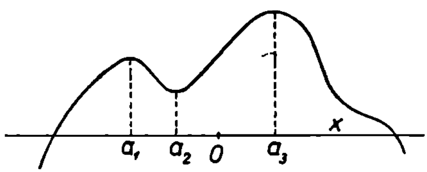
8. Grafické znázornění funkce. Se slovem funkce jsme se seznámili už v odst. 1. Je-li dána nějaká funkce jedné proměnné, označme si písmenem x hodnoty, kterých nabývá ta proměnná (podrobněji se říkává, že x je nezávisle proměnná), a písmenem y hodnoty, kterých nabývá funkce. Naše funkce tedy je pravidlo, podle něhož se k hodnotě zvolené pro x dá počítati příslušná hodnota pro y, což si vyjádříme symbolicky takto:

$$y = f(x). \tag{8·1}$$

Nyní si můžeme zavésti v rovině soustavu pravoúhlých souřadnic a znázorniti si každý pár sobě příslušných hodnot x a $y = f(x)$ bodem $(x; y)$. Tím dostaneme čáru (viz obr. 6), které se říká graf naší funkce. Různým funkcím patří ovšem různé grafy. Všeobecně lze o grafu funkce, která přiřazuje každé hodnotě x jedinou hodnotu y, říci pouze



Obr. 6.

tolik, že žádná rovnoběžka s osou y jej nemůže protnout ve více než jednom bodě. Jsou funkce tak složité, že jejich graf se nedá narýsovat, ba že je skoro nemožné si jej představit. Ale v jednoduchých případech se dá graf funkce snadno narýsovat a je pro svou názornost velmi dobrou pomůckou při studiu funkce.

Uveďme si několik vlastností funkcí, které se dají na grafu dobře pozorovat. Říkáme, že funkce $f(x)$ stále roste, když většímu x odpovídá vždy větší y, a že funkce $f(x)$ stále klesá, když většímu x odpovídá vždy menší y.

Když graf rostoucí funkce probíháme od levé strany k pravé, jdeme stále zdola nahoru; probíháme-li graf klesající funkce od levé strany k pravé, jdeme stále shora dolů. Funkce graficky znázorněná v obr. 6 sice není ani rostoucí ani klesající funkce, ale existují tři čísla a_1, a_2, a_3 (při čemž je $a_1 < a_2 < a_3$), která mají tuto vlastnost: Omezíme-li se na ty hodnoty nezávisle proměnné x, pro něž

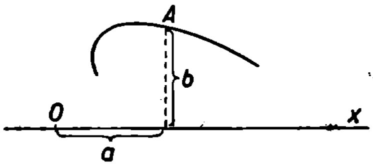
[1] jest $x \leqq a_1$,
[2] jest $a_1 \leqq x$ a současně $x \leqq a_2$,
[3] jest $a_2 \leqq x$ a současně $x \leqq a_3$,
[4] jest $a_3 \leqq x$,

pak funkce

$$\left.\begin{matrix}\text{roste}\\ \text{klesá}\end{matrix}\right\} \text{ v případě } \left\{\begin{matrix}\text{[1] nebo [3],}\\ \text{[2] nebo [4].}\end{matrix}\right.$$

Takové soustavy hodnot proměnné x, které jsou definovány některou z podmínek [1], [2], [3] a [4], se jmenují intervaly. Hodnoty stanovené podmínkou [2] tvoří interval $[a_1, a_2]$, do něhož čítáme hodnoty a_1, a_2 samy; o ostatních hodnotách z intervalu $[a_1, a_2]$ říkáme, že jsou uvnitř intervalu; čísla a_1, a_2 tvoří meze intervalu (a_1 je dolní mez, a_2 je horní mez). Podobně znamená $[a_2, a_3]$ interval určený podmínkou [3]. Hodnoty stanovené podmínkou [4] tvoří interval $[a_3, \infty]$, který má dolní mez a_3; všecky ostatní hodnoty intervalu $[a_3, \infty]$ jsou uvnitř intervalu a horní mez neexistuje; to má býti právě naznačeno symbolem ∞, který je zvykem čísti slovem „nekonečno". Hodnoty stanovené podmínkou [1] tvoří interval $[-\infty, a_1]$, který má horní mez a_1; všecky ostatní hodnoty intervalu $[-\infty, a_1]$ jsou uvnitř intervalu a dolní mez neexistuje; to má býti právě naznačeno symbolem $-\infty$, který je zvykem čísti slovy „minus nekonečno". Po zavedení této terminologie můžeme tedy říci, že funkce znázorněná naším grafem roste v intervalech $[-\infty, a_1]$, $[a_2, a_3]$ a klesá v intervalech $[a_1, a_2]$, $[a_3, \infty]$. Takové rozdělení na několik intervalů, v nichž funkce střídavě roste a klesá, je možné u většiny jednoduchých funkcí. Určení takových intervalů je prvý důležitý krok ke studiu funkce a v této knížce poznáte na řadě příkladů, jak se takové určování pomocí vyšší matematiky provádí.

9. Spojitost. Jiná velmi důležitá vlastnost funkce je s p o j i t o s t. Zvolme si určitou hodnotu proměnné x a označme ji a; dále označme b hodnotu $f(a)$, které nabývá funkce pro $x = a$. Na grafu odpovídá učiněné volbě bod $A = (a; b)$ (viz obr. 7a). Říkáme, že naše funkce je pro $x = a$ s p o j i t á, když v takových číslech x, které se málo liší od čísla a, je hodnota funkce $f(x)$ nejvýš jen málo různá od b, tedy když ty body grafu, které odpovídají hodnotám x blízkým k a, leží blízko bodu A. Říkáme, že $f(x)$ je s p o j i t á f u n k c e, když je spojitá pro každé x, pro které je vůbec definována. Můžeme také říci, že f u n k c e $f(x)$ j e s p o j i t á, k d y ž k p ř i b l i ž n é m u v ý p o č t u h o d n o t y f u n k c e s t a č í z n á t i p ř i b l i ž n o u h o d n o t u p r o m ě n n é x. Z tohoto výkladu spojitosti je zřejmé, proč jsou právě spojité funkce pro aplikace nesmírně důležité. Neboť veškeré měření je možné pouze přibližně, a proto je málo možností praktického užití takových funkcí, u kterých ani k přibližnému výpočtu hodnoty $f(x)$ nepostačí, známe-li x pouze přibližně.

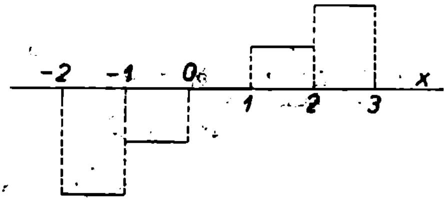


Obr. 7a.

Proto se budeme v této knížce obírati pouze spojitými funkcemi, ale napřed si přece jen udáme velmi jednoduchý příklad funkce, která není všude spojitá. Hodnota této funkce v čísle x je dána takto: Je-li x číslo celé, pak je číslo $f(x)$ rovné x; není-li číslo x celé, pak $f(x)$ znamená n e j v ě t š í z celých čísel menších než x. Na př.

$$f(3) = 3,\ f(-2) = -2,\ f(3{,}4) = 3,\ f(-2{,}8) = -3.$$

Část grafu funkce $f(x)$ vidíme v obr. 8. Celý graf se skládá z nekonečně mnoha vodorovných úseček, ale z každé úsečky patří do grafu pouze její levý krajní bod, kdežto pravé krajní body si musíme odmyslit. Když číslo a není celé, pak



Obr. 8.

funkce $f(x)$ je pro $x = a$ spojitá, neboť pro x blízké k a je $f(x)$ netoliko blízké číslu $f(a)$, nýbrž dokonce přesně rovné číslu $f(a)$. Ale když číslo a je celé, pak funkce $f(x)$ není pro $x = a$ spojitá. Budiž na př. $a = 3$. Čísla

$$2{,}9;\; 2{,}99;\; 2{,}999;\; 2{,}9999;\; \ldots$$

se blíží více a více hodnotě 3, ale funkce $f(x)$ má ve všech těch číslech společnou hodnotu 2, ačkoli $f(3) = 3$.

10. Pojem derivace. Můžeme také říci, že funkce $f(x)$, která pro $x = a$ nabývá hodnoty b, je pro $x = a$ spojitá, dá-li se v blízkosti hodnoty $x = a$ nahraditi konstantou b, t. j. tou jednoduchou funkcí, která pro všecka x nabývá téže hodnoty b. [Graf té konstanty je vodorovná přímka vedená bodem $A = (a; b)$.] Idea, aproximovati nějakou funkci v blízkosti určité hodnoty $x = a$ nějakou jednodušší funkcí, je jednou ze základních idejí vyšší matematiky. Zejména důležitá je aproximace pomocí lineární funkce

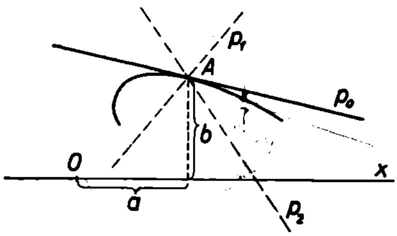
$$y = kx + l. \tag{10·1}$$

Z odst. 7 víme, že lineární funkce jsou totožné s těmi funkcemi, jejichž grafy jsou přímky. [Svislá přímka není ovšem grafem žádné funkce.]

V obr. 7b vidíme především znovu graf funkce $f(x)$, který byl v obr. 7a, jakož i bod $A = (a, b)$ kde $b = f(a)$. Vedle toho jsou v obr. 7b narýsovány tři přímky p_0, p_1, p_2 jdoucí bodem A. Obecně si mysleme vedenu bodem A přímku p, jejíž směrnice se rovná libovolně zvolenému číslu k. Víme, že rovnice přímky p jest

$$y = b + k\,(x - a). \tag{10·2}$$

Když x je blízké číslu a, je hodnota y, kterou vypočteme z rovnice (10·2), blízká hodnotě b, které y nabývá pro $x = a$. Stejně také hodnota $y = f(x)$, odpovídající funkci $f(x)$ znázorněné v obr. 7b, je pro x blízké číslu a blízká číslu b. Tedy i graf funkce $f(x)$ i přímka p jsou pro x blízké číslu a blízko bodu A, tedy také navzájem blízké. Jak blízké, to závisí na volbě směrnice k. V obr. 7b se v blízkosti bodu A přímka p_0 mnohem těsněji přimyká ke grafu funkce $f(x)$ nežli přímky p_1 a p_2.



Obr. 7b.

Když lze vésti bodem A grafu přímku p_0 tak, že se tato přímka v blízkosti bodu A ke grafu těsněji přimyká nežli kterákoli jiná přímka vedená bodem A, říká se této přímce **tečna** grafu v bodě A. Tečna může býti také svislá; vyloučíme-li tento výjimečný případ, má tečna určitou směrnici k_0 a tato směrnice se nazývá **derivace** funkce $f(x)$ v čísle $x = a$. Pojem derivace je jeden z nejdůležitějších pojmů vyšší matematiky.

Zvolíme-li si na grafu funkce $f(x)$ vedle bodu $A = (a; b)$, kde $b = f(a)$, ještě jeden bod $P = (x; y)$, kde $y = f(x)$, můžeme oba body spojiti přímkou. Víme, že směrnice této přímky je

$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{10·3}$$

Má-li graf v bodě A určitou tečnu p_0, je pro x blízké k a

spojnice AP blízká k p_0, a proto je také směrnice (10·3) přímky AP blízká směrnici přímky p_0, t. j. derivaci k_0 funkce $f(x)$ v čísle $x = a$. Tedy funkce $f(x)$ má pro $x = a$ derivaci rovnou číslu k_0, když pro x různé od a, ale blízké číslu a, je podíl (10·3) přibližně rovný číslu k_0. Je zvykem nazývati rozdíl $x - a$ přírůstkem nezávisle proměnné a rozdíl $f(x) - f(a)$ přírůstkem funkce; tyto „přírůstky" ovšem nemusí býti kladné. Často se přírůstek nezávisle proměnné značí písmenem h, tedy

$$h = x - a, \quad x = a + h; \tag{10·4}$$

přírůstek funkce je pak $f(a + h) - f(a)$ a podíl (10·3) je

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{10·5}$$

Když x probíhá čísla blízká číslu a, probíhá h čísla blízká nule a obráceně.

