CAPITOLO V.

CONGRUENZE, CONGRUENZE W E TRASFORMAZIONI PER CONGRUENZE W (*).

§ 41. — Congruenze di assegnata prima falda focale.

A) Formole fondamentali.

Supporremo in quanto segue la superficie S ad asintotiche reali. Se così non fosse, si potrebbero ancora applicare gli stessi metodi ricorrendo ai sistemi u, v isotermi-coniugati.

Sia dunque S una superficie riferita alle asintotiche u, v. Se A, B sono funzioni delle u, v, il punto

$$\bar{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \tag{1}$$

descrive al variare di μ una tangente alla linea $\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}$. Queste linee sono determinate dal solo rapporto $A:B$.

Affinchè $\bar{x}$ sia il secondo fuoco della congruenza generata da queste tangenti (congruenza che è la più generale di quelle che hanno S per falda focale) dovrà avvenire che

$A\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} - B\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$ sia combinazione lineare delle x ed $Ax_u + Bx_v$.

(*) I principali risultati di questo Capitolo furono pubblicati in varie note dei Rendic. della R. Accad. dei Lincei (1922-23-24) da G. Fubini.

Esplicitando questa condizione (*), osservando che per le equazioni del § 16 A le derivate di $\overline{x}$ sono combinazioni lineari di x, x_u, x_v, x_{uv}, si trova tosto, posto al solito $a_{12} = e^\theta$ che:

$$(2) \quad \mu = -A_u - A\theta_u - B_v - B\theta_v + A\frac{B_u + A\beta}{B} + B\frac{A_v + B\gamma}{A}.$$

Risultati duali si trovano scambiando coordinate x di punto e ξ di piano tangente, e cambiando A, B, β, γ in A, $-B$, $-\beta$, $-\gamma$. O così, o col calcolo diretto si trova che i piani passanti per la retta $(x, \overline{x})$ sono i piani

$$(3) \quad \overline{\xi} = \lambda\xi + 2(A\xi_u - B\xi_v)$$

e che questo piano tocca la seconda falda focale, se

$$(4) \quad \lambda = -A_u - A\theta_u + B_v + B\theta_v + A\frac{B_u + A\beta}{B} - B\frac{A_v + B\gamma}{A}.$$

Notiamo che

$$(\xi, \overline{\xi}) = 2A(\xi, \xi_u) - 2B(\xi, \xi_v) = 2A(x, x_u) + 2B(x, x_v) = (x, \overline{x}).$$

I fattori di proporzionalità furono scelti in guisa da assicurare la coincidenza delle coordinate $(\xi, \overline{\xi})$ e $(x, \overline{x})$.

Trascureremo il caso $AB = 0$ delle congruenze a falde focali coincidenti. Si noti che le λ, μ dipendono soltanto dalle A, B e dai coefficienti dell' elemento lineare proiettivo (non dalle p_{rs}). Perciò:

Se una una falda focale S *di una congruenza* K *si deforma proiettivamente, trascinando con sè i raggi di* K, *i secondi fuochi, e i secondi piani focali vanno nei nuovi secondi fuochi o secondi piani focali.*

Si ha poi, derivando e tenendo conto delle citate formole del § 16 A:

$$(5) \quad \overline{x}_u = \frac{B_u + A\beta}{A}\overline{x} + Mx - \lambda\left(x_u - \frac{2B}{\lambda}x_{uv}\right)$$

(*) Che equivale alla: $S(A\xi_u - B\xi_v)(A\overline{x}_u - B\overline{x}_v) = 0$.

$$\text{ove } M = \mu_u + 2Ap_{11} - \frac{B_u + A\beta}{B}\mu ,$$

$$(6) \qquad \bar{x}_v = \frac{A_v + B\gamma}{A}\bar{x} + Lx + \lambda\left(x_v + \frac{2A}{\lambda}x_{uv}\right)$$

$$\text{ove } L = \mu_v + 2Bp_{22} - \frac{A_v + B\gamma}{A}\mu .$$

Se ne deduce, derivando di nuovo:

$$(7) \quad \begin{cases} \bar{x}_{uu} = \left(\dfrac{B_u + A\beta}{B}\bar{x}\right)_u + 4B^2\dfrac{W}{\lambda}x_{uv} + \rho_{11}x + \sigma_{111}\left(x_u - \dfrac{2B}{\lambda}x_{uv}\right) + \\ \qquad + \sigma_{112}\left(x_v + \dfrac{2A}{\lambda}x_{uv}\right) \\ \bar{x}_{vv} = \left(\dfrac{A_v + B\gamma}{A}\bar{x}\right)_v + 4A^2\dfrac{W}{\lambda}x_{uv} + \rho_{22}x + \sigma_{221}\left(x_u - \dfrac{2B}{\lambda}x_{uv}\right) + \\ \qquad + \sigma_{222}\left(x_v + \dfrac{2A}{\lambda}x_{uv}\right) \\ \bar{x}_{uv} = \left(\dfrac{B_u + A\beta}{B}\bar{x}\right)_v + (-N + 4AB)\dfrac{x_{uv}}{\lambda} + \rho_{12}x + \sigma_{121}\left(x_u - \dfrac{2B}{\lambda}x_{uv}\right) \\ \qquad + \sigma_{122}\left(x_v + \dfrac{2A}{\lambda}x_{uv}\right), \end{cases}$$

ove non ci interessa dare i valori delle ρ, σ, e dove:

$$(8) \qquad W = \left(\frac{A_v + B\gamma}{A}\right)_u - \left(\frac{B_u + A\beta}{B}\right)_v$$

$$(9) \qquad N = \lambda\mu + 2A\left(\mu_u + 2Ap_{11} - \mu\frac{B_u + A\beta}{B}\right) -$$

$$- 2B\left(\mu_v + 2Bp_{22} - \mu\frac{A_v + B\gamma}{A}\right).$$

Si noti che ne segue:

$$(10) \qquad (\bar{x}\,\bar{x}_u\,\bar{x}_v\,d^2\bar{x}) = \left(x, x_u - \frac{2B}{\lambda}x_{uv}, x_v + \frac{2A}{\lambda}x_{uv}, \frac{x_{uv}}{\lambda}\right) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \mu & 2A & 2B & 0 \\ M & -\lambda & 0 & 0 \\ L & 0 & \lambda & 0 \\ \Sigma\rho_{ik}\, du_i du_k & \Sigma\sigma_{ik1}\, du_i du_k & \Sigma\sigma_{ik2}\, du_i du_k & 4W(Bdu+Adv)^2+2Ndudv \end{vmatrix} =$$

$$= (x\, x_u\, x_v\, d^2x)\, \frac{4W(Bdu+Adv)^2-2Ndudv}{\lambda}(2BL\lambda-\lambda^2\mu-2A\lambda M)$$

$$= -N(x\, x_u\, x_v\, d^2x)\,[4W(Bdu+Adv)^2-2Ndudv].$$

Indicheremo con N' la quantità dedotta da N, cambiando il segno di B, β, γ (ciò che non muta W). Allora, essendo

$$(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = (\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uv}),$$

si dedurrà col calcolo duale

$$(\overline{\xi}\, \overline{\xi}_u\, \overline{\xi}_v\, d^2\overline{\xi}) = -N'(x\, x_u\, x_v\, d^2x)\,[4W(Adv-Bdu)^2-2N'dudv].$$

Dovendo questa espressione essere proporzionale alla precedente, perchè entrambe sono proporzionali alla forma F_2 per la *seconda* falda focale $\overline{S}$, sarà:

$$(11) \qquad -N+4WAB = -N'-4WAB$$

$$(12) \qquad \frac{(\overline{\xi}\, \overline{\xi}_u\, \overline{\xi}_v\, \overline{\xi}_{uv})}{(\overline{x}\, \overline{x}_u\, \overline{x}_v\, \overline{x}_{uv})} = \frac{N}{N'} = \frac{N}{N-8WAB} \quad (\text{se } NN' \neq 0).$$

Le $\overline{\xi}$ non sono dunque normate secondo le convenzioni da noi poste per le superficie; alle $\overline{x}$ dovrebbero corrispondere le $\overline{\xi}\sqrt[4]{\frac{N'}{N}}$. *Alle $\overline{x}$ corrispondono le $\overline{\xi}$ soltanto se* $N = N'$ *ossia* $W = 0$; *le $\overline{\xi}$ sono in generale normate in modo che* $(x\, \overline{x}) = (\xi, \overline{\xi})$. Si noti che:

α) $2dudv = 0$ è l' equazione delle asintotiche della superficie S iniziale.

β) $Bdu + Adv = 0$ è quella delle sviluppabili.

γ) $4W(Bdu+Adv)^2 - 2Ndudv = 0$ quella delle asintotiche della seconda falda $\overline{S}$. Essa si può scrivere anche $N'(Bdu+Adv)^2 - N(Bdu-Adv)^2 = 0$.

Il caso $\mathrm{W} = 0$, *in cui le* $\bar{\mathrm{x}}$, $\bar{\xi}$ *si corrispondono nella legge di normazione, è quello delle congruenze* W.

Il caso $\mathrm{N} = 0$ *od* $\mathrm{N}' = 0$ *è quello in cui la seconda falda focale degenera come luogo di punti od inviluppo di piani.*

Il rapporto $\mathrm{N}' : \mathrm{N}$ *è il birapporto delle due coppie di direzioni asintotiche con le due coppie formate ciascuna dalla direzione corrispondente ad uno dei 2 sistemi di sviluppabili contata due volte; o anche* $\left(\frac{\sqrt{N'} - \sqrt{N}}{\sqrt{N'} + \sqrt{N}}\right)^2$ *è il birapporto delle 4 direzioni asintotiche.*

Lasciando invariata la congruenza, possiamo moltiplicare sia le x per uno stesso fattore ρ, sia le A, B per un fattore σ. Nel primo caso anche le ξ, le $\bar{x}$, le $\bar{\xi}$ restano moltiplicate per lo stesso fattore ρ, e dalle formole precedenti segue che W, N, N' restano inalterate. Nel secondo caso le ξ restano inalterate, le $\bar{x}$, $\bar{\xi}$ moltiplicate per σ, N ed N' restano moltiplicate per σ^2. *Quindi sia* W *che* $\mathrm{N} : \mathrm{AB}$ *sono invarianti della congruenza, di cui sopra abbiamo dato il significato geometrico.*

Mentre però $\mathrm{N} : \mathrm{AB}$ *ha significato intrinseco, ciò non avviene per* W; *ha invece significato intrinseco la forma* Wdudv.

$B)$ Nuova interpretazione delle formole precedenti.

Noi possiamo definire la congruenza, dando il punto x della falda S e il piano $\bar{\xi}$ della falda $\bar{S}$, imponendo la sola condizione

$$S x \bar{\xi} = 0 \tag{13}$$

che dice essere x, $\bar{\xi}$ un elemento. Se questa condizione non fosse soddisfatta, il nostro studio equivarrebbe a quello di una coppia di superficie, che si potrebbe svolgere con metodi analoghi ai seguenti, ma di cui qui non ci occupiamo. Altri invarianti della nostra coppia di superficie si otterebbero studiando le espressioni

$$S x d\bar{\xi}\ ,\quad S\bar{\xi} dx\ ,\quad S dx d\bar{\xi}\ ,\quad S d^n x d^r \bar{\xi}\ \text{ ecc.} \tag{14}$$

L'annullarsi del primo e quindi, nel caso attuale, anche del secondo dice che le superficie S ed $\bar{S}$ coincidono; ciò che noi escluderemo. Supposto che u, v siano le asintotiche di S, dall'annullarsi della $S\bar{\xi}x$ deduciamo l'esistenza di quantità λ, A, B tali che:

$$\bar{\xi} = \lambda\xi + 2(A\xi_u - B\xi_v) \tag{15}$$

donde:

$$\left\{\begin{aligned} d\bar{\xi} &= \left\{(\lambda + 2A_u + 2A\theta_u)du + 2(A_v + B\gamma)dv\right\}\xi_u + \\ &+ \left\{-2(A\beta + B_u)du + (\lambda - 2B_v - 2B\theta_v)dv\right\}\xi_v + \dots \\ S\bar{\xi}dx &= 2(Bdu - Adv)a_{12} \\ Sd\bar{\xi}dx &= 2a_{12}\Big[-(A_v + B\gamma)dv^2 + (A\beta + B_u)du^2 - \\ &\qquad - (\lambda + A_u + A\theta_u - B_v - B\theta_v)dudv\Big]. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

L'ultima è divisibile per la penultima soltanto se λ è dato dalla formola trovata in principio del §. Se ne deduce *il teorema di Fubini, che può servire alla teoria delle congruenze in coordinate* u, v *qualsiasi:*

Se x *descrive una superficie* S *e* $\bar{\xi}$ *passa per* x *ed inviluppa una superficie* $\bar{S}$, *che con* S *è in corrispondenza biunivoca,* questa corrispondenza *è determinata da una congruenza di cui* S *ed* $\bar{S}$ *sono falde focali soltanto se* $Sdxd\bar{\xi}$ *è divisibile per* $S\bar{\xi}dx$. *E in tal caso* $S\bar{\xi}dx = 0$ *è la equazione di un sistema di sviluppabili.*

Precisamente si ha in tal caso:

$$\frac{Sdxd\bar{\xi}}{S\bar{\xi}dx} = \frac{A\beta + B_u}{B}du + \frac{B\gamma + A_v}{A}dv. \tag{17}$$

Dunque: *Soltanto se la congruenza è* W, *il precedente quoziente è un differenziale esatto. In tal caso, moltiplicando le* $\bar{\xi}$ *per uno stesso conveniente fattore* ρ, *potremo rendere tale quoziente identicamente nullo, cioè*

$$Sdxd\bar{\xi} = 0, \tag{18}$$

ossia :

$$B_u = -A\beta \qquad A_v = -B\gamma. \tag{19}$$

Siano le x, y, z, t coordinate non omogenee, cioè $t = 1$. La $S\bar{\xi}x = 0$ diventa un'equazione, che determina τ. La $Sdxd\bar{\xi} = 0$ diventa :

$$dxd\bar{\xi} + dyd\bar{\eta} + dzd\bar{\zeta} = 0$$

che, se interpretiamo $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ come spostamenti infinitesimi del punto di cui x, y, z sono coordinate cartesiane, diventa l'equazione delle deformazioni infinitesime nella geom. euclidea di una superficie. Se ne deduce *il classico teorema della geom. metrica, di cui qui si riconosce l'intima ragione proiettiva, che collega la teoria delle congruenze* W *a quella delle deformazioni infinitesime metriche.*

Se invece $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$, *e quindi* x, y, z, t *si possono pensare come coordinate di Weierstrass nella geometria non euclidea, le precedenti equazioni*

$$\mathrm{S}\bar{\xi}\mathrm{x} = 0 \qquad \mathrm{Sd}\bar{\xi}\,\mathrm{dx} = 0$$

diventano quelle, cui soddisfano le componenti $\bar{\xi}$ *dello spostamento di* x *in una deformazione infinitesima* (nel senso non euclideo) *della superficie* S. Si è così dimostrato per altra via il teorema di Fubini, già intuito dal Bianchi :

Se noi diamo anche in geom. non euclidea una deformazione infinitesima ad una superficie S, *e tiriamo per ogni punto* x *di* S *il raggio normale al corrispondente spostamento* $\bar{\xi}$ *e posto nel piano tangente* ξ, *troviamo una congruenza* W.

