Capitolo I.

LA TEORIA DELLE CURVE (*).

§ 5 - La teoria delle curve in geometria euclidea.

A) Gli invarianti fondamentali.

Di solito in geometria euclidea una curva C si definisce dando le coordinate x, y, z cartesiane ortogonali di un suo punto in funzione di un parametro t. Curve *uguali* possono avere rappresentazioni distinte dovute sia alla loro diversa posizione nello spazio, sia alla diversa scelta del parametro t. Nello studio dell' intorno di un particolare punto O della curva ciò si può evitare, come è noto, nel modo seguente: si assumano come assi delle x, y, z la tangente, la normale principale, la binormale in O, e si dieno le y, z come funzioni della x. Siccome il piano osculatore $z = 0$ ha con C in O un contatto tripunto, e la tangente $y = z = 0$ un contatto bipunto, varrano delle formole

$$(1) \qquad y = a x^2 + \ldots, \quad z = b x^3 + \ldots,$$

dove i termini trascurati sono (per $x = 0$) di ordine superiore (risp. di ordine superiore al secondo e terzo ordine). Questo almeno nel caso che valgano alcune condizioni di continuità, deri-

(*) Questo Capitolo si può leggere man mano, soltanto allora che i suoi risultati saranno invocati nei Cap. successivi.

vabilità ecc., che supporremo senz' altro soddisfatte. Il triedro x, y, z sopra definito dicesi il triedro *principale* relativo al punto O: fin qui si è determinata la posizione, non l' orientazione dei suoi assi.

I valori delle a, b sono quantità *invarianti* in quanto che, se C' è una curva uguale a C, nel punto O' omologo di O restano per essa analogamente definiti due sviluppi $y = a^1 x^2 + \ldots$, $z = b^1 x^3 + \ldots$, dove è proprio $a^1 = a$, $b^1 = b$; ciò che prova essere i valori delle a, b invarianti per movimenti. Si noti però che l' indeterminazione nella orientazione degli assi porta con sè una indeterminazione di segno per le a, b, (cosicchè il nome di invarianti dovrebbe essere riservato alle a^2, b^2). Questa indeterminazione si può togliere con qualche convenzione supplementare: se p. es. $a \neq 0$, si può sull' asse delle y scegliere una direzione positiva tale che $a > 0$ (cioè che in un piccolo intorno di O la curva giaccia nel semispazio $y \geq 0$), e fissare, se $b \neq 0$, il segno di b imponendo al triedro principale di essere congruo al triedro coordinato iniziale. Si noti ancora che i valori delle a, b dipendono dall' unità di misura delle lunghezze. Vedremo ben presto che dare i valori delle a, b in O equivale a dare in O la curvatura $\frac{1}{\rho}$ e la torsione $\frac{1}{T}$.

Le simmetrie e, più generalmente, i movimenti di 2ª specie cambiano, nelle precedenti convenzioni, il segno della b.

$B)$ Equazioni intrinseche di una curva.

Per definire completamente una curva si dovrebbero dare i valori delle a, b per ogni punto della curva, p. es. dare le a, b come funzioni del parametro t. Per scegliere in modo invariante questo parametro t, lo si pone uguale all' arco s definito dalla

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2}$$

in modo *intrinseco* (cioè indipendente dal parametro t) e *invariante* (per movimenti). Riguarderemo non essenziale l' indeterminazione di s dovuta all' arbitraria scelta dell' origine, da cui si contano gli archi s, e all' arbitrarietà del segno di ds, cioè del *verso*, in cui s si suppone crescente. Quest' ultima si potrebbe togliere, studiando le curve dotate di *verso*. Date la curvatura $\frac{1}{\rho}$ e la torsione $\frac{1}{T}$ in funzione di s, detti α, β, γ i coseni direttori della tangente volta nel verso dell'arco crescente, ξ, η, ζ quelli della normale principale e λ, μ, ν quelli della binormale, valgono le formole di Frenet

$$(3) \qquad x_s = \alpha, \; \alpha_s = \frac{\xi}{\rho}, \; \xi_s = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T}, \; \lambda_s = \frac{\xi}{T}$$

(e analoghe in y, β, η, μ e z, γ, ζ, ν).

Le coordinate rispetto al triedro principale in O sono caratterizzate dai valori iniziali delle $(x, \alpha, \xi, \lambda)$, (y, β, η, μ) e (z, γ, ζ, ν) che sono rispettivamente $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Si trova così, a meno d' infinitesimi d' ordine superiore

$$(4) \qquad \begin{cases} x = s - \dfrac{1}{6\rho^2} s^3 + \dots, \; y = \dfrac{1}{2\rho} s^2 + \left(\dfrac{1}{\rho}\right)_s \dfrac{s^3}{6} + \dots \\[2ex] z = -\dfrac{1}{6\rho T} s^3 + \dots \end{cases}$$

dove con ρ, T sono indicati i valori di ρ, T nel punto O. Ne segue:

$$(5) \qquad y = \frac{1}{2\rho} x^2 + \dots, \; z = -\frac{1}{6\rho T} x^3 + \dots .$$

Quindi le a, b della (1) sono determinate dai valori di $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ nel punto O e viceversa. *Una curva è determinata* (a meno di movimenti) *dai valori di* $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ *dati in funzione* di s. Quanto ai segni rinvio a quanto si è detto più sopra. *Eliminando* α, ξ, λ *dalle equazioni di Frenet si trova un' equazione del quarto ordine*, a cui soddisfano le x, y, z come funzioni di s. I coefficienti di tale equazione dipendono esclusivamente dagli invarianti $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$, e loro derivate.

C) Nuova deduzione degli invarianti fondamentali.

Come $dx^2 + dy^2 + dz^2$ è un invariante per movimenti, così sono pure invarianti per movimenti le somme

$$(d^n x)^2 + (d^n y)^2 + (d^n z)^2, \qquad (n \geq 1)$$

che hanno il grave inconveniente di dipendere da differenziali di un ordine n, che può superare 1. Evidentemente invece dipendono dal solo differenziale primo le seguenti forme *invarianti intrinseche* (di significato indipendente dal parametro t)

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2, \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix};$$

le quali valgono rispettivamente:

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \frac{ds^6}{\rho^2}, \quad -\frac{ds^6}{\rho^2 T}$$

(come si deduce dalle formole di Frenet). La considerazione di esse equivale alla considerazione di $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$.

Fissato che $\frac{1}{\rho} \geqq 0$ (per il che basta fissare, come abbiamo visto, in modo opportuno il verso positivo della normale principale), il segno di $\frac{1}{T}$ resta fissato, se si vuole che il triedro principale sia congruo al triedro coordinato iniziale.

Un movimento di *seconda specie* cambia il segno di $\frac{1}{T}$.

§ 6 - Geometria proiettivo-differenziale delle curve.

A) Preliminari analitici.

Sia $F_1 = \alpha_1 du$ un differenziale; sia α_1 funzione della u. Porremo:

$$(1) \qquad \alpha_1 \delta^r u = d^{r-1} F_1,$$

cosicchè in particolare, indicando α_1 con la semplice lettera α:

$$(2)\quad \delta^1 u = du,\ \delta^2 u = d^2 u + \frac{\alpha_u}{\alpha} du^2,\ \delta^3 u = d\,\delta^2 u + \frac{\alpha_u}{\alpha} du\,\delta^2 u, \text{ ecc.}$$

Sia $B_n = b_n du^n$ con b_n funzione di u, ed $n \geqq 0$ (n intero). Varrà la

$$(3)\qquad d B_n = d(b_n du^n) = b_{n+1} du^{n+1} + n b_n du^{n-1} \delta^2 u,$$

se è posto:

$$(4)\qquad b_{n+1} = \frac{d b_n}{du} - n \frac{\alpha_u}{\alpha} b_n,$$

che noi chiameremo derivata *covariante* di b_n.