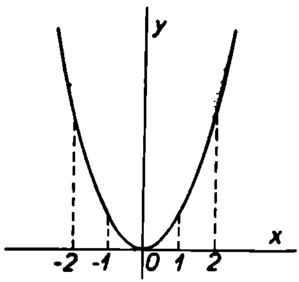
U lineární funkce (10·1) je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k,$$

t. j. přírůstek funkce je (nehledě na případ $k = 0$) přímo úměrný přírůstku nezávisle proměnné. Derivace lineární funkce je konstanta k, t. j. lineární funkce má v každém čísle a stejnou derivaci, rovnou číslu k, t. j. rovnou směrnici přímky, která je grafem funkce. U jiných funkcí je poměr (10·3) závislý na x, takže přírůstek funkce není přírůstku nezávisle proměnné přesně přímo úměrný, nýbrž pouze přibližně, ale tím přesněji, čím těsněji omezíme proměnnou x do blízkosti hodnoty a. Na tom se zakládá na př. interpolace při logaritmování, na kterou se většina z vás pamatuje ze střední školy. V pětimístných logaritmických tabulkách jsou přímo udány pouze logaritmy čtyrciferných čísel; logaritmy pěticiferných čísel se z nich počítají na základě předpokladu, že přírůstek logaritmu je přímo úměrný přírůstku čísla. Tento předpoklad není sice přesně správný, ale je splněn s dostatečnou přibližností. Na čem tu záleží, je **poměrná** velikost přírůstku nezávisle proměnné. Změníme-li pátou cifru čísla, je poměrná změna tím větší, čím menší je číslo, tedy čím menší je první cifra; největší poměrná změna nastane, když prvé dvě cifry jsou 10 a třetí cifra je malá. Proto jsou na př. ve Valouchových logaritmických tabulkách logaritmy pěticiferných čísel 10 000 až 11 009 přímo udány.

11. Funkce $y = x^2$. Abychom si pojem derivace dobře ujasnili, probereme si jej na dvou příkladech. Počneme funkcí $y = x^2$. Graf této funkce je naznačen v obr. 9; je to t. zv. **parabola**. Jest

$$(-x)^2 = x^2,$$



Obr. 9.

t. j. naše funkce nabývá stejné hodnoty v čísle $-x$ jako v čísle x. Taková funkce se jmenuje funkce sudá; graf sudé funkce je sám k sobě souměrný vzhledem k ose y.

Pro $x = a$ nabývá naše funkce hodnoty $b = a^2$. Hodnota funkce v čísle $a + h$ je

$$(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2;$$

tedy přírůstku h nezávisle proměnné odpovídá přírůstek funkce

$$(a + h)^2 - a^2 = 2ah + h^2 = h \,.\, (2a + h).$$

Je-li h blízké nule, je také přírůstek funkce blízký nule; naše funkce je všude spojitá, což odpovídá tomu, že celý graf je jediná souvislá čára.

Poměr přírůstku funkce k přírůstku nezávisle proměnné je

$$\frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = 2a + h;$$

když h se blíží nule, blíží se tento poměr číslu $2a$. Tedy derivace funkce $y = x^2$ v čísle $x = a$ se rovná číslu $2a$.

Bodem $A = (a, a^2)$ naší paraboly si veďme přímku o směrnici k. Na parabole jest

$$y = x^2;$$

na přímce jest

$$y = a^2 + k(x - a);$$

tedy rozdíl R mezi souřadnicí y bodu na parabole a souřadnicí y bodu na přímce při daném x je

$$R = x^2 - a^2 - k(x - a) = (x - a)(x + a - k).$$

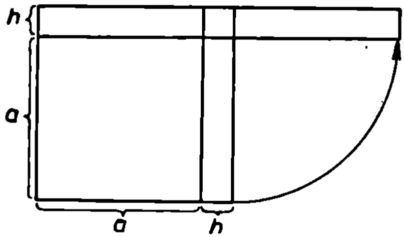
Když se x blíží hodnotě a, blíží se obě pořadnice y téže hodnotě a^2 a jejich rozdíl R se blíží nule. Ale jak rychle se R blíží nule, to závisí na volbě směrnice k. Abychom to zkoumali, všimneme si podílu

$$\frac{R}{x - a} = x + a - k = h + (2a - k); \qquad (11\cdot1)$$

při x blízkém číslu a je ten podíl přibližně roven $2a - k$. Je-li $k \neq 2a$, je rozdíl R přibližně úměrný přírůstku $h = x - a$. Je-li však směrnice k rovna derivaci $2a$, pak je podíl (11·1) při x blízkém číslu a přibližně rovný nule, t. j. nejen že je R blízké nule, nýbrž je mnohem bližší nule, než je $x - a$. To právě znamená, že přímka se směrnicí $k = 2a$ se v blízkosti bodu A mnohem těsněji přimyká k parabole než ostatní naše přímky. Tedy $2a$ je směrnice tečny paraboly v bodě A.

Můžeme si věc znázorniti jinak. Znamená-li x stranu čtverce, znamená x^2 obsah čtverce. Je-li x o málo větší než a, máme situaci znázorněnou v obr. 10. Přírůstek funkce je znázorněn pásem, který se skládá ze dvou obdélníků. Když jeden z nich přemístíme, jak je v obrazci naznačeno šipkou, bude přírůstek plochy čtverce (tedy přírůstek funkce) znázorněn obdélníkem se základnou $2a + h$ a výškou h, tedy obsahem $h(2a + h)$. Tedy poměr přírůstku funkce k přírůstku nezávisle proměnné je $2a + h$, což při menším a menším h je čím dále tím přesněji $2a$. Ke stejnému výsledku dojdeme, i když od hodnoty a strany čtverce přejdeme k hodnotě o málo menší, tedy při záporném h.

Ještě jiné důležité znázornění! Dejme tomu, že se bod pohybuje po ose y tak, že v čase $t = 0$ je v počátku a že v čase t



Obr. 10.

přijde do polohy $(0; t^2)$. [Kladná část osy y nechť raději tentokráte směřuje dolů.] V době od okamžiku $t = a$ k okamžiku $t = a + h$ přejde náš bod z polohy $(0; a^2)$ do polohy $(0; (a + h)^2)$ a urazí dráhu

$$(a + h)^2 - a^2 = h\,(2a + h).$$

Stejnou dráhu by urazil, kdyby se pohyboval rovnoměrnou rychlostí

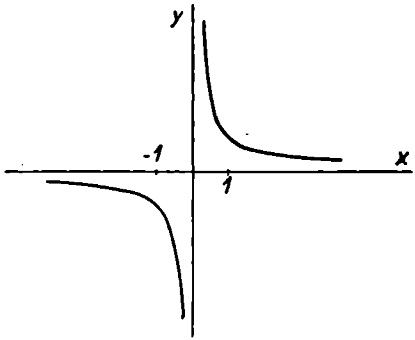
$$\frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = 2a + h.$$

Proto říkáme číslu $2a + h$ průměrná rychlost pohybu v době od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = a + h$. Je-li h blízké nule, je tato průměrná rychlost přibližně rovna $2a$; proto říkáme, že $2a$ je okamžitá rychlost pohybu v čase $t = a$. V žádném sebe kratším časovém intervalu není náš pohyb přesně rovnoměrný, ale ve velmi malém časovém intervalu obsahujícím okamžik $t = a$ se dá velmi dobře aproximovat rovnoměrným pohybem s rychlostí $2a$.

12. Funkce $y = \frac{1}{x}$. Graf této funkce je naznačen v obr. 11; je to t. zv. hyperbola. Jest

$$\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x},$$

t. j., změní-li se pouze znamení nezávisle proměnné x, změní také hodnota funkce pouze znamení. Taková funkce se jmenuje *funkce lichá*; graf liché funkce je středově souměrný (počátek O je středem souměrnosti). Pro $x = 0$ není naše funkce definována; když je x kladné a velmi malé, jsou hodnoty funkce kladné a velmi veliké; když je x záporné a velmi malé, jsou hodnoty funkce záporné a velmi veliké. Když je x kladné a velmi velké, jsou hodnoty funkce kladné a velmi malé; když je x záporné a velmi velké, jsou hodnoty funkce záporné a velmi malé. Celkem můžeme říci, že ve velké vzdálenosti od počátku se graf naší funkce těsně přimyká jednak k ose x, jednak k ose y; pravíme, že osa x a osa y jsou *asymptoty* naší hyperboly.



Obr. 11.

Pro $x = a$ (kde $a \neq 0$) nabývá naše funkce hodnoty $b = \frac{1}{a}$. Hodnota funkce pro $x = a + h$ je $\frac{1}{a+h}$; přírůstku h nezávisle proměnné odpovídá přírůstek funkce

$$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = -\frac{h}{a\,(a+h)}.$$

Je-li h blízké nule, je také přírůstek funkce blízký nule; naše funkce je všude spojitá, kde je definována (t. j. pro všecka x mimo nulu).

Poměr přírůstku funkce k přírůstku nezávisle proměnné je

$$-\frac{1}{a\,(a+h)};$$

když se h blíží nule, blíží se tento poměr číslu $-\dfrac{1}{a^2}$. Tedy derivace funkce $y = \dfrac{1}{x}$ v čísle $x = a$ se rovná číslu $-\dfrac{1}{a^2}$.

13. Pojem limity. V odst. 10 jsme se seznámili s pojmem derivace názorným způsobem na základě grafu. Bude užitečné, když si nyní vyslovíme definici derivace v přesném znění. Provedeme to tak, že si zavedeme obecnější pojem, který má v celé vyšší matematice centrální postavení a jehož jedním zvláštním případem je pojem derivace. Je to pojem limity.

Nechť je dán nějaký interval J a nějaké číslo a uvnitř intervalu J. Dále budiž dána nějaká funkce

$$y = F(x) \tag{13·1}$$

definovaná pro všecka x z intervalu J, až snad na hodnotu $x = a$, v které $F(x)$ definována býti nemusí. Konečně budiž dáno číslo c. Pak říkáme, že číslo c je limita funkce $F(x)$ pro x blížící se číslu a, a píšeme

$$\lim_{x \to a} F(x) = c \tag{13·2}$$

když platí toto: Chceme-li dosáhnouti toho, aby všecky hodnoty funkce $F(x)$ zůstávaly v **libovolně předepsané blízkosti** čísla c, stačí omeziti proměnnou x (různou od a) do **dostatečně malé blízkosti** čísla a. Touž věc vyjadřujeme nejčastěji tímto způsobem, který je zvláště pro složitější úlohy velmi vhodný, ale na který je dobře si zvyknout hned v začátcích studia vyšší matematiky: Je-li dáno libovolné kladné číslo ε, existuje kladné číslo δ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - c| < \varepsilon. \tag{13·3}$$

Při tom $\Rightarrow$ je logická značka, která znamená, že z toho, co je psáno před ní vlevo, následuje to, co je psáno za ní vpravo.

Pojem derivace je zvláštním případem pojmu limity. Zřejmě totiž lze říci toto: Že funkce $f(x)$ má pro $x = a$ derivaci rovnou číslu c, to znamená, že jest

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c. \tag{13·4}$$

Také pojem spojitosti je zvláštním případem pojmu limity: Že funkce $f(x)$ je pro $x = a$ spojitá, to znamená

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{13·5}$$

14. Nerovnosti. Při důkazech ve vyšší matematice se stále vyskytují nerovnosti. Proto si v tomto odstavci probereme nejjednodušší věty o nerovnostech. Vyjdeme od pojmu čísel kladných a záporných. Jak je vám známo, platí pro tento pojem následující čtyři věty:

I. Číslo 0 není ani kladné ani záporné.

II. Když a je číslo různé od nuly, pak buďto je a kladné a $-a$ záporné, nebo je $-a$ kladné a a záporné. Žádné číslo není současně kladné i záporné.

III. Jsou-li a, b kladná čísla, je také $a + b$ kladné číslo.

IV. Jsou-li a, b kladná čísla, je také ab kladné číslo.

Nyní můžeme definovati: Pravíme, že číslo a je větší než číslo b a píšeme $a > b$, když číslo $a - b$ je kladné. Pravíme, že číslo a je menší než číslo b a píšeme $a < b$, když číslo $a - b$ je záporné. Volíme-li v této definici $b = 0$, vidíme, že $a > 0$ znamená, že a je kladné, $a < 0$ znamená, že a je záporné.

Na základě vět I až IV a právě zavedené definice můžeme snadno dokázati řadu jednoduchých vět.

V. Jsou-li a, b libovolně daná čísla, platí přesně jeden z tří případů $a = b$, $a > b$, $a < b$.

Neboť $a = b$ znamená $a - b = 0$, $a > b$ znamená, že $a - b$ je kladné, $a < b$ znamená, že $a - b$ je záporné.

VI. Je-li $a > b$, je $b < a$ a obráceně.

Neboť $a > b$ znamená, že $a - b$ je kladné, $b < a$ znamená, že $b - a = -(a - b)$ je záporné.

VII. Když $a > b$, $b > c$, pak $a > c$. [Místo $a > b$, $b > c$ se obyčejně píše stručněji $a > b > c$.]

Neboť $a - b > 0$, $b - c > 0$; ježto $a - c = (a - b) + (b - c)$, jest $a - c > 0$ podle III.

VIII. **Když** $a > b$, **pak** $a + c > b + c$. [„V nerovnosti je dovoleno na obou stranách přičísti totéž číslo."]

Neboť $(a + c) - (b + c) = a - b > 0$.

IX. **Když** $a > b$, $c > d$, **pak** $a + c > b + d$. [„Nerovnosti je dovoleno sčítat".]

Ježto $a > b$, podle VIII je $a + c > b + c$. Ježto $c > d$, podle VIII je $c + b > d + b$ neboli $b + c > b + d$. Tedy je $a + c > b + c$, $b + c > b + d$, takže $a + c > b + d$ podle VII.

X. **Když** $a > b$, $c > 0$, **pak** $ac > bc$. [„V nerovnosti je dovoleno násobit obě strany týmž kladným číslem."]

Neboť $a - b > 0$, $c > 0$, takže podle IV je $(a - b)\, c > 0$, t. j. $ac - bc > 0$.

