorům $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$.

Jestliže prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ nemají žádný společný bod, t. j. jestliže vektor $B - A$ nenáleží do $\mathbf{S}$, existuje jednoznačně určená lineární soustava $\mathbf{T}$ dimense $s + 1$, jejíž částí je $\mathbf{S}$ a která mimo to obsahuje také vektor $B - A$. Zřejmě potom oba prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ leží v jednoznačně určeném lineárním podprostoru $\{C; \mathbf{T}\}$ dimense $s + 1 = h + k + 1 - p$ a neleží v žádném lineárním podprostoru dimense menší než $s + 1$. Ježto dimense prostoru $\{C; \mathbf{T}\}$ je nejvýše rovna m, je tento případ možný pouze tehdy, je-li $h + k + 1 - p \leqq m$.

Nadrovinou eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ rozumíme lineární podprostor dimense $m - 1$. Tedy v prostoru $\mathbf{E}_2$ (v rovině) slovo nadrovina znamená *přímku*, v prostoru $\mathbf{E}_3$ (v obyčejném prostoru) slovo nadrovina znamená *rovinu*. V prostoru $\mathbf{E}_1$ (na přímce) slovem nadrovina rozumíme *bod*; nyní však předpokládejme, že $m \geqq 2$.

Jestliže $k = m - 1$, t. j. jestliže $\mathbf{E}''_k = \mathbf{E}''_{m-1}$ je nadrovina, potom podle (25.2) jest $p \geqq h - 1$, takže podle (25.1) je buďto $p = h$ nebo $p = h - 1$. V případě $p = h$ zřejmě lineární soustava $\mathbf{P}$ splyne s lineární soustavou $\mathbf{W}'$, což podle definice $\mathbf{P}$ znamená, že lineární soustava $\mathbf{W}'$ je částí lineární soustavy $\mathbf{W}''$ neboli, že prostor $\mathbf{E}'_h$ je rovnoběžný s nadrovinou $\mathbf{E}''_{m-1}$. Je-li $p = h - 1$, potom podle (24.5) [ježto nyní $k = m - 1$] jest $s = m$, t. j. $\mathbf{S}$ je celé zaměření prostoru $\mathbf{E}_m$, takže každý vektor vůbec a speciálně vektor $B - A$ náleží do lineární soustavy $\mathbf{S}$, takže podle předcházejícího prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_{m-1}$ mají společný lineární podprostor dimense $p = h - 1$. Tedy: *jestliže lineární podprostor $\mathbf{E}'_h$ $(2 \leqq h \leqq m - 1)$ není rovnoběžný s nadrovinou $\mathbf{E}''_{m-1}$, potom $\mathbf{E}'_h$ a $\mathbf{E}''_{m-1}$ mají společné body, které vyplní lineární podprostor dimense $h - 1$.* Je-li $h = 1$, potom vyjde, že přímka, která není rovnoběžná s nadrovinou $\mathbf{E}''_{m-1}$, má s $\mathbf{E}''_{m-1}$ společný právě jeden bod, což víme už z článku 22.