Se p. es. r, s, t sono interi positivi con $r + 2s + 3t = n$, vale la:

$$(5)\qquad d[b_n du^r (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^t] = b_{n+1} du^{r+1} (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^t +$$
$$+ r\, b_n (du)^{r-1} (\delta^2 u)^{s+1} (\delta^3 u)^t + s\, b_n du^r (\delta^2 u)^{s-1} (\delta^3 u)^{t+1} +$$
$$+ t\, b_n du^r (\delta^2 u)^s (\delta^3 u)^{t-1} \delta^4 u.$$

In altre parole *la sostituzione di $\delta^i u$ a $d^i u$ per $i > 1$ non altera le regole formali di derivazione,* purchè alla derivata *ordinaria di b_n si sostituisca la derivata covariante.* Anzi le due regole coincidono se $\alpha = \text{cost}$.

In particolare per una funzione $x_0 = x$ della u, posto:

$$(6)\qquad x_0 = x,\ x_1 = \frac{dx}{du} = x_u,\ x_2 = \frac{dx_1}{du} - \frac{\alpha_u}{\alpha} x_1, \text{ ecc.}$$

valgono le:

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{l} dx = x_1 du\,;\quad d^2 x = x_2 du^2 + x_1 \delta^2 u\,; \\ d^3 x = x_3 du^3 + 3x_2 du\,\delta^2 u + x_1 \delta^3 u\,; \\ d^4 x = x_4 du^4 + 6x_3 du^2 \delta^2 u + 3x_2 (\delta^2 u)^2 + \\ + 4x_2 du \delta^3 u + x_1 \delta^4 u\,; \\ d^5 x = x_5 du^5 + 10 x_4 du^3 \delta^2 u + 15 x_3 du (\delta^2 u)^2 + \\ + 10 x_3 du^2 \delta^3 u + \dots \end{array}\right.$$

Si noti che *la derivata covariante di ogni potenza di α_1 è nulla.* In particolare, se $F_3 = adu^3$ con $a = a_3 = \alpha^3 = \alpha_1{}^3$, valgono le:

$$(8)\quad F_3 = adu^3\,,\ dF_3 = 3a\,du^2\,\delta^2 u,\ d^2F_3 = 3adu^2\,\delta^3 u + 6adu(\delta^2 u)^2.$$

Se le forme F_1, B_n hanno significato *intrinseco* (indipendente dalla scelta della variabile indipendente u), i singoli addendi, in cui (3) decompone B_n, come pure i singoli termini di (5), hanno tutti significato *intrinseco.*

B) Applicazione della teoria delle curve.

Siano le coordinate omogenee x di un punto di una curva C date come funzioni continue, derivabili ecc. di un parametro u. Noi vogliamo caratterizzare C mediante elementi *intrinseci* (indipendenti da u), ed *invarianti* (per collineazioni). Cominceremo col limitarci alle collineazioni *unimodulari.* Elementi del tipo voluto sono i determinanti

$$(9)\qquad (x\,,\, dx\,,\, d^2x\,,\, d^r x)\qquad (r = 3\,,\, 4\,,\, \ldots)\,,$$

il cui studio sarà ora ricondotto a espressioni dipendenti dai *soli differenziali primi.* Questo avviene già nel caso $r = 3$; se indichiamo con ω il suo segno, noi porremo:

$$(10)\qquad F_3{}^2 = (adu^3)^2 = \omega(x\,,\, dx\,,\, d^2x\,,\, d^3x)\quad (\omega = \pm 1).$$

Sia a *che* F_3 *sono dalla curva* C *determinati a meno del segno.*

I punti per cui $F_3 = 0$ sono i punti *a piano osculatore stazionario,* che noi considereremo come *singolari,* ed escluderemo dal nostro studio.

Il caso di F_3 identicamente nullo è quello delle curve piane (§ 8). Posto $\alpha = \alpha_1 = \sqrt[3]{a}$, assumeremo $\alpha_1\, du = F_1$ come forma fondamentale per la definizione dei differenziali $\delta^r u$ e delle derivate covarianti.

Sostituendo in (9) ai $d^r x$ i valori dati da (7), *tali determinanti si decomporranno parecchie espressioni tutte intrinseche ed invarianti* (per collineaz. unimodulari).

Il determinante (9) per $r = 4$ non porta a nulla di nuovo. Infatti per (10) è:

$$(x\,,\, dx\,,\, d^2 x\,,\, d^4 x) = 2\omega\, F_3\, dF_3$$

Poichè per (8) e per la quarta delle (7):

$$(x\,,\, dx\,,\, d^2 x\,,\, d^4 x) = (x\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_4)\, du^7 + 6\,(x\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)\, du^5\, \delta^2 u$$

$$2\omega\, F_3\, dF_3 = 6\, a^2\, du^5\, \delta^2 u$$

si avrà:

$$(x\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_4) = 0. \tag{11}$$

Per $r = 5$, dalle (7) si deduce:

$$\omega\,(x\,,\, dx\,,\, d^2x\,,\, d^5x) = \omega\,(x\; x_1\; x_2\; x_5)\, du^8 + \frac{10}{3} F_3\, d^2 F_3 - \frac{5}{9}(dF_3)^2.$$

Il determinante (9) *per* $r = 5$ *porta alla considerazione della nuova forma* $\omega\,(x\; x_1\; x_2\; x_5)\, du^8$. Così potremmo continuare per $r = 6\,,\, 7\,,\ldots$

C) Le curve come luogo ed inviluppo.

Ma tutto il calcolo assume una forma più perspicua se noi consideriamo contemporaneamente le coordinate ξ del piano osculatore, che noi fisseremo in modo intrinseco con le:

$$\xi = \frac{\omega}{a}(x\; x_u\; x_{uu}) = \frac{\omega}{a}(x\; x_1\; x_2). \tag{12}$$

È chiaramente:

$$0 = S\xi x = S\xi x_1 = S\xi x_2 = S\xi_1 x_1 = S\xi_2 x. \tag{13}$$

$$F_3 = S\xi d^3 x = -\, S d\xi d^2 x = S d^2\xi dx = -\, S x d^3 \xi \quad (^*) \tag{14}$$

come si vede tenendo conto delle $S\xi x = S\xi x_i = 0$ $(i = 1, 2)$, che

(*) Infatti per (10), si ha: $F_3^{\,2} = \omega\,(x\,,\, x_u\,,\, x_{uu}\,,\, d^3 x)\, du^3 =$
$= a du^3\, S\xi d^3 x = F_3\, S\xi d^3 x.$

sono la definizione delle ξ, e delle equazioni ottenute derivando. Per tali equazioni il prodotto

$$(x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x)\,(\xi\,,\,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi)$$

si trova uguale ad $(F_3)^4$. Per (10) sarà dunque:

$$(\xi\,,\,d\xi\,,\,d^2\xi\,,\,d^3\xi) = \omega\, F_3^2. \tag{10 bis}$$

Confrontando con le:

$$Sxd^3\xi = -F_3\,,\quad Sx\xi = Sxd\xi = Sxd^2\xi = 0$$

si trova la formola duale di (12):

$$x = -\frac{\omega}{a}\,(\xi\,,\,\xi_1\,,\,\xi_2). \tag{12 bis}$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} 2\omega F_3\, dF_3 &= d(\omega F_3^2) = (x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^4x) = \\ &= \frac{F_3}{a}\,(x\,,\,x_1\,,\,x_2\,,\,d^4x) = \omega F_3 S\xi d^4x\,, \end{aligned}$$

cioè:

$$S\xi d^4x = 2dF_3.$$

Confrontando con le formole ottenute derivando (14), si ha:

$$2dF_3 = S\xi d^4x = -Sxd^4\xi = -2Sd\xi d^3x = 2Sdxd^3\xi \tag{15}$$

$$Sd^2xd^2\xi = 0 \tag{11 bis}$$

l' ultima delle quali equivale alla (11).