Dalle $S\bar{\xi}x = Sd\bar{\xi}dx = 0$ si ha che per ogni funzione $\rho(u, v)$ vale la $Sd(\rho x)\,d(\rho\bar{\xi}) = 0$. Ora $d(\rho x)$ descrive, al variare di $du:dv$ un raggio ; questi raggi descrivono una congruenza *armonica* ad S (anzi la congruenza *armonica* più generale, variabile col variare di ρ). Così $d(\rho\bar{\xi})$ descrive un raggio della più generale congruenza *coniugata* ad $\bar{S}$.

Quindi : *Se* S *ed* $\bar{\mathrm{S}}$ *sono falde focali di una congruenza* W, *tra i punti dei raggi delle congruenze armoniche ad* S *e i piani di quelle coniugate ad* $\bar{\mathrm{S}}$ *intercede una corrispondenza tale che punto e piano corrispondenti si appartengono.*

Vale il teor. di Čech: *Questa corrispondenza non è per ogni sistema di valori* u, v *che la polarità rispetto al sistema nullo osculatore della congruenza* (determinato dal complesso lineare osculatore alla congruenza, di cui parleremo più avanti). Il teor. di Čech si può enunciare:

Su ogni piano tangente ad una superficie S, *falda focale di una congruenza* W, *si tiri una retta* r, *e sia* r′ *la retta polare rispetto al sistema nullo osculatore. Se la congruenza formata dalle* r *ha sviluppabili che corrispondono a un sistema coniugato, altrettanto avviene della congruenza delle rette* r′.

§ 42. — Formole fondamentali della teoria delle congruenze W.

Abbiamo già osservato al precedente § e si dimostra direttamente nel modo più semplice che, se la congruenza è W, cioè se $W=0$, si possono moltiplicare le A, B per uno stesso fattore tale che:

$$A_v = -B\gamma \qquad B_u = -A\beta. \tag{1}$$

Potremmo invece moltiplicare le A, B per un tale fattore che

$$\frac{B}{A}\gamma = (\log B)_v \qquad \frac{A}{B}\beta = (\log A)_u$$

giungendo pure a risultati semplici; e potremmo procedere in altro modo, fissando che $Sdx d\bar{\xi} : S\bar{\xi} dx$ abbia un altro valore prefissato. Noi però adottiamo la prima convenzione. Resta così provato (F.):

La determinazione di una congruenza W *di data prima falda focale* S *è ridotta a quella del sistema lineare* (1).

Confrontando con le (16) del § 17 C si deduce il teorema (F.):

Su una superficie S *i sistemi coniugati tali che l'equazione corrispondente di Laplace per le coordinate di punto ha un invariante uguale all'invariante non omologo dell'equazione tangenziale sono tutti e soli quelli che corrispondono alle sviluppabili delle congruenze* W, *di cui* S *è una falda focale.*

Se ne deduce ricordando le altre formole del § 41 :

(2) $$A_{uv} = -B\gamma_u + A\beta\gamma \qquad B_{uv} = -A\beta_v + B\beta\gamma.$$

(3) $$\lambda = -A_u - A\theta_u + B_v + B\theta_v .$$

(4) $$\mu = -A_u - A\theta_u - B_v - B\theta_v .$$

(5) $$\overline{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \quad ; \quad (6) \quad \overline{\xi} = \lambda\xi + 2(A\xi_u - B\xi_v).$$

(7) $$\overline{x}_u = (\mu_u + 2Ap_{11})x - \lambda x_u + 2Bx_{uv}.$$

(8) $$\overline{x}_v = (\mu_v + 2Bp_{22})x + \lambda x_v + 2Ax_{uv}.$$

(9) $$N = \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp_{22})$$
$$= \lambda\mu + 2A(\lambda_u + 2A\pi_{11}) + 2B(\lambda_v - 2B\pi_{22}).$$

(10) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{N}\overline{x} + 2\left(\frac{A}{N}\overline{x}_u - \frac{B}{N}\overline{x}_v\right); \\ \xi &= \frac{\mu}{N}\overline{\xi} + 2\left(\frac{A}{N}\overline{\xi}_u + \frac{B}{N}\overline{\xi}_v\right) \end{aligned}\right.$$

che permettono di dedurre la prima dalla seconda falda focale.

(11) $$(\overline{x}\ \overline{x}_u\ \overline{x}_v\ \overline{x}_{uv}) = N^2(x\ x_u\ x_v\ x_{uv})$$

ossia :

(12) $$\overline{a}_{12} = \pm N a_{12}$$

cioè (posto anche $|\overline{a}_{12}| = e^{\overline{\theta}}$) $\qquad \overline{\theta} = \theta + \log|N|$

Data la congruenza (cioè $A : B$) le A , B *sono note a meno d'un fattore comune, che le* (1) *permettono di determinare per quadrature. Rimane l'indeterminazione di un fattore costante inessenziale.* Il carattere *invariantivo* di N appare poi meglio, introducendo le L , M del § 16 D. Vale infatti la :

(9) bis $$N = (2BB_{vv} + 2B^2M - B_v^2) - (2AA_{uu} + 2A^2L - A_u^2)$$

affatto equivalente alle precedenti. Una trasformazione simile si poteva eseguire anche nel caso di congruenze generali.

Oltre le A , B, *le* λ , μ *e la* N *vi sono due altri elementi essenziali : le* S , T *che qui definiremo, ponendo*

$$(13) \qquad S = \mu_{uu} - \theta_u \mu_u + \beta\mu_v - \mu(\beta_v + \beta\theta_v) + $$
$$+ 4B\beta p_{22} + 4A_u p_{11} + 2A\frac{\partial p_{11}}{\partial u} + 2B\frac{\partial p_{11}}{\partial v}.$$

$$(14) \qquad T = \mu_{vv} - \theta_v \mu_v + \gamma\mu_u - \mu(\gamma_u + \gamma\theta_u) + $$
$$+ 4A\gamma p_{11} + 4B_v p_{22} + 2A\frac{\partial p_{22}}{\partial u} + 2B\frac{\partial p_{22}}{\partial v}.$$

Si trova, derivando le precedenti :

$$(15) \quad \overline{x}_{uu} - \theta_u \overline{x}_u + \beta\overline{x}_v - \pi_{11}\overline{x} = xS = \frac{S}{N}(2A\overline{x}_u - 2B\overline{x}_v + \lambda\overline{x})$$

$$(16) \quad \overline{x}_{vv} - \theta_v \overline{x}_v + \gamma\overline{x}_u - \pi_{22}\overline{x} = xT = \frac{T}{N}(2A\overline{x}_u - 2B\overline{x}_v + \lambda\overline{x})$$

Confrontando con le equazioni fondamentali relative alla superficie $\overline{S}$ $\left[\overline{x}_{uu} = \overline{\theta}_u \overline{x}_u + \overline{\beta}\,\overline{x}_v + \overline{p}_{11}\overline{x}\right.$ e analoga per $\left.\overline{x}_{vv}\right]$, si ha:

$$(17) \qquad N_u = 2AS \qquad N_v = -2BT.$$

$$(18) \quad \beta + \overline{\beta} = -2B\frac{S}{N} = -\frac{B}{A}\frac{N_u}{N}\ ;\ \gamma + \overline{\gamma} = 2A\frac{T}{N} = -\frac{A}{B}\frac{N_v}{N}.$$

$$(19) \quad \overline{p}_{11} - \pi_{11} = \frac{\lambda}{2A}\frac{N_u}{N} = \lambda\frac{S}{N}\ ;\ \overline{p}_{22} - \pi_{22} = -\frac{\lambda}{2B}\frac{N_v}{N} = \lambda\frac{T}{N}.$$

Le (12), (17), (18), (19) *danno tutti gli elementi* $\overline{\theta}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{p}_{ii}$ *della seconda falda focale* $\overline{S}$, *che ne è completamente determinata.* Risulta di più che, se dalla seconda falda $\overline{S}$ si vuole tornare alla prima, ossia se si assume la $\overline{S}$ come superficie di partenza, basta alle μ, λ, A, B, N sostituire le:

$$(20)\quad \overline{\mu}=\frac{\lambda}{N}\,,\quad \overline{A}=\frac{A}{N}\,,\quad \overline{B}=-\frac{B}{N}\,,\quad \overline{\lambda}=\frac{\mu}{N}\,,\quad \overline{N}=\frac{1}{N}.$$

Cosicchè varranno anche le formole:

$$(21)\qquad p_{11}=\overline{\pi}_{11}-\frac{\mu}{2A}\frac{N_u}{N}\qquad p_{22}=\overline{\pi}_{22}-\frac{\mu}{2B}\frac{N_v}{N}$$

dedotte dalle (19), scambiando le due falde focali. Ma poichè

$$\pi_{11}-p_{11}=\beta_v+\beta\theta_v\quad,\quad \overline{\pi}_{11}-\overline{p}_{11}=\overline{\beta}_v+\overline{\beta}\,\overline{\theta}_v=\overline{\beta}_v+\overline{\beta}\left(\theta_v+\frac{N_v}{N}\right)$$

e analoghe per p_{ii}, π_{ii},

si deduce dal confronto di tutte queste formole tra le p, π, tenendo conto dei valori di $\beta+\overline{\beta}$ e di $\gamma+\overline{\gamma}$ *l'equazione fondamentale:*

$$(22)\qquad N_{uv}+\frac{A}{B}\beta N_v+\frac{B}{A}\gamma N_u=0\,,$$

che chiameremo l'equazione in N.

§ 43. — Le congruenze W con $N=$ cost.

Proveremo ben presto che, se r *sono le sei coordinate di una retta della nostra congruenza, le* r_{uv} *sono combinazioni lineari di* r, r_u, r_v *e che per ogni retta* r *il complesso lineare che è in involuzione con* r, r_u, r_v, r_{uu}, r_{vv} *è anche in involuzione con* r_{uv} *cioè contiene tutte le rette* r, $\mathrm{r}+d\mathrm{r}$, $\mathrm{r}+d\mathrm{r}+\frac{1}{2}d^2\mathrm{r}$, *e perciò è il complesso lineare osculatore alla congruenza.*

Se dunque r_{uuu}, r_{vvv}, sono combinazioni lineari delle r, r_u, r_v, r_{uu}, r_{vv} allora le r sono legate da una relazione lineare a coefficienti costanti, cioè la congruenza appartiene a un *complesso lineare.* Il calcolo effettivo prova che ciò avviene quando $N=$ cost., ma noi possiamo evitare il calcolo nel seguente modo. Se $N = \text{cost.} \neq 0$, le formole del precedente § dicono che

$$\beta + \overline{\beta} = 0\,, \quad \gamma + \overline{\gamma} = 0\,, \quad \overline{\pi}_{ii} = p_{ii}\,, \quad \overline{p}_{ii} = \pi_{ii}\,.$$

Le coordinate $\overline{x}$ soddisfano dunque alle stesse equazioni fondamentali, cui soddisfano le ξ. Se ne deduce quindi che le due falde focali S ed $\overline{S}$ sono superficie trasformate l'una nell'altra da una correlazione; e, poichè un punto x (piano ξ) di una appartiene al piano $\overline{\xi}$ (punto $\overline{x}$) omologo dell'altra, tale correlazione è un sistema nullo, e la nostra congruenza appartiene evidentemente al corrispondente complesso lineare. Viceversa se la congruenza appartiene a un complesso lineare, le falde focali chiaramente si corrispondono nel sistema nullo definito da tale sistema.

Dunque: *Le congruenze* W *per cui* $\mathrm{N} = \text{cost.} \neq 0$ *sono quelle che appartengono ad un complesso lineare.*

Alle precedenti considerazioni si sottrae il caso $N = 0$, in cui la seconda falda focale $\overline{S}$ ha una forma F_2 nulla. In tal caso le:

$$Nx = \lambda \overline{x} + 2(A\overline{x}_u - B\overline{x}_v) \qquad N\xi = \mu\overline{\xi} + 2(A\overline{\xi}_u + B\overline{\xi}_v)$$

diventano, per $N = 0$, moltiplicando le $\overline{x}$ e le $\overline{\xi}$ per convenienti fattori:

$$A\overline{x}_u - B\overline{x}_v = 0 \qquad A\overline{\xi}_u + B\overline{\xi}_v = 0\,.$$

Quindi, se $u' = \text{cost.}$, $v' = \text{cost.}$ sono le equazioni delle sviluppabili della congruenza, è

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u'} = \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial v'} = 0\,; \quad \overline{x} = \overline{x}(v')\,, \qquad \overline{\xi} = \overline{\xi}(u')$$

cioè i punti $\overline{x}$ si riducono ad ∞^1 punti, i piani $\overline{\xi}$ ad ∞^1 piani. Poichè, $S\overline{x}\,\overline{\xi} = 0$ identicamente in u', v' segue che ogni punto $\overline{x}$ giace su ognuno dei piani $\overline{\xi}$, e che quindi i punti $\overline{x}$, trovandosi su tutti i piani $\overline{\xi}$, appartengono a una retta, per cui passano tutti i piani $\overline{\xi}$.

Una congruenza W, *per cui* N = 0, *appartiene a un complesso lineare speciale, l'asse del quale è la sua seconda falda focale.*

Questo teorema del Fubini è stato nel modo seguente reso intuitivo dal Prof Segre. Se $N=0$, la forma F_2 relativa ad $\overline{S}$ è identicamente nulla; e pertanto $\overline{S}$ si riduce ad una linea L. La congruenza è luogo delle generatrici di ∞^1 coni, aventi i vertici su L. Questi coni possono ridursi a fasci di rette: cosa impossibile nelle nostre ipotesi secondo le quali la prima falda focale S è una effettiva superficie non sviluppabile. Se i coni sono curvi, e P, P', P'' sono i vertici di 3 coni consecutivi, il complesso lineare osculatore alla congruenza in una sua retta r uscente da P dovrà contenere tutti i regoli determinati da r e da due rette consecutive. Prendendo queste 2 rette sul cono di vertice P, se ne deduce che il complesso è speciale; prendendo queste due rette una uscente da P', l'altra da P'' si deduce che P, P', P'' sono sull'asse del complesso, che costituirà perciò la seconda falda focale della congruenza.