XI. **Když** $a > b \geqq 0$, $c > d \geqq 0$, **pak** $ac > bd$. [„Nerovnosti mezi nezápornými čísly je dovoleno násobit."]

Podle VII je $a > 0$, $c > 0$, tedy $ac > 0$ podle IV; je-li buďto $b = 0$ nebo $d = 0$, je $bd = 0$, takže $ac > bd$. Nechť tedy $b > 0$, $d > 0$. Ježto $a > b$, $c > 0$, je $ac > bc$ podle X; ježto $c > d$, $b > 0$, je $cb > db$ podle X, t. j. $bc > bd$; ježto $ac > bc$, $bc > bd$, je $ac > bd$ podle VII.

XII. **Když** $a > b$, **pak** $-b > -a$.

Neboť $a - b > 0$, takže $-b - (-a) = a - b > 0$.

XIII. $1 > 0$.

To ovšem víme; ale je zábavné si to formálně odvoditi z předcházejících vět. Ježto $1 \neq 0$, podle II je buďto $1 > 0$ nebo $-1 > 0$; ježto $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$, podle IV je jistě $1 > 0$.

XIV. **Když** $a > 0$, **pak** $\frac{1}{a} > 0$.

Jistě je $\frac{1}{a} \neq 0$. Kdyby nebylo $\frac{1}{a} > 0$, bylo by $-\frac{1}{a} > 0$ podle II; podle IV by bylo $-1 = a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) > 0$; ježto však také $1 > 0$ podle XIII, je $-1 > 0$ nemožné podle II.

XV. **Když** $a > b > 0$, **pak** $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$.

Podle VII je $a > 0$, takže $\frac{1}{a} > 0$ podle XIV. Podle IV je $ab > 0$, takže $\frac{1}{ab} > 0$ podle XIV. Ježto $a > b$, je $a - b > 0$. Jest

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab} = (a - b) \cdot \frac{1}{ab}.$$

Ježto $a - b > 0$, $\frac{1}{ab} > 0$, je tedy $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0$ podle IV, t. j. $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

Další důležité věty se týkají absolutní hodnoty (viz pozn. pod čarou na str. 8).

XVI. Jest $|ab| = |a| \,.\, |b|$.

To je zřejmé, když buďto $a = 0$ nebo $b = 0$, neboť obě strany jsou pak rovné nule. Nechť tedy $a \neq 0$, $b \neq 0$. Zřejmě je $|a| = \varepsilon_1 a$, určíme-li $\varepsilon_1 = \pm 1$ tak, aby bylo $\varepsilon_1 a > 0$. Podobně je $|b| = \varepsilon_2 b$, určíme-li $\varepsilon_2 = \pm 1$ tak, aby bylo $\varepsilon_2 b > 0$. Podle IV je $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,.\, ab = \varepsilon_1 a \,.\, \varepsilon_2 b > 0$; mimo to je $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \pm 1$. Tedy je $|ab| = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \,.\, ab = \varepsilon_1 a \,.\, \varepsilon_2 b = |a| \,.\, |b|$.

XVII. Jest $|a + b| \leqq |a| + |b|$.

Jest $a \leqq |a|$, $b \leqq |b|$, takže $a + b \leqq |a| + |b|$ (viz VIII a IX). Dále jest $-a \leqq |a|$, $-b \leqq |b|$, takže $-a - b \leqq |a| + |b|$. Tedy je $|a + b| \leqq |a| + |b|$, neboť číslo $|a + b|$ je buďto rovné číslu $a + b$ nebo rovné číslu $-a - b$.

XVIII. Jest $||a| - |b|| \leqq |a \pm b| \leqq |a| + |b|$.

Ježto $|b| = |-b|$, stačí si všímati horního znamení. Protože $|a + b| \leqq |a| + |b|$ podle XVII, stačí dokázati, že

$$||a| - |b|| \leqq |a + b|. \tag{14·1}$$

V XVII smíme místo a, b dosaditi $a + b$, $-b$. Tím vznikne

$$|a| \leqq |a + b| + |-b|$$

neboli

$$|a| \leqq |a + b| + |b|.$$

Z toho následuje podle VIII, že

$$|a| - |b| \leqq |a + b|. \tag{14·2}$$

Avšak ve (14·2) smíme zřejmě vyměniti písmena a, b. Tedy je také

$$|b| - |a| \leqq |a + b|. \tag{14·3}$$

Ježto číslo $||a| - |b||$ je rovné jednomu z obou čísel $|a| - |b|$, $|b| - |a|$, plyne (14·1) ze (14·2) a (14·3).

15. Jednoduché věty o limitách. V tomto odstavci si dokážeme několik skoro zřejmých vět o limitách funkcí.

I. Je-li $\lim\limits_{x \to a} F(x) = c$ a je-li k konstanta, jest $\lim\limits_{x \to a} k\, F(x) = k \,.\, c$.

Případ $k = 0$ je tak zřejmý, že jej necháme stranou. Nechť tedy $k \neq 0$. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k F(x) - kc| < \varepsilon. \qquad (15{\cdot}1)$$

Položme $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$. Pak je ε_1 kladné číslo. Ježto $\lim\limits_{x \to a} F(x) = c$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |F(x) - c| < \varepsilon_1. \qquad (15{\cdot}2)$$

Avšak $|k F(x) - kc| = |k| \,.\, |F(x) - c|$, $\varepsilon = |k| \,.\, \varepsilon_1$. Tedy z nerovnosti $|F(x) - c| < \varepsilon_1$ plyne (viz X v odst. 14), že $|k F(x) - kc| < \varepsilon$. Položíme-li tedy $\delta = \delta_1$, plyne (15·1) z (15·2).

II. Je-li $\lim\limits_{x \to a} F_1(x) = c_1$, $\lim\limits_{x \to a} F_2(x) = c_2$, jest $\lim\limits_{x \to a} [F_1(x) + F_2(x)] = c_1 + c_2$.

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |[F_1(x) + F_2(x)] - (c_1 + c_2)| < \varepsilon. \qquad (15{\cdot}3)$$

Zvolme si dvě kladná čísla ε_1 a ε_2 tak, aby bylo $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$. Protože $\lim\limits_{x \to a} F_1(x) = c_1$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |F_1(x) - c_1| < \varepsilon_1. \qquad (15{\cdot}4)$$

Protože $\lim\limits_{x \to a} F_2(x) = c_2$, existuje číslo $\delta_2 > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |F_2(x) - c_2| < \varepsilon_2. \qquad (15{\cdot}5)$$

Nyní zvolme číslo $\delta > 0$ tak, aby bylo i $\delta < \delta_1$ i $\delta < \delta_2$. Je-li $0 < |x - a| < \delta$, je předně $0 < |x - a| < \delta_1$ a za druhé $0 < |x - a| < \delta_2$. Tedy podle (15·4) a (15·5) je $|F_1(x) - c_1| < \varepsilon_1$, $|F_2(x) - c_2| < \varepsilon_2$, takže podle IX v odst. 14 je $|F_1(x) - c_1| + |F_2(x) - c_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Podle XVII v odst. 14 je však $|[F_1(x) + F_2(x)] - (c_1 + c_2)| \leq |F_1(x) - c_1| + |F_2(x) - c_2|$. Mimo to je $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$. Tedy podle VII v odst. 14 je $|[F_1(x) + F_2(x)] - (c_1 + c_2)| < \varepsilon$. Tím je správnost vztahu (15·3) dokázána.

III. Je-li $\lim\limits_{x \to a} F_1(x) = c_1$, $\lim\limits_{x \to a} F_2(x) = c_2$, jest $\lim\limits_{x \to a} [F_1(x) - F_2(x)] = c_1 - c_2$.

Podle I je totiž $\lim\limits_{x \to a} [-F_2(x)] = -c_2$, takže stačí užíti II s funkcí $-F_2(x)$ místo funkce $F_2(x)$.

IV. Je-li $\lim\limits_{x\to a} F_1(x) = c_1$, $\lim\limits_{x\to a} F_2(x) = c_2$, jest $\lim\limits_{x\to a} [F_1(x) \,.\, F_2(x)] = c_1c_2$.

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |F_1(x) F_2(x) - c_1c_2| < \varepsilon. \quad (15\cdot6)$$

Zvolme si dvě kladná čísla α_1 a α_2 tak, aby bylo $\alpha_1 + \alpha_2 < \varepsilon$. Dále si zvolme nejprve číslo $\varepsilon_1 > 0$ tak, aby bylo $|c_2|\,\varepsilon_1 < \alpha_1$ a potom číslo $\varepsilon_2 > 0$ tak, aby bylo $(|c_1| + \varepsilon_1)\,\varepsilon_2 < \alpha_2$. Protože $\lim\limits_{x\to a} F_1(x) = c_1$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že platí (15·4). Protože $\lim\limits_{x\to a} F_2(x) = c_2$, existuje číslo $\delta_2 > 0$ takové, že platí (15·5). Nyní zvolme číslo $\delta > 0$ tak, aby bylo i $\delta < \delta_1$ i $\delta < \delta_2$. Nechť nyní platí $0 < |x - a| < \delta$. Pak je předně $0 < |x - a| < \delta_1$, takže podle (15·4) je $|F_1(x) - c_1| < \varepsilon_1$. Podle X a XVI v odst. 14 je $|c_2 F_1(x) - c_1c_2| \leqq |c_2|\,\varepsilon_1$. Protože $|c_2|\,\varepsilon_1 < \alpha_1$, je tedy

$$|c_2 [F_1(x) - c_1]| < \alpha_1 \quad (15\cdot7)$$

podle VII v odst. 14. Dále je $F_1(x) = c_1 + [F_1(x) - c_1]$, takže

$$|F_1(x)| < |c_1| + \varepsilon_1 \quad (15\cdot8)$$

podle VII a XVII v odst. 14. Za druhé je však ještě $0 < |x - a| < \delta_2$, takže podle (15·5) je $|F_2(x) - c_2| < \varepsilon_2$. Tedy podle (15·8) a podle XI a XVI v odst. 14 je $|F_1(x) \,.\, [F_2(x) - c_2]| < (|c_1| + \varepsilon_1)\,\varepsilon_2$; ježto $(|c_1| + \varepsilon_1)\,\varepsilon_2 < \alpha_1$, je tedy

$$|F_1(x) \,.\, [F_2(x) - c_2]| < \alpha_2. \quad (15\cdot9)$$

Protože

$$F_1(x) F_2(x) - c_1c_2 = c_2 [F_1(x) - c_1] + F_1(x) [F_2(x) - c_2],$$

následuje z (15·7) a (15·9) podle VII a XVII v odst. 14, že $|F_1(x) F_2(x) - c_1c_2| < \alpha_1 + \alpha_2$. Protože $\alpha_1 + \alpha_2 < \varepsilon$, je správnost vztahu (15·6) dokázána.

V. Je-li $\lim\limits_{x\to a} F(x) = c$ a je-li $c \neq 0$, jest $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{F(x)} = \dfrac{1}{c}$.

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{c} \right| < \varepsilon. \quad (15\cdot10)$$

Zvolme si kladné číslo ε_1 tak, aby bylo předně

$$\varepsilon_1 < \tfrac{1}{2}c^2\varepsilon \tag{15·11}$$

a za druhé

$$\varepsilon_1 < \tfrac{1}{2}\,|\,c\,|. \tag{15·12}$$

Z (15·12) následuje podle VIII v odst. 14, že $\varepsilon_1 - |\,c\,| < -\frac{1}{2}\,|\,c\,|$, takže podle XII v odst. 14 jest

$$|\,c\,| - \varepsilon_1 > \tfrac{1}{2}\,|\,c\,|. \tag{15·13}$$

Ježto $\lim\limits_{x \to a} F(x) = c$, existuje číslo $\delta_1 > 0$ takové, že

$$0 < |\,x - a\,| < \delta_1 \Rightarrow |\,F(x) - c\,| < \varepsilon_1. \tag{15·14}$$

Nechť nyní platí $0 < |\,x - a\,| < \delta_1$. Ježto $c = [F(x) - c] - F(x)$, podle XVII v odst. 14 je $|\,c\,| \leqq |\,F(x) - c\,| + |\,-F(x)\,| = |\,F(x) - c\,| + |\,F(x)\,|$. Podle (15·14) a podle VIII v odst. 14 je však $|\,F(x) - c\,| + |\,F(x)\,| < |\,F(x)\,| + \varepsilon_1$, takže $|\,c\,| < |\,F(x)\,| + \varepsilon_1$ podle VII v odst. 14. Tedy $|\,c\,| - \varepsilon_1 < |\,F(x)\,|$ podle VIII v odst. 14. Podle (15·13) je však také $\frac{1}{2}\,|\,c\,| < |\,c\,| - \varepsilon_1$, takže $|\,F(x)\,| > \frac{1}{2}\,|\,c\,|$ podle VII v odst. 14. Ježto $c \neq 0$, je $|\,c\,| > 0$. Tedy $|\,c\,| \,.\, |\,F(x)\,| > \frac{1}{2}\,|\,c\,|^2 = \frac{1}{2}c^2$, takže $|\,c\,F(x)\,| > \frac{1}{2}c^2$ podle XVI v odst. 14. Z XV v odst. 14 následuje nyní

$$\left|\frac{1}{c\,F(x)}\right| < \frac{1}{\frac{1}{2}c^2}. \tag{15·15}$$

Z (15·14) a (15·15) plyne podle XI a XVI v odst. 14

$$\left|\frac{F(x) - c}{c\,F(x)}\right| < \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{2}c^2}. \tag{15·16}$$

Avšak

$$\frac{1}{F(x)} - \frac{1}{c} = -\frac{F(x) - c}{c\,F(x)} \tag{15·17}$$

a mimo to plyne z (15·11) podle X v odst. 14, že

$$\frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{2}c^2} < \varepsilon. \tag{15·18}$$

Z (15·16), (15·17) a (15·18) plyne podle VII v odst. 14, že

$$\left|\frac{1}{F(x)} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že vztah (15·10) je správný, volíme-li $\delta = \delta_1$.