I determinanti (9) si possono sostituire con le $S\xi d^rx$, che ne differiscono solo per un fattore; sostituendo in queste forme alle d^rx i valori (7) e *tenendo conto del solo addendo che dipende dai differenziali primi,* si trovano forme del tipo richiesto.

Così p. es. si trova:

$$S\xi d^5x = F_5 + \frac{10}{3}\,d^2F_3 - \frac{5}{9}\,\frac{(dF_3)^2}{F_3} \tag{16}$$

$$(16)_{\text{bis}} \qquad Sd^3xd^2\xi = -Sd^2xd^3\xi = F_5 + \frac{1}{3}d^2F_3 - \frac{5}{9}\frac{(dF_3)^2}{F_3}$$

ove F_5 *dipende dai soli differenziali primi.* La $(16)_{\text{bis}}$ è un esempio del come, differenziando (15) ed $(11)_{\text{bis}}$, si possono ottenere tutte le forme $Sd^rxd^s\xi$ con $r+s=5$ espresse mediante F_3 ed F_5.

Così tutte le forme $Sd^rxd^s\xi$ con $r+s=6$ si possono esprimere mediante una sola forma del prim' ordine; il modo più semplice di scegliere questa è di porre:

$$(17) \qquad F_6 = Sd^3xd^3\xi$$

che, come segue facilmente dalle precedenti formole, dipende dai soli differenziali primi (è di *primo* ordine e di *sesto* grado).

Così si può trovare una forma F_7 del primo ordine e di settimo grado, mediante la quale si possono determinare tutte le forme

$$Sd^rxd^s\xi \text{ con } r+s=7.$$

Io dico che *queste forme* F_3, F_5, F_6, F_7 *tutte intrinseche e del primo ordine bastano a determinare la curva (a meno di collineazioni unimodulari).* Notiamo che la F_3 *è determinata a meno del segno* (così come il *ds* della geom. metrica). Noi lo potremo fissare, scegliendo un *verso positivo* sulla curva, e imponendo ad F_3 di essere positiva in tale verso. Con ciò alla curva C sostituiamo la nozione di curva con verso, di *curva orientata.*

D) Le equazioni differenziali fondamentali.

Per dimostrare il nostro teorema, scegliamo (in modo intrinseco ed invariante per collin. unimod.) un punto X e un piano Ξ definiti da:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} SX\xi = 1, & SXd\xi = SXd^2\xi = SXd^3\xi = 0 \\ S\Xi x = 1, & S\Xi dx = S\Xi d^2x = S\Xi d^3x = 0. \end{array} \right.$$

Differenziando si deduce $S\xi dX = Sd\xi dX = Sd^2\xi dX = 0$. Sarà perciò:

$$dX = bx \quad \text{e analogamente} \quad d\Xi = \beta\xi, \tag{19}$$

dove i fattori di proporzionalità b, β sono forme differenziali di primo grado e primo ordine in u. Poichè i punti x, dx, d^2x, X non sono complanari, potremo determinare delle quantità a_n tali che:

$$\left\{ \begin{aligned} d^3x &= a_0 x + a_1 dx + a_2 d^2x + a_3 X \\ d^3\xi &= \alpha_0 \xi + \alpha_1 d\xi + \alpha_2 d^2\xi + \alpha_3 \Xi. \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Se ne deduce

$$S\xi d^3x = a_3 \text{ cioè } a_3 = F_3; \quad Sd\xi d^3x = -a_2 F_3, \text{ cioè } a_2 = \frac{dF_3}{F_3}$$

$$Sd^2\xi d^3x = a_1 F_3 = -Sd^3\xi d^2x;$$

$$Sd^3\xi d^3x = -a_0 F_3 + a_1 dF_3 - a_2 Sd^2xd^3\xi = -a_0 F_3$$

ossia:

$$a_3 = F_3; \; a_2 = +\frac{dF_3}{F_3}; \tag{21}$$

$$a_1 = \frac{1}{F_3}\left(F_5 + \frac{1}{3} d^2F_3 - \frac{5}{9}\frac{(dF_3)^2}{F_3}\right); \quad a_0 = -\frac{F_6}{F_3}$$

insieme alle duali:

$$\alpha_3 = -F_3; \; \alpha_2 = a_2; \; a_1 = \alpha_1; \; a_0 = -\alpha_0. \tag{21 bis}$$

Moltiplicando le (20) tra di loro si trova:

$$F_6 = Sd^3xd^3\xi = 2F_6 - F_3^2 SX\Xi,$$

ossia:

$$SX\Xi = \frac{F_6}{F_3^2}. \tag{21 ter}$$

Da (18), (19) e dalle equazioni ottenute differenziando (20) si ottiene:

$$bF_3 = -bSxd^3\xi = -SdXd^3\xi = SXd^4\xi =$$

$$= SX(\xi d\alpha_0 + \Xi d\alpha_3 + \beta\alpha_3\xi) = d\left(\frac{F_6}{F_3}\right) - \beta F_3 - \frac{F_6}{F_3^2} dF_3$$

donde:

$$(21)_{\text{quater}} \qquad b + \beta = d\left(\frac{F_6}{F_3{}^2}\right).$$

Dunque le a, le α, *la* b + β *sono determinate da* F_3, F_5, F_6; e sarebbe facile provare che, nota F_7, *resta determinata* b — β, *cioè* b *e* β.

Posto $F_3 = adu^3$, $\dfrac{F_6}{F_3} = -\theta du^3$, $-\dfrac{F_5}{F_3} = qdu^2$, $b = cdu$, $\beta = \gamma du$, si ha per $(21)_{\text{quater}}$

$$(22) \qquad c + \gamma = -\left(\frac{\theta}{a}\right)_u \quad \text{ove } F_3 = adu^3, \; F_6 = -\theta adu^6.$$

Sostituendo in (20), i termini in $\delta^2 u$, $\delta^3 u$ si eliminano, e si ottengono *le equazioni differenziali fondamentali completamente determinate dalle forme precedenti.*

$$(23) \qquad \begin{cases} x_3 = \theta x - q x_1 + a\mathrm{X} & \mathrm{X}_1 = cx \\ \xi_3 = -\theta\xi - q\xi_1 - a\Xi & \Xi_1 = \gamma\xi \end{cases}$$

Se noi cambiamo il parametro u *in guisa che* a = 1, esse diventano:

$$(23)_{\text{bis}} \qquad \begin{cases} x''' + qx' - \theta x = \mathrm{X}, & \xi''' + q\xi' + \theta\xi = -\Xi \\ \mathrm{X}' = c\mathrm{X} & , \Xi' = \gamma\xi \end{cases} \qquad (c + \gamma = -\theta')$$

od anche:

$$(23)_{\text{ter}} \qquad \begin{cases} x'''' + qx'' + (q' - \theta)x' - (\theta' + c)x = 0 \\ \xi'''' + q\xi'' + (q' + \theta)\xi' + (\theta' + \gamma)\xi = 0 \end{cases} \qquad c + \gamma = -\theta'$$

Queste equazioni insieme alla $\omega(x\, x'\, x''\, x''') = 1$, la quale, se soddisfatta nel punto iniziale, è soddisfatta dappertutto in virtù delle stesse $(23)_{\text{ter}}$, *determinano le* x, *e quindi la curva a meno di una collineaz. unimodulare*; e si ricordi, *sono esse stesse determinate da* F_3, F_5, F_6, F_7.

Dalle $(23)_{\text{ter}}$ *segue che le* x *e le* ξ *soddisfano ad equazioni aggiunte.*

E) Le curve di un complesso lineare.