§ 44. — Confronto coi risultati classici della geometria metrica.

Supponiamo nota la μ, e proponiamoci di calcolare A, B e quindi la nostra congruenza. Assumendo λ come nuova incognita ausiliaria, le nostre equazioni in A, B diventano:

$$(1) \qquad A_v = -B\gamma \qquad\qquad B_u = -A\beta.$$

$$(2) \qquad 2A_u = -2A\theta_u - (\lambda + \mu) \qquad 2B_v = -2B\theta_v + (\lambda - \mu).$$

Scrivendone le condizioni d'integrabilità troviamo:

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda_v = -\mu_v - 2A(\theta_{uv} + \beta\gamma) + 2B(\gamma\theta_u + \gamma_u) \\ \lambda_u = \mu_u + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma) - 2A(\beta\theta_v + \beta_v) . \end{cases}$$

Scrivendo infine la condizione d'integrabilità di queste ultime, troviamo:

$$(4) \qquad \mu_{uv} - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mu + 2B\frac{\partial p_{22}}{\partial u} + 2A\frac{\partial p_{11}}{\partial v} = 0.$$

Senza più oltre occuparci del caso generale, supponiamo le coordinate non omogenee cioè $p_{11} = p_{22} = 0$, $t = 1$.

Questa equazione si riduce alla equazione di Moutard (Cap. II, § 18)

$$(5) \qquad \mu_{uv} - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mu = 0,$$

al cui studio è dunque ridotta la ricerca delle congruenze W. Ora questa equazione è appunto la base della teoria metrica di tali congruenze, così come è svolta nelle classiche lezioni del Bianchi.

Le equazioni che definiscono S, T si riducono per le $p_{ii} = 0$ a:

$$(6) \qquad \mu_{uu} - \theta_u\mu_u + \beta\mu_v - \mu\pi_{11} = S = \frac{1}{2A}N_u.$$

$$(7) \qquad \mu_{vv} - \theta_v\mu_v + \gamma\mu_u - \mu\pi_{22} = T = -\frac{1}{2B}N_v.$$

Se sostituiamo 0 al posto di S, T, queste 3 equazioni nella μ sono le stesse cui soddisfano le coordinate ξ, η, ζ del piano tangente (loc. cit.) e perciò sono illimitatamente integrabili. Ne segue facilmente, scrivendo che esse sono compatibili anche quando i secondi membri delle ultime due sono S e T che

$$(8) \qquad \beta T = S_v \qquad \gamma S = T_u$$

ossia

$$(8)_{\text{bis}} \qquad S_v = (-\beta)(-T) \qquad (-T)_u = -\gamma S.$$

Sostituendo alle S, T *i loro valori* $N_u : 2A$ *e* $-N_v : 2B$, *si ritrova l'equazione fondamentale* (22) *del* § 42 *in* N.

Nel caso $\mu = 0$ la congruenza degenera; questo fatto noto ci risulta evidente poichè, essendo qui $p_{ii} = 0$, è anche $N = 0$.

La formola:

$$(9) \qquad \overline{\xi}_u = (\lambda_u + 2A\pi_{11})\xi - \mu\xi_u - 2B\xi_{uv} =$$

$$= \left[\mu_u + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma) - 2A(\beta\theta_v + \beta_v) + 2A\pi_{11}\right]\xi - \mu\xi_u - 2B\xi_{uv}$$

(con le analoghe in η, ζ) diventa per le:

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta\theta_v + \beta_v \quad , \quad \xi_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)\xi$$

appunto la:

$$(10) \qquad \overline{\xi}_u = \mu_u \xi - \mu \xi_u \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\overline{\xi}_u}{\mu^2} = -\left(\frac{\xi}{\mu}\right)_u ;$$

si trova analogamente $\dfrac{\overline{\xi}_v}{\mu^2} = \left(\dfrac{\xi}{\mu}\right)_v$.

Ritroviamo così la classica formola della trasformazione di Moutard. Ne deduciamo poi:

$$(11) \qquad \overline{\xi}_{uv} = \frac{\mu_u}{\mu}\overline{\xi}_v + \frac{\mu_v}{\mu}\overline{\xi}_u .$$

Cioè: *Il piano* $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$, 1 *inviluppa una superficie* $\overline{\Sigma}$, *su cui le* u, v *formano un sistema coniugato a uguali invarianti tangenziali* (cioè relativi all'equazione di Laplace per le coordinate di piano tangente).

Anche sulla superficie S_0 *inviluppata dal piano* ξ, η, ζ, μ (le cui coordinate soddisfano tutte all'equazione di Moutard iniziale) *le* u, v *descrivono un sistema coniugato a invarianti tangenziali uguali.*

Calcolando l'equazione $(\overline{\xi}_u \; \overline{\xi}_v \; d^2\overline{\xi}) = 0$ delle asintotiche della superficie $\overline{\Sigma}$ si trova:

$$(12) \quad Sdu^2 = Tdv^2 \qquad \text{od anche} \qquad \frac{1}{A} N_u du^2 + \frac{1}{B} N_v dv^2 = 0.$$

Cercando invece l'equazione delle asintotiche di S_0, inviluppo del piano ξ, η, ζ, μ si trova:

$$(13) \quad Sdu^2 + Tdv^2 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{A} N_u du^2 = \frac{1}{B} N_v dv^2$$

Le asintotiche di $\overline{\Sigma}$ *e di* S_0 *determinano sulla* S *due sistemi oniugati che si tagliano armonicamente e che, si noti, sono,* come le A, B, N, *indipendenti dal piano* t $= 0$ *assunto nei calcoli precedenti come piano all' infinito.*

Le equazioni $(8)_{\text{bis}}$ *cui soddisfano* S, — T *si deducono da quelle cui soddisfano* A, B *mediante lo scambio di* β, γ. Se ne deduce il teor. (F.):

Data una congruenza W *di cui una falda* S *sia isoterma-asintotica* ($\beta = \gamma$), *o anche data l' equazione* du : A $=$ dv : B *di un sistema di sviluppabili* (col che le A, B sono determinate a meno di un fattore, la cui ricerca si esegue per le (1) con sole quadrature), *le tangenti alle linee* du : S $=$ dv : — T *descrivono pure una congruenza* W.

Nel caso generale, confrontando con le (14) del § 17 *B*, vediamo che:

Sulla S *le linee corrispondenti alle asintotiche di* S_0 *formano un sistema coniugato a invarianti tangenziali uguali,* com' è intuitivo *perchè piani tangenti omologhi di* S, S_0 *si incontrano sul piano* t$=0$, su cui segnano lo stesso sistema di linee; *e il sistema coniugato di* S, *armonico al precedente, cioè quello che corrisponde alle asintotiche di* $\overline{\Sigma}$, *ha uguali gli invarianti di punto.* Ecco un nuovo significato della equazione cui soddisfa la N!

Le asintotiche di una delle 3 superficie S, S_0, $\overline{\Sigma}$ *corrispondono sulle altre due a un sistema coniugato.*

Se indichiamo per un momento con $p =$ cost., $q =$ cost. le equazioni delle asintotiche di S_0, formanti su S, $\overline{\Sigma}$ un sistema coniugato, varranno equazioni del tipo:

$$x_{pq} = r x_p + s x_q \qquad \overline{\xi}_{pq} = \rho \xi_p + \sigma \xi_q .$$

Dalla $S dx d\overline{\xi} = 0$ donde $S x_p \overline{\xi}_q = 0$ otteniamo derivando:

$$S x_p \overline{\xi}_{pq} + S \overline{\xi}_p \cdot x_{pq} = 0 \qquad S x_p (\rho \overline{\xi}_p + \sigma \overline{\xi}_q) + S \overline{\xi}_p (r x_p + s x_q) = 0$$

$\sigma S x_p \overline{\xi}_q + s S \overline{\xi}_p x_q = 0$ che, confrontata con la $S x_p \overline{\xi}_q + S \overline{\xi}_p x_q = 0$, dà $\sigma = s$.

In modo simile si prova $r = \rho$. Quindi, *relativamente al sistema coniugato comune, le coordinate non omogenee di un punto della* S *e di un piano tangente della* $\overline{\Sigma}$ *soddisfano a una stessa equazione di Laplace.* Vale pure l' oss. (F.):

Date le equazioni differenziali (du : A = dv : B) *di un sistema di sviluppabili col che le* A , B , *come già abbiamo detto, si calcolano con sole quadrature, allora, trovate le* A , B , *senza ulteriori quadrature non solo si calcolano tutti gli elementi della congruenza, ma anche le equazioni differenziali* Sdu² + Tdv² *dei precedenti sistemi coniugati. E viceversa, dato uno di questi sistemi coniugati, le* S , T *si calcolano con sole quadrature ; e con ulteriori quadrature si possono calcolare tutti gli elementi della congruenza.*

Infatti le tre equazioni (5), (6), (7) nella μ si sanno integrare se $S = T = 0$ ed hanno per soluzioni le combinazioni lineari di ξ , η , ζ. Determinata la μ , le (1), (2), (3) determinano A , B , λ con nuove 3 costanti arbitrarie, cosicchè otterremo sei sistemi di valori linearmente indipendenti $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ [la i è un indice, non un simbolo di calcolo assoluto] di cui ogni altra soluzione è, se $S = T = 0$, una combinazione lineare.

Ora, essendo $S = T = 0$, è $N = \text{cost.}$; e quindi la congruenza appartiene a un complesso lineare; questa osservazione basta a provare che la $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, ecc. si trovano senza quadrature. Nel caso generale in cui S e T non sono nulle, si ponga $A = \Sigma k^{(i)} A^{(i)}$, $B = \Sigma k^{(i)} B^{(i)}$, ecc. Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie dimostra che le k si trovano con sole quadrature.

Si osservi però che, *mentre, date le* A , B *non sono più necessarie quadrature, se invece sono date le* S , T, *sono ancora necessarie delle quadrature.* Ciò che spiega la maggior semplicità della teoria proiettiva (F.) in confronto alla teoria classica, che si volge alla determinazione della μ, da cui segue subito la conoscenza delle S , T. Ed ecco l'intima ragione di questo fatto.

Mentre date le A , B , *la corrispondente congruenza è determinata, il dare le* S , T *individua le infinite congruenze che si ottengono da una di esse combinandola linearmente con le congruenze di un complesso lineare.*

Se invece di dare le sole S, T, si desse effettivamente la μ, permane ancora una indeterminazione; infatti, se $\mu = 0$, si ha, nelle attuali ipotesi $t = 1$, che $\overline{t} = 0$, che cioè *la congruenza ha per seconda falda focale una retta posta nel piano che abbiamo assunto come piano all' infinito.*

§ 45. — L'equazione delle congruenze *W* in coordinate di retta.

Ritornando a coordinate omogenee, le coordinate $r = (x\,\bar{x})$ di una retta generica della nostra congruenza soddisfano alle:

$$(1)\quad \begin{cases} r = A(x\,x_u) + B(x\,x_v) \quad ; \\ r_u = -\dfrac{\lambda+\mu}{2}(x\,x_u) + B(x_u\,x_v) + B(x\,x_{uv}) \\ r_v = \dfrac{\lambda-\mu}{2}(x\,x_v) - A(x_u\,x_v) + A(x\,x_{uv})\,; \\ r_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)r + \lambda(x_u\,x_v) - \mu(x\,x_{uv}) \end{cases}$$

donde:

$$(2)\quad r_{uv} - \left(\frac{\partial \log B}{\partial v} + \theta_v\right)r_u - \left(\frac{\partial \log A}{\partial u} + \theta_u\right)r_v +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial \log A}{\partial u} + \theta_u\right)\left(\frac{\partial \log B}{\partial v} + \theta_v\right) - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\right] r = 0\,.$$

Le coordinate r *di una retta descrivente una congruenza* W *soddisfano ad una equazione di Laplace, le cui caratteristiche sono le asintotiche delle falde focali.* Il complesso lineare in involuzione con r, r_u, r_v, r_{uu}, r_{vv} è in involuzione anche con r_{uv}, cioè è *osculatore alla nostra congruenza.* Gli invarianti di tale equazione sono uguali soltanto quando $A : B = U : V$, ove U è funzione della sola u, V della v. Posto $A : U = B : V = C$, le (1) del § 44 danno:

$$(3)\qquad \beta = -\frac{V}{U}\,\frac{C_u}{C} \quad , \quad \gamma = -\frac{U}{V}\,\frac{C_v}{C}.$$

Cambiando i parametri delle u, v si renda $U = V = 1$. Sarà:

$$(4)\quad \beta = -\frac{\partial \log C}{\partial u} \quad , \quad \gamma = -\frac{\partial \log C}{\partial v} \quad \text{e quindi} \quad \beta_v = \gamma_u\,.$$

Perciò: *Soltanto le superficie* R (per cui cioè i parametri delle asintotiche si possono scegliere in guisa che $\beta_v = \gamma_u$) *sono falde focali di una congruenza* W, *le cui rette soddisfano ad una equazione di Laplace ad invarianti uguali. Tale congruenza è formata dalle tangenti alle* u — v = cost.; *da quanto segue apparirà che altrettanto avviene delle tangenti alle linee* u + v = cost., *le quali con le precedenti formano un sistema coniugato, che si dice* R.

Per vedere tutto questo chiaramente, chiediamoci quando *sia le tangenti ad un sistema di linee, che le tangenti alle linee coniugate formano congruenze* W. In tal caso per le due congruenze $A : B$ ha valori uguali e di segno opposto. Dovendo entrambi soddisfare la

$$(5) \qquad W = \frac{\partial^2 \log \frac{A}{B}}{\partial u \partial v} + \left(\frac{B}{A}\gamma\right)_u - \left(\frac{A}{B}\beta\right)_v = 0,$$

caratteristica delle congruenze W, sarà appunto $\frac{\partial^2 \log (A : B)}{\partial u \partial v} = 0$, cioè $A : B = U : V$, come nel caso precedente. Cioè:

Se le tangenti a un sistema di linee tracciate su una superficie S *formano una congruenza* W, *condizione necessaria e sufficiente affinchè anche le tangenti coniugate formino una congruenza* W *è che tali linee insieme alle coniugate formino un sistema* R, *ossia che l'equazione di Laplace cui soddisfano le coordinate delle rette della data congruenza abbia invarianti uguali.*

Altrettanto avverrà perciò anche del sistema coniugato, immagine delle sviluppabili sulle seconde falde focali; e le successive trasformate di Laplace della nostra congruenza sono tutte congruenze della stessa specie. Si noti in più che i *sistemi coniugati* R *sono tutti isotermo-coniugati.*

Se $u \pm v =$ cost. formano un sistema coniugato R, a coordinate delle tangenti a tali linee possiamo assumere le

$$(6) \qquad \rho = \frac{1}{a_{12}} \Big[(x\, x_u) + (x\, x_v)\Big] \qquad \rho' = \frac{1}{a_{12}} \Big[(x\, x_u) - (x\, x_v)\Big]$$

le quali hanno il vantaggio di essere *invarianti;* perchè, moltiplicando le x per un fattore k, e quindi a_{12} per k^2, esse non mutano.