VI. Je-li $\lim\limits_{x\to a} F_1(x) = c_1$, $\lim\limits_{x\to a} F_2(x) = c_2$ a je-li $c_2 \neq 0$, jest $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{F_1(x)}{F_2(x)} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Neboť podle V je $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{F_2(x)} = \dfrac{1}{c_2}$, takže stačí užíti věty IV, v které ovšem místo funkce $F_2(x)$ vezmeme funkci $\dfrac{1}{F_2(x)}$.

Víme, že když

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a), \tag{15·19}$$

je funkce $F(x)$ pro $x = a$ spojitá a že také obráceně platí (15·19), je-li funkce $F(x)$ pro $x = a$ spojitá. Proto z předcházejících vět o limitách plynou ihned následující věty o spojitosti:

VII. Je-li $f(x)$ spojitá funkce a je-li k konstanta, je také $k\,f(x)$ spojitá funkce.

VIII. Jsou-li $f_1(x)$ a $f_2(x)$ spojité funkce, jsou také

$$f_1(x) + f_2(x),\ f_1(x) - f_2(x),\ f_1(x)\,f_2(x),\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \tag{15·20}$$

spojité funkce.

První tři z funkcí (15·20) jsou definovány pro všecky ty hodnoty proměnné x, v kterých jsou definovány obě funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$. Poslední z funkcí (15·20) je však definována pouze ty z naznačených hodnot proměnné x, pro něž je mimo to $f_2(x) \neq 0$.

Souvislost mezi pojmem derivace a pojmem spojitosti je vyjádřena následující jednoduchou větou

IX. Má-li funkce $f(x)$ pro $x = a$ derivaci, je tato funkce pro $x = a$ spojitá.

Neboť podle předpokladu existuje limita

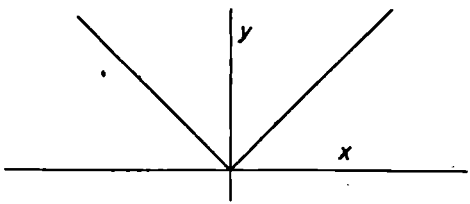
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c;$$

mimo to je zřejmě $\lim_{x \to a} (x - a) = 0$, takže podle IV jest $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$, a to znamená, že funkce $f(x)$ je pro $x = a$ spojitá.

Věta IX se nedá obrátit; ze spojitosti funkce nemůžeme soudit na existenci derivace. Jednoduchým příkladem je funkce $f(x) = |x|$. Tato funkce je všude spojitá, ale pro $x = 0$ nemá derivaci, neboť podíl

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \tag{15·21}$$

je pro kladné x rovný 1, pro záporné x rovný -1, takže neexistuje určitá hodnota, které by se podíl (15·21) blížil, když se x blíží nule. To je také patrné z grafu funkce (obr. 12), který se skládá ze dvou polopřímek, jež tvoří pravý úhel s vrcholem v počátku, takže v počátku neexistuje ke grafu tečna.



Obr. 12.

16. Derivování součtu a součinu. Hodnotu derivace funkce $f(x)$ pro $x = a$ značíme často $f'(a)$. Při tom hodnota a je libovolná, a proto můžeme také psáti x místo a, t. j. z funkce $f(x)$ dostaneme derivováním novou funkci, kterou značíme $f'(x)$. V odst. 10 jsme poznali, jak se derivuje lineární funkce; můžeme si to zapsati ve tvaru

$$(kx + l)' = k. \tag{16·1}$$

Z odst. 11 si poznamenejme pravidlo

$$(x^2)' = 2x \tag{16·2}$$

a z odst. 12 pravidlo

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (16{\cdot}3)$$

platné pouze pro $x \neq 0$; tuto výhradu si nemusíme ani zaznamenávati, protože pro $x = 0$ jsou obě strany v (16·3) bezvýznamné.

Z vět o limitách, které byly odvozeny v odst. 15, plynou jednoduchá, ale důležitá pravidla pro derivování.

I. Má-li funkce $f(x)$ pro $x = a$ derivaci a je-li k konstanta, má také funkce $k\,f(x)$ pro $x = a$ derivaci, která se počítá podle pravidla

$$[k \,.\, f(x)]' = k \,.\, f'(x). \qquad (16{\cdot}4)$$

Neboť je-li

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

pak podle I v odst. 15 je

$$\lim_{x \to a} \frac{k\,f(x) - k\,f(a)}{x - a} = k \,.\, f'(a).$$

II. Mají-li funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ obě pro $x = a$ derivaci, mají také funkce $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$ pro $x = a$ derivaci, která se počítá podle pravidla

$$[f_1(x) + f_2(x)]' = f'_1(x) + f'_2(x), \qquad (16{\cdot}5)$$

$$[f_1(x) - f_2(x)]' = f'_1(x) - f'_2(x). \qquad (16{\cdot}6)$$

Neboť je-li

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = f'_1(a), \quad \lim_{x \to a} \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} = f'_2(a),$$

pak podle II a III v odst. 15 je

$$\lim_{x \to a} \frac{[f_1(x) \pm f_2(x)] - [f_1(a) \pm f_2(a)]}{x - a} = f'_1(a) \pm f'_2(a).$$

Pravidlo (16·6) je ovšem důsledek pravidel (16·4) a (16·5), z nichž plyne také obecnější pravidlo

$$[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]' = k_1 f'_1(x) + k_2 f'_2(x).$$

Pravidlo (16·5) snadno zobecníme na větší počet sčítanců s tímto výsledkem: součet dvou nebo více funkcí derivujeme tak, že derivujeme každého sčítance zvlášť a jednotlivé výsledky sečteme.

III. Mají-li funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ pro $x = a$ derivaci, má také funkce $f_1(x) . f_2(x)$ pro $x = a$ derivaci, která se počítá podle pravidla

$$\boxed{[f_1(x) . f_2(x)]' = f'_1(x) . f_2(x) + f_1(x) . f'_2(x).} \quad (16{\cdot}7)$$

Podle předpokladu je

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = f'_1(a), \quad \lim_{x \to a} \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} = f'_2(a).$$

Podle IX v odst. 15 je $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = f_2(a)$, takže podle IV v odst. 15 je

$$\lim_{x \to a} \left[f_2(x) . \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} \right] = f'_1(a) . f_2(a);$$

mimo to je podle I v odst. 15

$$\lim_{x \to a} \left[f_1(a) . \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} \right] = f_1(a) . f'_2(a).$$

Ježto

$$\frac{f_1(x) f_2(x) - f_1(a) f_2(a)}{x - a} = f_2(x) \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} + $$
$$+ f_1(a) \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a},$$

plyne ze II v odst. 15

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) f_2(x) - f_1(a) f_2(a)}{x - a} = f'_1(a) f_2(a) + f_1(a) f'_2(a),$$

čímž je důkaz pravidla (16·7) dokončen.

Když v (16·1) volíme $k = 0$, dostaneme jednoduché pravidlo: Derivace konstanty je rovna nule. Známe-li toto pravidlo, dostaneme z pravidla (16·7) jako zvláštní případ pravidlo (16·4), volíce za jeden z obou činitelů konstantu.

Pravidlo (16·7) je nejlépe si pamatovati ve slovním znění: Derivace součinu dvou funkcí je součet dvou částí; každá z obou částí je součin, který vznikne z původního součinu tím, že se jeden faktor derivuje a druhý opíše.

Když v (16·1) zvolíme $k = 1$, $l = 0$, dostaneme pravidlo

$$(x)' = 1. \tag{16·8}$$

Z (16·8) dostaneme podle pravidla (16·7)

$$(x^2)' = (x \,.\, x)' = 1 \,.\, x + x \,.\, 1 = 2x,$$

což není nic jiného než (16·2). Dalším užíváním pravidla (16·7) dostaneme postupně

$$\begin{aligned}(x^3)' &= (x^2 \,.\, x)' = 2x \,.\, x + x^2 \,.\, 1 = 3x^2,\\ (x^4)' &= (x^3 \,.\, x)' = 3x^2 \,.\, x + x^3 \,.\, 1 = 4x^3,\\ (x^5)' &= (x^4 \,.\, x)' = 4x^3 \,.\, x + x^4 \,.\, 1 = 5x^4 \text{ atd.,}\end{aligned}$$

obecně

$$(x^n)' = n \,.\, x^{n-1}. \tag{16·9}$$

Podobně dostaneme z (16·3) postupně

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2}\right)' &= \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3},\\ \left(\frac{1}{x^3}\right)' &= \left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\right)' = -\frac{2}{x^3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^4},\\ \left(\frac{1}{x^4}\right)' &= \left(\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{x}\right)' = -\frac{3}{x^4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^5} \text{ atd.,}\end{aligned}$$

obecně

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}. \tag{16·10}$$

Protože x^{-n} znamená totéž jako $\frac{1}{x^n}$, můžeme (16·10) také psáti ve tvaru

$$(x^{-n})' = (-n) \cdot x^{-n-1},$$

což znamená, že pravidlo (16·9), původně odvozené pro kladné celé n, zůstává v platnosti i pro záporné celé n. Samozřejmě musíme při záporném n vyloučiti hodnotu $x = 0$.

17. Derivace složené funkce. V předchozích odstavcích jsme značili nezávisle proměnnou písmenem x; můžeme však také užíti jakéhokoli jiného písmene. Tato samozřejmá poznámka je užitečná u t. zv. složených funkcí. Buďtež dány dvě funkce jedné proměnné: funkce $f(t)$ proměnné t a funkce $\varphi(x)$ proměnné x; můžeme z nich sestaviti novou funkci $F(x)$ proměnné x tím, že do funkce $f(t)$ dosadíme $t = \varphi(x)$, tedy

$$F(x) = f[\varphi(x)]; \qquad (17·1)$$

takto vzniklá funkce $F(x)$ se jmenuje složená funkce.

Nejsou-li funkce $f(t)$ a $\varphi(x)$ definovány pro všecky hodnoty nezávisle proměnné, nemusí býti ani $F(x)$ definována pro všecka x. Zvolme určitou hodnotu a; aby byla funkce $F(x)$ definována pro $x = a$, musí býti především funkce $\varphi(x)$ definována pro $x = a$, ale to nestačí; je-li

$$b = \varphi(a), \qquad (17·2)$$

musí býti ještě $f(t)$ definována pro $t = b$ a pak jest

$$F(a) = f(b). \qquad (17·3)$$

Nechť platí (17·1) a (17·2); nechť funkce $\varphi(x)$ je definována pro všecka x blízká číslu a; nechť funkce $f(t)$ je definována pro všecka t blízká číslu b; mimo to nechť je funkce $\varphi(x)$ spojitá pro $x = a$. Pak je funkce $F(x)$ definována pro všecka x blízká číslu a. Platí-li ještě dále, že funkce $f(t)$ je spojitá pro $t = b$, je funkce $F(x)$ spojitá pro $x = a$.

Správnost učiněných tvrzení je skoro samozřejmá; podrobný důkaz probíhá takto: Existuje kladné číslo α takové, že $\varphi(x)$ je definována pro všecka x, pro něž platí $| x - a | < \alpha$; existuje kladné číslo β takové, že $f(t)$ je definována pro všecka t, pro něž platí $| t - b | < \beta$. Protože je funkce $\varphi(x)$ spojitá pro $x = a$, existuje kladné číslo γ takové, že

$$| x - a | < \gamma \Rightarrow | \varphi(x) - \varphi(a) | < \beta;$$

můžeme předpokládati $\gamma < \alpha$. Je-li nyní $| x - a | < \gamma$, je hodnota funkce $\varphi(x)$ v tomto x definována a jest $| \varphi(x) - b | < \beta$ [viz (17·2)], takže $f(t)$ je definována pro $t = \varphi(x)$; tudíž $F(x)$ je definována v našem x. Nyní připojíme předpoklad, že $f(t)$ je spojitá pro $t = b$ a zvolíme kladné číslo ε. Máme dokázati, že existuje kladné číslo δ takové, že funkce $F(x)$ je definována pro všecka x taková, že $| x - a | < \delta$ a že $| F(x) - F(a) | < \varepsilon$ pro všecka tato x. Protože je funkce $f(t)$ spojitá pro $t = b$, existuje kladné číslo ϱ takové, že $\varrho < \beta$ a že

$$| t - b | < \varrho \Rightarrow | f(t) - f(b) | < \varepsilon. \tag{17·4}$$

Protože je funkce $\varphi(x)$ spojitá pro $x = a$, existuje kladné číslo δ takové, že $\delta < \gamma$ a že

$$| x - a | < \delta \Rightarrow | \varphi(x) - \varphi(a) | < \varrho. \tag{17·5}$$

Protože $\delta < \gamma$, je funkce $F(x)$ definována pro všecka x, pro něž $| x - a | < \delta$. Je-li $| x - a | < \delta$, je $| \varphi(x) - b | < \varrho$ podle (17·2) a (17·5), takže $| F(x) - F(a) | < \varepsilon$ podle (17·1), (17·3) a (17·4).