Tali equazioni coincidono se $\theta = 0$. Esiste allora una trasform. lineare intera omogenea a coefficienti *costanti* che porta le x nelle ξ, e quindi le dx, $d^2 x$, $d^3 x$ nelle $d\xi$, $d^2\xi$, $d^3\xi$. Poichè $\theta = 0$ è $F_6 = 0$.

E quindi per $(11)_{\text{bis}}$ e (17) è $Sx\xi = Sd^r x d^r \xi = 0$ per $r = 1$, 2, 3. Perciò tale trasformazione definisce un sistema nullo (*), il quale trasforma la curva pensata come luogo di punti nella curva stessa pensata come inviluppo. Le tangenti alla curva saranno rette del corrispondente complesso lineare. Vale pure il teorema reciproco. *Dunque la* $F_6 = 0$ *o* $\theta = 0$ *caratterizza le curve di un complesso lineare.*

F) Significato del segno di $\omega = \pm 1$.

Le rette (x, dx) e $(\xi, d\xi)$ coincidono con la retta tangente in x. Perciò $(x\, dx) = \varkappa(\xi\, d\xi)$ con $\varkappa$ fattore di proporzionalità. Per la $Sd^2xd^2\xi = 0$, anche le rette (xd^2x) e $(\xi d^2\xi)$ coincidono. Se ne deduce differenziando che $\varkappa = \text{cost.}$ Differenziando di nuovo, si trae:

$$(dx\, d^2x) = -(x\, d^3x) + \varkappa(d\xi\, d^2\xi) + \varkappa(\xi\, d^3\xi)$$

donde:

$$S(dx, d^2x)(d\xi, d^2\xi) = -S(x, d^3x)(d\xi, d^2\xi) +$$
$$+ \varkappa S(d\xi, d^2\xi)(d\xi, d^2\xi) + \varkappa S(\xi, d^3\xi)(d\xi, d^2\xi)$$

ossia, per le identità dell' introduzione (§ 1 B)

$$\begin{vmatrix} Sdx\, d\xi & Sdx\, d^2\xi \\ Sd^2xd\xi & Sd^2x\, d^2\xi \end{vmatrix} = \varkappa(\xi, d\xi, d^2\xi, d^3\xi)$$

$$F_3{}^2 = \varkappa\omega F_3{}^2 \qquad \text{ossia} \qquad \varkappa = \omega.$$

(*) Infatti, se x è un punto prestabilito ad arbitrio della curva, ogni punto P dello spazio avrà coordinate che si possono scrivere nella forma $hx + kx' + lx'' + mx'''$, e sarà trasformato nel piano $h\xi + k\xi' + l\xi'' + m\xi'''$, che, per le precedenti identità, contiene il punto P.

Cioè vale l' identità (C)

$$(x\,,\,dx) = \omega(\xi\,,\,d\xi) \tag{24}$$

Dunque, essendo dato il verso positivo della curva, e quindi anche il segno di ognuna delle dx, $d\xi$, *i versi di* $\lambda x + \mu dx$ *e di* $\lambda\xi + \mu d\xi$ *danno l' orientazione proiettiva della retta tangente conforme alla nostra convenzione, oppure l' orientazione opposta secondo che* $\omega = 1$, *oppure* $\omega = -1$. Resta così intuitivo che le collineazioni a modulo -1 cambiano il segno di ω.

G) Le collineazioni a modulo qualsiasi.

Finora ci siamo occupati specialmente delle collineazioni unimodulari. E abbiamo scelto il parametro u in modo invariante per tali collineazioni. Conseguenza di tale scelta è stato che nelle $(23)_{\text{ter}}$ è mancato ogni termine in x''', ξ'''. Questa è una proprietà caratteristica del parametro u e delle sue funzioni lineari.

Studiamo ora una qualsiasi trasformazione moltiplicativa $x = \rho\overline{x}$, da cui segue $\xi = \rho\,\overline{\xi}$. Sarà:

$$du^6 = F_3{}^2 = \omega(x\,,\,dx\,,\,d^2x\,,\,d^3x) = \omega\rho^4\,(\overline{x}\,,\,d\overline{x}\,,\,d^2\overline{x}\,,\,d^3\overline{x}) =$$

$$= \rho^4\,\overline{F}_3{}^2 = \rho^4\,\overline{a}^2\,d\overline{u}^6,$$

se $\overline{a}$, $\overline{F}_3$, $\overline{u}$ sono i nuovi valori di a, F_3, u. Sarà dunque $\overline{a} = 1$, se il nuovo parametro $\overline{u}$ soddisfa alla $(d\overline{u} : du)^3 = 1 : \rho^2$. (Escludo che $d\overline{u} : du$ possa essere negativo, perchè $\overline{u}$ come u deve crescere nel verso positivo della curva). Noi dunque dovremo per studiare tutte le collineazioni a modulo positivo (che sono prodotto di una collineaz. unimodulare per una moltiplicativa) studiare ancora l'effetto di una trasformazione

$$x = \rho\overline{x}\;;\;\; \xi = \rho\overline{\xi}\;;\;\; \overline{u} = \overline{u}\,(u) \text{ con } (d\overline{u} : du)^3 = 1 : \rho^2\;;\;\; (F_3 = \rho^2\overline{F}_3{}^2)$$

È facile riconoscere che $F_6 : F_3 = \theta du^3$ non cambia (che cioè $\theta du^3 = \overline{\theta}\, d\overline{u}^3$), e, con un calcolo un po' più lungo, che non cambia neppure Vdu^4, quando si ponga:

$$V = \frac{3}{2} q'' + \frac{5}{2} \theta' + 5c + \frac{9}{20} q^2 = \frac{3}{2} q'' - \frac{5}{2} \theta' - 5\gamma + \frac{9}{20} q^2.$$

E, notiamolo, *le* $\theta = V = 0$ *caratterizzano le cubiche sghembe.* Infatti in tal caso, scelto ρ in guisa che sia nullo il corrispondente valore di q, dalle $\theta = V = 0$ segue $\theta = c = \gamma = 0$, e le $(23)_{ter}$ provano che x, ξ sono polinomi di terzo grado nella u.

Possiamo anche studiare l'effetto di un cambiamento del verso scelto sulla curva come positivo. Il nuovo valore $\overline{F}_3$ della forma cubica fondamentale è: $\overline{F}_3 = -F_3$; cosicchè, se $F_3 = du^3$ ed $\overline{F}_3 = d\overline{u}^3$, sarà $du = -d\overline{u}$ e, come si può supporre, $\overline{u} = -u$. Il nuovo valore della ξ è dato da:

$$\overline{\xi} = \omega(x\,,\, x_{\overline{u}}\,,\, x_{\overline{u}\,\overline{u}}) = -\omega(x\,,\, x_u\, x_{u\,u}) = -\xi.$$

Cosicchè il nuovo valore della F_6 e di θ sono dati da:

$$\overline{F}_6 = Sd^3\overline{\xi}\, d^3x = -Sd^3\xi\, d^3x = -F_6\,; \quad \frac{\overline{F}_6}{\overline{F}_3} = \frac{F_6}{F_3}\,;$$

$$\overline{\theta} d\overline{u}^3 = \theta du^3\,; \quad \overline{\theta} = -\theta.$$

Del resto ponendo in $(23)_{ter}$ $x = \overline{x}$, $\overline{u} = -u$, essa diventa:

$$\frac{d^4\overline{x}}{d\overline{u}^4} + q\,\frac{d^2\overline{x}}{d\overline{u}^2} + \left(\frac{dq}{d\overline{u}} + \theta\right)\frac{d\overline{x}}{d\overline{u}} - \left(c - \frac{d\theta}{d\overline{u}}\right)\overline{x} = 0$$

che prova non solo la $\overline{\theta} = -\theta$, ma anche le $\overline{q} = q$, $\overline{c} = c$.

H) Coordinate normali.