Valgono le:

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial u}(\rho+\rho')=\beta(\rho-\rho')\quad,\quad \frac{\partial}{\partial v}(\rho-\rho')=\gamma(\rho+\rho')$$

ossia:

$$(8)\qquad (C\rho)_u=-C^2\left(\frac{\rho'}{C}\right)_u\quad,\quad (C\rho)_v=C^2\left(\frac{\rho'}{C}\right)_v$$

donde:

$$(9)\quad \rho_{uv}+(\Gamma_{uv}-\Gamma_u\Gamma_v)\rho=0\ ,\ \rho'_{uv}+(-\Gamma_{uv}-\Gamma_u\Gamma_v)\rho'=0\quad (\Gamma=\log C).$$

Queste equazioni sono pertanto trasformate di Moutard l' una dell' altra.

Le ρ_{14}, ρ_{24}, ρ_{34} sono le coordinate del punto ove la retta ρ incontra il piano $t=0$; risultato analogo vale per ρ'. Dai risultati del § 18 si deduce che tali due punti si possono considerare come proiezioni di due superficie Σ', Σ'' di cui u, v sono le asintotiche. Supposto $t=1$, è:

$$(10)\ \rho_{41}=\frac{1}{a_{12}}(x_u+x_v)\ ,\ \rho_{42}=\frac{1}{a_{12}}(y_u+y_v)\ ,\ \rho_{43}=\frac{1}{a_{12}}(z_u+z_v)$$

che noi potremo pensare (loc. cit.) essere *tre* delle *quattro* coordinate omogenee di un punto di Σ', mentre le coordinate ξ', η', ζ', τ' corrispondenti del piano tangente soddisfano alla $\tau'=1$ (sono *non* omogenee). E dalle formole date loc. cit., *duali* di quelle di Lelieuvre, risulta:

$$(11)\quad \begin{aligned}\frac{\partial\xi'}{\partial u}&=\begin{vmatrix}\rho_{42} & \rho_{43}\\ \frac{\partial\rho_{42}}{\partial u} & \frac{\partial\rho_{43}}{\partial u}\end{vmatrix}=\frac{1}{a_{12}^2}\begin{vmatrix}y_u+y_v & z_u+z_v\\ (\beta-\theta_u)y_v+y_{uv} & (\beta-\theta_u)z_v+z_{uv}\end{vmatrix}\\ \frac{\partial\xi'}{\partial v}&=-\begin{vmatrix}\rho_{42} & \rho_{43}\\ \frac{\partial\rho_{42}}{\partial v} & \frac{\partial\rho_{43}}{\partial v}\end{vmatrix}=-\frac{1}{a_{12}^2}\begin{vmatrix}y_u+y_v & z_u+z_v\\ (\gamma-\theta_v)y_u+y_{uv} & (\gamma-\theta_v)z_u+z_{uv}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Derivando, ricordando la $\beta_v=\gamma_u$ e le equazioni fondamentali per Σ'

(12) $$\xi'_{uu} = \theta'_u \xi'_u - \beta' \xi'_v \qquad \xi'_{vv} = \theta'_v \xi'_v - \gamma' \xi'_u$$

(dove appare chiaro il significato dei simboli)

si trova che le quantità β', γ' relative a Σ' sono date da:

(13) $$\beta + \beta' = \theta_u + \theta'_u \ ; \ \gamma + \gamma' = \theta_v + \theta'_v \quad \theta + \theta' = \log(\theta_u + \theta_v - \beta - \gamma)$$

Anche Σ' è perciò una superficie R; e così pure Σ''. È facile precisare tale proprietà giungendo al teorema seguente:

Le intersezioni con un piano di due congruenze R, *trasformate di Laplace, sono proiezioni delle asintotiche di due superficie* Σ'', Σ', *che sono ancora superficie* R, *anzi sono falde focali di una nuova congruenza* W *che si dirà trasformata* T *della falda focale* S *comune alle due congruenze iniziale.* Vale anche il teorema duale, perchè le correlazioni portano superficie R in superficie R.

§ 46. — Le congruenze di Wilczynski.

Ci chiediamo quando *due congruenze aventi a comune una falda focale* S, *su cui le loro sviluppabili segnano lo stesso sistema coniugato, appartengono entrambe a complessi lineari.*

Entrambe le congruenze saranno W, perciò il sistema coniugato sarà un sistema R, le cui equazioni si potranno porre nella forma $u \pm v =$ cost., mentre è $\beta_v = \gamma_u$. Le due congruenze si ottengono ponendo

(1) $$A = B = e^{-\varphi} \qquad \text{oppure} \qquad A = -B = e^{+\varphi}$$

ove $$\varphi_u = \beta \quad , \quad \varphi_v = \gamma .$$

Gli elementi della seconda congruenza saranno contrassegnati con apici.

Per entrambe si calcolino μ, λ, N. Si trova subito:

(2) $$N = A^2(2\varphi_{uu} - 2\varphi_{vv} - \varphi_u^2 + \varphi_v^2 + \theta_u^2 - \theta_v^2 +$$
$$+ 2\varphi_u \theta_v - 2\varphi_v \theta_u - 2\theta_{uu} + 2\theta_{vv} + 4p_{11} - 4p_{22}),$$

$$(3)\qquad N' = A'^2(-2\varphi_{uu} + 2\varphi_{vv} - \varphi_u^2 + \varphi_v^2 + \theta_u^2 - \theta_v^2 +$$
$$+ 2\varphi_u\theta_v - 2\varphi_v\theta_u - 2\theta_{uu} + 2\theta_{vv}),$$

donde, sottraendo:

$$(4)\qquad \frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}) = (\varphi_{uu} - \varphi_{vv}).$$

Sommando si trova invece:

$$(5)\qquad \frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} + N'e^{-2\varphi}) = \frac{1}{2}(\varphi_v^2 - \varphi_u^2) -$$
$$-\left(\theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - p_{11}\right) + \left(\theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - p_{22}\right)$$

cioè, ricordando la $\beta_v = \gamma_u$, e i valori delle L, M definiti al § 16 D,

$$(6)\qquad \frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} + N'e^{-2\varphi}) = \frac{1}{2}(\varphi_v^2 - \varphi_u^2) - L + M.$$

Le condizioni (14), (15) della teoria delle superficie (§ 16 D) danno pertanto:

$$M_u = -(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) = 2\varphi_v\varphi_{uv} - \varphi_u\varphi_{vv} =$$
$$= -2\varphi_v\varphi_{uv} - \varphi_u\left\{\varphi_{uu} - \frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi})\right\}$$

donde, se N, N' sono costanti, se cioè le nostre congruenze appartengono a complessi lineari,

$$(7)\qquad M = -\varphi_v^2 - \frac{1}{2}\varphi_u^2 + \frac{1}{8}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}) + V$$

[V = funzione della sola v].

E similmente si trova:

$$(8)\qquad L = -\varphi_u^2 - \frac{1}{2}\varphi_v^2 - \frac{1}{8}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}) + U$$

[U = funzione della sola u].

Confrontando col precedente valore di $L - M$, se ne deduce $U = V$ cioè

(9) $$U = V = m = \text{cost.}$$

Ora, se N ed N' sono costanti:

$$\beta_{vvv} - \gamma_{uuu} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\varphi_{vv} - \varphi_{uu}) = -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \frac{Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}}{4} =$$

$$= -\varphi_{uv} \frac{Ne^{2\varphi} + N'e^{-2\varphi}}{2} - \varphi_u \varphi_v (Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi}).$$

Se ne deduce facilmente che anche la terza condizione (5) del § 16 D d'integrabilità è soddisfatta.

La nostra ricerca è ridotta allo studio della sola equazione:

(10) $$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \frac{1}{4}(Ne^{2\varphi} - N'e^{-2\varphi})$$

Se una *almeno* delle citate congruenze W è degenere, se p. es. $N' = 0$, questa equazione si riduce alla nota equazione di Liouville

(11) $$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \frac{N}{4} e^{2\varphi}$$

il cui integrale generale è dato dalla $e^\varphi = \text{cost.} \frac{\sqrt{X'Y'}}{X+Y}$, ove X è funzione soltanto di $u + v$ ed Y di $u - v$.

Se nè N, nè N' sono nulli, allora, essendo φ determinato a meno di una costante additiva h dalla $d\varphi = \beta du + \gamma dv$, possiamo sostituire $\varphi + h$ alla φ deducendone:

(12) $$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \frac{1}{4}(Ne^{2h} e^{2\varphi} - N'e^{-2h} e^{-2\varphi}).$$

Scegliendo h in modo che $Ne^{2h} = \pm N'e^{-2h}$ si trova, moltiplicando u, v per una stessa costante:

(13) $$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \varepsilon(e^{2\varphi} \mp e^{-2\varphi}) \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

che è *l'equazione da cui dipende la ricerca delle superficie a curvatura costante e da cui nel campo proiettivo dipende la ricerca delle superficie su cui esiste un sistema coniugato le cui tangenti definiscono due congruenze appartenenti entrambe a complessi lineari.*

Ricordo che le superficie a curvatura costante (così come le deformate delle quadriche) sono (Bianchi) casi particolari di superficie R; le tangenti a un qualsiasi sistema di linee di curvatura di una superficie a curvatura costante sono W.

§ 47. — Congruenze W di cui una falda focale S è quadrica.

A) Primi teoremi.

Se S è una quadrica, è $\beta = \gamma = 0$. Dunque $A = U$ è funzione della sola u, $B = V$ della v. *Le congruenze aventi una quadrica* S *per falda focale sono dunque quelle le cui sviluppabili inviluppano su di essa linee, che con le coniugate formano un sistema isotermo-coniugato.*

Posto $t = 1$, $y = u$, $z = v$, $x = uv$, si ha $\theta = p_{11} = p_{22} = 0$ e quindi

$$(1)\quad \mu = -U' - V', \quad \lambda = -U' + V', \quad N = U'^2 - V'^2 - 2UU'' + 2VV''$$

$$(2)\quad \overline{\beta} = \overline{\beta} + \beta = \frac{2VU'''}{N} \quad , \quad \overline{\gamma} = \overline{\gamma} + \gamma = -\frac{2UV'''}{N}.$$

La seconda falda focale $\overline{\text{S}}$ *è rigata* ($\overline{\beta}\,\overline{\gamma} = 0$) *soltanto se o* U *è funzione di secondo grado della* u, *o* V *della* v. Se p. es. $A = U = au^2 + 2bu + c$ ($a, b, c =$ cost.), allora

$$(3)\quad \overline{\gamma} = \frac{2V'''(au^2 + 2bu + c)}{4(ac - b^2) + (V'^2 - 2VV'')}.$$

Dunque: *Se una congruenza* W *ha per falde focali una quadrica* S *ed una rigata* $\overline{\text{S}}$ *questa appartiene a una congruenza lineare* (perchè l'equazione $\overline{\gamma} = 0$ ha due radici $u =$ cost.), *e le sue asintotiche* *curve appartengono ciascuna a un complesso lineare. Se* $\overline{S}$ *non è rigata, ma* S *è sempre una quadrica, l' identità*

$$\frac{\partial^2 \log\overline{\beta}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log\overline{\gamma}}{\partial u \partial v} = \overline{\beta}\,\overline{\gamma} \tag{4}$$

prova che le asintotiche curve della seconda falda $\overline{S}$, *di qualunque sistema siano, appartengono ciascuna ad un complesso lineare.*

È poi evidente che sono equivalenti i 3 *fatti seguenti :*

a) U *e* V *sono polinomi di secondo grado;* b) *la congruenza appartiene a un complesso lineare ;* c) *anche la seconda falda focale è una quadrica.*

In tal caso con una trasform. lineare (reale o no; intera o fratta) sulla u e una trasformazione analoga sulla v (cioè con una proiettività applicata ad S) potremo ridurre U ad 1 (se $U=0$ ha radici coincidenti che si mandano all'∞) oppure ad au ($a=$ cost.) e similmente la V ad 1 oppure ad av ($a=$ cost.) Le linee $du : U = dv : V$ saranno quindi riducibili ad uno dei tipi: $u - v =$ cost. (nel qual caso $N=0$ e la seconda falda degenera in una retta) oppure $ue^{-hv} =$ cost. ($h=$ cost.) oppure $u : v^h =$ cost. ($h=$ cost.)

B) Interpretazione nella geometria non euclidea.

Assumeremo S come assoluto di una metrica non euclidea di Cayley. Le coordinate di un punto di $\overline{S}$ sono :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{x} = -(U'+V')uv + 2(vU+uV) & ; & \overline{t} = -(U'+V') ; \\ \overline{y} = -(U'+V')u + 2U & ; & \overline{z} = -(U'+V')v + 2V ; \end{array} \right. \tag{5}$$

formole notevoli che danno in termini finiti per mezzo di una funzione arbitraria U della u e V della v le equazioni di una superficie $\overline{S}$.

Posto

$$x' = 2V - V'v \quad , \quad y' = -V' \quad , \quad z' = v \quad , \quad t' = 1 , \tag{6}$$

questo punto, al variare di v, descrive una curva C'. Le equazioni precedenti che si possono scrivere:

$$\overline{x} = ux' + (2U - U'u)z' \quad ; \quad \overline{y} = uy' + (2U - U'u)t' \; ; \tag{7}$$
$$\overline{z} = x' - U'z' \quad ; \quad \overline{t} = y' - U't'$$

provano che: *Le asintotiche* u = cost. *di* $\overline{S}$ *sono tutte tra loro collineari* (proiettive a C'); e *altrettanto dicasi delle* v = cost. Poichè dalle precedenti equazioni segue che $\overline{x}\,\overline{t} - \overline{y}\,\overline{z}$ è proporzionale ad $x'\,t' - y'\,z'$ segue che *le collineazioni che portano un' asintotica di* $\overline{S}$ *in un' altra asintotica dello stesso sistema lasciano invariata la quadrica* S, *e nella metrica di Cayley sopra definita si riducono a movimenti.* La tangente a una asintotica $v =$ cost. di $\overline{S}$ incontra S in un punto $\overline{x}_u + \rho\overline{x}$, ove ρ è definito dalla:

$$(\overline{x}_u + \rho\overline{x})\,(\overline{t}_u + \rho\,\overline{t}) = (\overline{y}_u + \rho\overline{y})\,(\overline{z}_u + \rho\overline{z})\,,$$

ossia:

$$U'' + 2U'\rho + 2U\rho^2 = 0\,. \tag{8}$$

Le generatrici $u = u_0$ di S a cui si appoggia tale tangente sono date dalla:

$$u_0 = \frac{y_u + \rho y}{t_u + \rho z} = u + \frac{1}{\rho} \tag{9}$$

che dipende esclusivamente dalla coordinata u del punto di $\overline{S}$, ove si è tirato la tangente all'asintotica $v =$ cost. Dunque:

Le tangenti alle asintotiche (p. es. $v =$ cost.) *di un sistema della* $\overline{S}$ *tirate per i punti di un' asintotica* (u = cost.) *dell'altro sistema incontrano* S *in una stessa coppia di generatrici* (u = cost.), *e nella nostra metrica sono pertanto parallele di Clifford.* (La funzione U determina tale corrispondenza tra u e i due valori u_0; significato geometrico analogo ha la funzione V).

