Kapitola IV.

Projektivní diferenciální geometrie osnov.

Aritmetické osnovy.

419. Pro stručnost budeme psáti

$$(x(u),\ y(u)) = (xy)_u,\ \{(x(u),\ y(u))\} = \{xy\}_u.$$

Buď $R_a(xy)_u$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) ar. osnova třídy $r \geqq 1$. Pravíme, že ar. osnova $R_a(xy)_u$ je *zborcená*, když osnova $R\{xy\}_u$ je zborcená, t. j. (v. **210** (2)), když je všude v $\langle a,\ b\rangle$

$$\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right) \neq 0.$$

Buď $R_a(xy)_u$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$ ar. osnova třídy $r \geqq 1$ (buď $R\{xy\}_u$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) osnova třídy r). Dle **158**, **161** a **208** proměnná $v = \varphi(u)$ je parametrem pro $R_a(xy)_u$ (pro $R\{xy\}_u$), když a jen když 1° $\varphi(u)$ je třídy r v $\langle a,\ b\rangle$, 2° $\frac{d\varphi}{du} \neq 0$ všude v $\langle a,\ b\rangle$. Často je výhodné, považovati v za parametr jen tehdy, když $\frac{d\varphi}{du} > 0$; pravíme pak, že *ar. osnova* $R_a(xy)_u$ (*osnova* $R\{xy\}_u$) *jest orientována*. Orientovati ar. osnovu (osnovu) lze zřejmě dvěma a jen dvěma způsoby; mluvíme o *dvou opačně orientovaných ar. osnovách (osnovách)*. Je-li u parametr orientované ar. osnovy (orientované osnovy), jest $-u$ parametr opačně orientované ar. osnovy (osnovy).

420. Buď $R_a(xy)_u$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) ar. osnova třídy $r \geqq 1$. Pravíme, že $R_a(xy)_u$ *jest ar. osnova virtuální třídy* $r+1$, když *souřadnice ar. rovin* $\left(xy\frac{dx}{du}\right)$, $\left(xy\frac{dy}{du}\right)$ *jsou třídy* r v $\langle a, b\rangle$. Pak také funkce $\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)$ je třídy r v $\langle a,\ b\rangle$, jak je patrno z identity (v. **109** (1))

$$\left[\left(xy\frac{dx}{du}\right),\ \left(xy\frac{dy}{du}\right)\right] = \left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)(xy). \tag{1}$$

Zřejmě ar. osnova třídy $r+1$ jest ar. osnovou virtuální třídy $r+1$. Pravíme, že osnova $R\{xy\}_u$ jest virtuální třídy $r+1$, když ar. osnova $R(xy)$ jest virtuální třídy $r+1$.

421. Buď $R\{xy\}_u$ zborcená osnova třídy $r \geqq 1$. Buď

(1) $$\omega = \operatorname{sgn}\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right) = \pm 1.$$

Pravíme, že ω je znamení osnovy $R\{xy\}_u$.

Snadno se vidí, že ω se nemění, ani když od u přejdeme k jinému parametru v, ani když od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ přejdeme k ar. křivkám $C_a x_1$, $C_a y_1$, kde $x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y$, $x_2 = \mu_1 x + \mu_2 y$, při čemž $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ jsou funkce třídy 1 takové, že všude jest $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$.

422. Buď $R_a(xy)_u$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) orientovaná zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 1$ (nebo virtuální třídy r, když $r \geqq 2$). Buď $\varphi(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) funkce třídy $s \geqq 1$. Buď

(1) $$D\varphi = \frac{1}{\sqrt{\left|\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)\right|}}\frac{d\varphi}{du}.$$

Když $r \geqq n$, $s \geqq n > 1$, buď

$$D^2\varphi = D(D\varphi),\ D^3\varphi = D(D^2\varphi),\ \ldots D^n\varphi = D(D^{n-1}\varphi).$$

Je-li ω znamení osnovy $R\{xy\}_u$, jest

(2) $$(x, y, Dx, Dy) = \omega.$$

Operace D nazývá se diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Diferenciální parametr D jest ar. osnovou $R_a(xy)_u$ úplně určen. Diferenciální parametr opačně orientované ar. osnovy jest $-D$.

Důkaz je snadný.

423. Buď v parametr orientované zborcené ar. osnovy $R_a(xy)_u$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$); buď D její diferenciální parametr. Pravíme, že v jest normální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$, když $Dv = 1$ (u v $\langle a, b\rangle$). Buď $a \leqq u_0 \leqq b$; buď c libovolná konstanta. Pak

(1) $$v = \int_{u_0}^{u}\frac{du}{Du} + c = \int_{u_0}^{u}\sqrt{\left|\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)\right|}\,du + c$$

jest normální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$ a $-v$ jest normální parametr opačně orientované ar. osnovy. Důkaz je snadný.

424. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova; buď D její diferenciální parametr. Položme

$$\xi(u) = (x, y, Dx), \quad \eta(u) = (x, y, Dy). \tag{1}$$

Buď $(xy)_{u_0}$ libovolná ar. přímka ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď $S = \{x(u_0), y(u_0)\}$ řada ar. bodů soumístná s $\{xy\}_u$; buď $\Sigma =$ Adj. S. Libovolnému ar. bodu z S: $t_1 x(u_0) + t_2 y(u_0)$ přiřaďme ar. rovinu $t_1 \xi(u_0) + t_2 \eta(u_0)$. Takto vzniklá jednoznačná korespondence $\mathfrak{K}$ mezi S a Σ jest orientovanou ar. osnovou $R_a(xy)_u$ a její ar. přímkou $(xy)_{u_0}$ úplně určena: pravíme, že $\mathfrak{K}$ jest Chaslesova korespondence orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$ v ar. přímce $(xy)_{u_0}$. V Chaslesově korespondenci opačně orientované ar. osnovy v ar. přímce $(xy)_{u_0}$ ar. bodu $t_1 x(u_0) + t_2 y(u_0)$ přísluší ar. rovina $-[t_1 \xi(u_0) + t_2 \eta(u_0)]$.

Rovina $\{t_1 \xi(u_0) + t_2 \eta(u_0)\}$ jest tečnou rovinou přímkové plochy $MR\{xy\}$ v bodě $\{t_1 x(u_0) + t_2 y(u_0)\}$.

Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}$; platí identity

$$(\xi\eta) = \omega(xy), \tag{2}$$

$$Sx\xi = Sx\eta = Sy\xi = Sy\eta = 0, \tag{3}$$

$$SDx \,.\, \xi = 0, \quad SDx \,.\, \eta = -\omega, \quad SDy \,.\, \xi = \omega, \quad SDy \,.\, \eta = 0. \tag{4}$$

Když ar. osnova $R_a(xy)_u$ jest virtuální třídy $\geqq 2$, platí dále identity

$$(\xi, \eta, D\xi, D\eta) = \omega, \tag{5}$$

$$(\xi, \eta, D\xi) = x, \quad (\xi, \eta, D\eta) = y, \tag{6}$$

$$Sx \,.\, D\xi = 0, \quad Sx \,.\, D\eta = \omega, \quad Sy \,.\, D\xi = -\omega, \quad Sy \,.\, D\eta = 0. \tag{7}$$

Přejděme od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ k ar. křivkám $C_a x_1$, $C_a y_1$, kde

$$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y, \tag{8}$$

při čemž $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ jsou funkce třídy 1. Aby bylo $R_a(xy)_u = R_a(x_1, y_1)_u$, tedy $(xy)_u = (x_1, y_1)_u$, musí býti

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1.$$

Rovnicím (1) odpovídají rovnice

$$\xi_1 = (x_1, y_1, Dx_1) = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)(x, y, Dx_1) = (x, y, \lambda_1 Dx + \lambda_2 Dy),$$
$$\eta_1 = (x, y, \mu_1 Dx + \mu_2 Dy),$$

takže dle (1)

$$\xi_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta, \quad \eta_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta. \tag{9}$$

Z (8) a (9) je patrné, že Chaslesova korespondence zůstane nezměněna.

Přejdeme-li od $R_a(xy)_u$ k opačně orientované ar. osnově, přejde D v $-D$ (v. **422**) a tedy ξ, η přejdou v $-\xi$, $-\eta$.

Že $\{t_1\xi(u_0) + t_2\eta(u_0)\}$ je tečnou rovinou přímkové plochy $MR\{xy\}$ v bodě $\{t_1 x(u_0) + t_2 y(u_0)\}$, vychází snadno ze **269** a **281**.

Rovnice (2) vychází snadno ze **420** (1). Rovnice (3) — rovněž prvá a poslední rovnice (4) — jsou zřejmým důsledkem rovnice (1). Ostatní rovnice (4) plynou z (1) a **422** (2). Derivujeme-li rovnice (3) a všimneme-li si rovnic (4), obdržíme rovnice (5). Z (1) plyne

$$\begin{aligned} D\xi &= (x, y, D^2x) - (x, Dx, Dy), \\ D\eta &= (x, y, D^2y) - (y, Dx, Dy). \end{aligned} \tag{10}$$

Zřejmě jest

$$[(x, y, Dx), (x, y, Dy), (x, y, D^2x)] = 0_b,$$
$$[(x, y, Dx), (x, y, Dy), (x, y, D^2y)] = 0_b,$$

neboť v obou případech všecky tři ar. roviny nalevo náležejí do Adj. $\{x, y\}$ a jsou tedy lin. závislé. Dle (1) a (10) je tedy

$$(\xi, \eta, D\xi) = -[(x, y, Dx), (x, y, Dy), (x, Dx, Dy)],$$
$$(\xi, \eta, D\eta) = -[(x, y, Dx), (x, y, Dy), (y, Dx, Dy)],$$

takže dle **109** (2)

$$(\xi, \eta, D\xi) = x\,(x, y, Dx, Dy)^2,$$
$$(\xi, \eta, D\eta) = y\,(x, y, Dx, Dy)^2,$$

z čehož plynou rovnice (6) dle **422** (2). Konečně jest

$$(\xi, \eta, D\xi, D\eta) = S(\xi, \eta, D\xi)\, D\eta = Sx\, D\eta = \omega.$$

425. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova; buď D její diferenciální parametr. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}_u$. Buď K kolineace ar. bodů. Buď $x(u) \sim x'(u)$, $y(u) \sim y'(u)$ v K. Diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(x'y')_u$ jest rovněž D. Znamení osnovy $R\{x'y'\}_u$ jest ω $(-\omega)$, je-li K positivní (negativní) kolineace.

Důkaz je snadný.

426. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova. Buď $x(u) \sim \xi(u)$, $y(u) \sim \eta(u)$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$ v ar. přímce $(xy)_u$. Buď K unimodulární kolineace ar. bodů; buď $x(u) \sim x'(u)$, $y(u) \sim y'(u)$ v K. Buď $K' = \text{Adj}.\,K$; buď $\xi(u) \sim \xi'(u)$, $\eta(u) \sim \eta'(u)$ v K'. Pak jest $x'(u) \sim$

$\xi'(u)$, $y'(u) \sim \eta'(u)$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(x'y')_u$ v ar. přímce $(x'y')_u$.

Vychází snadno ze **43** (1), **424** (1) a **425**.

427. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 2$; buď D její diferenciální parametr. Buď $x(u) \sim \xi(u)$, $y(u) \sim \eta(u)$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$ v ar. přímce $(xy)_u$. Buď ω znamení $R\{xy\}$; buď

$$(1) \qquad a = -\frac{\omega}{2} S\,Dx\,D\xi,\ b = -\frac{\omega}{2} S\,Dx\,D\eta = -\frac{\omega}{2} S\,Dy\,D\xi,\ c = -\frac{\omega}{2} S\,Dy\,D\eta.$$

Pravíme, že a, b, c jsou asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x(u)$, $C_a y(u)$. Změníme-li orientaci ar. osnovy $R_a(xy)_u$, přejdou a, b, c resp. v $-a$, $-b$, $-c$.

Je-li osnova $R_a(xy)_u$ třídy $\geqq 2$, jest

$$(2) \qquad a = \frac{\omega}{2} S\,D^2x\,.\,\xi,\ b = \frac{\omega}{2} S\,D^2x\,.\,\eta = \frac{\omega}{2} S\,D^2y\,.\,\xi,\ c = \frac{\omega}{2} S\,D^2y\,.\,\eta.$$

Je-li $r \geqq 3$, jest

$$(3) \qquad a = \frac{\omega}{2} Sx\,D^2\xi\ \ b = \frac{\omega}{2} Sx\,D^2\eta = \frac{\omega}{2} Sy\,D^2\xi,\ c = \frac{\omega}{2} Sy\,D^2\eta.$$

Je třeba zjistiti, že obě definice funkce $b(u)$ v (1) jsou ekvivalentní, t. j. že

$$(4) \qquad S(Dx\,D\eta - Dy\,D\xi) = 0.$$

Stačí provésti důkaz za předpokladu, že $R_a(xy)_u$ je třídy 2. Dle **424** (10) jest

$$S\,Dx\,D\eta = (x, y, D^2y, Dx),\ S\,Dy\,D\xi = (x, y, D^2x, Dy),$$

takže

$$S\,(Dx\,D\eta - Dy\,D\xi) = -(x, y, Dx, D^2y) - (x, y, D^2x, Dy) = -D\,(x, y, Dx, Dy),$$

z čehož plyne (4) dle **422** (2).

Rovnice (2) a (3) obdrží se z (1), derivujeme-li **424** (4) a (7).

Že a, b, c přejdou v $-a$, $-b$, $-c$, změníme-li orientaci, plyne odtud, že D, ξ, η přejdou v $-D$, $-\xi$, $-\eta$ (v. **422** a **424**).

428. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 2$. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x(u)$, $C_a y(u)$. Buď K unimodulární kolineace ar. bodů. Buď v K $x(u) \sim x'(u)$, $y(u) \sim y'(u)$. Pak a, b, c

jsou asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x'(u)$, $C_a y'(u)$.

Plyne dle definice Adj. K ze **425**, **426** a **427** (1).

429. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 2$; buď D její diferenciální parametr. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x(u)$, $C_a y(u)$. Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ funkce třídy 1 takové, že jest identicky

(1) $$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = s = \pm 1.$$

Buď

(2) $$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \; y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Buďte a_1, b_1, c_1 asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x_1(u)$, $C_a y_1(u)$. Pak jest

(3) $$\begin{aligned} sa_1 &= (a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\lambda_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\lambda_2, \\ sb_1 &= (a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\mu_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\mu_2 = \\ &= (a\mu_1 + b\mu_2 + D\mu_2)\lambda_1 + (b\mu_1 + c\mu_2 - D\mu_1)\lambda_2, \\ sc_1 &= (a\mu_1 + b\mu_2 + D\mu_2)\mu_1 + (b\mu_1 + c\mu_2 - D\mu_1)\mu_2. \end{aligned}$$

Buď

(4) $$\xi_1 = (x_1, y_1, Dx_1), \; \eta_1 = (x_1, y_1, Dy_1).$$

Snadno vidíme, že D jest diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(x_1 y_1)_u = R_a s(xy)_u$. Dle (1), (2), (4) a **424** (1) jest

(5) $$s\xi_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta, \; s\eta_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta.$$

Dle (4) a **427** (1) jest na př. $a_1 = -\frac{\omega}{2} S Dx_1 D\xi_1$, takže dle (2) a (5)

$$sa_1 = -\frac{\omega}{2} S(\lambda_1 Dx + \lambda_2 Dy + D\lambda_1 . x + D\lambda_2 . y)(\lambda_1 D\xi + \lambda_2 D\eta + D\lambda_1 . \xi + D\lambda_2 . \eta),$$

z čehož vychází prvá rovnice (3) dle **424** (3), (4), (7) a **427** (1). Stejně obdrží se poslední rovnice (3) a rovnice

$$sb_1 = a\lambda_1\mu_1 + b(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + c\lambda_2\mu_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 D\mu_2 - \lambda_2 D\mu_1) + \frac{1}{2}(\mu_1 D\lambda_2 - \mu_2 D\lambda_1).$$

Že takto vypočtená hodnota sb_1 rovná se oběma hodnotám udaným ve (3), vychází z identity

$$\lambda_1 D\mu_2 - \lambda_2 D\mu_1 = \mu_1 D\lambda_2 - \mu_2 D\lambda_1,$$

kterou obdržíme derivujíce (1).

430. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 3$; buď D její diferenciální parametr. Buď

$x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$ v ar. přímce $(xy)_u$. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}_u$. Buď

$$A = \frac{\omega}{2} S(DxD^2\xi - D\xi D^2x),$$

(1) $$B = \frac{\omega}{4} S(DxD^2\eta - D\eta D^2x + DyD^2\xi - D\xi D^2y),$$

$$C = \frac{\omega}{2} S(DyD^2\eta - D\eta D^2y).$$

Buď $t_1x + t_2y$ libovolný ar. bod z řady ar. bodů soumístné s ar. přímkou $(xy)_u$. Buď

(2) $$f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2.$$

Pravíme, že $f(t_1, t_2)$ je fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ funkce třídy $r-1$ takové, že jest identicky

(3) $$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = s = \pm 1.$$

Definujme A_1, B_1, C_1, vzhledem k $C_a x_1$, $C_a y_1$ tak, jako jsme definovali A, B, C vzhledem k $C_a x$, $C_a y$. Buď

(4) $$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Buď

(5) $$t_1 = \lambda_1 t_1^* + \mu_1 t_2^*, \quad t_2 = \lambda_2 t_1^* + \mu_2 t_2^*,$$

akže jest identicky

$$t_1x + t_2y = t_1^*x_1 + t_2^*y_1.$$

Pak jest identicky

(7) $$A_1t_1^{*2} + 2B_1t_1^*t_2^* + C_1t_2^{*2} = s(At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2).$$

Změníme-li orientaci ar. osnovy $R_a(xy)$, fleknodální forma se nemění.

Buď $x \sim \xi$, $y \sim \eta$, $x_1 \sim \xi_1$, $y_1 \sim \eta_1$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)$, takže platí rovnice **429** (5).

Rovnice (7) je zřejmě ekvivalentní s rovnicemi

(8) $$\begin{aligned} A_1 &= s(A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + C\lambda_2^2), \\ B_1 &= s[A\lambda_1\mu_1 + B(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + C\lambda_2\mu_2], \\ C_1 &= s(A\mu_1^2 + 2B\mu_1\mu_2 + C\mu_2^2). \end{aligned}$$

Dokažme na př. prvou rovnici (8); druhé dvě dokáží se podobně. Ve **439** podáme jiný důkaz rovnice (7). Dle (1) jest

$$2\omega A_1 = S(Dx_1D^2\xi_1 - D\xi_1D^2x_1),$$

tedy dle (4) a **429** (5)

$$
\begin{aligned}
2s\omega A_1 = {} & \lambda_1^2 S(Dx\,D^2\xi - D\xi\,D^2x) + \lambda_1\lambda_2 S(Dx\,D^2\eta - D\eta\,D^2x + Dy\,D^2\xi - D\xi\,D^2y) + \\
& + \lambda_2^2 S(Dy\,D^2\eta - D\eta\,D^2y) + \lambda_1 D\lambda_1 S(x D^2\xi - \xi D^2x) + \\
& + \lambda_1 D\lambda_2 S(2Dx\,D\eta - 2Dy\,D\xi + y D^2\xi - \eta D^2x) + \\
& + \lambda_2 D\lambda_1 S(2Dy\,D\xi - 2Dx\,D\eta + x D^2\eta - \xi D^2y) + \\
& + \lambda_2 D\lambda_2 S(y D^2\eta - \eta D^2y) + \lambda_1 D^2\lambda_1 S(\xi Dx - x D\xi) + \\
& + \lambda_1 D^2\lambda_2 S(\eta Dx - y D\xi) + \lambda_2 D^2\lambda_1 S(\xi Dy - x D\eta) + \\
& + \lambda_2 D^2\lambda_2 S(\eta Dy - y D\eta) + 2(D\lambda_1)^2 S(x D\xi + \xi Dx) + \\
& + 2D\lambda_1 D\lambda_2 S(x D\eta + y D\xi - \xi Dy - \eta Dx) + 2(D\lambda_2)^2 S(y D\eta - \eta Dy) + \\
& + D\lambda_1 D^2\lambda_2 S(x\eta - y\xi) + D\lambda_2 D^2\lambda_1 S(y\xi - x\eta),
\end{aligned}
$$

z čehož vychází prvá rovnice (8) dle (1), **424** (3), (4), (7) a **427** (1) (2), (3).

431. Buď $R_a(xy)_u$ zborcená ar. osnova virtuální třídy, $r \geqq 3$; buď $f(t_1, t_2)$ její fleknodální forma. Buď K unimodulární kolineace ar. bodů; buď v K: $x(u) \sim x'(u)$, $y(u) \sim y'(u)$. Fleknodální forma ar. osnovy $R_a(x'y')_u$ jest rovněž $f(t_1, t_2)$.

Plyne dle definice Adj. K ze **425**, **426** a **430** (1).

432. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 2$; buď D její diferenciální parametr. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x(u)$, $C_a y(u)$. Souřadnice ar. bodů $X(u)$, $Y(u)$ (ar. rovin Ξ, H) buďte funkce třídy 1. Buď

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&\dot{X}(u) = DX + bX - aY, \quad \dot{Y}(u) = DY + cX - bY. \\
&\Xi(u) = D\Xi + b\Xi - aH, \quad \dot{H}(u) = D\Xi + c\Xi - bH.
\end{aligned}
$$

Pravíme, že ar. body $\dot{X}$, $\dot{Y}$ (ar. roviny $\dot{\Xi}$, $\dot{H}$) vzniknou z ar. bodů $X(Y)$ asymptotickým derivováním. Asymptotické derivování je v jistém smyslu nezávislé na ar. křivkách $C_a x$, $C_a y$, jimiž definujeme ar. osnovu $R_a(xy)_u$. Jsou-li totiž λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 funkce třídy 1 takové, že jest identicky

$$
(2) \qquad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = s = \pm 1,
$$

je-li

$$
(3) \qquad x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y,
$$

jsou-li dále a_1, b_1, c_1 asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x_1$, $C_a y_1$ a je-li konečně

$$
(4) \qquad X_1 = \lambda_1 X + \lambda_2 Y, \quad Y_1 = \mu_1 X + \mu_2 Y,
$$

$$
(5) \qquad \dot{X}_1 = DX_1 + b_1 X_1 - a_1 Y_1, \quad \dot{Y}_1 = DY_1 + cX_1 - bY_1,
$$

pak jest

(6) $$\dot{X}_1 = \lambda_1 \dot{X} + \lambda_2 \dot{Y},\quad \dot{Y}_1 = \mu_1 \dot{X} + \mu_2 \dot{Y}.$$

Změníme-li orientaci ar. osnovy $R_a(xy)_u$, přejdou $\dot{X}, \dot{Y}$ v $-\dot{X}, -\dot{Y}$.

Totéž platí ovšem, když místo ar. bodů $X, Y, \dot{X}, \dot{Y}$, uvažujeme ar. roviny $\Xi, H, \dot{\Xi}, \dot{H}$.

Z prvé rovnice (5) plyne dle (4)

$$\dot{X}_1 = \lambda_1 DX + \lambda_2 DY + (D\lambda_1 + b_1\lambda_1 - a_1\mu_1) X + (D\lambda_2 + b_1\lambda_2 - a_1\mu_2) Y.$$

Dle **429** (3) je však

$$\begin{aligned} b_1\lambda_1 - a_1\mu_1 &= s\lambda_1 [(a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\mu_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\mu_2] - \\ &- s\mu_1 [(a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\lambda_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\lambda_2] = \\ &= s(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1) = b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1 \end{aligned}$$

a podobně se nalezne, že

$$b_1\lambda_2 - a_1\mu_2 = -(a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2),$$

takže

$$\dot{X}_1 = \lambda_1 DX + \lambda_2 DY + (b\lambda_1 + c\lambda_2) X - (a\lambda_1 + b\lambda_2) Y = \lambda_1 \dot{X} + \lambda_2 \dot{Y},$$

což je prvá rovnice (7); podobně se odvodí druhá rovnice (7).

433. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 2$. Buď $x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v Chaslesově korespondenci ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}_u$. Nechť ar. body $\dot{x}, \dot{y}$ (ar. roviny $\dot{\xi}, \dot{\eta}$) vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Pak jest

(1) $$\begin{aligned} &Sx\xi = 0,\quad Sy\xi = 0,\quad S\dot{x}\xi = 0,\quad S\dot{y}\xi = \omega, \\ &Sx\eta = 0,\quad Sy\eta = 0,\quad S\dot{x}\eta = -\omega,\quad S\dot{y}\eta = 0, \\ &Sx\dot{\xi} = 0,\quad Sy\dot{\xi} = -\omega,\quad S\dot{x}\dot{\xi} = 0,\quad S\dot{y}\dot{\xi} = 0, \\ &Sx\dot{\eta} = \omega,\quad Sy\dot{\eta} = 0,\quad S\dot{x}\dot{\eta} = 0,\quad S\dot{y}\dot{\eta} = 0. \end{aligned}$$

(2) $$(xy\dot{x}\dot{y}) = \omega.$$

Vychází snadno ze **422** (2), **424** (3), (4), (7) a **427** (1).

434. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 2$. Buď D její diferenciální parametr. Buďte a, b, c asymptotické funkce ar. křivek $C_a x$, $C_a y$. Pravíme, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)_u$ asymptoticky, je-li identicky $a = b = c = 0$. Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ funkce třídy 1 takové, že jest identicky

(1 $$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 1.$$

Buď

(2) $$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y,\quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Ar. křivky $C_a x_1$, $C_a y_1$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)_u$ asymptoticky, když a jen když funkce λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 splňují diferenciální rovnice

(3) $$\begin{gathered} D\lambda_1 = b\lambda_1 + c\lambda_2,\quad D\lambda_2 = -a\lambda_1 - b\lambda_2, \\ D\mu_1 = b\mu_1 + c\mu_2,\quad D\mu_2 = -a\mu_1 - b\mu_2. \end{gathered}$$

Jsou-li c_1, c_2, d_1, d_2 konstanty takové, že $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 1$, lze určiti jedním a jen jedním způsobem funkce λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 tak, aby 1° rovnice (1) a (3) byly splněny identicky, 2° aby pro $u = u_0$ bylo: $\lambda_i = c_i$, $\mu_i = d_i$ $(i = 1, 2)$.

Vytvořují-li ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ ar. osnovu $R_a(xy)_u$ asymptoticky, platí totéž o ar. křivkách $C_a x_1$, $C_a y_1$, když a jen když λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 jsou konstanty.

Dle **429** (3) je třeba pouze zjistiti, že rovnice (3) jsou za předpokladu (1) ekvivalentní s rovnicemi

(4) $$\begin{gathered} (a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\,\lambda_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\,\lambda_2 = 0, \\ (a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\,\mu_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\,\mu_2 = 0; \\ (a\mu_1 + b\mu_2 + D\mu_2)\,\lambda_1 + (b\mu_1 + c\mu_2 - D\mu_1)\,\lambda_2 = 0, \\ (a\mu_1 + b\mu_2 + D\mu_2)\,\mu_1 + (b\mu_1 + c\mu_2 - D\mu_1)\,\mu_2 = 0. \end{gathered}$$

Rovnice (4) jsou však zřejmě splněny, platí-li rovnice (3). Naopak z rovnic (4) soudíme, že buď platí rovnice (3), nebo že jest $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 0$; avšak druhá možnost je ve sporu s (1). Že lze rovnicím (1) (3) jedním a jen jedním způsobem vyhověti, jsou-li dány konstanty c_1, c_2, d_1, d_2, vychází z **68**.

· **435.** Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď D její diferenciální parametr. Buďte a, b, c asymptotické funkce ar. křivek $C_a x$, $C_a y$. Buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď

(1) $$\begin{gathered} \dot{A} = DA + 2(Ab - Ba), \\ \dot{B} = DB + Ac - Ca, \\ \dot{C} = DC + 2(Bc - Cb). \end{gathered}$$

Buďte λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 funkce třídy 3 takové, že jest identicky

(2) $$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = s = \pm 1.$$

Buď

(3) $$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y,\quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Buďte a_1, b_1, c_1 asymptotické funkce ar. křivek $C_a x_1$, $C_a y$. Buď

(4) $$t_1 = \lambda_1 t_1^* + \mu_1 t_2^*, \quad t_2 = \lambda_2 t_1^* + \mu_2 t_2^*,$$

takže jest identicky

(5) $$t_1 x + t_2 y = t_1^* x_1 + t_2^* y_1.$$

Buď

(6) $$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= DA_1 + 2(A_1 b_1 - B_1 a_1), \\ \dot{B}_1 &= DB_1 + A_1 c_1 - C_1 a_1, \\ \dot{C}_1 &= DC_1 + 2(B_1 c_1 - C_1 b_1). \end{aligned}$$

Pak jest identicky

(7) $$\dot{A}_1 t_1^{*2} + 2\dot{B}_1 t_1^* t_2^* + \dot{C}_1 t_2^{*2} = s(\dot{A} t_1^2 + 2\dot{B} t_1 t_2 + \dot{C} t_2^2).$$

Je-li $r \geqq 5$, buď

(8) $$\begin{aligned} \ddot{A} &= D\dot{A} + 2(\dot{A} b - \dot{B} a), \\ \ddot{B} &= D\dot{B} + \dot{A} c - \dot{C} a, \\ \ddot{C} &= D\dot{C} + 2(\dot{B} c - \dot{C} b), \end{aligned}$$

(9) $$\begin{aligned} \ddot{A}_1 &= D\dot{A}_1 + 2(\dot{A}_1 b_1 - \dot{B}_1 a_1), \\ \ddot{B}_1 &= D\dot{B}_1 + \dot{A}_1 c_1 - \dot{C}_1 a_1, \\ \ddot{C}_1 &= D\dot{C}_1 + 2(\dot{B}_1 c_1 - \dot{C}_1 b_1). \end{aligned}$$

Pak jest identicky

(10) $$\ddot{A}_1 t_1^{*2} + 2\ddot{B}_1 t_1^* t_2^* + \ddot{C}_1 t_2^{*2} = s(\ddot{A} t_1^2 + 2\ddot{B} t_1 + \ddot{C} t_2^2).$$

Forma

(11) $$\dot{f}(t_1, t_2) = \dot{A} t_1^2 + 2\dot{B} t_1 + t_2 \dot{C} t_2^2,$$

nazývá se (prvá) asymptotická derivace fleknodální formy $f(t_1, t_2)$. Forma

$$\ddot{f}(t_1, t_2) = \ddot{A} t_1^2 + 2\ddot{B} t_1 t_2 + \ddot{C} t_2^2,$$

nazývá se druhá asymptotická derivace fleknodální formy $f(t_1, t_2)$. Změníme-li orientaci ar. osnovy $R_a(xy)_u$, přejde $\dot{f}(t_1, t_2)$ v $-\dot{f}(t_1, t_2)$; $\ddot{f}(t_1, t_2)$ se nemění.