Dunque, se $\theta \neq 0$, esiste un *verso* invariante, che chiameremo *normale*, a cui corrisponde un $\theta > 0$. Potremo poi moltiplicare le x per un fattore ρ in guisa che θ assuma il valore 1. Infatti, moltiplicando le x per ρ, il nuovo valore di θ soddisfa alla:

$$\overline{\theta}\, d\overline{u}^3 = \theta du^3 \quad \text{con} \quad (d\overline{u} : du)^3 = 1 : \rho^2.$$

La $\overline{\theta} = 1$ determina pertanto ρ a meno del segno. Restano dunque determinate (a meno di un contemporaneo cambiamento di segno) le coordinate x, ξ di punto e piano osculatore: noi le diremo coordinate *normali*. Il valore corrispondente di u si dirà l'*arco* proiettivo della curva. Una collineazione qualunque produce sulle coordinate normali una trasform. lineare a coeffic. *costanti*.

Se noi usiamo coordinate normali, i corrispondenti valori delle q, c (o, se si vuole, delle q, γ) *sono completamente determinati in funzione di* u. *I loro valori determinano la curva, e sono perciò nella geom. proiettiva gli analoghi della curvatura e della torsione metrica.* Ogni altro invariante proiettivo della curva si esprime mediante essi e le loro derivate.

Se fosse $\theta = 0$, noi potremmo definire delle coordinate *normali* (non un verso normale) imponendo che $V = 1$. (Restando escluse le sole curve per cui $\theta = V = 0$, cioè le cubiche sghembe). In tal caso basta la conoscenza della sola q.

Oss. Vi è un caso notevole in cui coordinate non *omogenee* possono assumersi a coordinate *normali*. Scegliamo un punto su ogni tangente; potremo fissare il fattore di proporzionalità delle x in guisa che esso sia il punto dx; il piano osculatore della curva da esso descritta è il piano (dx, d^2x, d^3x), cioè il piano Ξ. Al punto dx nel sistema nullo osculatore (§ 7) corrisponde il piano $d\xi$, che inviluppa una sviluppabile, di cui X è il punto di regresso. Quando mai avverrà che dx descriva una curva piana, e $d\xi$ inviluppi un cono, cioè quando mai X e Ξ saranno fissi, ossia $X' = \Xi' = 0$? Ciò avviene soltanto se $c = \gamma = 0$ e quindi anche $\theta' = 0$; cioè, o $\theta = 0$, e la curva appartiene a un complesso lineare (nel qual caso evidentemente, se X è fisso, è fisso anche il piano Ξ che gli corrisponde nel relativo sistema nullo) oppure $\theta = \text{cost.} \neq 0$. Le coordinate x, ξ sono perciò *normali*; e (poichè $c = \gamma = 0$) per (23) $_{\text{ter}}$ una di esse si può supporre costante, e quindi le altre tre si possono poi considerare come coordinate *non omogenee*.

§ 7. — Gli elementi geometrici fondamentali.

A) Sistema nullo osculatore.

Siano $\overline{x}$, $\overline{x}'$, $\overline{x}''$, $\overline{\xi}$ ecc. le coordinate di punto e piano osculatore e le loro derivate calcolate in un punto generico O della curva. Le coordinate x, ξ di un punto o di un piano qualsiasi dello spazio potranno scriversi nella forma:

$$(1) \quad x = l\overline{x} + m\overline{x}' + n\overline{x}'' + p\overline{x}''', \quad \xi = \lambda\overline{\xi} + \mu\overline{\xi}' + \nu\overline{\xi}'' + \pi\overline{\xi}'''.$$

La reciprocità definita nello spazio dalle

$$(2) \qquad \lambda = l\,,\ \mu = m\,,\ \nu = n\,,\ \pi = p$$

non dipende dal parametro u, rispetto a cui si deriva, e non varia neanche se moltiplichiamo le x, e quindi anche (secondo le convenzioni del § 6, C) le ξ, per un medesimo fattore ρ. Supposto per semplicità $a = 1$, si trova (indicando con q, θ il valore di q, θ nel punto O):

$$Sx\xi = \lambda p - l\pi + m\nu - n\mu + q(n\pi - \nu p) - \theta p\pi$$

cioè

$$(3) \quad Sx\xi = lL + mM + nN + pP = -(\lambda\Lambda + \mu\mathrm{M} + \nu\mathrm{N} + \pi\Pi)$$

ove

$$(4) \quad \begin{cases} L = -\pi\,, & M = \nu\,, & N = -\mu + q\pi\,, & P = \lambda - q\nu - \theta\pi\,, \\ \Lambda = -p\,, & \mathrm{M} = n\,, & \mathrm{N} = -m + qp\,, & \Pi = l - qn + \theta p. \end{cases}$$

Le l, m, n, p ed L, M, N, P sono coordinate di punto e piano nel tetraedro D che ha per vertici i punti $\overline{x}$, $\overline{x}'$, $\overline{x}''$, $\overline{x}'''$; le λ, μ, ν, π e Λ, M, N, Π sono coordinate di piano e punto nel tetraedro Δ che ha per faccie i piani $\overline{\xi}$, $\overline{\xi}'$, $\overline{\xi}''$, $\overline{\xi}'''$. La reciprocità (2) si può definire con le:

$$(2)_{\text{bis}} \quad L = -p\,,\ M = n\,,\ N = -m + qp\,,\ P = l - qn - \theta p\,,$$

$$(2)_{\text{ter}} \quad \Lambda = -\pi\,,\ \mathrm{M} = \nu\,,\ \mathrm{N} = -\mu + q\pi\,,\ \Pi = \lambda - q\nu + \theta\pi.$$

Tenuti fissi i tetraedri D, Δ, e il valore di q, queste correlazioni descrivono, al variare di θ, un fascio di correlazioni; i punti che appartengono al piano corrispondente sono i punti per cui $\theta p^2 = 0$, *cioè i punti del piano osculatore* $\mathrm{p} = 0$, *a cui corrispondono gli stessi piani in tutte le correlazioni del fascio.* Questo fascio di correlazioni è individuato dalla correlazione degenere $L = M = N = 0$, $P = p$ e dal *sistema nullo* definito dalle

$$(5) \qquad L = -p\,,\ M = n\,,\ N = -m + qp\,,\ P = l - qn\,,$$

oppure:

$$(5)_{\text{bis}} \quad \Lambda = -\pi\,,\ \mathrm{M} = \nu\,,\ \mathrm{N} = -\mu + q\pi\,,\ \Pi = \lambda - q\nu\,,$$

oppure:

$$p = \pi\,,\quad n = \nu\,,\quad m = \mu\,,\quad l = \lambda - \theta\pi. \tag{5 ter}$$

Esso sarà chiamato il *sistema nullo osculatore*, di cui vedremo ben presto il significato geometrico.

B) Il tetraedro principale.