Le linee $\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{U}} + \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{V}} = 0$ *inviluppate su* $\overline{S}$ *dai raggi della nostra congruenza hanno dunque per tangenti tali raggi che sono anche tangenti ad* S. *Perciò nella nostra metrica esse sono su* $\overline{S}$ *linee di lunghezza nulla.* Ciò si controlla col calcolo nel modo seguente:

Essendo $\overline{x}\,\overline{t} - \overline{y}\,\overline{z} = -4UV$, l'elemento lineare di $\overline{S}$ nella nostra metrica è, a meno di un fattore costante arbitrario:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & d\left(\frac{\overline{y}}{\sqrt{UV}}\right) d\left(\frac{\overline{z}}{\sqrt{UV}}\right) - d\left(\frac{\overline{t}}{\sqrt{UV}}\right) d\left(\frac{\overline{x}}{\sqrt{UV}}\right) = \\ & = \left(\frac{du}{U} + \frac{dv}{V}\right)\left(\frac{2UU'' - U'^2}{U}\,du + \frac{2VV'' - V'^2}{V}\,dv\right) \end{aligned}\right.$$

che si scompone appunto nel prodotto di due fattori, di cui il primo è $\frac{du}{U} + \frac{dv}{V}$, come si voleva verificare. Ma, osservando che anche il secondo è un differenziale esatto, si ha in più:

Le superficie $\overline{S}$ *sono nella metrica di Cayley superficie a curvatura nulla.* La congruenza W iniziale è quella delle tangenti al primo sistema di linee $\frac{du}{U} + \frac{dv}{V} = 0$ di lunghezza nulla; la simmetria del risultato fa prevedere che *anche le tangenti al secondo sistema di linee di lunghezza nulla formano un' altra congruenza* W *avente le stesse falde focali.* Infatti per $\overline{S}$ è:

$$(11)\qquad \overline{\beta} = 2VU''' : N \quad , \quad \overline{\gamma} = -2UV''' : N .$$

Affinchè le tangenti alle altre linee di lunghezza nulla

$$(12)\quad \frac{du}{\overline{A}} = \frac{dv}{\overline{B}} \qquad \overline{B} : \overline{A} = -\frac{2UU'' - U'^2}{U} : \frac{2VV'' - V'^2}{V}$$

formino una congruenza W è necessario che

$$\frac{\partial^2 \log \overline{A} : \overline{B}}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\overline{B}\,\overline{\gamma}}{\overline{A}}\right)_u - \left(\frac{\overline{A}\,\overline{\beta}}{\overline{B}}\right)_v = 0\,,$$

equazione che si trova identicamente soddisfatta.

Oss. In un punto di $\overline{S}$ tiriamo le tangenti alle due linee di lunghezza nulla, che ne escono; esse incontreranno la quadrica in due punti A, B. Siano (u, v) le coordinate curvilinee di A ed

(u_1, v_1) quelle di B. Si trova che:

$$u_1 = u - 2\frac{U}{U'} \qquad v_1 = v - 2\frac{V}{V'}. \tag{13}$$

Così la U e la V si possono pensare anche come le funzioni che definiscono la corrispondenza tra A e B. Il fatto che u_1 è funzione della sola u, e v_1 della sola v dimostra in altro modo l'ultimo teorema ottenuto.

Questo teorema risulterà pure evidente, se si riesce a invertire il penultimo, cioè a dimostrare: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le tangenti a un sistema di linee di lunghezza nulla* (in una metrica di Cayley) *per una superficie* $\overline{S}$ *formino una congruenza* W, *è che* $\overline{S}$ *sia a curvatura nulla.*

Adottando i simboli della geom. metrica, indicando con x, y, z, t *coordinate di Weierstrass,* cosicchè $Sx^2 = 1$ (se $Sx^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ è l'equazione dell'assoluto), sia

$$2Fdudv = S(dx^2)$$

l'elemento lineare di una superficie $\overline{S}$ riferita alle linee di lunghezza nulla. Una tangente in un punto $\overline{x}$ di $\overline{S}$ alla $v =$ cost. incontrerà l'assoluto S nel punto $\overline{x}_u$. Affinchè questa congruenza sia W è necessario e sufficiente che l'equazione

$$(\overline{x}_u\ \overline{x}_{uu}\ \overline{x}_{uv}\ d^2\overline{x}_u) = 0$$

delle asintotiche di S coincida con la equazione

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0$$

delle asintotiche di $\overline{S}$. Posto $\varphi = \log F$, le equazioni fondamentali della teoria delle superficie danno:

$$x_{uu} = \varphi_u x_u + D\xi \quad , \quad x_{uv} = -Fx + D'\xi \quad , \quad x_{vv} = \varphi_v x_v + D''\xi, \tag{14}$$

se ξ *sono le coordinate di Weierstrass di piano tangente.* Tenendo conto di queste equazioni, ed escludendo al solito che $\overline{S}$ sia sviluppabile e che quindi possa essere $D = D' = 0$, si riconosce facilmente che le precedenti equazioni coincidono soltanto se $\varphi_{uv} = 0$, cioè se la curvatura di $\overline{S}$ è nulla, come si doveva provare.

L' equazione di Gauss per $\overline{S}$ prova allora che, *in coordinate* u, v *qualsiasi*,

$$(15) \qquad DD'' - D'^2 = -(EG - F^2)$$

E, poichè dalle formole della geometria non euclidea, si deduce:

$$(16) \quad \begin{cases} (x\, x_u\, x_v\, d^2x)\,(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, d^2\xi) = \\ \qquad = -(DD'' - D'^2)\,(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2)^2 \\ (x\, x_u\, x_v\, d^2x) = \sqrt{EG - F^2}\,(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2)\,, \end{cases}$$

si ha nel nostro caso:

$$(17) \qquad (x\, x_u\, x_v\, d^2x) = \pm\,(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, d^2\xi)\,.$$

Cioè: *Le coordinate di Weierstrass di punto e di piano tangente si corrispondono* (per le nostre superficie $\overline{S}$) *secondo la legge da noi posta in generale al* § 12 *per ogni superficie.* Questo teorema ha una semplice interpretazione geometrica: *La normale non euclidea della nostra superficie coincide con la prima direttrice di Wilczynski.* Infatti, scritto l'elemento lineare riferito alle asintotiche nella forma:

$$du^2 + 2\cos\omega\, dudv + dv^2,$$

il precedente teorema prova che la seconda forma di Gauss

$$2\operatorname{sen}\omega\, dudv$$

coincide con la nostra forma F_2. La direttrice di Wilczynski è la retta congiungente x ad

$$(18) \qquad x'' = x_{uv} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \beta a_{12}}{\partial v}\, x_u - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \gamma a_{12}}{\partial u}\, x_v$$

ove $a_{12} = \operatorname{sen}\omega$ e β, γ coincidono (come per la geom. euclidea) coi valori di $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}$. Poichè $\omega_{uv} = 0$ (perchè $\overline{S}$ è a curvatura nulla) il punto x'' coincide con x_{uv}, cioè per noti teor. di geom. metrica, con $-Fx+D'\xi$; la direttrice di Wilczynski coincide perciò con la retta (x, ξ), che è proprio la *normale* non euclidea.

Tutti questi risultati dimostrano che le nostre superficie $\overline{S}$ coincidono con quelle studiate dal Bianchi negli Annali di Matem. Ser. 2, tomo 24, 1896, pag. 93. Nella mem. del Bianchi si trova in più dimostrato che: *Le normali non euclidee* (cioè le *prime direttrici*) *di una delle nostre superficie formano ancora congruenze* W, *le cui falde focali sono ancora superficie del medesimo tipo. Viceversa ognuna delle nostre superficie si può pensare falda focale della congruenza delle prime direttrici di un' altra superficie del medesimo tipo.*

C) Inversione dei teoremi dati in *A*.

Invertendo il significato delle S, $\overline{S}$ cerchiamo di provare, se possibile, i reciproci dei teoremi dati in A. Il primo si enuncerebbe: *Se* S *è una superficie non rigata le cui asintotiche appartengono ciascuna ad un complesso lineare, allora* S *è falda focale di congruenze* W, *di cui l'altra falda* $\overline{\text{S}}$ *è una quadrica;* vedremo che *questo teorema non si può dire sempre vero,* perchè può capitare che $\overline{S}$ *degeneri* (caso in cui il teorema non ha senso). Nelle nostre ipotesi

$$(19)\quad \beta=\gamma\,;\quad \frac{\partial^2\log\beta}{\partial u\partial v}=\beta^2 \text{ donde } \beta=\sqrt{U'V'}:(U+V) \text{ (cfr. § 18 } B, C)$$

Se $\overline{S}$ deve essere una quadrica, cioè se deve essere $\overline{\beta}=\overline{\gamma}=0$, sarà:

$$(20)\quad \beta=\beta+\overline{\beta}=-\frac{B}{A}\,\frac{N_u}{N}\,,\quad \beta=\gamma=\gamma+\overline{\gamma}=-\frac{A}{B}\,\frac{N_v}{N}.$$

Poichè

$$(21)\qquad A_v=-B\beta \qquad B_u=-A\beta$$

sarà

$$(21)_{\text{bis}}\qquad \frac{B_u}{B}=\frac{N_u}{N}\quad;\quad \frac{A_v}{A}=\frac{N_v}{N}\,,$$

e quindi per la (22) del § 42

$$(21)_{\text{ter}} \qquad B_v : B = \beta_v : \beta \qquad A_u : A = \beta_u : \beta .$$

Perciò

$$(22) \qquad B = \beta X \qquad A = \beta Y \qquad \begin{pmatrix} U \text{ ed } X \text{ funzioni della sola } u \\ V \text{ ed } Y \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad v \end{pmatrix}$$

$$(23) \qquad (\beta Y)_v = -\beta^2 X \qquad (\beta X)_u = -\beta^2 Y ,$$

donde:

$$(24) \qquad \beta Y = \frac{XU'}{U+V} + \text{funzione della sola } u = \frac{\sqrt{U'V'}}{U+V} Y.$$

$$(25) \qquad \beta X = \frac{YV'}{U+V} + \text{funzione della sola } v = \frac{\sqrt{U'V'}}{U+V} X$$

Perciò $\dfrac{Y\sqrt{V'} - X\sqrt{U'}}{U+V}$ dev'essere funzione sia della sola u, che della sola v, e perciò deve essere costante. Quindi:

$$(26) \qquad X\sqrt{U'} = -HU + K \quad , \quad Y\sqrt{V'} = HV + K \quad (H, K = \text{cost.})$$

e quindi:

$$(27) \qquad A = \frac{\sqrt{U'}}{U+V}(HV + K) \qquad B = \frac{\sqrt{V'}}{U+V}(-HU + K).$$

Scegliamo coordinate omogenee tali che $a_{12} = 1 : \beta$. Sarà allora:

$$(28) \qquad \mu = A\left(-\frac{A_u}{A} + \frac{\beta_u}{\beta}\right) + B\left(-\frac{B_v}{B} + \frac{\beta_v}{\beta}\right) = 0 .$$

$$(29) \qquad N = 4A^2 p_{11} - 4B^2 p_{22} .$$

Nella nostra ipotesi per $|a_{12}| = e^\theta$ è:

$$(30) \qquad L = -\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log\beta}{\partial u}\right)^2 - 2p_{11} \text{ e analoga per } M.$$

Confrontando coi valori di L, M dedotti al § 18 C, si trovano i valori di p_{11}, p_{22}; e se ne deduce il valore di N. Si trova così:

$$(31)\qquad \frac{N(U+V)^2}{2} = -(HV+K)^2\,[kU^2+(l-h)U+p]+$$
$$+(-HU+K)^2\,[kV^2+(h-l)V+p]\,,$$

ove h, k, l, p sono costanti dipendenti dalla superficie S considerata.

Poichè le $\overline{\beta}=\overline{\gamma}=0$ equivalgono alle $N_u : N = B_u : B$ e $N_v : N = A_v : A$, dovrà essere

$$(32)\qquad N = P\,\frac{(HV+K)(-HU+K)}{U+V} \qquad (\text{con } P = \text{cost.})$$

Identificando i due valori trovati per N, se ne deduce:

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &H^2(h-l) - 2kHK = -\frac{P}{2}H^2,\\ &K^2(h-l) - 2pHK = \frac{P}{2}K^2,\\ &kK^2 - pH^2 = -\frac{P}{2}KH. \end{aligned}\right.$$

La prima divisa per H si riduce alla seguente formola (che sussiste (*) anche se $H=0$):

$$(34)\qquad H(h-l) - 2k\,K = -\frac{P}{2}H.$$

In modo simile si trova:

$$(34)_{\text{bis}}\qquad K\,(h-l) - 2pH = \frac{P}{2}K.$$

(*) Se $H=0$, è $K \neq 0$, perchè altrimenti o $U'=V'=0$ (caso assurdo, perchè ne seguirebbe $\beta=\gamma=0$, cioè che S è una quadrica contro l'ipotesi) oppure $A=B=0$, caso in cui le S, $\overline{S}$ coinciderebbero contro l'ipotesi.