Určeme l_1, l_2, m_1, m_2 jako funkce u tak, aby bylo 1⁰

(13) $$l_1 m_2 - l_2 m_1 = s,$$

2⁰ aby platily diferenciální rovnice

(14) $$\begin{aligned} Dl_1 &= bl_1 + cl_2, \quad Dl_2 = -al_1 - bl_2, \\ Dm_1 &= bm_1 + cm_2, \quad Dm_2 = -am_1 - bm_2 \end{aligned}$$

a položme

(15) $$\bar{x} = l_1 x + l_2 y,\quad \bar{y} = m_1 x + m_2 y.$$

Položme dále

(16) $$t_1 = l_1 \bar{t}_1 + m_1 \bar{t}_2,\quad t_2 = l_2 \bar{t}_1 + m_2 \bar{t}_2,$$

takže jest identicky $t_1 x + t_2 y = \bar{t}_1 \bar{x} + \bar{t}_2 \bar{y}$, a považujme t_1, t_2 (tedy dle (4) též t_1^*, t_2^*) za funkce tří neodvisle proměnných $u, \bar{t}_1, \bar{t}_2$. Položme za tohoto předpokladu

$$\Delta\varphi(u, \bar{t}_1, \bar{t}_2) = \frac{1}{\sqrt{\left|\left(xy\dfrac{dx}{du}\dfrac{dy}{du}\right)\right|}}\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

takže zejména, když φ je funkcí jediné proměnné u, jest $\Delta\varphi = D\varphi$, na př. $\Delta A = DA$, $\Delta A_1 = DA_1$, kdežto $\Delta\bar{t}_1 = \Delta\bar{t}_2 = 0$. Dle (14) a (16) jest

(17) $$\Delta t_1 = bt_1 + ct_2,\quad \Delta t_2 = -at_1 - bt_2.$$

Dle (4) a (16) můžeme položiti

(18) $$t_1^* = l_1^* \bar{t}_1 + m_1^* \bar{t}_2,\quad t_2^* = l_2^* \bar{t}_1 + m_2^* \bar{t}_2;$$

dle (2) a (9) bude

(19) $$l_1^* m_2^* - l_2^* m_1^* = 1.$$

Ze (13) a (14) vychází dle **434**, že ar. křivky $C_a\bar{x}$, $C_a\bar{y}$ vytvořují ar. osnovu $R_a(\bar{x}\bar{y})_u = R_a(x_1y_1)_u$ asymptoticky. Dle (18), (19) a **434** je tedy

(20) $$\begin{aligned} Dl_1^* &= b_1 l_1^* + c_1 l_2^*, & Dl_2^* &= -a_1 l_1^* - b_1 l_2^*,\\ Dm_1^* &= b_1 m_1^* + c_1 m_2^*, & Dm_2^* &= -a_1 m_1^* - b_1 m_2^*. \end{aligned}$$

Z (18) a (20) následuje

(21) $$\Delta t_1^* = b_1 t_1^* + c_1 t_2^*,\quad \Delta t_2^* = -a_1 t_1^* - b_1 t_2^*.$$

Užijeme-li operace Δ na identitu **430** (7), obdržíme dle (1), (17) a (21) formuli (7). Užijeme-li na tuto formuli znovu operace Δ, obdržíme (10).

436. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená osnova virtuální třídy $r \geqq 3$; buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ její fleknodální forma. Hodnota výrazu g_1 pro dané u, kde

(1) $$g_1 = B^2 - AC,$$

jest ar. osnovou $R_a(xy)_u$ a ar. přímkou $(xy)_u$ úplně určena; pravíme, že g_1 je prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Je-li $r \geqq 4$, buď $\dot{f}(t_1, t_2) = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2$ asymptotická derivace fleknodální formy $f(t_1, t_2)$. Jest

(2) $$-Dg_1 = A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B}.$$

Buď

(3) $$g_2 = \dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}.$$

Hodnota výrazu g_2 pro dané u jest ar. osnovou $R_a(xy)_u$ a ar. přímkou $(xy)_u$ úplně určena; pravíme, že g_2 jest druhý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Je-li $r \geqq 5$, buď $\ddot{f}(t_1, t_2) = \ddot{A}t_1^2 + 2\ddot{B}t_1t_2 + \ddot{C}t_2^2$ druhá asymptotická derivace fleknodální formy $f(t_1, t_2)$. Buď

(4) $$g_3 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{C} \end{vmatrix}.$$

Hodnota výrazu g_3 pro dané u jest orientovanou ar. osnovou $R_a(xy)_u$ a ar. přímkou $(xy)_u$ úplně určena; pravíme, že g_3 je třetí unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Změníme-li orientaci ar. osnovy $R_a(xy)_u$, přejde g_3 v $-g_3$. Prvý, druhý, třetí unimodulární invariant ar. osnovy $R_a-(xy)_u$ jsou rovněž g_1, g_2, g_3.

Vychází snadno ze **75** (4), **76** (4), **79** (3), **430** (7) a **435** (7), (10).

437. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 3$; buď D její diferenciální parametr. Buď $x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$ v ar. přímce $(xy)_u$. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}_u$. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x$, $C_a y$. Buď

(1) $$j = \frac{\omega}{4} S(DxD^2\eta - D\eta D^2x - DyD^2\xi + D\xi D^2y) - 3(ac - b^2).$$

Hodnota výrazu j pro dané u jest ar. osnovou $R_a(xy)_u$ a ar. přímkou $(xy)_u$ úplně určena. Pravíme, že j je čtvrtý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Čtvrtý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a-(xy)_u$ jest rovněž j.

Buďte λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 funkce třídy 2 takové, že jest identicky

(2) $$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = s = \pm 1.$$

Buď

$$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Buď

$$\xi_1 = s(\lambda_1\xi + \lambda_2\eta), \quad \eta_1 = s(\mu_1\xi + \mu_2\eta).$$

Máme ukázati (v. **429**), že

(3) $$\begin{aligned} &S(DxD^2\eta - D\eta D^2x - DyD^2\xi + D\xi D^2y) - 12\omega(ac - b^2) = \\ &= S(Dx_1D^2\eta_1 - D\eta_1D^2x_1 - Dy_1D^2\xi_1 + D\xi_1D^2y_1) - 12\omega(a_1c_1 - b_1^2). \end{aligned}$$

Snadným počtem se obdrží (v. **430**), že

$$
(4)\quad \begin{aligned}
&S(Dx_1 D^2\eta_1 - D\eta_1 D^2 x_1 - Dy_1 D^2\xi_1 + D\xi_1 D^2 y_1) = \\
&= S(Dx D^2\eta - D\eta D^2 x - Dy D^2\xi + D\xi D^2 y) - \\
&- 2\omega s\,[6(\lambda_1 D\mu_1 - \mu_1 D\lambda_1)\,a + 6(\lambda_1 D\mu_2 - \mu_2 D\lambda_1 + \lambda_2 D\mu_1 - \mu_1 D\lambda_2)\,b + \\
&+ 6(\lambda_2 D\mu_2 - \mu_2 D\lambda_2)\,c + \lambda_1 D^2\mu_2 + \mu_2 D^2\lambda_1 - \lambda_2 D^2\mu_1 - \mu_1 D^2\lambda_2 - 4D\lambda_1 D\mu_2 + 4D\mu_1 D\lambda_2].
\end{aligned}
$$

Dále jest dle **429** (3)

$$
\begin{aligned}
&a_1 c_1 - b_1^2 = \\
&= \begin{vmatrix} (a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\,\lambda_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\,\lambda_2, & (a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\,\mu_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\,\mu_2 \\ (a\mu_1 + b\mu_2 + D\mu_2)\,\lambda_1 + (b\mu_1 + c\mu_2 - D\mu_2)\,\lambda_1, & (a\mu_1 + b\mu_2 + D\mu_2)\,\mu_1 + (b\mu_1 + c\mu_2 - D\mu_1)\,\mu_2 \end{vmatrix} = \\
&= s \begin{vmatrix} a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2, & b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1 \\ a\mu_1 + b\mu_2 + D\mu_2, & b\mu_1 + c\mu_2 - D\mu_1 \end{vmatrix} = \\
&= s^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} - s(a\lambda_1 + b\lambda_2)\,D\mu_1 - s(b\lambda_1 + c\lambda_2)\,D\mu_2 + \\
&+ s(a\mu_1 + b\mu_2)\,D\lambda_1 + s(b\mu_1 + c\mu_2)\,D\lambda_2 + s(D\lambda_1 D\mu_2 - D\lambda_2 D\mu_1),
\end{aligned}
$$

čili

$$
(5)\quad \begin{aligned}
a_1 c_1 - b_1^2 = ac - b^2 &+ s(\mu_1 D\lambda_1 - \lambda_1 D\mu_1)\,a + s(\mu_2 D\lambda_1 - \lambda_1 D\mu_2 + \mu_1 D\lambda_2 - \lambda_2 D\mu_1)\,b + \\
&+ s(\mu_2 D\lambda_2 - \lambda_2 D\mu_2)\,c + s(D\lambda_1 D\mu_2 - D\mu_1 D\lambda_2).
\end{aligned}
$$

Derivujeme-li však dvakráte rovnici (2), obdržíme

$$
(6)\quad \lambda_1 D^2\mu_2 + \mu_2 D^2\lambda_1 - \lambda_2 D^2\mu_1 - \mu_1 D^2\lambda_2 + 2D\lambda_1 D\mu_2 - 2D\mu_1 D\lambda_2 = 0.
$$

Ze (4), (5) a (6) vychází (3). Jiný důkaz podáme ve **439**.

438. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 3$; buď D její diferenciální parametr. Buď $x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v Chaslesově korespondenci. Nechť ar. body $\dot{x}$, $\dot{y}$ (ar. roviny $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$) vzniknou z ar. bodů x, y (z ar. rovin ξ, η) asymptotickým derivováním. Buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)$; buď j čtvrtý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x$, $C_a y$. Platí rovnice

$$
(1)\quad Dx = -bx + ay + \dot{x}, \quad Dy = -cx + by + \dot{y},
$$

$$
(2)\quad D\dot{x} = -(B + j)\,x + Ay - b\dot{x} + a\dot{y}, \quad D\dot{y} = -Cx + (B - j)\,y - c\dot{x} + b\dot{y};
$$

$$
(3)\quad D\xi = -b\xi + a\eta + \dot{\xi}, \quad D\eta = -c\xi + b\eta + \dot{\eta},
$$

$$
(4)\quad D\dot{\xi} = (B - j)\,\xi - A\eta - b\dot{\xi} + a\dot{\eta}, \quad D\dot{\eta} = C\xi - (B + j)\,\eta - c\dot{\xi} + b\dot{\eta}.
$$

Rovnice (1) jsou zřejmé z definice ar. bodů $\dot{x}$, $\dot{y}$; podobně rovnice (3) Rovnice (2) jsou zřejmě ekvivalentní s rovnicemi

$$
(5)\quad \begin{aligned}
D^2 x &= -2b\,Dx + 2a\,Dy + (ac - b^2 - Db - B - j)\,x + (Da + A)\,y, \\
D^2 y &= -2c\,Dx + 2b\,Dy - (Dc + C)\,x + (ac - b^2 + Db + B - j)\,y.
\end{aligned}
$$