Vogliamo definire *in modo intrinseco un tetraedro invariante per collineazioni e correlazioni*, che nella attuale teoria compia l' ufficio che il triedro principale compie nella geometria metrica. Scelto *ad libitum* $\varepsilon = \pm 1$ (e non indicando più con indici derivate covarianti), poniamo:

$$\text{(6)}\quad \begin{cases} l = y_1 + \frac{3}{10} q y_3 + \left(-\frac{1}{2}\theta + \frac{3}{10} q'\right)\varepsilon y_4 \\ m = \varepsilon\left(y_2 + \frac{7}{10} q y_4\right) \\ n = y_3 \\ p = \varepsilon y_4 \end{cases}$$

ossia:

$$\text{(6) bis}\quad \begin{cases} y_1 = l - \frac{3}{10} q n + \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{3}{10} q'\right) p \\ y_2 = \varepsilon\left(m - \frac{7}{10} q p\right) \\ y_3 = n \\ y_4 = \varepsilon p. \end{cases}$$

Il piano $\xi = \lambda\,\overline{\xi} + \mu\,\overline{\xi}' + \nu\,\overline{\xi}'' + \pi\,\overline{\xi}'''$ ha nel tetraedro D per (4) l' equazione:

$$-\pi l + \nu m + (q\pi - \mu) n + (\lambda - q\nu - \theta\pi) p = 0$$

che potremo scrivere nella forma:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 = 0$$

ove sia posto:

$$\text{(7)}\quad \begin{cases} \eta_1 = -\varepsilon\pi \\ \eta_2 = \nu \\ \eta_3 = \frac{7}{10} q\varepsilon\pi - \varepsilon\mu \\ \eta_4 = \lambda - \frac{3}{10} q\nu - \left(\frac{3q'}{10} + \frac{\theta}{2}\right)\pi \end{cases}$$

ossia:

$$
(7)_{\text{bis}} \qquad \left\{
\begin{aligned}
\pi &= -\varepsilon\eta_1 \\
\nu &= \eta_2 \\
\mu &= -\varepsilon\left(\eta_3 + \frac{7}{10}\, q\eta_1\right) \\
\lambda &= \eta_4 + \frac{3}{10}\, q\eta_2 - \frac{\varepsilon}{2}\, \theta\eta_1 - \frac{3q'\varepsilon}{10}\, \eta_1
\end{aligned}
\right.
$$

che si ottengono da (6) sostituendo alle:

$$l\,,\ m\,,\ n\,,\ p\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ y_4\,,\ -\theta$$

le:

$$\lambda\,,\ \mu\,,\ \nu\,,\ \pi\,,\ \eta_4\,,\ -\eta_3\,,\ \eta_2\,,\ -\eta_1\,,\ -\theta.$$

Le (7) si possono considerare perciò come le formole *duali* delle (6). E la simmetria delle formole apparirà più chiara, se si pone:

$$
(8) \qquad \zeta_1 = \eta_4\,,\quad \zeta_2 = -\eta_3\,,\quad \zeta_3 = \eta_2\,,\quad \zeta_4 = -\eta_1.
$$

Chiameremo *tetraedro principale* T in O quello in cui le y ed η (o ζ) definite da (6), (7), (8) sono coordinate di punto e piano; e lo assumeremo a tetraedro di riferimento.

Consideriamo le coordinate y di un punto della curva posto nell' intorno di un suo punto O. Supporremo naturalmente, come abbiamo visto sempre possibile, $a = 1$, $\theta = 1$ (opp. $\theta = 0$). Le y soddisferanno alle $(23)_{\text{ter}}$ del § 6 D; i loro valori iniziali in O e quelli delle loro derivate saranno date da (6), appena si conoscano i valori in O delle l, m, n, p e loro derivate. Ora i valori di l', l'', l''', m, m'', m''', n, n', n''', p, p', p'' in O sono nulli, quelli di l, m', n'', p''' valgono 1. Potremo così trarre gli sviluppi in serie delle y. E si trova:

$$
(9) \qquad \left\{
\begin{aligned}
y_1 &= 1 - \frac{3q}{20}\, u^2 + \left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{10}\, q'\right) \frac{u^3}{6} + \left(\frac{c}{24} + \frac{3q^2}{240}\right) u^4 + \\
&\quad + \left(\frac{c'}{120} - \frac{3q}{10}\,\frac{\theta - 2q'}{120} - \frac{q}{120}\left\{\frac{\theta}{2} - \frac{3}{10}\, q'\right\}\right) u^5 + \ldots \\
y_2 : \varepsilon &= u - \frac{7q}{10}\,\frac{u^3}{6} + \frac{\theta - q'}{24}\, u^4 + \left(\frac{c - q''}{120} + \frac{7q^2}{1200}\right) u^5 + \ldots \\
y_3 &= \frac{1}{2}\, u^2 - \frac{q}{24}\, u^4 + \frac{\theta - 2q'}{120}\, u^5 + \frac{1}{720}\,(q^2 - 3q'' + c)\, u^6 + \ldots \\
y_4 : \varepsilon &= \frac{u^3}{6} - \frac{q}{120}\, u^5 + \frac{\theta - 3q'}{720}\, u^6 + \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Scambiando θ in $-\theta$ si hanno gli sviluppi delle ζ definite da (9).

L' interpretazione geometrica di questo tetraedro T *si avrà dall' esame dei seguenti elementi geometrici fondamentali.*

C) Altri elementi geometrici.

Punto O. Esso è ora definito dalle $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, o, in coordinate di piano, dalla $\eta_1 = 0$, oppure $\zeta_4 = 0$.

Piano osculatore in O. È il piano $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0$ ossia (come luogo dei punti) $y_4 = 0$.

Retta tangente in O. È la retta $y_3 = y_4 = 0$ ossia $\zeta_3 = \zeta_4 = 0$.

Cono quadrico osculatore in O. L' unico cono quadrico col vertice in O che ha con la curva C in O contatto di sesto ordine (tale cioè che sostituendo (9) nella sua equazione siano nulli tutti i coefficienti di u^n per $n \leqq 6$) è il cono:

$$(10) \qquad 2y_3^2 - 3y_2 y_4 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \zeta_4 = 3\zeta_2^2 - 8\zeta_1\zeta_3 = 0$$

$\left(\text{Il primo membro di (10) vale } \dfrac{15q' - 7\theta}{240} u^7 + \ldots\right)$

Conica (inviluppo) osculatrice in O. È l'ente duale del precedente.

$$(10)_{\text{bis}} \qquad 2\zeta_3^2 - 3\zeta_2\zeta_4 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad y_4 = 3y_2^2 - 8y_1 y_3 = 0.$$

Fascio osculatore di cubiche (sghembe). Una cubica sghemba posta sul cono osculatore è intersezione di questo e di un cono quadrico che ha il vertice P p. es. sulla generatrice $y_2 = y_3 = 0$ del precedente, e che ha quindi un' equazione omogenea di 2° grado in y_2, y_3, $hy_1 + ky_4$ se $hy_1 + ky_4 = 0$ è un piano passante per P. Notando che

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y_2^2 - 2y_1 y_3 = -\frac{\theta}{60} u^6 - \frac{V}{180} u^8 + \ldots, \\ & y_3 y_4 = \frac{\varepsilon}{12} u^6 + \text{termini in } u^7 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

si riconosce che soltanto le intersezioni del cono osculatore con uno dei coni

$$y_2^2 - 2y_1 y_3 + 2hy_3 y_4 = 0 \qquad (h = \text{cost.})$$

hanno in O contatto pentapunto con la curva data. Le *cubiche* così ottenute *hanno per equazioni parametriche in coordinate di punto o di piano osculatore:*

$$(12) \qquad \frac{y_1 - hy_4}{y_2 : 2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{\frac{3}{2} y_4} = w \qquad (w \text{ parametro})$$

$$(12)_{\text{bis}} \qquad \frac{\zeta_1 - h\zeta_4}{\zeta_2 : 2} = \frac{\zeta_2}{\zeta_3} = \frac{\zeta_3}{\frac{3}{2} \zeta_4} = w$$

che se ne deducono mutando le y *in* ζ. *Esse definiscono tutte lo stesso sistema nullo : il sistema nullo osculatore* $y = \zeta$.