E queste due equazioni equivalgono alle tre precedenti. Eliminando le H, K, non contemporaneamente nulle, come abbiamo già osservato, se ne deduce:

(35) $$(h-l)^2 - 4kp = \frac{P^2}{4},$$

che determina P a meno del segno; per ogni valore di P si determinano poi le H, K dalle formole precedenti. Quindi, com' era prevedibile, *ognuna delle nostre superficie* S *è falda focale di due congruenze* W *aventi per seconda falda focale una quadrica.* Il teorema ha eccezione nel caso $(h-l)^2 - 4kp = 0$; le congruenze W corrispondenti (essendo $P=0$) hanno N *uguale a zero*, e *perciò hanno una seconda falda focale degenere.* Questo avviene in particolare se $k = h - l = p = 0$, cioè *se la superficie appartiene al caso limite di Tzitzeica-Wilczynski.*

Quanto alle rigate S di una congruenza lineare, si noti che, scegliendo opportunamente i parametri delle asintotiche e il fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee, si può rendere:

(36) $$a_{12} = 1, \ \theta = 0, \ p_{11} = \beta = 0, \ \gamma = 2bu + c \quad (b, c = \text{cost.}) \quad (*)$$

e quindi, per le condizioni d'integrabilità, p_{22} *è funzione della sola* v. Indicando con U, V funzioni della sola u, o della sola v, si trae:

(37) $$B = V'; \qquad A = -(2bu+c)V + U$$

Se si vuole che la corrispondente congruenza W abbia per seconda falda focale una quadrica $(\bar\beta = \bar\gamma = 0)$, dovrà essere:

(38) $$N_u = 0 \qquad \gamma = 2bu + c = \frac{(2bu+c)V - U}{V'} \frac{N_v}{N}$$

ossia

$$(2bu+c)\left(V' - V\frac{N_v}{N}\right) = -U\frac{N_v}{N}$$

(*) Si suppone qui che una delle direttrici sia l' asintotica $u = \infty$. Altrimenti γ sarebbe un polinomio di 2° grado in u.

con N funzione della sola v. Dunque $U = k(2bu + c)$ con $k = \text{cost.}$; e perciò, aggiungendo a V una costante, potremo supporre $U = 0$. E la precedente equazione diventa $N = hV$ con $h = \text{cost.}$ Vediamo dunque quando dalle:

$$(39)\qquad B = V'\,;\quad A = -(2bu + c)\,V \text{ segue } N = hV \text{ con } h = \text{cost.}$$

Esplicitando il valore di N si trova

$$(40)\qquad hV = 4b^2V^2 - V''^2 - 2V'(2bV' - V''' + 2V'p_{22})$$

Data una rigata appartenente a una congruenza lineare, ad ogni soluzione V di questa equazione (purchè $V \neq \text{cost}$; perchè $B \neq 0$) *corrisponde una congruenza* W, *le cui falde focali si riducono alla data rigata ed a una quadrica.* (Due soluzioni V proporzionali individuano la stessa congruenza).

§ 48. — Congruenze W con le due falde rigate *(non quadriche)*

Siano S ed $\overline{S}$ rigate; e sia $\overline{\beta} = 0$, $\gamma = 0$, cosicchè le $v = \text{cost.}$ sono asintotiche su $\overline{S}$, le $u = \text{cost.}$ su S. Le formole che danno $\beta + \overline{\beta}$ e $\gamma + \overline{\gamma}$ si riducono a:

$$(1)\qquad \beta = -\frac{B}{A}\frac{N_u}{N} \text{ ossia } \frac{B_u}{B} = \frac{N_u}{N}\,;\quad \overline{\gamma} = -\frac{A}{B}\frac{N_v}{N}$$

L' equazione (22) (§ 42) in N diventa pertanto:

$$(2)\qquad N_{uv} + \frac{A}{B}\beta N_v = 0 \text{ ossia } N_{uv} - \frac{N_u N_v}{N} = 0 \text{ ossia } \frac{\partial^2 \log N}{\partial u \partial v} = 0,$$

che per le precedenti dà:

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{donde} \quad \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} = 0 \quad (*)$$

(*) Infatti la $B_{uv} = -A\beta_v + B\beta\gamma$ dà $B_{uv} + A\beta_v = 0$ e per la precedente equazione del testo $A\beta_v = -\dfrac{B_u B_v}{B} = +A\beta\dfrac{B_v}{B}$ ossia $\beta_v : \beta = B_v : B$.

Cambiando il parametro u potremo ridurre β ad una funzione della sola v (necessariamente un polinomio al massimo di secondo grado, se il parametro di v è stato scelto opportunamente), e la S è una rigata di una congruenza lineare, cosicchè si può supporre:

(4) $$\theta = p_{22} = 0, \quad p_{11} = p_{11}(u); \quad \beta = 2bv + c \quad (b, c = \text{cost}).$$

Dalle (1) del § 42 si deduce, indicando con U o V una funzione della sola u o v:

(5) $$A = U' \qquad B = -U\beta + V$$

dove, per la $(\log B)_{uv} = 0$, essendo $U' = A \neq 0$, deve essere $V = \beta + \text{cost}$.

Mutando dunque U in $U + \text{cost}$, sarà:

(6) $$A = U' \qquad B = -U\beta.$$

Basta calcolare N per dedurne che N è funzione della sola u e che quindi anche $\overline{\gamma} = 0$. Dunque si ha il teorema di Segre:

Se le due falde di una congruenza W *sono rigate, e alle asintotiche curve della prima corrispondono generatrici della seconda, questa seconda falda è una quadrica e possiede pertanto un altro sistema di generatrici, a cui corrispondono le rette della prima falda focale.* Escluse dunque le già studiate congruenze W, di cui una falda focale è quadrica, per studiare le congruenze W a falde focali rigate, ***basterà studiare il caso che sulle due falde focali si corrispondano le generatrici***, che p. e. $\gamma = \overline{\gamma} = 0$.

Potremo supporre $\theta = 1$, $\beta = -p_2 v^2 + p_3 v + p_4$, $p_{11} = p_1 + v p_2$ ove le p_i sono funzioni della sola u, e infine $p_{22} = 0$. Le equazioni fondamentali dicono che A è funzione della sola u, e che, posto

$$\frac{dq_i}{du} = +Ap_i,$$

si ha:

(7) $$B = \varphi(v) + q_2 v^2 + q_3 v - q_4 .$$

Dobbiamo ora esprimere che $\overline{\gamma}$ è nullo come γ. Ricordando il valore di $\gamma + \overline{\gamma}$, ciò equivale a dire che $N_v = 0$. Esplicitando il valore di N, si trova che la $N_v = 0$ equivale a $\varphi'''(v) = 0$, cioè alla $\varphi = 0$, quando si aggiungano alle q_i opportune costanti. *Data una superficie rigata con le sole integrazioni necessarie al calcolo delle* q *si trovano le congruenze* W, *di cui essa è falda focale, e la seconda falda è pure rigata.*

§ 49. — Superficie trasformate delle rigate con congruenze *W*.

Sia $\overline{S}$ rigata, e precisamente sia $\overline{\beta} = 0$. Sarà:

$$\beta = -\frac{B}{A}\frac{N_u}{N} \quad \text{ossia} \quad B_u = B\frac{N_u}{N}.$$

L' equazione in N diventa così:

$$N_{uv} - \frac{N_u}{N} N_v = N\beta\gamma \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial^2 \log N}{\partial u \partial v} = \beta\gamma$$

donde, per le precedenti

$$\frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} = \beta\gamma \text{ ossia } BB_{uv} = B_u B_v + B^2\beta\gamma \text{ ossia } (-A\beta_v + B\beta\gamma)B =$$

$= -A\beta B_v + B^2\beta\gamma$ cioè $\beta_v : \beta = B_v : B$, e infine, per le precedenti

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} = \beta\gamma \quad (\text{se } \beta \neq 0). \tag{1}$$

Se una superficie S *(non rigata) è trasformata con una congruenza* W *in una rigata* $\overline{\text{S}}$, *le asintotiche di* S *che corrispondono alle generatrici di* $\overline{\text{S}}$ *appartengono a complessi lineari* (Segre).

I metodi qui svolti permettono di dimostrare facilmente il teorema reciproco: *Se le asintotiche di un dato sistema di una superficie* S *appartengono ciascuna a un complesso lineare, la* S *è trasformata di una* $\overline{\text{S}}$ *rigata, le cui generatrici corrispondono a tali asintotiche.* Questo teorema ci dà un metodo *geometrico per* *trovare tutte le superficie, di cui un sistema di asintotiche è formato da linee appartenenti a complessi lineari.* Questo metodo, come nel precedente §, richiede le sole quadrature necessarie a determinare le q (e lascia la $\varphi(v)$ del citato § completamente indeterminata).

Supponiamo dunque che valga la (1). Come sopra si riconosce che imporre la condizione $\bar{\beta} = 0$ equivale a imporre che sia

$$N_u : N = B_u : B \tag{2}$$

da cui segue:

$$\beta_v : \beta = B_v : B \tag{3}$$

che dovremo ricordare assieme alle:

$$\left\{\begin{aligned} &A_v = -B\gamma, \quad B_u = -A\beta \\ &A_u = -\mu - A\theta_u - \frac{B}{\beta}(\beta_v + \beta\theta_v) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

dove la μ si riguarda come nuova incognita. Si deve dimostrare che si può trovare μ in guisa che (3), (4) risultino integrabili e compatibili con (2). La condizione d' integrabilità dà soltanto:

$$\mu_v = B(\gamma_u + \gamma\theta_u) - A(\theta_{uv} + \beta\gamma) - \frac{B}{\beta}(\beta_v + \beta\theta_v)_v\,. \tag{5}$$

La (2), per la $S = \frac{1}{2A} N_u$ e per la (6) del § 44 dà:

$$\mu_{uu} - \theta_u \mu_u + \beta\mu_v - \mu(\beta_v + \beta\theta_v) = -\frac{N}{2B}\beta \tag{6}$$

ove, usando per semplicità coordinate *non* omogenee ($p_u = 0$), si ha:

$$N = 2A\mu_u - 2B\mu_v + \mu^2 + 2\frac{B}{\beta}(\beta_v + \beta\theta_v)$$

cosicchè la (6) si riduce a:

$$\mu_{uu} + \left(\frac{A}{B}\beta_u - \theta_u\right)\mu_u + \frac{\beta}{2B}\mu^2 = 0\,. \tag{7}$$

Le condizioni d' integrabilità delle (3), (4), (5), (7) si riducono a quelle relative alla (5), (7). Da (5) si trae derivando, come potevamo aspettarci (§ 44), l' equazione di Moutard

$$\mu_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mu. \tag{8}$$

I valori di μ_{uuv} dedotti da (7), (8) si riconoscono identicamente uguali, appena si ricordino le condizioni d'integrabilità della teoria delle superficie, e la identità

$$\left(\frac{A}{B}\beta - \theta_u\right)_v = -\frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v} - \theta_{uv} = -\theta_{uv} - \beta\gamma.$$

In conclusione dunque *restano arbitrari i valori iniziali delle* A, B, μ, μ_u; e, poichè, solo moltiplicandoli per una stessa costante, la congruenza non varia, si ha il teorema (F.) che *una delle nostre superficie è falda focale di ∞^3 congruenze* W, *di cui la seconda falda è rigata.*

§ 50. — Composizione di Bianchi di due congruenze *W*.

Siano date due congruenze *W* aventi una stessa falda focale S. Ne indicheremo gli elementi caratteristici con A_i, B_i, μ_i, λ_i, N_i per $i = 1, 2$. Se z_1, z_2 sono due costanti, anche $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$ e $B = z_1 B_1 + z_2 B_2$, soddisfacendo alle (1) del § 44, individueranno una congruenza *W*; e chiaramente il relativo valore di *N* sarà $N = N_1 z_1^2 + N_{12} z_1 z_2 + N_2 z_2^2$, ove:

$$N_{12} = N_{21} = \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + 8(A_1 A_2 p_{11} + B_1 B_2 p_{22}) + \tag{1}$$

$$+ 2\left(A_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial u} + A_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial u} - B_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial v} - B_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial v}\right).$$

Invece il valore corrispondente di S è la funzione $z_1 S_1 + z_2 S_2$ lineare in z_1.

La $\dfrac{1}{2A} N_u = z_1 S_1 + z_2 S_2 = \dfrac{z_1}{2A_1} \dfrac{\partial N_1}{\partial u} + \dfrac{z_2}{2A_2} \dfrac{\partial N_2}{\partial u}$ diventa

$$\frac{1}{2(z_1A_1+z_2A_2)}\left(z_1^2\frac{\partial N_1}{\partial u}+z_1z_2\frac{\partial N_{12}}{\partial u}+z_2^2\frac{\partial N_2}{\partial u}\right)=\frac{z_1}{2A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}+\frac{z_2}{2A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u}$$

cosicchè varrà la:

$$(2)\qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial u}=\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u},$$

insieme all' analoga:

$$(3)\qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial v}=\frac{B_2}{B_1}\frac{\partial N_1}{\partial v}+\frac{\partial N_2}{\partial v}.$$

Sorge dunque spontanea l' idea di porre

$$(4)\qquad N_{12}=\omega+\Omega,$$

dove le funzioni ω, Ω sono definite dalle:

$$(5)\qquad \begin{cases} \omega_u=\dfrac{A_2}{A_1}\dfrac{\partial N_1}{\partial u}=2A_2S_1 & \Omega_u=\dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{\partial N_2}{\partial u}=2A_1S_2 \\ \omega_v=\dfrac{B_2}{B_1}\dfrac{\partial N_1}{\partial v}=-2B_2T_1 & \Omega_v=\dfrac{B_1}{B_2}\dfrac{\partial N_2}{\partial v}=-2B_1T_2 \end{cases}$$

Che ciò sia legittimo si deduce da ciò che, in virtù dell' equazione cui soddisfa N_1, le condizioni d' integrabilità per le equazione in ω sono soddisfatte. Si trova infatti:

$$(6)\qquad \omega_{uv}=-\frac{A_2\beta}{B_1}\frac{\partial N_1}{\partial v}-\frac{B_2\gamma}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u}.$$

Poniamo ora:

$$(7)\qquad \begin{cases} x_{12}=\omega x+\left(-\lambda_2x_1-2A_2\dfrac{\partial x_1}{\partial u}+2B_2\dfrac{\partial x_1}{\partial v}\right) \\ x_{21}=\Omega x+\left(-\lambda_1x_2-2A_1\dfrac{\partial x_2}{\partial u}+2B_1\dfrac{\partial x_2}{\partial v}\right) \end{cases}$$

Sostituendo alle $\overline{x}=x_i$ e loro derivate i valori dedotti dalle (5), (7), (8) del § 42 per $A=A_i$, $B=B_i$, si trova:

$$(x_{12}+x_{21})=x(\omega+\Omega-N)=0.$$

Trattandosi di coordinate omogenee, se ne deduce che i punti x_{12}, x_{21} coincidono.

Sostituendo ad x il valore dedotto dalla (10) § 42, ponendo $A = A_1$, $B = B_1$, si trova:

$$(8) \qquad x_{12} = x_1 \left(-\lambda_2 + \frac{\omega\lambda_1}{N_1} \right) + \frac{\partial x_1}{\partial u} \left(-2A_2 + 2\frac{A_1}{N_1}\omega \right) + \\ + \frac{\partial x_1}{\partial v} \left(2B_2 - \frac{2B_1}{N_1}\omega \right).$$

Cioè il punto x_{12} si trova nel piano tangente ad S_1 nel punto x_1, e simultaneamente anche nel piano tangente ad S_2 nel punto x_2.