Abychom dokázali rovnice (5), uvažme, že ar. body x, y, Dx, Dy, jsou lin. nezávislé (v. **422** (2)), takže lze určiti p_{11}, $p_{12} \dots q_{22}$, tak, aby bylo

$$(6)\qquad \begin{aligned} D^2x &= p_{11}Dx + p_{12}Dy + q_{11}x + q_{12}y, \\ D^2y &= p_{21}Dx + p_{22}Dy + q_{21}x + q_{22}y. \end{aligned}$$

Počítáme-li ze (6) $S\xi D^2x$, $S\xi D^2y$, $S\eta D^2x$, $S\eta D^2y$, obdržíme dle **424** (3), (4) a **427** (2)

$$(7)\qquad p_{11} = -2b,\ p_{12} = 2a,\ p_{21} = -2c,\ p_{22} = 2b.$$

Derivujíce rovnice **427** (1), obdržíme

$$\begin{aligned} &-2\omega Da = S(DxD^2\xi + D\xi D^2x),\ -2\omega Dc = S(DyD^2\eta + D\eta D^2y), \\ &-2\omega Db = S(DxD^2\eta + D\eta D^2x) = S(DyD^2\xi + D\xi D^2y). \end{aligned}$$

Odtud, ze **430** (1) a **437** (1) vychází

$$(8)\qquad \begin{aligned} &SD\xi D^2x = -\omega(Da + A),\ SD\eta D^2x = -\omega(Db + B + j) - 3\omega(ac - b^2), \\ &SD\xi D^2y = -\omega(Db + B - j) + 3\omega(ac - b^2),\ SDyD^2\eta = -\omega(Dc + C). \end{aligned}$$

Počítáme-li ze (6) výrazy $SD\xi D^2x$, $SD\xi D^2y$, $SD\eta D^2x$, $SD\eta D^2y$, obdržíme dle (8), **424** (7) a **427** (1)

$$\begin{aligned} &-\omega(Da + A) = -2\omega ap_{11} - 2\omega bp_{12} - \omega q_{12}, \\ &-\omega(Db + B - j) + 3\omega(ac - b^2) = -2\omega ap_{21} - 2\omega bp_{22} - \omega q_{22}, \\ &-\omega(Db + B + j) - 3\omega(ac - b^2) = -2\omega bp_{11} - 2\omega cp_{12} + \omega q_{11}, \\ &-\omega(Dc + C) = -2\omega bp_{21} - 2\omega cp_{22} + \omega q_{21}. \end{aligned}$$

Odtud a ze (7) plyne

$$(9)\qquad \begin{aligned} &q_{11} = ac - b^2 - Dc - B - j,\ q_{12} = Da + A, \\ &q_{21} = -Dc - C,\ q_{22} = ac - b^2 + Db + B - j. \end{aligned}$$

Ze (6), (7) a (9) vychází (5). Rovnice (3), (4) plynou z (1), (2) dle **69** neboť duální jehlan $\omega\dot{\eta}$, $-\omega\dot{\xi}$, $-\omega\eta$, $\omega\xi$ je dle **433** adjungován k $x, y, \dot{x}, \dot{y}$,

439. Jsme nyní s to podati nový důkaz rovnic **430** (7) a **437** (3). Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená osnova virtuální třídy 3; buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_ax(u)$, $C_ay(u)$; definujme A, B, C, j jako ve **430** (1) a **437** (1). Buďte λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 funkce třídy 2 takové, že jest identicky

$$(1)\qquad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = s = \pm 1;$$

buď

$$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y,\ y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Mějte a_1, b_1, c_1; A_1, B_1, C_1; j_1 týž význam vzhledem k C_ax_1, C_ay_1, jako a, b, c; A, B, C; j vzhledem k C_ax, C_ay. Buďte $t_1x + t_2y$, $\tau_1x + \tau_2y$ dva ar. body incidentní s (xy). Buď

$$(2)\qquad \begin{aligned} t_1 &= \lambda_1 t_1^* + \mu_1 t_2^*, \quad t_2 = \lambda_2 t_1^* + \mu_2 t_2^*, \\ \tau_1 &= \lambda_1 \tau_1^* + \mu_1 \tau_2^*, \quad \tau_2 = \lambda_2 \tau_1^* + \mu_2 \tau_2^*, \end{aligned}$$

takže jest

$$t_1 x + t_2 y = t_1^* x_1 + t_2^* y_1, \quad \tau_1 x + \tau_2 y = \tau_1^* x_1 + \tau_2^* y_1.$$

Dokážeme, že jest identicky

$$(3)\qquad \begin{aligned} &A_1 t_1^* \tau_1^* + (B_1 + j_1) t_1^* \tau_2^* + (B_1 - j_1) t_2^* \tau_1^* + C_1 t_2^* \tau_2^* = \\ &= s\,[A t_1 \tau_1 + (B + j) t_1 \tau_2 + (B - j) t_2 \tau_1 + C t_2 \tau_2]. \end{aligned}$$

Abychom obdrželi **430** (7), stačí ve (3) položiti $t_i = \tau_i$, $t^*_i = \tau^*_i$ $(i = 1, 2)$. Jestliže pak ve (3) vyměníme písmena t a τ, a tak vzniklou identitu odečteme od (3), obdržíme

$$(t_1^* \tau_2^* - t_2^* \tau_1^*) j_1 = s\,(t_1 \tau_2 - t_2 \tau_1)\,j.$$

Z (1) a (2) však plyne

$$t_1^* \tau_2^* - t_2^* \tau_1^* = s\,(t_1 \tau_2 - t_2 \tau_1),$$

takže vychází $j_1 = j$, jak bylo přímým počtem ukázáno ve **437.**

Rovnice (3) dokážeme takto: Buď $x \sim \xi$, $y \sim \eta$, $x_1 \sim \xi_1$, $y_1 \sim \eta_1$, v Chaslesově korespondenci. Nechť $\dot{x}$, $\dot{y}$ $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ vzniknou z x, y (ξ, η) asymptotickým derivováním vzhledem k $C_a x$, $C_a y$; stejně nechť vzniknou $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ $(\ddot{\xi}, \ddot{\eta})$ z $\dot{x}$, $\dot{y}$ $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$. Dle **432** a **438** (2), (4) jest

$$(4)\qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -(B + j)\,x + A y, \quad \dot{y} = -C x + (B - j)\,y, \\ \dot{\xi} &= (B - j)\,\xi - A\eta, \quad \dot{\eta} = C\xi - (B + j)\,\eta. \end{aligned}$$

Nechť $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $(\dot{\xi}_1, \dot{\eta}_1)$ vzniknou z x_1, y_1 (ξ_1, η_1) asymptotickým derivováním vzhledem k $C_a x_1$, $C_a y_1$; stejně nechť vzniknou $\ddot{x}_1$, $\ddot{y}_1$ $(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}_1)$ z $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$ $(\dot{\xi}_1, \dot{\eta}_1)$. Z týchž důvodů jako (4) platí rovnice

$$(5)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(B_1 + j_1)\,x_1 + A_1 y_1, \quad \dot{y}_1 = -C_1 x_1 + (B_1 - j_1)\,y_1, \\ \dot{\xi}_1 &= (B_1 - j_1)\,\xi_1 - A_1 \eta_1, \quad \dot{\eta}_1 = C_1 \xi_1 - (B_1 + j_1)\,\eta_1. \end{aligned}$$

Ježto (v. **429** (5))

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y, \\ \xi_1 &= s\,(\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta), \quad \eta_1 = s\,(\mu_1 \xi + \mu_2 \eta), \end{aligned}$$

jest dle **432** (6)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y}, \quad \dot{y}_1 = \mu_1 \dot{x} + \mu_2 \dot{y}, \\ \dot{\xi}_1 &= s\,(\lambda_1 \dot{\xi} + \lambda_2 \dot{\eta}), \quad \dot{\eta}_1 = s\,(\mu_1 \dot{\xi} + \mu_2 \dot{\eta}; \\ \ddot{x}_1 &= \lambda_1 \ddot{x} + \lambda_2 \ddot{y}, \quad \ddot{y}_1 = \mu_1 \ddot{x} + \mu_2 \ddot{y}, \\ \ddot{\xi}_1 &= s\,(\lambda_1 \ddot{\xi} + \lambda_2 \ddot{\eta}), \quad \ddot{\eta}_1 = s\,(\mu_1 \ddot{\xi} + \mu_2 \ddot{\eta}), \end{aligned}$$

akže dle (2)

$$\begin{aligned} t_1^* \dot{x}_1 + t_2^* \dot{y}_1 &= t_1 \dot{x} + t_2 \dot{y}, \quad \tau_1^* \dot{\xi}_1 + \tau_2^* \dot{\eta}_1 = s\,(\tau_1 \dot{\xi} + \tau_2 \dot{\eta}), \\ t_1^* \ddot{x}_1 + t_2^* \ddot{y}_1 &= t_1 \ddot{x} + t_2 \ddot{y}, \quad \tau_1^* \ddot{\xi}_1 + \tau_2^* \ddot{\eta}_1 = s\,(\tau_1 \ddot{\xi} + \tau_2 \ddot{\eta}), \end{aligned}$$

tedy též

$$S[(t_1{}^*\dot{x}_1 + t_2{}^*\dot{y}_1)(\tau_1{}^*\ddot{\xi}_1 + \tau_2{}^*\ddot{\eta}_1) - (t_1{}^*\ddot{x}_1 + t_2{}^*\ddot{y}_1)(\tau_1{}^*\dot{\xi}_1 + \tau_2{}^*\dot{\eta}_1)] = \tag{6}$$
$$= s\,S[(t_1\dot{x} + t_2\dot{y})(\tau_1\ddot{\xi} + \tau_2\ddot{\eta}) - (t_1\ddot{x} + t_2\ddot{y})(\tau_1\dot{\xi} + \tau_2\dot{\eta})].$$

Pravá strana rovnice (6) dá se uvésti dle (4) a **433** (1) na tvar

$$2s\omega\,[At_1\tau_1 + (B + j)\,t_1\tau_2 + (B - j)\,t_2\tau_1 + Ct_2\tau_2];$$

pro levou stranu vychází podobně dle (5)

$$2\omega\,[A_1t_1{}^*\tau_1{}^* + (B_1 + j_1)\,t_1{}^*\tau_2{}^* + (B_1 - j_1)\,t_2{}^*\tau_1{}^* + C_1t_2{}^*\tau_2{}^*].$$

Je tedy rovnice (6) ekvivalentní s žádanou rovnicí (3).

Oskulační regulus, lin. kongruence a lin. komplex.

440. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 2$. Nechť ar. body $\dot{x}$, $\dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Zvolme libovolně u. Buď $\overset{u}{R}_2$ regulus obsažený v

$$\{(xy),\ (x\dot{y}) - (y\dot{x}),\ (\dot{x}\dot{y})\}. \tag{1}$$

Regulus $\overset{u}{R}_2$ — a žádný jiný regulus — má s osnovou $R\{xy\}$ trojpřímkový styk v přímce $\{xy\}_u$. Pravíme, že $\overset{u}{R}_2$ jest oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Kvadrika $M\overset{u}{R}_2$ nazývá se oskulační kvadrika osnovy $R(xy)$ v přímce $\{xy\}_u$.

Stačí provésti důkaz za předpokladu $r \geqq 3$. Dle **438** (1), (2) jest

$$\begin{aligned} D(xy) &= (x\dot{y}) - (y\dot{x}), \\ D^2(xy) &= 2\,[(\dot{x}\dot{y}) - J(xy)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Dle **209** (2) je pouze třeba ukázati, že regulus $\overset{u}{R}_2$ jest obsažen v $\{(xy),$ $D(xy),\ D^2(xy)\}$, což je dle (2) zřejmé.

441. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 2$. Buď $x \backsim \xi$, $y \backsim \eta$ v Chaslesově korespondenci. Buď $M\overset{u}{R}_2$ oskulační kvadrika osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď z libovolný vlastní ar. bod; buď

$$z = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 \frac{dx}{du} + \lambda_4 \frac{dy}{du}. \tag{1}$$

Buď

$$\zeta = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \frac{d\xi}{du} + \lambda_4 \frac{d\eta}{du}. \tag{2}$$

Pak $\{\zeta\}$ je polární rovina bodu $\{z\}$ vzhledem k $M\overset{u}{R}_2$.

Nechť $\dot{x}$, $\dot{y}$ $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ vzniknou z x, y (ξ, η) asymptotickým derivováním. Je-li

$$z = \mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 \dot{x} + \mu_4 \dot{y},$$

jest dle **438** (1), (3)

$$\zeta = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \dot{\xi} + \mu_4 \dot{\eta}.$$

Dle **433** (1) jest (v. **48**)

$$[\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}; z] = \omega\zeta,$$

takže $\{\zeta\}$ jest polární rovinou bodu $\{z\}$ vzhledem ke kvadrice $M[\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}]$. Avšak dle **440** a **130** jest $M[\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}] = M\overset{u}{R}_2$, neboť dle **433** (1) k jehlanu x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ jest adjungován duální jehlan $\omega\dot{\eta}$, $-\omega\dot{\zeta}$, $-\omega\eta$, $\omega\xi$.

442. Buď $R_a(xy)_u$ zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 3$. Buď $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď $\overset{u}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Osnova $R\{xy\}$ a regulus $\overset{u_0}{R}_2$ mají čtyřpřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$, když a jen když

$$A(u_0) = B(u_0) = C(u_0) = 0. \tag{1}$$

Když a jen když jest pro každé u: $A = B = C = 0$, jest osnova $R\{xy\}$ obsažena v pevném regulu. Když pro žádné u neplatí současně všecky tři rovnice $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, pravíme, že osnova $R\{xy\}$ i ar. osnova $R_a(xy)$ jsou regulární*).

Dle **438** a **440** (2) jest**)

$$\tfrac{1}{3} D^3(xy) = A(y\dot{y}) - B[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + C(x\dot{x}) - 2jD(xy) - Dj\,.\,(xy). \tag{2}$$

Dle **209** (2) a **440** máme ukázati, že pro $u = u_0$ $D^3(xy)$ náleží do $\{(xy), D(xy), D^2(xy)\}$, když a jen když platí (1). To však vychází ihned ze (2) a **440** (2), neboť ar. komplexy

$$(xy),\ (x\dot{y}) - (y\dot{x}),\ (\dot{x}\dot{y}),\ (x\dot{x}),\ (x\dot{y}) + (y\dot{x}),\ (y\dot{y})$$

jsou dle **106** (1) a **433** (2) lin. nezávislé.

Je-li osnova $R\{xy\}$ obsažena v pevném regulu R_2, je zřejmě $R_2 = \overset{u}{R}_2$ pro každé u, tedy $R\{xy\}$ a R_2 mají čtyřpřímkový styk v $\{xy\}_u$ pro každé u, takže jest identicky $A = B = C = 0$.

Buď identicky $A = B = C = 0$. Dle **438** jest

$$D(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = 0,$$

---

*) Mluvíme krátce o regulární (ar.) osnově místo o regulární zborcené (ar.) osnově.

**) Rovnice (2) má smysl jen, když $r \geqq 4$. To není však na újmu obecnosti důkazu.

takže rovinová forma $\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}$ je pevná. Ve **441** jsme si však všimli, že $\overset{u}{M\dot{R}_2} = M[\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}]$. Tedy kvadrika $\overset{u}{MR_2}$ je pevná. Odtud snadno vychází, že regulus $\overset{u}{R_2}$ je pevný. Zřejmě však osnova $R\{xy\}$ jest obsažena v $\overset{u}{R_2}$.

443. Buď $R_a(xy)_u$ regulární ar. osnova třídy $r \geqq 3$. Buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ její fleknodální forma; buď $g_1 = B^2 - AC$ její prvý unimodulární invariant. Bod $\{t_1x + t_2y\}$ řady bodové soumístné s přímkou $\{xy\}_u$ nazývá se fleknod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$, když $f(t_1, t_2) = 0$. Je-li pro dané u $1^0 g_1 > 0$, $2^0 g_1 = 0$, $3^0 g_1 < 0$, počet fleknodů osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ jest $1^0: 2$, $2^0: 1$, $3^0: 0$. Buď $\overset{u}{R_2}$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $\overset{u}{R'_2}$ komplementární regulus k $\overset{u}{R_2}$. Je-li $\{t_1x + t_2y\}$ fleknod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$, nazýváme přímku $\{q\}$ regulu $\overset{u}{R'_2}$ incidentní s $\{t_1x + t_2y\}$ fleknodální tečnou osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Vzniknou-li ar. body $\dot{x}$, $\dot{y}$ asymptotickým derivováním z x, y, jest

$$\{q\} = \{t_1x + t_2y,\ t_1\dot{x} + t_2\dot{y}\}. \tag{1}$$

Přímková plocha $MR\{xy\}$ a kvadrika $\overset{u}{MR_2}$ mají v bodě $\{t_1x + t_2y\}$ čtyřbodový styk, když a jen když $\{t_1x + t_2y\}$ jest fleknod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $\{t_1x + t_2y\}$ fleknod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$: přímková plocha $MR\{xy\}$ a kvadrika $\overset{u}{MR_2}$ mají v bodě $\{t_1x + t_2y\}$ pětibodový styk, když a jen když pro příslušné u jest $g_1 = Dg_1 = 0$.

Rovnice (1) vychází ihned ze **128** a **440**.

Při studiu styku přímkové plochy $MR\{xy\}$ a kvadriky $\overset{u_0}{MR_2}$ v bodě $\{t_1x(u_0) + t_2y(u_0)\}$ můžeme — jak snadno vychází ze **430**, **434** a **436** — bez újmy obecnosti učiniti tyto předpoklady: 1^0 $t_1 = t$, $t_2 = 0$, 2^0 ar. křivky C_ax, C_ay vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky, takže $A(u_0) = 0$, když a jen když bod $\{x(u_0)\}$ je fleknod osnovy $R\{xy\}$ a dle **438** (1),, (2) jest

$$D^2x = -(B + j)x + Ay, \quad D^2y = -Cx + (B - j)y. \tag{2}$$

Je-li $A(u_0) = 0$, jest $g_1(u_0) = [B(u_0)]^2$, $-\frac{1}{2}(Dg_1)_{u=u_0} = C(u_0)(DA)_{u=u_0} - 2B(u_0)(DB)_{u=u_0}$. Rovnice $g_1(u_0) = (Dg_1)_{u=u_0}$ jsou tedy pak splněny, když také $B(u_0) = (DA)_{u=u_0} = 0$. Obráceně, když $A(u_0) = g_1(u_0) = (Dg_1)_{u=u_0} = 0$, jest $B(u_0) = (DA)_{u=u_0} = 0$, neboť jinak by bylo $A(u_0) = B(u_0) = C(u_0) = 0$, t. j. osnova $R\{xy\}$ nebyla by regulární. Je-li V okolí ar. bodu $|u_0, 0|_b$, splyne patrně $MR\{xy\}$ v okolí bodu $\{x(u_0)\}$ s plochou $Mz(u, v)$ ($|u, v|_b$ ve V), kde

$$z(u, v) = x + vy. \tag{3}$$

Klademe-li $\xi_0=\xi(u_0)$, $\eta_0=\eta(u_0)$, $\dot{\xi}_0=\dot{\xi}(u_0)=(D\xi)_{u=u_0}$, $\dot{\eta}_0=\dot{\eta}(u_0)=$ $=(D\eta)_{u=u_0}$ jest, jak jsme ve **441** viděli, $\overset{u_0}{MR_2}=M[\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0]$, takže dle **293** přímková plocha $MR\{xy\}$ a kvadrika $\overset{u_0}{MR_2}$ mají v bodě $\{x(u_0)\}$ s-bodový styk, když a jen když rovinová forma $\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0$ a plocha $M\{z\}$ mají v $\{x(u_0)\}$ s-bodový styk, tedy dle **256** (1), když a jen když

$$\left[\frac{\partial^\sigma}{\partial u^{s_1}\partial v^{s_2}}(Sz\xi_0\,.\,Sz\dot{\eta}_0-Sz\eta_0\,.\,Sz\dot{\xi}_0)\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}=0. \tag{4}$$

$$\left(0\leqq s_1+s_2=\sigma\leqq s-1;\ \frac{\partial^0}{\partial u^0}=\frac{\partial^0}{\partial v^0}=1\right)$$

Ze (3) je zřejmé, že ty rovnice (4), v nichž $\sigma_2\geqq 3$, jsou vždy splněny. Nastane tedy s-bodový ($s\geqq 3$) styk, když a jen když

$$\left[\frac{\partial^\sigma}{\partial u^\sigma}(Sz\xi_0\,.\,Sz\dot{\eta}_0-Sz\eta_0\,.\,Sz\dot{\xi}_0)\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}=0,\qquad (0\leqq\sigma\leqq s-1)$$

$$\left[\frac{\partial^\sigma}{\partial u^\sigma}\frac{\partial}{\partial v}(Sz\xi_0\,.\,Sz\dot{\eta}_0-Sz\eta_0\,.\,Sz\dot{\xi}_0)\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}=0,\qquad (0\leqq\sigma\leqq s-2)$$

$$\left[\frac{\partial^\sigma}{\partial u^\sigma}\frac{\partial^2}{\partial v^2}(Sz\xi_0\,.\,Sz\dot{\eta}_0-Sz\eta_0\,.\,Sz\dot{\xi}_0)\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}=0,\qquad (0\leqq\sigma\leqq s-3)$$

což snadno upravíme (v. (3)) na tvar

$$[D^\sigma Sy(\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0)]_{u=u_0}=0,\qquad (0\leqq\sigma\leqq s-3) \tag{5}$$

$$[D^\sigma(Sx\xi_0\,Sy\dot{\eta}_0+Sy\xi_0\,Sx\dot{\eta}_0-Sx\eta_0\,Sy\dot{\xi}_0-Sy\eta_0\,Sx\dot{\xi}_0)]_{u=u_0}=0,\qquad (0\leqq\sigma\leqq s-2) \tag{6}$$

$$[D^\sigma Sx(\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0)]_{u=u_0}=0.\qquad (0\leqq\sigma\leqq s-1) \tag{7}$$