Ponendo $2h = \frac{\varepsilon\theta}{5}$ si ha una cubica che per (11) ha in O con C un contatto 6 punto: *la* (prima) *cubica osculatrice*. Ponendo $2h = -\frac{\varepsilon\theta}{5}$ si ha *la* (seconda) *cubica osculatrice* che ha in O con C 6 *piani osculatori consecutivi comuni*. Per $h = 0$ si ha la *cubica armonica*, luogo dei coniugati armonici di O rispetto ai punti ove le precedenti cubiche incontrano le generatrici. *Queste cubiche coincidono solo se* $\theta = 0$, *cioè se la curva data* C *appartiene a un complesso lineare. Come i loro punti giacciono* (in ogni caso) *sul cono quadrico osculatore, così i loro piani osculatori inviluppano la conica osculatrice.*

Punto di Halphen (primo). I coni quadrici passanti per una cubica del fascio osculatore hanno per equazione

$$(13) \qquad 2a(2y_3^2 - 3y_2y_4) + b(y_2^2 - 2y_1y_3 + 2hy_3y_4) + 2c(3y_1y_4 - 3hy_4^2 - y_2y_3) = 0$$

$$(13)_{\text{bis}} \qquad (ab - c^2 = 0) \qquad (a\,,\ b\,,\ c = \text{cost.})$$

Il vertice del cono è quello, a cui corrisponde il parametro

$$(14) \qquad w = 2a : c = 2c : b.$$

Se $h = \varepsilon\theta : 10$, la cubica considerata è la prima osculatrice; il cono corrispondente alle $b = c = 0$ è il cono quadrico osculatore ed ha perciò in O con C un contatto 7 — punto. Se $\theta \neq 0$ vi è tra i (13) un altro cono che in O ha con C un contatto 7 — punto. Infatti il primo membro di (13), per le (9), ha, se $10\,h = \varepsilon\theta$, uno sviluppo

$$\left(-\frac{bV}{180} + \frac{\varepsilon\theta c}{60}\right)u^6 + \dots.$$

Il cono (13) avrà con C in O un contatto 7 — punto non solo per $b = c = 0$, ma anche per $2c : b = 2\varepsilon\theta V : 3$, che dà luogo ad un cono, il cui vertice è il punto

$$(14) \qquad y_1 = \frac{\varepsilon\theta}{10} + \frac{2}{9}\varepsilon\theta V^3, \quad y_2 = \frac{2}{3}V^2, \quad y_3 = \varepsilon\theta V, \quad y_4 = 1,$$

che non coincide con O se $\theta \neq 0$, e che diremo il *primo punto* di Halphen. Esso è *l' unico punto della prima cubica osculatrice, da cui questa è proiettata secondo un cono quadrico avente in* O *un contatto* 7 *punto con la curva data* C. *Il piano, che da esso proietta la tangente in* O, *è il piano principale di Halphen, luogo dei punti da cui la prima cubica osculatrice è proiettata secondo un cono (cubico) avente in* O *un contatto* 7 — punto *con* C.

Il piano osculatore alla prima cubica osculatrice nel punto trovato si potrà dire il (primo) *piano di Halphen.* Dualmente troveremo sulla seconda cubica osculatrice un (secondo) *piano di Halphen,* che la oscula in un punto che chiameremo il (secondo) *punto di Halphen.*

Se $\theta = 0$ il (primo) punto di Halphen coincide con O, ecc.

Punto di Sannia (primo) è il punto comune alle ∞^2 quadriche che hanno in O un contatto 7 — punto con la curva data, e che perciò appartengono alla rete definita dalle quadriche

$$A = 2y_3^2 - 3y_2 y_4 = 0$$

$$B = y_2^2 - 2y_1 y_2 + \frac{2\varepsilon\theta}{10} y_2 y_4 + \frac{V}{5} y_4^2 = 0\,;$$

$$C = 3y_1 y_4 - \frac{3\varepsilon\theta}{10} y_4^2 - y_2 y_3 - \frac{3\varepsilon\theta}{10} y_4^2 = 0.$$

(Si noti infatti che le A, B, C per le (9) hanno sviluppi, che cominciano col termine in u^7). Trovando i punti ove la cubica $A = C = 0$ incontra la quadrica $B = 0$, si trova che il punto di Saunia è, se $\theta \neq 0$, il punto:

$$y_4 = 1\,, \quad y_3 = \varepsilon\theta V, \quad y_2 = \frac{2}{3} V^2, \quad y_1 = \frac{\varepsilon\theta}{5} + \frac{2}{9}\varepsilon\theta V^3.$$

Potremo, analogamente a quanto sopra, definire un secondo punto e due piani di Sannia. Notando che tra le quadriche aventi un contatto sette punto in O con C vi sono i coni che da O e dal primo punto di Halphen proiettano la cubica osculatrice [i quali hanno a comune, oltre a tale cubica, la generatrice che ne congiunge i vertici] troviamo: *Un punto della curva e i corrispondenti punti di Halphen e di Sannia sono allineati.*

Tutti questi enti, definiti se $\theta \neq 0$ cioè per curve non appartenenti a complessi lineari, permettono di caratterizzare il *tetraedro fondamentale. Il vertice* $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ *è il punto* O *generico della curva, lo spigolo* $y_3 = y_4 = 0$ *la tangente in* O, *il piano* $y_4 = 0$ *il piano osculatore in* O. *Lo spigolo* $y_2 = y_4 = 0$ *è la retta uscente da* O *posta sul piano osculatore che si appoggia alla congiungente i due punti di Halphen ed incontra la conica osculatrice in* O *e nel punto* $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, *in cui la conica osculatrice ha per tangente la retta* $y_1 = y_4 = 0$. *Definiti così gli spigoli del tetraedro posti in* $y_4 = 0$, *il sistema nullo osculatore determina gli altri tre. Questo tetraedro ha per faccie due piani osculatori della cubica armonica, e i due piani che dal punto di contatto di uno proiettano la tangente nell'altro.*

D) **Una osservazione.**

Sia $x + rdx$ un punto P della retta tangente, $\xi + rd\xi$ il piano π che gli corrisponde nel sistema nullo osculatore. Posto $x = \rho\overline{x}$, $\xi = \rho\overline{\xi}$, il punto P e il piano π avranno le coordinate $\overline{x} + \overline{r}d\overline{x}$ e $\overline{\xi} + \overline{r}\,d\overline{\xi}$, ove:

$$\frac{1}{\overline{r}} = \frac{1}{r} + d \log \rho.$$

Sia $F_3 = du^3$, e siano $\left(x, \dfrac{dx}{du}\right) = t$ le coordinate di retta tangente. Se $(d\overline{u} : du)^3 = \dfrac{1}{\rho^2}$ sarà (§ 6 G) $\overline{F}_3 = d\overline{u}^3$, mentre $\overline{t} = \left(\overline{x}, \dfrac{d\overline{x}}{d\overline{u}}\right)$. Quindi:

$$t = \rho^2 \overline{t}\,(d\overline{u} : du) = \rho^{\frac{4}{3}}\overline{t}.$$

Perciò

$$t + \frac{3}{4} rdt \qquad \text{e} \qquad \overline{t} + \frac{3}{4}\,\overline{r}\,d\overline{t}$$

sono proporzionali. *La corrispondenza tra il punto* $\mathrm{x} + \mathrm{rdx}$, *il piano* $\xi + \mathrm{rd}\xi$, *e la retta* $\mathrm{t} + \dfrac{3}{4}\mathrm{rdt}$ *è dunque indipendente dal fattore* ρ, *ed è dunque definibile geometricamente* (č). Infatti, posto $rdu = s$, il punto $x + rdx = x + sx'$ ha le coordinate $l = 1$, $m = s$, $n = p = 0$ ossia: $y_1 = 1$, $y_2 = \varepsilon s$, $y_3 = y_4 = 0$, la cui polare rispetto alla conica osculatrice è $3\varepsilon s y_2 - 4y_3 = y_4 = 0$, passante pêr i punti $(1, 0, 0, 0)$ e $\left(0, 1, \dfrac{3}{4}\varepsilon s, 0\right)$ [mentre t è la retta da $(1, 0, 0, 0)$ a $(0, \varepsilon, 0, 0)$ e t' è la retta da $(1, 0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1, 0)$] e conseguentemente coincide con $t + \dfrac{3}{4}rdt$, *che è dunque la polare di* $\mathrm{x} + \mathrm{rdx}$ *rispetto alla conica osculatrice, come è la polare di* $\xi + \mathrm{rd}\xi$ *rispetto al cono osculatore.*