Poichè, posto

$$(9) \qquad A_1' = -A_2 + \frac{A_1}{N_1}\omega, \quad B_1' = B_2 - \frac{B_1}{N_1}\omega, \quad \mu_1' = -\lambda_2 + \frac{\omega\lambda_1}{N_1},$$

$$\lambda_1' = -\mu_2 + \frac{\omega\mu_1}{N_1},$$

si ha:

$$(10) \qquad \frac{\partial A_1'}{\partial v} = \gamma B_1' + \frac{B_1}{A_1} \frac{\partial \log N_1}{\partial v} B_1' = -\gamma_1 B_1' \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_1'}{\partial u} = -A_1'\beta_1,$$

la retta congiungente x_1 ad x_{12} descrive una congruenza W. E sarà provato che x_{12} ne è il secondo fuoco, se si osserva che, in virtù della $e^{\theta_1} = a_1 = aN = Ne^{\theta}$, vale la:

$$(11) \qquad \mu_1' = -\frac{\partial A_1'}{\partial u} - \frac{\partial B_1'}{\partial v} - A_1' \frac{\partial \log a_1}{\partial u} - B_1' \frac{\partial \log a_1}{\partial v},$$

che appunto corrisponde alla (4) del § 42.

Si ha pure:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} S_1' &= -S_2 + \Omega\frac{S_1}{N_1} \\ T_1' &= T_2 - \Omega\frac{T_1}{N_1} \end{aligned} \right.$$

Poichè ω è definito dalle (5) a meno di una costante arbitraria additiva, segue:

Se S *è trasformata* W (cioè trasformata con congruenze W) *di altre due superficie* S_1 *ed* S_2, *esistono* ∞^1 *superficie* S_{12} *che sono trasformate* W *sia di* S_1 *che di* S_2, *che di tutte le* ∞^1 *superficie trasformate* W *della* S *mediante le congruenze* W *definite dalle:* $A = z_1 A_1 + z_2 A_2$ *e* $B = z_1 B_1 + z_2 B_2$. *Tali superficie si determinano con una quadratura.*

Si ha $N_1' = \lambda_1' \mu_1' + 2A_1'\left(\frac{\partial \lambda_1'}{\partial u} + 2A_1' \pi_{11}^{(1)}\right) + 2B_1'\left(\frac{\partial \lambda_1'}{\partial v} - 2B_1' \pi_{22}^{(1)}\right)$ dove le $\pi^{(1)}$ sono calcolate per la superficie S_1. Sostituendo alle λ_1', μ_1' ecc. i loro valori si trova:

$$(13) \qquad N_1' = N_2 + \frac{\omega^2}{N_1^2} N_1 - \frac{\omega}{N_1} N_{12} = N_2 - \frac{\omega\Omega}{N_1}; \quad (N_{12} = \omega + \Omega).$$

§ 51. — Le trasformazioni W di Fubini delle superficie isotermo-asintotiche.

Quando mai sulle falde focali di una congruenza si corrispondono le linee di Darboux? In tal caso si corrisponderanno anche le asintotiche, Hessiano di queste, e la congruenza sarà W. Con le precedenti notazioni la fattaci domanda equivale a chiederci quando sarà

$$(1) \quad \bar{\beta} : \beta = \bar{\gamma} : \gamma \text{ ossia } N_u \frac{B}{A} : N_v \frac{A}{B} = \beta : \gamma \text{ ossia } BS : -AT = \beta : \gamma,$$

ossia, per le (5), (6), (7) del § 44, usando per la prima falda focale coordinate non omogenee, e quindi ponendo $p_{11} = p_{22} = 0$, quando

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \mu_{uu} - \theta_u \mu_u + \beta \mu_v - \pi_{11} \mu = \rho \dfrac{\beta}{B} \\ \mu_{uv} - (\theta_{uv} + \beta\gamma)\mu = 0 \\ \mu_{vv} + \gamma \mu_u - \theta_v \mu_v - \pi_{22} \mu = \rho \dfrac{\gamma}{A} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(essendo } \rho \text{ un fattore di} \\ \text{proporzionalità)} \\ S = \dfrac{1}{2A} N_u = \rho \dfrac{\beta}{B}; \\ T = -\dfrac{1}{2B} N_v = -\rho \dfrac{\gamma}{A}. \end{array}$$

da ricordare insieme alle:

$$(3)\quad \begin{cases} A_v = -B\gamma \quad B_u = A\beta \\ 2A_u = -\mu - \lambda - 2A\theta_u \quad 2B_v = \lambda - \mu - 2B\theta_v \\ \lambda_u = \mu_u + 2B(\theta_{uv} + \beta\gamma) - 2A(\beta\theta_v + \beta_v) \\ \lambda_v = -\mu_v - 2A(\theta_{uv} + \beta\gamma) + 2B(\gamma\theta_u + \gamma_u) \end{cases}$$

donde, se consideriamo A, B, λ, μ tutte come incognite, si hanno come condizione di integrabilità la seconda delle (2), come già sappiamo, oltre alle condizioni di integrabilità delle prime tre equazioni nella sola μ, che si trovano (per la $A_v = -B\gamma$) essere:

$$(4)\qquad \frac{\partial \log \frac{\rho\beta}{AB}}{\partial v} = \frac{\partial \log \frac{\rho\gamma}{AB}}{\partial u} = 0. \ (*)$$

Sarà dunque $\dfrac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} = 0$; e, mutando i parametri delle u, v, si potrà supporre $\beta = \gamma$, e quindi $\rho = k\dfrac{AB}{\beta}$. Si ha dunque il teor. di F. (escluso il caso elementare $\rho = 0$):

Tutte e sole le superficie isotermo-asintotiche sono falde focali di una congruenza sulle cui falde si corrispondono le linee di Darboux. Se S *è isotermo asintotica, una di tali congruenze avente* S per prima falda focale è determinata dai valori iniziali di $A, B, \lambda, \mu, \mu_u, \mu_v$ e dal valore di k. Ma, poichè, moltiplicando A, B, λ, μ per uno stesso fattore, la congruenza non cambia, *una superficie isotermo-asintotica è falda focale di* ∞^6 *congruenze della specie voluta, la cui seconda falda focale è ancora isotermo-asintotica.* Questo teor. dà una trasformazione per congruenze W delle superficie isotermo-asintotiche, per cui la Sig.ª Ragazzoni ha dimostrato il teorema di permutabilità, che segue immediatamente dalle nostre formole. Dalle precedenti ($S = \rho\beta : B = kA,\ T = -kB$) segue

---

(*) Resta escluso il caso $\rho = 0$, che è il caso elementare delle congruenze W appartenenti a un complesso lineare, e che hanno per falde focali due superficie reciproche.

$$(5)\qquad N_u = 2kA^2, \quad N_v = 2kB^2.$$

Siano date due di queste congruenze W, di cui S è prima falda focale, corrispondenti ai valori k_1, k_2 della k. Dalla (2) del § 50 segue:

$$(6)\qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial u} = 2(k_1 + k_2) A_1 A_2$$

oltre alla analoga in v.

Le $\omega_u = 2k_1 A_1 A_2$, $\omega_v = 2k_1 B_1 B_2$ provano che $\omega = \dfrac{k_1}{k_1 + k_2} N_{12} + c$ ove $c =$ cost. (se $k_1 + k_2 \neq 0$). *Per le nostre congruenze la* ω, *e le relative superficie del teorema di permutabilità si trovano senza quadrature* (se $k_1 + k_2 \neq 0$). Vediamo se tra esse ce n' è ancora qualcuna *isotermo - asintotica.*

Dovrà essere:

$$(7)\qquad \frac{\partial N_1'}{\partial u} = l A_1'^2 \quad \frac{\partial N_1'}{\partial v} = l B_1'^2 \qquad (l = \text{cost.})$$

cioè:

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(N_2 + \frac{\omega^2}{N_1} - \frac{\omega}{N_1} N_{12}\right) = l\left(-A_2 + \frac{A_1 \omega}{N_1}\right)^2 \text{ e analoga in } v.$$

Queste equazioni sono soddisfatte soltanto per $l = k_2$, $c = 0$.

Se S_1 *ed* S_2 *sono superficie isotermo–asintotiche trasformate* W *di una superficie* S *isotermo–asintotica, tra le superficie* S_{12} *del teorema di permutabilità* (nel caso $k_1 + k_2 \neq 0$) *ve ne è una sola isotermo–asintotica che si determina senza quadrature. Quindi,* come nelle classiche trasformazioni del Bianchi, *se di una superficie* S *isotermo–asintotica si conoscono le trasformate per congruenze* W, *l' applicazione successiva a queste ultime delle trasformazioni per congruenze* W *si esegue in termini finiti (senza neanche integrazioni).*

Anche il caso $k_1 + k_2 = 0$ si studia facilmente, come ha osservato Čech. Se $k_1 + k_2 = 0$, allora:

$$(9)\qquad \frac{\partial N_1'}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(N_2 + \frac{\omega^2}{N_1} - \frac{\omega}{N_1} N_{12}\right) = 2k_2\left(-A_2 + \frac{\omega}{N_1} A_1\right)^2 + \\ + 2k_2 \frac{A_1}{N_1} N_{12}\left(A_2 - \omega \frac{A_1}{N_1}\right).$$

$$(9)_{\text{bis}} \quad \frac{\partial N_1'}{\partial v} = 2k_2\left(-B_2 + \frac{\omega}{N_1} B_1\right)^2 + 2k_2 \frac{B_1}{N_1} N_{12}\left(B_2 - \omega \frac{B_1}{N_1}\right).$$

$$(10) \qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial u} = \frac{\partial N_{12}}{\partial v} = 0 \quad N_{12} = \text{cost.}$$

come segue immediatamente dalle precedenti equazioni. Dunque le (7) saranno identicamente soddisfatte per $N_{12} = 0$; *e in tal caso tutte le* ∞^1 *superficie del teorema di permutabilità, determinabili per quadrature, saranno isotermo-asintotiche. (Invece, se* $N_{12} \neq 0$, *nessuna sarà tale).*

Delle superficie isotermo asintotiche è caso particolare interessante quello delle superficie di Tzitzeica - Wilczynski. Nel caso di queste, supposto $p_{11} = p_{22} = 0$, si hanno le:

$$a_{12} = \frac{1}{\beta}, \quad \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v} = \beta^2 - \frac{1}{\beta}, \quad \pi_{11} = \pi_{22} = 0 .$$

Le precedenti equazioni si riducono alle:

$$\mu_{uu} + \frac{\beta_u}{\beta}\mu_u + \beta\mu_v = kA \qquad \mu_{uv} - \frac{1}{\beta}\mu = 0$$

$$\mu_{vv} + \frac{\beta_v}{\beta}\mu_v + \beta\mu_u = -kB \quad \lambda_u = \mu_u + 2\frac{B}{\beta} \quad \lambda_v = -\mu_v - 2\frac{A}{\beta}$$

$$A_v = -B\beta \qquad B_u = -A\beta \qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{A}{\beta} = -\frac{\lambda+\mu}{2A}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{B}{\beta} = \frac{\lambda-\mu}{2B}.$$

E, se poniamo:

$$k = \frac{4h}{1-h^2}, \quad 2A = -(1+h)\beta\mu_v, \quad 3B = -(1-h)\beta\mu_u, \quad \lambda = h\mu,$$

tutte queste equazioni si riducono alle:

$$\mu_{uu} + \frac{\beta_u}{\beta}\mu_u + \frac{1+h}{1-h}\beta\mu_u = 0 \qquad \mu_{uv} - \frac{1}{\beta}\mu = 0$$

$$\mu_{vv} + \frac{\beta_v}{\beta}\mu_v + \frac{1-h}{1+h}\beta\mu_u = 0.$$

Se ne deduce:

$$N = h(\mu^2 - 2\beta\mu_u\mu_v), \qquad N_u = 2h\frac{1+h}{1-h}\beta^2\mu_v^2 = 2kA^2,$$

$$N_v = 2h\frac{1-h}{1+h}\beta^2\mu_u^2$$

e si ha:

$$\overline{\beta} = -\frac{h\beta\mu^2}{N}.$$

Poichè $\overline{\beta}$ soddisfa alla stessa equazione cui soddisfa β, anche la seconda falda focale è una superficie di Tzitzeica - Wilczynski. Questo caso particolare delle nostre trasformazioni è stato scoperto da Tzitzeica, che ha pure enunciato per esso il teorema di permutabilità.

§ 52. — Le trasformazioni di Ionas per congruenze W delle superficie R.

Sia S una superficie R, cioè sia $\beta_v = \gamma_u$. La teoria che svolgeremo si applica (Čech) anche al caso $\beta_v = l\gamma_u$ con $l = \text{cost.}$: equazione che, se $l \neq 0$, si riduce facilmente alla precedente, mentre, se $l = 0$, si può ridurre alla $\beta = 1$. Entrambe queste classi di superficie si presentano nella teoria delle deformazioni proiettive di una superficie. Supposto dunque $\beta_v = \gamma_u$, noi ci chiediamo quando avviene che anche la seconda falda focale è R, e precisamente quando è anche $\overline{\beta}_v = \overline{\gamma}_u$ ossia $(\beta + \overline{\beta})_v = (\gamma + \overline{\gamma})_u$, ossia:

$$\left(\frac{A}{B}\frac{N_v}{N}\right)_u = \left(\frac{B}{A}\frac{N_u}{N}\right)_v$$

che, in virtù della equazione 22 del § 42 relativa ad N, si può scrivere:

$$(1)\quad \frac{N_v}{N}\left(\frac{N_u}{N}-\frac{\partial \log(B^2-A^2)}{\partial u}\right)+\frac{N_u}{N}\left(\frac{N_v}{N}-\frac{\partial \log(B^2-A^2)}{\partial v}\right)=0$$

equazione a cui si soddisfa, se

$$(2)\qquad N=k(B^2-A^2) \quad \text{con} \quad k=\text{cost.}\neq 0.$$

[Resta posta la questione se è possibile soddisfarvi in altro modo compatibile con le formole della teoria delle congruenze W]. Da (2) segue:

$$(3)\qquad S=\frac{1}{2A}N_u=-k(B\beta+A_u)$$

$$T=-\frac{1}{2B}N_v=-k(A\gamma+B_v)$$

E le equazioni (6), (7) del § 44 diventano, supposte le coordinate *non* omogenee $(p_{ii}=0)$:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu_{uu}-\theta_u\,\mu_u+\beta\mu_v-\pi_{11}\mu=-k(A_u+B\beta) \\ \mu_{uv}=(\beta\gamma+\theta_{uv})\mu \\ \mu_{vv}-\theta_v\,\mu_v+\gamma\,\mu_v-\pi_{22}\mu=-k(B_v+A\beta) \end{cases}$$

Le (4) insieme alle equazioni del § 44, considerate come equazioni nelle incognite A, B, λ, μ sono illimitatamente integrabili [ciò che dimostra che è lecito l'aver fatto l'ipotesi (2)]. Bisogna ora vedere se da tali equazioni segue la (2). Confrontando le (4) con le equaz. citate, si deduce che dalle nostre equazioni seguono le (3), cioè le equazioni ottenute derivando (2). *Basterà perciò che* (2) *sia soddisfatta nel punto iniziale perchè sia identicamente soddisfatta.*

Poichè, moltiplicando A, B, μ per uno stesso fattore, la congruenza non varia, e sono arbitrarii i valori iniziali di λ, μ, μ_u, μ_v, A, B legati soltanto da (2), segue che *per ogni valore di* k *vi sono* ∞^4 *congruenze* W *del tipo cercato, la cui seconda falda focale è ancora una superficie* R.