Má-li funkce $\varphi(x)$ derivaci pro $x = a$ a má-li funkce $f(t)$ derivaci pro $t = b$ [viz (17·2)], má složená funkce $F(x)$ derivaci pro $x = a$ a tato derivace se počítá podle pravidla

$$F'(x) = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x), \tag{17·6}$$

t. j. platí

$$F'(a) = f'(b) \cdot \varphi'(a). \tag{17·7}$$

Abychom dokázali správnost vztahu (17·7), označme si jako obvykle přírůstek proměnné x písmenem h. Podle předpokladu se podíl

$$\frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h} \tag{17·8}$$

blíží číslu $\varphi'(a)$, blíží-li se h nule. Máme dokázati, že se podíl

$$\frac{F(a + h) - F(a)}{h} \tag{17·9}$$

blíží číslu $f'(b) \,.\, \varphi'(a)$, blíží-li se h nule. Položme

$$k = \varphi(a + h) - \varphi(a); \tag{17·10}$$

podle (17·2) je $\varphi(a + h) = b + k$, takže podle (17·1) je $F(a + h) = f(b + k)$ a tedy [viz (17·3)]

$$F(a + h) - F(a) = f(b + k) - f(b). \tag{17·11}$$

Podle (17·10) a (17·11) můžeme psáti podíl (17·9) ve tvaru

$$\frac{f(b + k) - f(b)}{k} \,.\, \frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h}. \tag{17·12}$$

Protože má funkce $\varphi(x)$ v čísle a derivaci, je pro $x = a$ spojitá (viz IX v odst.). Tedy ze (17·10) plyne, že když se h blíží nule, také k se blíží nule, a protože funkce $f(t)$ má pro $t = b$ derivaci, blíží se prvý faktor v (17·12) číslu $f'(b)$. Druhý faktor v (17·12) se však blíží číslu $\varphi'(a)$, takže se celý součin (17·12) blíží číslu $f'(b) \,.\, \varphi'(a)$. Protože se součin (17·12) rovná podílu (17·9), byli bychom s důkazem vztahu (17·7) hotovi.

Ve skutečnosti je však v postupu právě provedeném chybička, a bude poučné, když si ji nyní výslovně vytkneme a potom snadno napravíme. Že funkce $\varphi(x)$ má pro $x = a$ derivaci, to ovšem znamená, že se podíl (17·8) blíží číslu $\varphi'(a)$, blíží-li se h nule. Tak to bylo také výše řečeno. Ale nesmíme zapomínati, že se h musí blížit nule tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné, neboť pro $h = 0$ nemá podíl (17·8) vůbec smyslu. Dokázati máme, že se podíl (17·9) blíží číslu $f'(b) \,.\, \varphi'(a)$, blíží-li se h nule zase tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné. Jako prostředek k důkazu máme vedle toho, co bylo už řečeno o podílu (17·8), ještě ten fakt, že se podíl

$$\frac{f(b + k) - f(b)}{k} \tag{17·13}$$

blíží číslu $f'(b)$, blíží-li se k nule tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné. Podíl (17·13) se nám vyskytl jako prvý faktor součinu (17·12). Při tom jsme za k dosazovali podle (17·10) a přesvědčili jsme se, že se k počítané ze (17·10) blíží nule, blíží-li se h nule. Ale nač jsme zapomněli, jest, že k počítané ze (17·10) může býti rovné nule (je-li h blízké nule a různé od nuly). V tom je právě chyba našeho důkazu. Abychom tu chybu napravili, zavedeme si pomocnou veličinu z pomocí rovnice

$$\frac{f(b + k) - f(b)}{k} - f'(b) = z; \tag{17·14}$$

tato veličina z je tedy funkcí proměnné k, definovanou dosud pouze pro $k \neq 0$ [a při tom jen pro ta k, pro něž je číslo $f(b + k)$ definováno; ale na tom mnoho nezáleží, protože číslo $f(b + k)$ je jistě definováno pro všecka k dosti blízká nule a jen taková k budeme potřebovati]. Z rovnice (17·14) si vypočteme

$$f(b + k) - f(b) = [f'(b) + z] \, . \, k. \tag{17·15}$$

Rovnice (17·15) platí ovšem pro všecka ta k, pro něž platí rovnice (17·14); ale rovnice (17·15) je správná i pro $k = 0$, ať už dáme v tomto případě veličině z jakoukoli hodnotu. Dohodněme se, že pro $k = 0$ bude také $z = 0$. Protože funkce $f(t)$ má pro $t = b$ derivaci $f'(b)$, vychází ze (17·14), že se z blíží nule, blíží-li se k nule tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné. Protože však pro $k = 0$ je $z = 0$, blíží se veličina z nule dokonce i tehdy, když se blíží k nule jakýmkoli způsobem (t. j. i tak, že k může nabýti také hodnoty nula). Nyní už snadno důkaz dokončíme. Nechť se h blíží nule tak, aby nikdy nebylo nule přesně rovné. Za k si dosaďme výraz (17·10); pak se k jistě bude blížiti nule. Protože je z určitá funkce proměnné k a protože jsme za k dosadili výraz závislý na h, bude po dosazení z záviseti na h. Z toho, co bylo řečeno, plyne, že když se h blíží nule, nejsouc samo nule rovné, blíží se také z nule, při čemž může z nabýti i hodnoty nula. Podle (17·10), (17·11) a (17·15) je však

$$\frac{F(a + h) - F(a)}{h} = [f'(b) + z] \, . \, \frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{h}. \tag{17·16}$$

Když se h blíží nule (při čemž $h \neq 0$), blíží se v (17·16) napravo prvý faktor číslu $f'(b)$ a druhý číslu $\varphi'(a)$, takže se podíl (17·9) blíží číslu $f'(b) \, . \, \varphi'(a)$ a s důkazem jsme hotovi, tentokrát doopravdy.

18. Derivace mocniny; derivace podílu. Když v právě odvozeném vzorci pro derivaci složené funkce $f[\varphi(x)]$ volíme $f(t) = t^n$ a když si připomeneme z odst. 16 vzorec $(t^n)' = $ $= nt^{n-1}$, dostaneme vzorec pro derivaci mocniny*)

$$([f(x)]^n)' = n[f(x)]^{n-1} \, . \, f'(x); \tag{18·1}$$

při kladném n platí tento vzorec pro všecka x, v nichž existuje derivace $f'(x)$; při záporném n musíme mimo to předpokládati $f(x) \neq 0$. Pro $n = -1$ zní vzorec (18·1)

*) Ve vzorci je psáno f místo φ; na tom ovšem nezáleží.

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}, \tag{18·2}$$

což je vzorec pro derivaci převrácené hodnoty funkce. Protože

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}$$

a protože umíme derivovati součin dvou funkcí, získáváme dále vzorec pro derivaci podílu

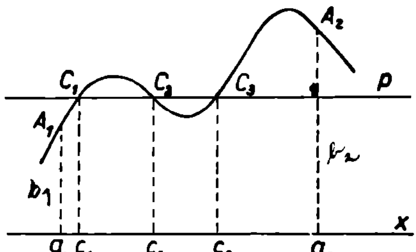
$$\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]' = \frac{f'_1(x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f'_2(x)}{[f_2(x)]^2}, \tag{18·3}$$

platný pro ta x, v nichž existují obě derivace $f'_1(x)$, $f'_2(x)$ a jest $f_2(x) \neq 0$.

19. Inversní funkce. Budiž definována v nějakém intervalu J spojitá funkce

$$y = f(x). \tag{19·1}$$

Zvolme dvě čísla a_1, a_2 z intervalu J a položme $b_1 = f(a_1)$,



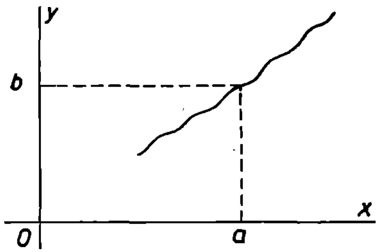
Obr. 13.

$b_2 = f(a_2)$. Předpokládejme, že je $b_1 < b_2$ a zvolme si nějaké číslo d tak, že

$$b_1 < d < b_2. \tag{19·2}$$

Ty body $(x; y)$, pro něž platí $y = d$, tvoří vodorovnou přímku p [viz obr. (13)]. Z (19·2) následuje, že bod $A_1 = (a_1; b_1)$ leží pod přímkou p a bod $A_2 = (a_2; b_2)$ nad přímkou p. Protože je funkce (19·1) spojitá, tvoří její graf jedinou souvislou čáru; tato čára spojuje bod A_1 pod přímkou p s bodem A_2 nad přímkou p. Názor ukazuje, že mezi body A_1 a A_2 musí býti na grafu aspoň jeden bod C, který leží také na přímce p. Tomuto bodu C odpovídá číslo c, které leží mezi čísly a_1, a_2 a v kterém funkce $f(x)$ nabývá hodnoty d. Takových bodů C může býti ovšem také více; na př. v obr. 13 máme tři takové body C, jimž odpovídají tři čísla c.

Tím jsme dospěli k tomuto výsledku: **Nabude-li spojitá funkce v nějakém intervalu J hodnot b_1 a b_2, při čemž $b_1 < b_2$, a je-li $b_1 < d < b_2$, nabude tato funkce v intervalu J hodnoty d** (jednou nebo vícekrát). Z toho následuje dále, že **hodnoty, kterých spojitá funkce nabude v intervalu J, tvoří interval, není-li ta funkce konstanta.** (Konstanta nabývá ovšem jen jediné hodnoty.) K tomuto výsledku jsme byli vedeni názorem; v Dodatku je udán přesný důkaz nezávislý na názoru.



Obr. 14.

Nyní předpokládejme o funkci (19·1) nejen, že je v intervalu J spojitá, nýbrž ještě také, že v intervalu J stále **roste**. Hodnoty, kterých funkce (19·1) v intervalu J nabude, tvoří interval K. Každému číslu a z intervalu J přiřazuje funkce (19·1) zcela určité číslo b z intervalu K tak, že

$$b = f(a). \qquad (19{\cdot}3)$$

Ale nyní můžeme tvrditi také obráceně, že každému číslu b

z intervalu K přiřazuje funkce (19·1) zcela určité číslo a z intervalu J tak, že platí (19·1) (viz obr. 14). Neboť jsou-li a_1, a_2 dvě různá čísla z intervalu J a je-li na př. $a_1 < a_2$, musí býti $f(a_1) < f(a_2)$, protože (19·1) je rostoucí funkce, takže nemůže býti současně $f(a_1) = b$, $f(a_2) = b$. K danému číslu a najdeme číslo b, protneme-li graf funkce (19·1) svislou přímkou o rovnici $x = a$; k danému číslu b najdeme číslo a, protneme-li graf funkce (19·1) vodorovnou přímkou o rovnici $y = b$.

Je-li tedy (19·1) spojitá rostoucí funkce v intervalu J, je netoliko proměnná y určitou funkcí proměnné x, nýbrž také x lze považovati za funkci proměnné y, t. j. můžeme psáti

$$x = \varphi(y), \tag{19·4}$$

při čemž vztah (19·4) je ekvivalentní se vztahem (19·1). Funkce (19·4) se nazývá inversní funkce k funkci (19·1).

Z názoru je patrné, že současně s funkcí (19·1) také inversní funkce (19·4) je spojitá rostoucí funkce. Můžeme si to ostatně také formálně dokázati. Jsou-li nejprve b_1, b_2 dvě čísla z intervalu K a je-li na př. $b_1 < b_2$, jest $\varphi(b_1) < \varphi(b_2)$; neboť nechť $\varphi(b_1) = a_1$, $\varphi(b_2) = a_2$; pak je $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$; kdyby bylo $a_1 = a_2$, bylo by $b_1 = b_2$; kdyby bylo $a_2 < a_1$, bylo by $b_2 < b_1$, neboť $f(x)$ je rostoucí funkce; protože oboje je nemožné, musí býti $a_1 < a_2$, t. j. $\varphi(b_1) < \varphi(b_2)$. Tím je dokázáno, že $\varphi(y)$ je rostoucí funkce v intervalu K. Dále si zvolme v intervalu K určité číslo b a dokažme, že je funkce (19·4) pro $y = b$ spojitá. Pro určitost si provedeme tento důkaz za předpokladu, že číslo b leží uvnitř intervalu K. Je-li $a = \varphi(b)$ [takže také platí (19·3)], uvědomíme si snadno, že číslo a leží uvnitř intervalu J. Je-li dáno kladné číslo ε, můžeme si zvoliti v intervalu J čísla a_1, a_2 tak, že jest

$$a - \varepsilon < a_1 < a < a_2 < a + \varepsilon. \tag{19·5}$$

Položme $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$. Zřejmě $b_1 < b < b_2$, takže existuje kladné číslo δ takové, že

$$b_1 < b - \delta < b < b + \delta < b_2. \tag{19·6}$$

Nyní platí

$$|\, y - b \,| < \delta \Rightarrow |\, \varphi(y) - \varphi(b) \,| < \varepsilon,$$

čímž je spojitost funkce $\varphi(y)$ pro $y = b$ dokázána. Neboť nechť $| y - b | < \delta$. Pak je $b - \delta < y < b + \delta$, takže podle (19·6) je $b_1 < y < b_2$. Protože $\varphi(y)$ je rostoucí funkce, je $\varphi(b_1) < \varphi(y) < \varphi(b_2)$ neboli $a_1 < \varphi(y) < a_2$, takže podle (19·5) je $a - \varepsilon < \varphi(y) < a + \varepsilon$ neboli $| \varphi(y) - \varphi(b) | < \varepsilon$, neboť $a = \varphi(b)$.