Proiettiamo ora la nostra curva da un punto $(a, b, 1, \varepsilon s)$ qualsiasi del piano $\xi + s\xi'$ (cioè del piano $\eta_4 = 1$, $\eta_3 = -\varepsilon s$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$) sul piano osculatore. La proiezione avrà per coordinate

$$\overline{y}_1 = y_1 - \frac{a}{\varepsilon s} y_4 = 1 - \frac{3q}{20} u^2 + \ldots;$$

$$\overline{y}_2 = y_2 - \frac{b}{\varepsilon s} y_4 = \varepsilon \left[u - \left(\frac{b}{6s} + \frac{7}{10} \frac{q}{6} \right) u^3 + \ldots \right]$$

$$\overline{y}_3 = y_3 - \frac{1}{\varepsilon s} y_4 = \frac{1}{2} u^2 - \frac{u^3}{6s} + \ldots; \quad \overline{y}_4 = 0.$$

La conica osculatrice, avente contatto 5 — punto con tale proiezione è la conica

$$y_2^2 - 2 y_1 y_3 - \frac{2\varepsilon}{3s} y_2 y_3 + \alpha y_3^2 = 0,$$

ove è inutile specificare il valore di α; e la retta polare di $x + sx'$ rispetto a tale conica è sempre la retta $t + \frac{3}{4} r dt$ precedente; che è dunque anche *la retta polare di* x + rdx *rispetto alla conica osculatrice in* O *alla proiezione della curva fatta sul piano osculatore in* O *da un punto del piano* ξ + rdξ. (č).

§ 8. — Le curve piane.

Daremo un rapido sunto della teoria di queste curve. Se x (cioè x, y, z) sono le tre coordinate omogenee dei suoi punti, porremo $(x, dx, d^2x) = a^3 du^3$. Se ξ sono le coordinate di retta tangente è $S\xi x = S\xi x' = S\xi' x = 0$. Sarà perciò:

$$S\xi d^2x = -S d\xi dx = S x d^2\xi.$$

Imporremo alle ξ tale fattore di proporzionalità che:

$$(\xi, d\xi, d^2\xi) = a^3 du^3 = (x, dx, d^2x)$$

ossia che:

$$(\xi, d\xi, d^2\xi)\ (x\ dx\ d^2x) = (S\xi d^2x)^3 = (S x d^2\xi)^3 = a^6 du^6.$$

Sarà :

$$S\xi d^2x = -Sdxd\xi = Sxd^2\xi = a^2\,du^2.$$

Noi sceglieremo u in guisa che $a = 1$. Il parametro u così definito varia però, moltiplicando le x, ξ per uno stesso fattore. Sarà allora :

$$(x\,x'\,x''') = (x\,x'\,x'')'_u = 0 \quad \text{cioè} \quad 0 = S\xi x''' = -S\xi' x'' = S\xi'' x' = -Sx\xi'''.$$

Possiamo definire la curva dando l' equazione differenziale lineare cui soddisfano le x , y , z *di un suo punto e loro combinazioni lineari.* *Posto* pertanto

$x''' = hx'' + kx' + lx$ si avrà $hS\xi x'' = S\xi x'''$, cioè $h = 0$ (nell' ipotesi $a = 1$)

E all' equazione si può dare la forma :

$$x''' + 2qx' + (q' - \theta)x = 0.$$

Se noi moltiplichiamo le x per uno stesso fattore ρ, e contemporaneamente variamo il parametro u in guisa che sia ancora $a = 1$, si riconosce facilmente che θdu^2 è *invariante*. Se $\theta = 0$, scelto il citato fattore ρ in guisa che $q = 0$, l' equazione si riduce alla $x''' = 0$, le x, y, z sono pertanto polinomi di 2° grado di uno stesso parametro. Dunque, se $\theta = 0$, *la curva è una conica.* Se $\theta \neq 0$, si potrà scegliere ρ in guisa che $\theta = 1$. Il parametro corrispondente u sarà l'*arco proiettivo*, e le coordinate x, ξ corrispondenti le *coordinate* normali.

Esse *soddisfano alle due equazioni aggiunte :*

$$x''' + 2qx' + (q' - 1)x = 0 \qquad\qquad \xi''' + 2q\xi' + (q' + 1)\xi = 0.$$

La curva, se non è una conica, *è dunque definita dalla conoscenza della* q *in funzione dell' arco proiettivo* u.

Se x, x', ξ, ξ', q sono i valori di x, x', ecc. in un punto O della curva, ogni punto del piano $\bar{x}$ avrà coordinate del tipo $y_1 x + y_2 x' + y_3(x'' + qx)$ e ogni retta $\bar{\xi}$ del piano avrà coordinate del tipo $\zeta_1 \xi + \zeta_2 \xi' + \zeta_3(\xi'' + q\xi)$. Il punto e la retta si apparteranno se $\zeta_3 y_1 + \zeta_1 y_3 - \zeta_2 y_2 = 0$. *La conica osculatrice sia alla curva luogo che alla curva inviluppo* ha per equazioni $2y_1 y_3 - y_2^2 = 0$ pensata come luogo e $2\zeta_1\zeta_3 - \zeta_2^2 = 0$ pensata come inviluppo. La polarità rispetto a questa conica è definita dalla $\zeta_i = y_i$.

Il punto di Halphen ($y_1 = 2 \,.\, 7^2 - 25q^3$, $y_2 = -490q$, $y_3 = 7 \,.\, 25q^2$) è il punto comune alle cubiche che in O hanno un contatto 8 — punto con la curva data ; *la cubica penosculante nodale*

$$5(2y_1 y_3 - y_2^2)y_2 - 4y_3^2 = 0$$

è l' unica cubica con punto doppio in O, che in O ha un contatto 8 punto con la curva data, ed ha per tangenti le rette $y_2 = y_3 = 0$. Ma tutta la configurazione così generata non ha trovato finora applicazione alcuna.

Una osservazione.

Nel seguito ci sarà utile la sola osserv. seguente. Se x, ξ, dx, d^2x, ecc. sono le coordinate x di un punto della curva e ξ della tangente corrispondente, e i loro differenziali, calcolate tutte in un punto fisso O, allora nella polarità rispetto alla conica osculatrice si corrispondono il punto $ax + bdx + cd^2x$ e la retta $a\xi + bd\xi + cd^2\xi$ quando le x e le ξ relative a un punto *generico* della curva sono legate dalla:

$$(1) \qquad (x\,, dx\,, d^2x) = (\xi\,, d\xi\,, d^2\xi)$$

da cui segue

$$(1)_{\text{bis}} \qquad (x\,, dx\,, d^3x) = (\xi\,, d\xi\,, d^3\xi)$$

che è equivalente alla:

$$(1)_{\text{ter}} \qquad S\xi d^3x = Sxd^3\xi \ (*)$$

ossia, per le:

$$(2) \qquad S\xi d^2x = -Sd\xi dx = Sxd^2\xi\,;$$

alla:

$$(1)_{\text{quater}} \qquad S(d\xi d^2x - dxd^2\xi) = 0.$$

(*) Infatti è evidentemente $\xi = \rho(x\,, dx)$, $x = \sigma(\xi\,, d\xi)$ con ρ, σ fattori di proporzionalità. Quindi (1) dà $\frac{1}{\rho} S\xi d^2x = \frac{1}{\sigma} Sxd^2\xi$. Ma, derivando le identità $S\xi x = S\xi dx = Sxd\xi = 0$, si ottengono le (2); e quindi $\rho = \sigma$. Perciò le $(1)_{\text{bis}}$, $(1)_{\text{ter}}$ sono equivalenti.