Siano k_1, k_2 due valori della costante k, ed A_i, B_i, ecc. $(i = 1, 2)$ due sistemi di valori corrispondenti delle A, B, ecc. È:

$$\frac{\partial}{\partial u}(A_1 A_2 - B_1 B_2) = A_1\left(\frac{\partial A_2}{\partial u} + B_2\beta\right) + A_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial u} + B_1\beta\right) =$$

$$= -\frac{A_1}{2k_2 A_2}\frac{\partial N_2}{\partial u} - \frac{A_2}{2k_1 A_1}\frac{\partial N_1}{\partial u} = -\frac{\Omega_u}{2k_2} - \frac{\omega_u}{2k_1}$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[2k_1\Omega + 2k_2\omega + 4k_1k_2(A_1A_2 - B_1B_2)\right] = 0\,. \tag{5}$$

Da questa e dalla formola analoga per $\frac{\partial}{\partial v}$, si deduce:

$$2k_1\Omega + 2k_2\omega + 4k_1k_2(A_1A_2 - B_1B_2) = H = \text{cost.} \tag{6}$$

da considerarsi insieme alla già nota:

$$\Omega + \omega = N_{12}\,. \tag{7}$$

Perciò, se $k_1 \neq k_2$, le Ω ed ω si trovano senza quadrature. Cioè: *Se* S_1 *ed* S_2 *sono due superficie* R *trasformate di una unica superficie* S *dello stesso tipo mediante congruenze* W, *si trovano, se* $k_1 \neq k_2$, *le* ∞^1 *superficie* S_{12} *del teorema di permutabilità senza quadrature.* Vediamo se tra di esse vi è un'altra superficie R trasformata di S_1 ed S_2 mediante congruenze di Ionas. Basterà vedere se per qualche valore di H la $N_1 = N_2 - \frac{\omega\Omega}{N_1}$ differisce per un fattore costante dalla:

$$B_1'^2 - A_1'^2 = B_2^2 - A_2^2 + \frac{\omega^2}{N_1^2}(B_1^2 - A_1^2) - 2\frac{\omega}{N_1}(B_1B_2 - A_1A_2) =$$

$$= \frac{N_2}{k_2} + \frac{\omega^2}{k_1 N_1} + 2\frac{\omega}{N_1}\left(\frac{H}{4k_1k_2} - \frac{\Omega}{2k_2} - \frac{\omega}{2k_1}\right).$$

Ciò avviene solo per $H = 0$. Dunque *per queste trasformazioni vale, se* $\mathrm{k}_1 \neq \mathrm{k}_2$, *il teorema di permutabilità* (Ionas).

Se $k_1 = k_2$, le superficie S_{12} si trovano (come avviene in generale, § 50) con quadrature. *Se la costante* H (a cui non si può più dare un valore arbitrario) *è nulla, tutte queste* ∞^1 *superficie* S_{12} *sono ancora superficie* R; *se invece* $H \neq 0$, *le congruenze che da* S_1 *od* S_2 *conducono ad una* S_{12} *non sono mai del tipo voluto, e il teorema di permutabilità è in tale caso falso.* (*)

§ 53. — Le trasformazioni di Ionas delle superficie di Ionas.

In certo qual senso reciproca della precedente è la trasformazione per le superficie di Ionas (§ 17 *B*), che lo Ionas stesso ha dato nei *Sitzungsber. der Berl. Mathem. Gesellschaft* (XIX Jahrgang, 1919). Queste superficie sono caratterizzate da questo, che i parametri u, v delle asintotiche si possono scegliere in guisa che $\beta_u = \gamma_v$, ossia che esista una funzione φ tale che

$$d\varphi = \gamma du + \beta dv.$$

Il sig. Ionas ha osservato che in tal caso $e^{\mp\varphi}(Adu \pm Bdv)$ è un differenziale esatto, che cioè il *sistema coniugato, armonico a quello delle sviluppabili di una qualsiasi congruenza* W *avente la data superficie di Ionas per falda focale, si può determinare con sole quadrature.* Le equazioni per A, B, S, T diventano nel caso attuale:

$$S_v = T\varphi_v \qquad T_u = S\varphi_u. \tag{1}$$

$$A_v = -B\varphi_u \qquad B_u = -A\varphi_v. \tag{2}$$

Si soddisfa alle seconde ponendo (in modo per così dire reciproco di quello definito dalle (3) del precedente §):

$$A = k(S_u - T\varphi_u) \qquad B = k(T_v - S\varphi_v) \qquad (k = \text{cost.}) \tag{3}$$

(*) Per qualche ulteriore proprietà di queste superficie cfr. *Ionas* «*Ueber die Konstruction der* W *Kongruenzen*» (Jahresber. d. D. Math. Ver., tomo 29, (1920) pag. 64).

Dalla $N_u = 2AS$ e analoga per N_v si trae

$$N = k(S^2 - T^2) + h \qquad (h = \text{cost.}) \tag{4}$$

donde

$$\beta + \bar{\beta} = 2 \frac{S(S\varphi_v - T_v)}{(S^2 - T^2) + \text{cost.}} \quad \text{e analoga per } \gamma + \bar{\gamma}.$$

Anche la seconda falda focale sarà una superficie di Ionas, cioè

$$(\beta + \bar{\beta})dv + (\gamma + \bar{\gamma})du$$

sarà un differenziale esatto $d(\varphi + \bar{\varphi})$ soltanto se $h = 0$. In tal caso infatti

$$\varphi_v + \bar{\varphi}_v = \beta + \bar{\beta} = 2\varphi_v + 2 \frac{T^2\varphi_v - 2ST_v}{S^2 - T^2} =$$

$$= 2\varphi_v + 2 \frac{TS_v - ST_v}{S^2 - T^2} = \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{T + S}{T - S}$$

che insieme all'analoga per $\gamma + \bar{\gamma}$ dà:

$$\bar{\varphi} - \varphi = \log \frac{T + S}{T - S} \qquad \text{(ove non ha importanza una costante additiva).} \tag{5}$$

Per trovare dunque le trasformazioni di Ionas basterà scrivere le (1), (3), pensate come equazioni che dànno le derivate prime delle S, T pensate come nuove incognite, le (1) e le (2) del § 44 destinate a darci le derivate prime di A, B, le (3) e le (4) del § 44 destinate a dare le derivate prime di λ e le derivate seconde di μ. La (4) *ove sia posto* h $= 0$ è una condizione relativa ai valori iniziali. *Per ogni valore di* k *esistono* ∞^6 *congruenze che trasformano la data superficie di Ionas in altre superficie di Ionas.*

Siano ora due congruenze di Ionas aventi la stessa prima falda focale, e siano k_i, A_i, B_i ecc. ($i = 1, 2$) i valori delle k, A, B... per le due congruenze. Sarà

$$\frac{\partial}{\partial v}(S_1 S_2 - T_1 T_2) = S_1 T_2 \varphi_2 + S_2 T_1 \varphi_v - T_2 T_{1v} - T_1 T_{2v} =$$

$$= -\frac{B_1}{k_1}T_2 - \frac{B_2}{k_2}T_1 = \frac{\Omega_v}{2k_1} + \frac{\omega_v}{2k_2}.$$

Da questa e dalla analoga in $\frac{\partial}{\partial u}$ si deduce:

$$(6) \qquad S_1 S_2 - T_1 T_2 = \frac{\Omega}{2k_1} + \frac{\omega}{2k_2} + H \quad (H = \text{cost.}).$$

Perciò, per la $\omega + \Omega = N_{12}$, si trae: *Se* $k_1 \neq k_2$ *le* ∞^1 *superficie* S_{12} *del teorema di permutabilità generale si deducono senza quadrature.*

Vediamo se tra esse vi è ancora una superficie di Ionas, o più precisamente se tra le congruenze che portano S_1 od S_2 in una delle S_{12} ve n'è ancora una dello stesso tipo delle precedenti. I corrispondenti valori delle N, S, T sono:

$$(7) \quad N_1' = N_2 - \frac{\omega\Omega}{N_1}, \quad S_1' = -S_2 + \Omega\frac{S_1}{N_1}, \quad T_1' = T_2 - \Omega\frac{T_1}{N_1}$$

donde:

$$(8) \quad S_1'^2 - T_1'^2 = \frac{N_2}{k_2} + \frac{\Omega_2}{N_1^2}\frac{N_1}{k_1} - 2\frac{\Omega}{N_1}\left(\frac{\Omega}{2k_1} + \frac{\omega}{2k_2} + C\right)$$

che, a meno di un fattore costante, coincide con N_1' soltanto se $C = 0$.

I teoremi di permutabilità, enunciati al precedente §, *valgono dunque inalterati anche per le attuali trasformazioni.*

Tra le altre osserv. dello Ionas, per cui rinviamo il lettore alla Mem. originale, è specialmente notevole la seguente. Le equazioni $S_v = T\beta$, $T_u = S\gamma$ sorgono dal problema di determinare i sistemi coniugati ad invarianti uguali; poichè le nostre superficie sono caratterizzate dall'averne due armonici tra loro ($du^2 \pm dv^2 = 0$), ad essi corrispondono due soluzioni delle nostre equazioni, che si riconoscono facilmente essere le:

$$S = T = e^{\varphi} \qquad S = -T = e^{-\varphi}.$$

Le corrispondenti congruenze W si determinano con quadrature; e la loro seconda falda focale è ancora una superficie di Ionas. Lo Ionas ha anche studiato la composizione delle trasformazioni così definite con le precedenti.

§ 54. — Il teorema di Fubini per le trasformazioni delle superficie *R*.

Per una congruenza K di Ionas è:

$$(1) \quad N = \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp_{22}) = k(B^2 - A^2).$$

Ora, conservati i valori di θ, β, γ (soddisfacenti alla $\beta_v = \gamma_u$), ma, sostituiti alle p_{ii} le $p'_{ii} = p_{ii} + \frac{1}{4} k$ $(i = 1, 2)$ si definisce una superficie S' proiettivamente applicabile su S, perchè, per la $\beta_v = \gamma_u$, continuano a essere soddisfatte le condizioni d'integrabilità della teoria delle superficie. Deformando S in S', la congruenza K va in una congruenza K' avente S' per prima falda focale, che corrisponde agli stessi valori di A, B, μ, λ, ma per cui N ha il valore

$$(2) \quad N' = \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap'_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp'_{22}).$$

Ricordando i valori di p'_{ii} e di N, se ne deduce che $N' = 0$, cosicchè K' ha una *retta* per seconda falda focale; e viceversa se K' è una congruenza avente S' ed una retta per falde focali, la precedente congruenza K è di Ionas. Quindi: *Tutte le congruenze* K *di Ionas aventi per falda focale una superficie* S *del tipo* R *si ottengono costruendo le congruenze* K′ *aventi per falde focali una superficie* S′ *applicabile proiettivamente su* S *ed una retta qualunque* r. *Applicando* S′ *su* S, *la* K′ *diventa una congruenza* K *di Ionas; le* ∞^4 *congruenze corrispondenti ad una stessa* S′ *sono le* ∞^4 *congruenze corrispondenti ad uno stesso valore della costante* k. Anzi da questo teorema risulta senza calcoli evidente che è lecito porre $N = k(B^2 - A^2)$.

Conosciuta una S′ *applicabile su* S, *con sole derivazioni si calcolano* ∞^4 *congruenze di Ionas, di cui* S *ed un' altra superficie* $\overline{\mathrm{S}}$ *del tipo* R *sono falde focali e altre* ∞^4 *congruenze dello stesso tipo per cui* S′ *ed un' altra superficie* $\overline{\mathrm{S}}'$ *del tipo* R *sono falde focali.*

Con le stesse notazioni una congruenza di Ionas avente S per prima falda focale, alla quale corrisponda la costante k_1 diventa, quando S si deforma in S', una congruenza a cui corrisponde la costante $k_1 - k$.

Una osservazione sulla teoria delle congruenze *W*.

Sia $\varphi(u, v) = \text{cost.}$ l' equaz. delle linee $Bdu - Adv = 0$ inviluppate su S dalle sviluppabili di una congruenza W. Moltiplicando le x, y, z, t per uno stesso fattore ρ (e quindi $a_{12} = e^{\theta}$ per ρ^2), il nuovo valore μ' di μ sarà $\mu - 2A\frac{\rho_u}{\rho} - 2B\frac{\rho_v}{\rho}$, che potremo in infiniti modi rendere nullo con opportuna scelta della ρ.

Se a'_{12} è il corrispondente valore di a_{12}, sarà:

$$(A a'_{12})_u + (B a'_{12})_v = 0.$$

Perciò $a'_{12}(Bdu - Adv)$ sarà un differenziale esatto; e quindi

$$A = \frac{G(\varphi)\varphi_v}{a'_{12}} \qquad B = -\frac{G(\varphi)\varphi_u}{a'_{12}}$$

con $G(\varphi)$ funzione della φ, variabile al variare della ρ. Scrivendo $\int G(\varphi) d\varphi$ al posto di φ, si potrebbe rendere $G(\varphi) = 1$. *Le equazioni cui soddisfano* A, B diventano:

$$\varphi_{uu} = \theta'_u \varphi_u + \beta\varphi_v, \qquad \varphi_{vv} = \theta'_v \varphi_v + \gamma\varphi_u,$$

che differiscono da quelle cui soddisfano le x, *perchè manca il termine* p_{ii} x.

D' ora in poi sopprimeremo l' apice in a'_{12}, θ', $\mu' = 0$. Il problema di determinare le congruenze W di data falda focale S equivale pertanto al problema di normare le coordinate di un punto di S in modo che anche queste equazioni ammettano una soluzione.

Se la congruenza è di Ionas, si può dai risultati precedenti dedurre che le coordinate dei punti di S si possono normare in guisa che non solo sia soddisfatta la precedente condizione, ma che in più $p_{11} = p_{22} = \text{cost.}$