Předpokládejme nyní, že v čísle a, které leží uvnitř intervalu J, má naše funkce (19·1) derivaci, že tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{19·7}$$

Protože $f(x)$ je rostoucí funkce, mají ve zlomku, který je nalevo v (19·7), čitatel a jmenovatel stále stejné znamení, t. j. ten zlomek je stále kladný. Takový zlomek se zřejmě nemůže blížit zápornému číslu. Tedy je $f'(a) \geq 0$. Předpokládejme, že jest $f'(a) \neq 0$, tedy že jest $f'(a) > 0$. Podle V v odst. 15 je pak

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}. \tag{19·8}$$

Ale když se číslo x blíží číslu a, blíží se bod (x, y) na grafu funkce (19·1) bodu (a, b) a proměnná $y = f(x)$ se blíží hodnotě b. Obráceně, když se y blíží číslu b, blíží se bod $(x; y)$ na grafu funkce (19·1) bodu $(a; b)$ a proměnná $x = \varphi(y)$ se blíží hodnotě b. Proto lze vztah (19·8) psáti také

$$\lim_{x \to b} \frac{\varphi(y) - \varphi(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)} \tag{19·9}$$

a to znamená, že funkce (19·4) inversní k funkci (19·1) má pro $y = b$, kde $b = f(a)$, derivaci rovnou převrácené hodnotě derivace $f'(a)$ (za předpokladu, že derivace $f'(a)$ existuje a není rovna nule).

Formální důkaz vztahu (19·9) probíhá asi takto. Zvolme číslo $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$| y - b | < \delta \Rightarrow \left| \frac{\varphi(y) - \varphi(b)}{y - b} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \varepsilon. \tag{19·10}$$

Podle (19·8) existuje číslo $\alpha > 0$ takové, že

$$|x-a| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{x-a}{f(x)-f(a)} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \varepsilon. \tag{19·11}$$

Protože funkce (19·4) je pro $y = b$ spojitá, existuje číslo $\delta > 0$ takové, že

$$|y-b| < \delta \Rightarrow |\varphi(y)-\varphi(b)| < \alpha. \tag{19·12}$$

Toto číslo δ má vlastnost (19·10). Neboť je-li $|y-b| < \delta$, podle (19·12) je $|\varphi(y)-a| < \alpha$, ježto $a = \varphi(b)$. Tedy podle (19·11) je

$$\left| \frac{\varphi(y)-a}{f[\varphi(y)]-f(a)} - \frac{1}{f'(a)} \right| < \varepsilon$$

a to se mělo právě dokázati, neboť $a = \varphi(b)$, $b = f(a)$, $y = f[\varphi(y)]$.

Pravidla o derivování inversní funkce, které jsme právě odvodili, užijeme v této knížce na jediném příkladě. Budiž

$$y = x^n, \tag{19·13}$$

kde n znamená určité celé kladné číslo a x probíhá interval J všech kladných čísel. (19·13) určuje spojitou rostoucí funkci a inversní funkce je

$$x = \sqrt[n]{y}. \tag{19·14}$$

Víme, že funkce (19·13) má derivaci nx^{n-1}; pro kladné x je tato derivace kladná, a proto má funkce (19·14) derivaci

$$\frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{x^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{y}}{y}.$$

Místo y můžeme na konec zase psáti x a zapsati si nový vzorec pro derivování odmocniny

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{x}}{x}, \tag{19·15}$$

platný pro každé kladné x.

Je-li nyní dáno libovolné t. zv. racionální číslo r, t. j. zlomek

$$r = \frac{m}{n},$$

kde m a n jsou čísla celá, při čemž můžeme předpokládati $n > 0$, je vám známo, že při kladném x se definuje mocnina x^r s exponentem r takto:

$$x^r = (\sqrt[n]{x})^m. \tag{19·16}$$

Derivaci funkce x^r můžeme počítati, spojíme-li právě odvozený vzorec (19·14) se vzorcem (18·1). Dostaneme takto

$$(x^r)' = [(\sqrt[n]{x})^m]' = m \,.\, (\sqrt[n]{x})^{m-1} \,.\, (\sqrt[n]{x})' =$$

$$= m\, (\sqrt[n]{x})^{m-1} \,.\, \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m-1}{n}} \,.\, x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1}$$

neboli

$$(x^r)' = r x^{r-1}. \tag{19·17}$$

Pro celý exponent r byl vzorec (19·17) odvozen již v odst. 16; nyní vidíme, že (při kladném x) platí tento vzorec i tehdy, když exponent je lomený (a má jakékoli znamení).

20. Výcvik v derivování. Podle pravidel, s nimiž jsme se seznámili v odst. 16 až 19, můžeme derivovati mnoho jednoduchých funkcí. Nyní je třeba, abyste se v tom cvičili. Zejména vzorce pro derivaci složené funkce budete bez námahy užívati teprve, až si provedete řadu příkladů.

Příklad 1. Derivujte funkci $f(x) = (2 - 3x)^2$.

Položíme $y = 2 - 3x$; pak je $f(x) = y^2$, tedy $f'(x) = 2yy'$; ježto $y' = -3$, jest $f'(x) = -6y = 6 \,.\, (3x - 2)$.

Příklad 2. Derivujte funkci $\sqrt{x^4 + 1}$.

Položíme $y = x^4 + 1$; pak je $f(x) = y^{\frac{1}{2}}$, tedy $f'(x) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \,.\, y'$; ježto $y' = 4x^3$, jest $f'(x) = 2x^3 \,.\, y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.

Někdy je třeba užíti vzorce pro derivaci složené funkce dvakrát.

Příklad 3. Derivujte funkci $f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{x^2 + 1}}$.

Položíme $y = x^2 + 1$, $z = 3 + \sqrt{y}$; pak je $f(x) = \sqrt{z}$, tedy $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot z'$; dále je $z' = \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$, tedy $f'(x) = = \frac{1}{4} \frac{y'}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{z}}$; ježto $y' = 2x$, je $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{z}} =$

$$= \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{x^2 + 1}}}.$$

Pravidlu pro derivování podílu [viz (18·3)] se můžeme někdy vyhnout.

Příklad 4. Derivujte funkci $f(x) = \frac{x^2}{(x + 1)^2}$.

Podle pravidla o derivování podílu je

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x + 1)^2 - x^2 \cdot 2(x + 1)}{(x + 1)^4} = \frac{(x + 1)\,[2x(x + 1) - 2x^2]}{(x + 1)^4} =$$

$$= \frac{2x}{(x + 1)^3}.$$

Můžeme však také psáti $f(x) = x^2 \cdot (x + 1)^{-2}$ a užíti pravidla pro derivování součinu

$$f'(x) = 2x \cdot (x + 1)^{-2} + x^2 \cdot [-2(x + 1)^{-3}] = (x + 1)^{-3} \cdot$$
$$\cdot [2x(x + 1) - 2x^2] = (x + 1)^{-3} \cdot 2x = \frac{2x}{(x + 1)^3}.$$

Cvičení.*) Ve cvičeních **20·1** až **20·45** máte pokaždé počítati derivaci dané funkce.

20·1. $x^3 - 7x + 6$.	**20·2.** $2x^4 - 9x^2 + 6$.	**20·3.** $3x^{10} - 6x^5 + x^3$.
20·4. $\sqrt[5]{x}$.	**20·5.** $\sqrt[8]{x^2}$.	**20·6.** $\sqrt{x^3}$.
20·7. x^{30}.	**20·8.** x^{60}.	**20·9.** x^{100}.
20·10. $\frac{1}{x^{30}}$.	**20·11.** $\frac{1}{x^{60}}$.	**20·12.** $\frac{1}{x^{100}}$.
20·13. $(1 - x)^2$.	**20·14.** $(1 + x)^3$.	**20·15.** $(1 - x)^3$.
20·16. $(1 - 2x)^3$.	**20·17.** $(3x + 2)^4$.	**20·18.** $(2 - 5x)^4$.

*) Řešení cvičení jsou uvedena na konci knížky.

20·19. $\dfrac{x^2+1}{x}$. 20·20. $\dfrac{x}{x^2+1}$. 20·21. $\dfrac{x}{x^2-1}$.

20·22. $\dfrac{8x}{x^2+4}$. 20·23. $\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$. 20·24. $\dfrac{1-2x}{2-x}$.

20·25. $\dfrac{5x-3}{3x-4}$. 20·26. $\dfrac{3x-4}{5x-3}$. 20·27. $\dfrac{x}{(x-2)^2}$.

20·28. $\dfrac{(2-x)^3}{(2+x)^2}$. 20·29. $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$. 20·30. $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x-5}$.

20·31. $(1-x^3)^2$. 20·32. $(1-x^2)^3$. 20·33. $(1-x^3)^3$.

20·34. $\sqrt{x}\,.\,(x^3+3x^2)$. 20·35. $(x+2)(x-1)^2$. 20·36. $(x+2)^2(x-1)$.

20·37. $\sqrt{4x+5}$. 20·38. $\sqrt{5x-4}$. 20·39. $\sqrt[3]{2x+1}$.

20·40. $\dfrac{1}{\sqrt{4x+5}}$. 20·41. $\dfrac{1}{\sqrt{5x-4}}$. 20·42. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}$.

20·43. $\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^5$. 20·44. $\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$. 20·45. $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

21. Vyšetření průběhu funkce. Nechť funkce $f(x)$ má v intervalu J všude derivaci; buďtež a, b dvě čísla z intervalu J $(a < b)$. Pak existuje (aspoň jedno) číslo ξ takové, že $a < \xi < b$ a že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,.\,(b-a). \qquad (21{\cdot}1)$$

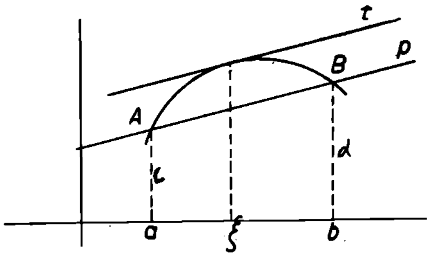
Přesný důkaz této věty bude podán v Dodatku. Nyní si pouze uvědomíme její názorný obsah a potom si uvedeme několik důsledků.

Je-li $c = f(a)$, $d = f(b)$, pak jsou $A = (a; c)$, $B = (b, d)$ dva body grafu funkce $f(x)$ (viz obr. 15). Směrnice přímky p, která spojuje body A, B, je podle (7·5) rovna podílu

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Platí-li (21·1), je tato směrnice rovna $f'(\xi)$, t. j. je rovna směrnici ~~tečny t v~~ tom bodě grafu, který přísluší hodnotě $x = \xi$. Tedy názorný obsah naší věty je prostě tento:

Jsou-li A, B dva různé body grafu funkce $f(x)$, pak leží mezi nimi na grafu aspoň jeden bod, v kterém je tečna grafu rovnoběžná se spojnicí AB.



Obr. 15.

Víme, že derivace konstanty je rovna nule identicky (t. j. pro každé x). Obráceně budiž dána v nějakém intervalu J funkce $f(x)$, jejíž derivace je identicky rovna nule. Pak je tato funkce konstanta. Neboť nechť a, b jsou dvě libovolná čísla z intervalu J a nechť na př. $a < b$; máme dokázati, že je $f(a) = f(b)$. To plyne z (21·1), neboť za našich předpokladů musí býti $f'(\xi) = 0$.

Má-li funkce $f(x)$ v nějakém intervalu J všude derivaci a je-li tato derivace uvnitř intervalu J stále kladná, pak funkce $f(x)$ roste v intervalu J. Jsou-li a, b dvě čísla z intervalu J a je-li $a < b$, pak plyne z (21·1), že $f(a) < f(b)$, neboť číslo $f'(\xi)$ je kladné.

Má-li funkce $f(x)$ v nějakém intervalu J všude derivaci a je-li tato derivace uvnitř intervalu J stále záporná, pak funkce $f(x)$ klesá v intervalu J. To plyne zase ihned z (21·1).

Poznatky, které jsme právě získali, umožňují v jednoduchých případech velmi pohodlně stanoviti průběh dané funkce $f(x)$. Vypočteme si derivaci $f'(x)$ a najdeme kořeny rovnice $f'(x) = 0$, t. j. určíme si ty hodnoty nezávisle proměnné, v nichž má funkce $f(x)$ derivaci rovnou nule. Těchto hodnot je v obyčejných případech konečný počet. Tyto hodnoty rozdělí obor nezávisle proměnné na intervaly, při čemž funkce $f(x)$ má uvnitř každého takového intervalu J všude derivaci, která tam není nikde rovna nule. V Dodatku bude přesně dokázáno, že derivace $f'(x)$ je nutně uvnitř takového intervalu J buďto stále kladná nebo stále záporná. Máme tedy obor nezávisle proměnné x rozdělen na konečný počet intervalů J, při čemž v každém intervalu J funkce $f(x)$ buďto stále roste nebo stále klesá. Protože hodnoty, kterých funkce $f(x)$ nabude v jednotlivém intervalu J, tvoří interval (viz odst. 19), získáváme takto přehled o všech hodnotách, kterých funkce $f(x)$ nabývá.

Zvláště často se zajímáme o t. zv. maxima a minima funkce $f(x)$. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v čísle a maximum, je-li hodnota $f(a)$ větší než hodnoty, kterých nabývá $f(x)$ v číslech x blízkých číslu a, ale různých od a, tedy existuje-li číslo $\varepsilon > 0$ takové, že

$$0 < | x - a | < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(a).$$

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v čísle a minimum, je-li hodnota $f(a)$ menší než hodnoty, kterých nabývá $f(x)$ v číslech x blízkých číslu a, ale různých od a, tedy existuje-li číslo $\varepsilon > 0$ takové, že

$$0 < | x - a | < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(a).$$

Je patrné, že při stanovení průběhu funkce $f(x)$, jak bylo výše vylíčeno, obdržíme také všecka maxima a minima. Neboť uvnitř intervalu J, v němž funkce $f(x)$ stále roste nebo v němž stále klesá, zřejmě nemůže býti ani žádné maximum ani žádné minimum funkce $f(x)$. Tedy jako maxima a minima přicházejí v úvahu pouze ta čísla, v nichž má funkce $f(x)$ derivaci rovnou nule. Takové číslo a ostatně nemusí býti ani maximem ani minimem funkce $f(x)$. To lze ukázati jednoduchým příkladem $f(x) = x^3$. Tato funkce je definována pro všecka x a má všude derivaci $f'(x) = 3x^2$. Tato derivace je rovna nule v čísle $x = 0$ a jinde je všude kladná. Proto funkce $f(x)$ roste i v intervalu $[-\infty, 0]$ i v intervalu $[0, \infty]$, takže roste všude a nemá ani maxima ani minima. Dále nesmíme zapomínat na možný případ, že v některém čísle neexistuje derivace $f'(x)$; takové číslo může docela dobře býti maximem nebo minimem funkce $f(x)$. To lze ukázati příkladem $f(x) = |x|$ (viz obr. 12 na str. 34); tato funkce má zřejmě minimum v čísle $x = 0$, v němž derivace $f'(x)$ neexistuje.

Příklad 1. Dokažte, že rovnice $x^5 - 15x^3 + 3 = 0$ má tři kořeny, po jednom v každém z tří intervalů $[-4, -3]$, $[0, 1]$, $[3, 4]$.

Budeme vyšetřovati průběh funkce $f(x) = x^5 - 15x^3 + 3$. Jest $f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2 . (x - 3) . (x + 3)$. Je tedy derivace součinem tří faktorů, z nichž prvý je stále kladný mimo $x = 0$, druhý je kladný pro $x > 3$, záporný pro $x < 3$ a rovný nule pro $x = 3$, třetí je kladný pro $x > -3$, záporný pro $x < -3$ a rovný nule pro $x = -3$. Tedy je $f'(x) = 0$ pro $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$, dále $f'(x) > 0$ pro $x < -3$ a pro $x > 3$, konečně $f'(x) < 0$ pro $-3 < x < 3$, $x \neq 0$. Proto funkce $f(x)$ roste v intervalech $[-\infty, -3]$, $[3, \infty]$ a klesá v intervalu $[-3, 3]$. Jest $f(-3) = 165$, $f(3) = -159$, takže když x probíhá interval $[-3, 3]$, probíhá $f(x)$ interval $[-159, 165]$. Abychom zjistili, jakých hodnot nabývá $f(x)$, probíhá-li x interval $[-\infty, -3]$ nebo interval $[3, \infty]$, uvažme, že pro $x \neq 0$ se dá $f(x)$ psáti ve tvaru

$$f(x) = x^5 . \left(1 - \frac{15}{x^2} + \frac{3}{x^5}\right). \tag{21·2}$$

Je-li číslo $|x|$ velmi veliké, je závorka ve (21·2) přibližně rovna jedné, takže $f(x)$ je přibližně rovná x^5; tedy číslo $|f(x)|$ je velmi veliké. Jelikož funkce $f(x)$ v intervalu $[3, \infty]$ roste, vidíme, že její hodnoty vyplní celý interval $[f(3), \infty] = [-159, \infty]$. Podobně, když x probíhá interval $[-\infty, -3]$, vyplní hodnoty $f(x)$ celý interval $[-\infty, 165]$. Celkový výsledek tedy je:

v intervalu $[-\infty, -3]$ funkce $f(x)$ roste a nabude všech hodnot z intervalu $[-\infty, 165]$;

v intervalu $[-3, 3]$ funkce $f(x)$ klesá a nabude všech hodnot z intervalu $[-159, 165]$;

v intervalu $[3, \infty]$ funkce $f(x)$ roste a nabude všech hodnot z intervalu $[-159, \infty]$.

Tím je dokázáno, že funkce $f(x)$ má maximum v čísle $x = -3$ a minimum v čísle $x = 3$ a že nemá jiných maxim a minim. Dále je tím dokázáno, že rovnice $f(x) = 0$ má tři kořeny, po jednom v každém z tří intervalů $[-\infty, -3]$,

[— 3, 3], [3, ∞]. Abychom tyto kořeny blíže určili, stačí vedle již vypočtených hodnot

$$f(-3) = 165,\ f(3) = -159$$

ještě si vypočítati hodnoty

$$f(-4) = -61,\ f(0) = 3,\ f(1) = -11,\ f(4) = 67.$$

Interval [— 3, 3] se čísly $x = 0$ a $x = 1$ rozdělí na tři intervaly [— 3, 0], [0, 1], [1, 3]; protože funkce $f(x)$ v intervalu [— 3, 3] klesá, klesá tím spíš v intervalu [0, 1]; protože $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, nabude $f(x)$ hodnoty 0 v jednom čísle x z intervalu [0, 1], t. j. ten kořen rovnice $f(x) = 0$, který je v intervalu [— 3, 3], musí býti v intervalu [0, 1]. Podobně vidíme, že ten kořen, který je v intervalu [— ∞, — 3], musí býti v intervalu [— 4, — 3] a že ten kořen, který je v intervalu [3, ∞], musí býti v intervalu [3, 4].

Příklad 2. Určete průběh funkce

$$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}. \tag{21·3}$$

Pro $x = 0$ a pro $x = 1$ není naše funkce definována. Všude jinde má derivaci

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2 - 4(1-x)^2}{x^2(1-x)^2}.$$

Podle známého vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ jest

$$x^2 - 4(1-x)^2 = [x + 2(1-x)][x - 2(1-x)] = \\ = (2-x)(3x-2),$$

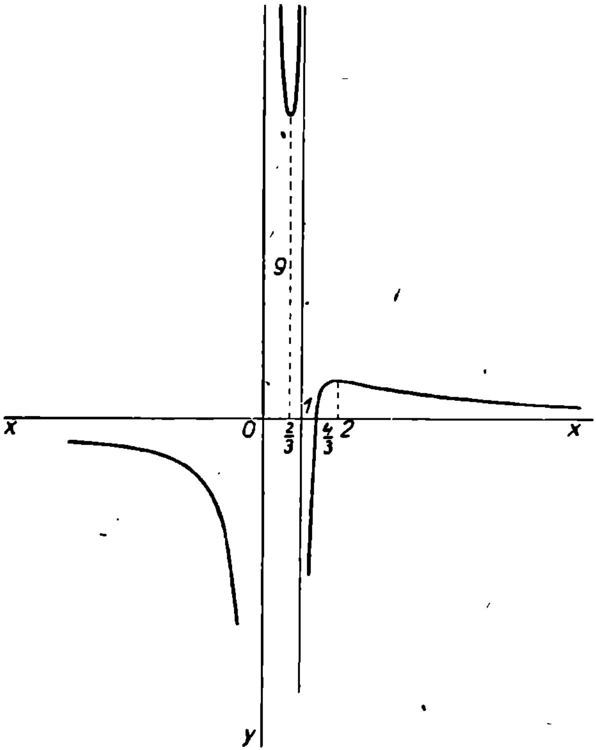
takže

$$f'(x) = 3\,\frac{(2-x)(x-\frac{2}{3})}{x^2(1-x)^2}. \tag{21·4}$$

Ze (21·3) plyne snadno, že se $f(x)$ blíží nule, roste-li $|x|$ nade všecky meze. Dále je ze (21·3) patrné, že $|f(x)|$ roste nade všecky meze, blíží-li se x některé z obou hodnot $x = 0$ nebo $x = 1$. Nyní už si snadno získáme přehled o hodnotách, kterých nabývá funkce $f(x)$. Musíme postupně zkoumat průběh funkce $f(x)$ v intervalech.

$$[-\infty, 0],\ [0, \tfrac{2}{3}],\ [\tfrac{2}{3}, 1],\ [1, 2],\ [2, \infty].$$

Uvnitř intervalu [— ∞, 0] je $f'(x) < 0$ podle (21·4), takže $f(x)$ klesá; z toho, co víme o chování funkce $f(x)$, blíží-li se x nule nebo roste-li $|x|$ nade všecky meze, vychází, že hodnoty funkce



Obr. 16.

vyplní vnitřek intervalu $[-\infty, 0]$. Uvnitř intervalu $[0, \frac{2}{3}]$ je $f'(x) < 0$ podle (21·4), takže $f(x)$ klesá; blíží-li se x nule, roste $|f(x)|$ nade všecky meze; mimo to je $f(\frac{2}{3}) = 9$; proto hodnoty funkce vyplní interval $[9, \infty]$. Uvnitř intervalu $[\frac{2}{3}, 1]$ je $f'(x) > 0$ podle (21·4), takže $f(x)$ roste; blíží-li se x číslu 1, roste $|f(x)|$ nade všecky meze; ježto $f(\frac{2}{3}) = 9$, hodnoty funkce vyplní interval $[9, \infty]$. Uvnitř intervalu $[1, 2]$ je $f'(x) > 0$ podle (21·4), takže $f(x)$ roste; blíží-li se x číslu 1, roste $|f(x)|$ nade všecky meze; mimo to je $f(2) = 1$; proto hodnoty funkce vyplní interval $[-\infty, 1]$. Uvnitř intervalu $[2, \infty]$ je $f'(x) < 0$ podle

(21·4), takže $f(x)$ klesá; roste-li x nade všecky meze, blíží se $f(x)$ nule; protože $f(2) = 1$, vyplní hodnoty funkce vnitřek intervalu $[0, 1]$.

Celkový průběh funkce $f(x)$ je nejlépe patrný z jejího grafu (v. obr. 16). V čísle $x = \frac{2}{3}$ má $f(x)$ minimum; v čísle $x=2$ má $f(x)$ maximum; jiných maxim a minim funkce $f(x)$ nemá. Graf má tři asymptoty; osu x, osu y a svislou přímku s rovnicí $x = 1$. Pomocí grafu snadno přehlédneme, jakých hodnot funkce $f(x)$ nabývá. Každé hodnoty větší než 9 nabude $f(x)$ dvakrát, jednou uvnitř intervalu $[0, \frac{2}{3}]$, po druhé uvnitř intervalu $[\frac{2}{3}, 1]$; hodnoty 9 nabude $f(x)$ pouze jednou, a to v čísle $x = \frac{2}{3}$; hodnot uvnitř intervalu $[1, 9]$ funkce $f(x)$ vůbec nenabývá; hodnoty 1 nabude funkce $f(x)$ pouze jednou, a to v čísle $x = 2$. Také hodnoty 0 nabude $f(x)$ pouze jednou; ze (21·3) se snadno vypočte, že $f(\frac{4}{3}) = 0$. Každé hodnoty uvnitř intervalu $[0, 1]$ nabude $f(x)$ dvakrát, jednou uvnitř intervalu $[\frac{4}{3}, 2]$, po druhé uvnitř intervalu $[2, \infty]$; každé hodnoty uvnitř intervalu $[-\infty, 0]$ nabude $f(x)$ dvakrát, jednou uvnitř intervalu $[-\infty, 0]$, po druhé uvnitř intervalu $[1, \frac{4}{3}]$.

Cvičení. **21·1.** Dokažte, že funkce $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$ nabude každé hodnoty uvnitř intervalu $[0, 4]$ v třech různých číslech x, a každé hodnoty uvnitř intervalu $[-\infty, 0]$ nebo uvnitř intervalu $[4, \infty]$ jen jednou; hodnot 0 a 4 nabude $f(x)$ každé dvakrát.

21·2. Dokažte, že rovnice $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10 = 0$ má jeden záporný kořen a dva kladné; u každého kořenu určete, mezi kterými dvěma celými čísly leží.

21·3. Dokažte, že funkce $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ nabude každé kladné hodnoty ve dvou různých číslech x.

21·4. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x(x - 1)}{x^2 + 3x + 3}$.

21·5. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x^4}{(x - 1)(x - 3)^3}$.

21·6. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x - 3}{\sqrt{1 + x^2}}$.

21·7. Dokažte, že funkce $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots$ $\ldots + (x - a_n)^2$ nabude své nejmenší hodnoty v čísle $x =$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

21·8. Dokažte, že funkce $f(x) = \frac{x(x-1)}{x-c}$ nabývá všech možných hodnot, je-li c uvnitř intervalu $[0, 1]$, kdežto pro c mimo interval $[0, 1]$ existuje interval J délky $4\sqrt{c(c-1)}$ takový, že $f(x)$ nabývá právě těch hodnot, které nejsou uvnitř J.

22. Úlohy vedoucí na maxima a minima funkce.

Existuje řada zajímavých úloh, u kterých si musíme napřed sestavit funkci $f(x)$, načež je úloha řešena určením průběhu této funkce.

Příklad 1. Dokažte, že ze všech pravoúhlých trojúhelníků, u nichž je součet délky přepony a délky jedné odvěsny roven dané délce, má největší plošný obsah takový trojúhelník, u něhož jmenované dvě strany svírají úhel 60°.

Daný součet můžeme zvolit za jednotku délky. Pak bude

$$x + y = 1, \tag{22·1}$$

znamená-li x délku přepony a y délku jedné odvěsny. Délka druhé odvěsny je podle Pythagorovy věty $\sqrt{x^2 - y^2}$. Dvojnásobný obsah trojúhelníka je tedy $y \,.\, \sqrt{x^2 - y^2}$, což je podle (22·1) rovné

$$f(x) = (1 - x) \,.\, \sqrt{x^2 - (1 - x)^2} = (1 - x)\sqrt{2x - 1}. \tag{22·2}$$

Vzhledem ke svému geometrickému významu musí býti číslo x jednak menší než 1, jednak větší než $y = 1 - x$, t. j. x musí býti uvnitř intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$. Podle (22·2) je

$$f'(x) = -\sqrt{2x - 1} + \frac{1 - x}{\sqrt{2x - 1}} = \frac{2 - 3x}{\sqrt{2x - 1}}.$$

Pro $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ je $f'(x) > 0$, pro $\frac{2}{3} < x < 1$ je $f'(x) < 0$. Proto $f(x)$ roste v intervalu $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ a klesá v intervalu $[\frac{2}{3}, 1]$, takže $f(x)$ nabude své největší hodnoty pro $x = \frac{2}{3}$. Podle (22·1) však je $x = \frac{2}{3}$ tehdy a jenom tehdy, když $x = 2y$ a z elementární geometrie je známo, že je $x = 2y$ tehdy a jen tehdy, když přepona a odvěsna délky y svírají úhel 60°. Maximální obsah je roven

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Příklad 2. Budiž $a > 0$, $b > 0$, $C = (a; b)$. Bodem C si mysleme vedeny přímky p tak, aby protly osu x napravo od počátku a osu y nad počátkem; jinak je poloha přímky p libovolná. Pro každou přípustnou polohu přímky p označme P její průsečík s osou x a Q její průsečík s osou y. Dokažte, že nejmenší hodnota výrazu $\overline{OP} + \overline{OQ}$ je $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ a že nejmenší hodnota výrazu $\overline{OP} \,.\, \overline{OQ}$ je $4ab$.

Přímka p není svislá a má tedy určitou směrnici. Z názoru je patrné, že tato směrnice musí býti **záporná**; označme si ji $-t$. Rovnice přímky p zní (viz odst. 7)

$$y = b - t\,(x - a). \tag{22·3}$$

Bod P dostaneme, položíme-li $y = 0$ ve (22·3), takže

$$P = \left(a + \frac{b}{t};\, 0\right). \tag{22·4}$$

Bod Q dostaneme, položíme-li $x = 0$ ve (22·3), takže

$$Q = (0;\, b + at). \tag{22·5}$$

Ježto pro $t > 0$ je

$$a + \frac{b}{t} > 0, \quad b + at > 0,$$

vidíme, že proměnná t není podrobena jiné podmínce než $t > 0$, což je ostatně z názoru patrné. Podle (22·4) a (22·5) je

$$\overline{OP} = \frac{b + at}{t}, \quad \overline{OQ} = b + at,$$

takže

$$\overline{OP} + \overline{OQ} = f_1(t) = \frac{b}{t} + a + b + at,$$

$$\overline{OP} \,.\, \overline{OQ} = f_2(t) = \frac{(b + at)^2}{t} = \frac{b^2}{t} + 2ab + a^2t.$$

Jest předně

$$f'_1(t) = -\frac{b}{t^2} + a,$$

takže $f'_1(t) < 0$ pro $0 < t < \sqrt{\frac{b}{a}}$ a $f'_1(t) > 0$ pro $t > \sqrt{\frac{b}{a}}$. Z toho následuje, že nejmenší hodnota funkce $f_1(t)$ je

$$f_1\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} + a + b + a\sqrt{\frac{b}{a}} = a + 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Jest za druhé $$f'_2(t) = -\frac{b^2}{t^2} + a^2,$$
takže $f'_2(t) < 0$ pro $0 < t < \frac{b}{a}$ a $f'_2(t) > 0$ pro $t > \frac{b}{a}$. Z toho následuje, že nejmenší hodnota funkce $f_2(t)$ je

$$f_2\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\left(b + a\,.\,\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{b}{a}} = 4ab.$$

Z provedené diskuse vychází, že $\overline{OP} + \overline{OQ}$ nabude své nejmenší hodnoty $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ pro jedinou polohu přímky p a že nabude každé hodnoty větší než $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, a to při dvojí poloze přímky p. Docela stejně nabude $\overline{OP}\,.\,\overline{OQ}$ své nejmenší hodnoty $4ab$ pro jedinou polohu přímky p, a každé hodnoty větší než $4ab$ nabude při dvojí poloze přímky p.

Příklad 3. Tečna elipsy přotíná osy v bodech P a Q. Dokažte, že nejmenší hodnota výrazu $\overline{PQ}$ se rovná součtu obou poloos elipsy.

Při této úloze potřebujeme trochu více znalostí z analytické geometrie, než jsme si v prvých odstavcích této knížky zopakovali. Jsou-li osy elipsy totožné s osami x a y (což ovšem můžeme předpokládati) a jsou-li a, b délky obou poloos, pak musíme předně věděti, že rovnice elipsy zní

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \tag{22·6}$$

Je-li $(x_0;\, y_0)$ libovolný bod na elipse, musíme dále věděti, že rovnice tečny elipsy v bodě $(x_0;\, y_0)$ zní

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{22·7}$$

Zřejmě se můžeme omeziti na ty body $(x_0;\, y_0)$ naší elipsy, pro něž platí $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Bod P dostaneme, položíme-li $y = 0$ ve (22·7), takže

$$P = \left(\frac{a^2}{x_0};\, 0\right).$$

Bod Q dostaneme, položíme-li $x = 0$ ve (22·7), takže

$$Q = \left(0;\, \frac{b^2}{y_0}\right).$$

Podle vzorce (4·2) je

$$\overline{PQ}^2 = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2}.$$

Protože bod $(x_0; y_0)$ leží na elipse, je vyhověno rovnici (22·6), dosadíme-li $x = x_0$, $y = y_0$; proto je

$$\overline{PQ}^2 = f(x_0) = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^2}{\left(\frac{y_0}{b}\right)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^2}{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = \frac{a^4}{x_0^2} + \frac{a^2b^2}{a^2 - x_0^2}.$$

Proměnná x_0 je omezena na vnitřek intervalu $[0, a]$. Derivováním dostaneme

$$f'(x_0) = -\frac{2a^4}{x_0^3} + \frac{2a^2b^2x_0}{(a^2 - x_0^2)^2} =$$

$$= \frac{2a^2}{x_0^3(a^2 - x_0^2)^2}[b^2x_0^4 - a^2(a^2 - x_0^2)^2] =$$

$$= \frac{2a^2}{x_0^3(a^2 - x_0^2)^2}[bx_0^2 + a(a^2 - x_0^2)][bx_0^2 - a(a^2 - x_0^2)],$$

takže derivace má stejné znamení jako

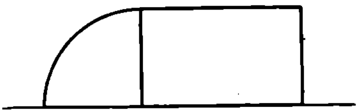
$$bx_0^2 - a(a^2 - x_0^2) = (a + b)x_0^2 - a^3.$$

Je tudíž $f'(x_0) < 0$ uvnitř intervalu $\left[0, a\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right]$ a $f'(x_0) > 0$ uvnitř intervalu $\left[a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, a\right]$, takže $f(x_0)$ nabude své nejmenší hodnoty pro $x_0 = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$. Tato nejmenší hodnota je

$$f\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right) = \frac{a^4}{a^2 \cdot \frac{a}{a+b}} + \frac{a^2b^2}{a^2 - a^2 \cdot \frac{a}{a+b}} = (a + b)^2.$$

Ježto $\overline{PQ}^2 = f(x_0)$, je $a + b$ nejmenší možná hodnota výrazu $\overline{PQ}$. Mimo to plyne z provedené diskuse, že [za předpokladu $x_0 > 0$, $y_0 > 0$] $\overline{PQ}$ nabude své nejmenší hodnoty $a + b$ pro jedinou polohu tečny, a že $\overline{PQ}$ nabude každé hodnoty větší než $a + b$, a to při dvojí poloze tečny.

Cvičení. 22·1. Ze všech obdélníků daného obsahu určete ten, který má nejkratší úhlopříčku.



Obr. 17.

22·2. Mezi všemi plochami složenými ze čtvrtkruhu a obdélníka, jak je naznačeno v obr. 17, a majícími obvod dané velikosti, určete takovou, jejíž obsah je největší.

22·3. Dvě cesty se křižují kolmo; auto jedoucí po jedné z nich rychlostí 60 km za hodinu projíždí křižovatkou v době, kdy druhé auto, jedoucí po druhé cestě směrem ke křižovatce rychlostí 45 km za hodinu, je od křižovatky 30 km vzdáleno. Najděte posici obou aut v tom okamžiku, kdy si jsou nejblíže.

22·4. Zvolte dvě kladná čísla se součtem 40 tak, aby součet jejich čtverců byl co nejmenší.

22·5. Najděte dvě kladná čísla tak, aby jejich rozdíl byl 100 a aby rozdíl mezi čtvercem většího a pětinásobkem čtverce menšího byl co největší.

22·6. Dokažte, že ze všech rovnoramenných trojúhelníků daného obvodu má rovnostranný trojúhelník největší obsah.

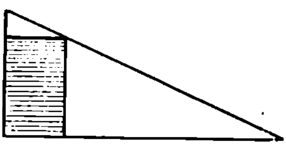
22·7. Do kružnice poloměru r je vepsán obdélník. Jakou hodnotu může míti obvod obdélníka?

22·8. Je dán obdélník M. Jaká je největší možná hodnota obsahu obdélníka, jehož strany procházejí vrcholy obdélníka M?

22·9. Do dané koule jsou vepsány rotační válce. Dokažte, že největší možný objem válce je asi 0,5773krát objem koule.

22·10. Mezi rotačními válci, jejichž celkový povrch je předepsán, najděte takový, jehož objem je největší.

22·11. Do dané koule jsou vepsány rotační válce. Jaká je největší možná velikost pláště válce?

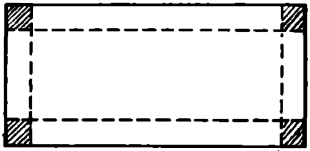


Obr. 18.

22·12. Do daného pravoúhlého trojúhelníka jsou vepsány obdélníky tak, jak je naznačeno v obr. 18. Najděte největší možný obsah obdélníka; vyšetřete také, jakých hodnot může nabýti obvod obdélníka.

22·13. Nechť C, p, P, Q mají týž význam jako v příkladě 2 (str. 56). Najděte nejmenší možnou hodnotu délky $\overline{PQ}$.

22·14. Ze všech pravoúhlých trojúhelníků daného plošného obsahu určete ten, který má nejmenší obvod.



Obr. 19.

22·15. Obdélníkový kus plechu má rozměry 60 cm, 28 cm; v rozích se odříznou čtverce (viz obr. 19) a zbytek se ohne tak, že vznikne otevřená krabice; jak velká musí býti strana odříznutých čtverců, aby objem krabice byl co největší?

22·16. Které místo mezi dvěma světelnými zdroji je nejslaběji osvětleno, je-li intensita jednoho osmkrát větší než intensita druhého?

22·17. Kus drátu délky a se má rozříznouti na dvě části, z nichž se ohne prvá do tvaru čtverce a druhá do tvaru kruhu; na kterém místě se má rozříznutí provésti, aby součet obsahu čtverce a obsahu kruhu byl co nejmenší?