Ze (2) a **433** (1) je patrné, že rovnice (5), (6), (7) jsou vždy splněny, když $\sigma=0$, 1, 2. Odtud vychází: Trojbodový styk nastane vždy. Čtyřbodový styk nastane, když a jen když je splněna též ta rovnice (7), v níž $\sigma=3$. To dává dle (2) a **433** (1) podmínku $A(u_0)=0$, v souhlasu s teorémem. Pětibodový styk nastane, když a jen když 1^0 $A(u_0)=0$, 2^0 platí ta rovnice (6), v níž $\sigma=3$, 3^0 platí ta rovnice (7), v níž $\sigma=4$. Podmínka 2^0 dává po snadném počtu $B(u_0)=0$; podmínka 3^0 dává $(DA)_{u=u_0}=0$. Jsou tedy podmínky pro pětibodový styk v souhlasu s teorémem: $A(u_0)=B(u_0)=(DA)_{u=u_0}=0$.

444. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná regulární ar. osnova třídy $r\geqq 3$; buď $At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2$ její fleknodální forma. Nechť ar. body $\dot{x}$, $\dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď $\overset{u}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $\overset{u}{R}{}'_2$ komplementární regulus k $\overset{u}{R}_2$. Buď $\overset{u}{J}_f$ involuce v regulu $\overset{u}{R}{}'_2$, v níž přímky

$$\{(\lambda_1 x + \lambda_2 y,\ \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y})\},\quad \{(\mu_1 x + \mu_2 y,\ \mu_1 \dot{x} + \mu_2 \dot{y})\} \tag{1}$$

tvoří pár, když a jen když

$$A\lambda_1\mu_1 + B(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + C\lambda_2\mu_2 = 0. \tag{2}$$

Buď $\overset{u}{L}$ lin. kongruence, určená involucí $\overset{u}{J}_f$ dle **136**. Lin. kongruence $\overset{u}{L}$ — a žádná jiná lin. kongruence — má s osnovou $R\{xy\}$ čtyřbodový styk v přímce $\{xy\}_u$. Pravíme, že $\overset{u}{L}$ jest oskulační lin. kongruence osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $g_1 = B^2 - AC$ prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R\{xy\}$. Lin. kongruence $\overset{u}{L}$ jest 1[0] hyperbolická, 2[0] parabolická, 3[0] eliptická, je-li 1[0] $g_1(u) > 0$, 2[0] $g_1(u) = 0$, 3[0] $g_1(u) < 0$. Přímka $\{q\}$ jest řídící přímkou lin. kongruence $\overset{u}{L}$, když a jen když jest fleknodální tečnou osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Buď

$$\overset{u}{S} = \{(xy),\ D(xy),\ D^2(xy),\ D^3(xy)\}.$$

Dle **442** jest $\overset{u}{S}$ lin. systém ar. komplexů dimense 3. Buď $\overset{u}{L}$ lin. kongruence obsažená v $\overset{u}{S}$. Ze **374** vychází snadno, že $\overset{u}{L}$ — a žádná jiná lin. kongruence — má s osnovou $R\{xy\}$ čtyřpřímkový styk v přímce $\{xy\}_u$. Dle **440** (2) a **442** (2) jest

$$\overset{u}{S} = \{(xy),\ (x\dot{y}) - (y\dot{x}),\ (\dot{x}\dot{y}),\ A(y\dot{y}) - B[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + C(x\dot{x})\}.$$

Buď K lin. komplex obsahující přímky (1) a regulus $\overset{u}{R}_2$, takže K jest obsažen v

$$\Sigma = \{(xy),\ (x\dot{y}) - (y\dot{x}),\ (\dot{x}\dot{y}),\ (\lambda_1 x + \lambda_2 y,\ \lambda_1\dot{x} + \lambda_2\dot{y}),\ (\mu_1 x + \mu_2 y,\ \mu_1\dot{x} + \mu_2\dot{y})\}.$$

Máme ukázati, že, je-li $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$, jest $\overset{u}{S}$ obsažen v Σ, když a jen když platí (2). Avšak $\overset{u}{S}$ jest obsažen v Σ, když a jen když ar. komplex

$$A(y\dot{y}) - B[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + C(x\dot{x}) \tag{3}$$

náleží do Σ, což zřejmě jen tak je možné, že tento ar. komplex náleží do

$$\begin{aligned}&\{(\lambda_1 x + \lambda_2 y,\ \lambda_1\dot{x} + \lambda_2\dot{y}),\ (\mu_1 x + \mu_2 y,\ \mu_1\dot{x} + \mu_2\dot{y})\} = \\ &= \{\lambda_1^2(x\dot{x}) + \lambda_1\lambda_2[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \lambda_2^2(y\dot{y}),\ \mu_1^2(x\dot{x}) + \mu_1\mu_2[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \mu_2^2(y\dot{y})\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Lin. systém (4) má zřejmě dimensi 1, takže (3) náleží do (4), t. j. do Σ, když a jen když ar. komplex (3) a oba ar. komplexy ve (4) jsou lin. závislé, tedy když a jen když

$$\begin{vmatrix} C & -B & A \\ \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 \\ \mu_1^2 & \mu_1\mu_2 & \mu_2^2 \end{vmatrix} = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\,[A\lambda_1\mu_1 + B(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) + C\lambda_2\mu_2] = 0.$$

Že fleknodální tečna osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ jest řídící přímkou lin. kongruence $\overset{u}{L}$, vychází snadno ze **136** a z definice fleknodální tečny (**443**). Můžeme to však přímým počtem verifikovati. Buď $\{q\}$, kde

$$q = (\lambda_1 x + \lambda_2 y,\ \lambda_1\dot{x} + \lambda_2\dot{y}),$$

fleknodální tečna osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$, t. j. buď

$$A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + C\lambda_2^2 = 0. \tag{5}$$

Že $\{q\}$ jest řídící přímkou lin. kongruence $\overset{u}{L}$, znamená dle **374**, že jest

$$Sq(xy) = SqD(xy) = SqD^2(xy) = SqD^3(xy) = 0.$$

Prvé tři rovnice jsou dle **440** (2) splněny, ať jakkoli zvolíme λ_1, λ_2. Naproti tomu je dle **442** (2)

$$SqD^3(xy) =$$
$$= S\{\lambda_1^2(x\dot{x}) + \lambda_1\lambda_2[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \lambda_2^2(y\dot{y})\}\{C(x\dot{x}) - B[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + A(y\dot{y})\} =$$
$$= (A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + C\lambda_2^2)(xy\dot{x}\dot{y}),$$

tedy rovno nule, když a jen když platí (4).

445. Buď $R_a\{xy\}_u$ orientovaná regulární ar. osnova třídy $r \geq 4$; buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ její fleknodální forma. Buď $\dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2$ asymptotická derivace formy $f(t_1, t_2)$. Buď $\overset{u}{L}$ oskulační lin. kongruence osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Když a jen když všecky determinanty matice

$$\begin{pmatrix} A(u_0), & B(u_0), & C(u_0) \\ \dot{A}(u_0), & \dot{B}(u_0), & \dot{C}(u_0) \end{pmatrix} \tag{1}$$

jsou rovny nule, má lin. kongruence $\overset{u}{L}$ pětipřímkový styk s osnovou $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Pravíme pak, že $\{xy\}_{u_0}$ jest pentataktická přímka osnovy $R\{xy\}$. Když a jen když osnova $R\{xy\}$ jest obsažena v pevné lin. kongruenci, jsou všecky její přímky pentataktické.

Dle **435** (1), **438** (1), (2) a **442** (2) jest

$$\tfrac{1}{2}D^4(xy) = \dot{A}(y\dot{y}) - \dot{B}[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \dot{C}(x\dot{x}) - [D^2j + 2(B^2 - AC)](xy) - \\ - 3DjD(xy) - 2jD^2(xy). \tag{2}$$

Ze **374** vychází snadno, že $\overset{u}{L}$ má s $R\{xy\}$ pětipřímkový styk v $\{xy\}_u$, když a jen když ar. komplex $D^4(xy)$ náleží do

$$\{(xy),\ D(xy),\ D^2(xy),\ D^3(xy)\}.$$

Ze (2), **440** (2) a **442** (2) je však patrné, že to nastane tehdy a jen tehdy, když ar. komplexy

$$A(y\dot{y}) - B[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + C(x\dot{x}),$$
$$\dot{A}(y\dot{y}) - \dot{B}[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \dot{C}(x\dot{x})$$

jsou lin. závislé, t. j. když jsou rovny nule všecky determinanty matice

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \end{pmatrix}.$$

Že jsou všecky přímky osnovy $R\{xy\}$ pentataktické, když osnova $R\{xy\}$ jest obsažena v pevné lin. kongruenci L, je zřejmé; vskutku L má patrně s osnovou $R\{xy\}$ pětipřímkový styk v přímce $\{xy\}_u$, ať jakkoli zvolíme u. Obráceně předpokládejme, že všecky přímky osnovy $R\{xy\}$ jsou pentataktické. Ať jakkoli zvolíme u, lze pak určiti $a_i\,(i=0,1,2,3)$ tak, že

$$D^4(xy) = a_0(xy) + a_1 D(xy) + a_2 D^2(xy) + a_3 D^3(xy).$$

Ježto osnova $R\{xy\}$ jest regulární, jsou ar. komplexy

$$(xy),\ D(xy),\ D^2(xy),\ D^3(xy)$$

lin. nezávislé pro každé u. Odtud snadno vychází, že a_0, a_1, a_2, a_3 jsou spojité funkce u (v. **186**). Existuje tedy dle **65** pevný lin. systém S ar. komplexů dimense 3 obsahující ar. komplex $(xy)_u$ pro každé u. Buď L lin. kongruence obsažená v S. Zřejmě osnova $R\{xy\}$ jest obsažena v L.

446. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná regulární ar. osnova třídy $r \geqq 4$; buď $f(t_1,t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ její fleknodální forma. Buď $\dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2$ asymptotická derivace formy $f(t_1,t_2)$. Nechť ar. body $\dot{x}, \dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Osnova $R\{xy\}$ neměj pentataktických přímek. Buď $\overset{u}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $\overset{u}{R}'_2$ regulus komplementární k $\overset{u}{R}_2$. Buď $\overset{u}{I}_k$ involuce v regulu $\overset{u}{R}'_2$, v níž přímky

(1) $$\{(\lambda_1 x + \lambda_2 y,\ \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y})\},\ \{(\mu_1 x + \mu_2 y,\ \mu_1 \dot{x} + \mu_2 \dot{y})\}$$

tvoří pár, když a jen když

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} A, & -2B, & C \\ \dot{A}, & -2\dot{B}, & \dot{C} \\ \lambda_2\mu_2, & \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1, & \lambda_1\mu_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Buď $\overset{u}{K}$ lin. komplex, určený involucí $\overset{u}{J}_h$ dle **137**. Lin. komplex $\overset{u}{K}$ — a žádný jiný lin. komplex — má s osnovou $R\{xy\}$ pětipřímkový styk v přímce $\{xy\}_u$. Pravíme, že $\overset{u}{K}$ jest oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $g_1(g_2)$ prvý (druhý) unimodulární invariant ar. osnovy $R\{xy\}$. Když a jen když pro dané u jest $4g_1g_2-(Dg_1)^2=0$, komplex $\overset{u}{K}$ je speciální; jeho řídící přímka jest pak fleknodální tečnou osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Buď $\overset{u}{K}$ lin. komplex obsažený v

$$\{(xy),\ D(xy),\ D^2(xy),\ D^3(xy),\ D^4(xy)\},$$

tedy dle **440** (2), **442** (2) a **445** (2) v

$$(3)\qquad \begin{aligned} S=\{&(xy),\ (x\dot{y})-(y\dot{x}),\ (\dot{x}\dot{y}),\ A(y\dot{y})-B[(x\dot{y})+(y\dot{x})]+C(x\dot{x}),\\ &\dot{A}(y\dot{y})-\dot{B}[(x\dot{y})+(y\dot{x})]+\dot{C}(x\dot{x})\}. \end{aligned}$$

Ze **374** vychází snadno, že lin. komplex $\overset{u}{K}$ — a žádný jiný lin. komplex — má s osnovou $R\{xy\}$ pětipřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Dle **137** máme ukázati, že, jsou-li přímky (1) různé, jsou konjugovány v $\overset{u}{K}$, když a jen když platí (2). Dle **135** jsou však přímky (1) konjugovány v K, když a jen když existuje vlastní ar. bod $|\alpha,\beta|_b$ takový, že

$$\{\alpha(\lambda_1x+\lambda_2y,\ \lambda_1\dot{x}+\lambda_2\dot{y})+\beta(\mu_1x+\mu_2y,\ \mu_1\dot{x}+\mu_2\dot{y})\}=\mathrm{Adj}.\ S,$$

t. j. že, kdykoli ar. komplex q náleží do S, jest

$$(4)\qquad \alpha Sq(\lambda_1x+\lambda_2y,\ \lambda_1\dot{x}+\lambda_2\dot{y})+\beta Sq(\mu_1x+\mu_2y,\ \mu_1\dot{x}+\mu_2\dot{y})=0.$$

Rovnice (4) je však splněna identicky v α,β, dosadíme-li za q některý z prvých tří ar. komplexů na pravo ve (3). Dosadíme-li čtvrtý a pátý ar. komplex ze (3), obdržíme resp.

$$\alpha(A\lambda_1^2+2B\lambda_1\lambda_2+C\lambda_2^2)+\beta(A\mu_1^2+2B\mu_1\mu_2+C\mu_2^2)=0,$$
$$\alpha(\dot{A}\lambda_1^2+2\dot{B}\lambda_1\lambda_2+\dot{C}\lambda_2^2)+\beta(\dot{A}\mu_1^2+2\dot{B}\mu_1\mu_2+\dot{C}\mu_2^2)=0.$$

Eliminací $|\alpha,\beta|_b$ obdržíme

$$\begin{vmatrix} A\lambda_1^2+2B\lambda_1\lambda_2+C\lambda_2^2, & A\mu_1^2+2B\mu_1\mu_2+C\mu_2^2 \\ \dot{A}\lambda_1^2+2\dot{B}\lambda_1\lambda_2+\dot{C}\lambda_2^2, & \dot{A}\mu_1^2+2\dot{B}\mu_1\mu_2+\dot{C}\mu_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$=-(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)\begin{vmatrix} A, & -2B, & C \\ \dot{A}, & -2\dot{B}, & \dot{C} \\ \lambda_2\mu_2, & \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1, & \lambda_1\mu_1 \end{vmatrix}=0.$$

Dle **137** jest lin. komplex $\overset{u}{K}$ speciální, když a jen když involuce J_f jest parabolická. Snadným počtem obdržíme však ze (2), že J_f je parabolická, když a jen když $4g_1g_2 - (Dg_1)^2 = 0$. Předpokládejme, že $\overset{u}{K}$ je speciální a buď $\{q\}$ jeho řídící přímka. Buď $\overset{u}{L}$ oskulační lin. kongruence osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Zřejmě $\overset{u}{L}$ jest obsažena v $\overset{u}{K}$. Odtud vychází ihned, že $\{q\}$ je řídící přímkou i pro $\overset{u}{L}$. Tedy dle **444** $\{q\}$ je fleknodální tečnou osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

447. Buď $R_a\{xy\}_u$ orientovaná regulární ar. osnova třídy $r \geqq 5$; buď g_3 její třetí unimodulární invariant. Osnova $R\{xy\}$ neměj pentataktických přímek. Buď $\overset{u}{K}$ oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Když a jen když $g_3(u_0) = 0$, má lin. komplex $\overset{u_0}{K}$ šestipřímkový styk s osnovou $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Pravíme pak, že $\{xy\}_{u_0}$ jest sextaktická přímka osnovy $R\{xy\}$. Když a jen když osnova $R\{xy\}$ jest obsažena v pevném lin. komplexu, jsou všecky její přímky sextaktické.

Definujme S jako ve **446** (3), takže lin. komplex $\overset{u}{K}$ jest obsažen v S. Ze **374** vychází, že $\overset{u}{K}$ má s $R\{xy\}$ šestipřímkový styk v $\{xy\}_u$, když a jen když ar. komplex D^5x patří do S. Avšak dle **435** (8), **438** (1), (2) a **445** (2) jest

$$\tfrac{1}{8}D^5(xy) = \ddot{A}(y\dot{y}) - \ddot{B}[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \ddot{C}(x\dot{x}) + \alpha(xy) + \beta D(xy) + \gamma D^2(xy) + \delta D^3(xy),$$

takže $D^5(xy)$ náleží do S, když a jen když do S náleží ar. komplex

$$\ddot{A}(y\dot{y}) - \ddot{B}[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \ddot{C}(x\dot{x}), \tag{1}$$

což je zřejmě jen tak možné, že ar. komplex (1) jest lin. závislý na ar. komplexech

$$\begin{gathered} A(y\dot{y}) - B[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + C(x\dot{x}), \\ \dot{A}(y\dot{y}) - \dot{B}[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \dot{C}(x\dot{x}). \end{gathered} \tag{2}$$

Ar. komplexy (2) jsou lin. nezávislé dle **445**. Je tedy ar. komplex (1) lin. závislý na ar. komplexech (2), když a jen když jest $g_3 = 0$.

Že všecky přímky osnovy $R\{xy\}$ jsou sextaktické, náleží-li $R\{xy\}$ pevnému lin. komplexu, je zřejmé. Že naopak osnova $R\{xy\}$ náleží pevnému lin. komplexu, když všecky její přímky jsou sextaktické, dokáže se stejně jako analogické tvrzení ve **445**.

448. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná regulární ar. osnova třídy $r \geqq 4$. Buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ její fleknodální forma.

Buď $\dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2$ asymptotická derivace formy $f(t_1,t_2)$. Osnova $R\{xy\}$ neměj pentataktických přímek. Bod $\{t_1x + t_2y\}$ nazývá se komplexový bod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$, když

$$\text{(1)} \qquad \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A & -B & C \\ \dot{A} & -\dot{B} & \dot{C} \\ \lambda_2^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Buď g_1 (g_2) prvý (druhý) unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$. Počet komplexových bodů osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ rovná se 2, 1, 0 dle toho, zda pro dané u jest $(Dg_1)^2 - 4g_0g_2 > 0, = 0, < 0$. Buď $\overset{u}{K}$ oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Je-li $\{t_1x + t_2y\}$ komplexový bod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ a není-li lin. komplex $\overset{u}{K}$ speciální, jest polární rovinou bodu $\{t_1x + t_2y\}$ vzhledem ke $\overset{u}{K}$ tečná rovina přímkové plochy $MR\{xy\}$ v tomto bodě. Je-li lin. komplex $\overset{u}{K}$ speciální, jest komplexový bod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ průsečíkem přímky $\{xy\}$ s řídící přímkou lin. komplexu $\overset{u}{K}$. Je-li pro dané u $g_1 > 0$ a $(Dg_1)^2 - 4g_1g_2 > 0$, tvoří fleknody a komplexové body osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ dva harmonické páry bodů. Je-li $g_1 < 0$, nemůže býti $(Dg_1)^2 - 4g_1g_2 < 0$.

Počet komplexových bodů vychází ihned odtud, že $\frac{1}{4}(Dg_1)^2 - g_1g_2$ je diskriminant kvadratické formy v (1). Tato forma a forma $f(t_1,t_2)$ jsou apolární dle **78**. Odtud plyne dle **76**: 1° když $g_1 > 0$ a $(Dg_1)^2 - 4g_1g_2 > 0$, tvoří fleknody a komplexové body dva harmonické páry bodů, 2° je-li $g_1 < 0$, nemůže býti $(Dg_1)^2 - 4g_1g_2 < 0$. Že komplexový bod jest incidentní s řídící přímkou $\{q\}$ komplexu $\overset{u}{K}$, je-li tento komplex speciální, vychází ihned ze **446** (2); neboť dle **137** $\{q\}$ je dvojná přímka involuce $\overset{u}{J}_k$ uvažované ve **446**. Buď $\{t_1x + t_2y\}$ komplexový bod; komplex $\overset{u}{K}$ nebuď speciální. Dle **446** (2) přímka $\{q\}$, kde

$$q = (t_1x + t_2y,\ t_1\dot{x} + t_2\dot{y})$$

je dvojnou přímkou involuce $\overset{u}{J}_k$. Tedy dle **137** přímka $\{q\}$ rovná se své konjugované přímce vzhledem ke $\overset{u}{K}$, tedy dle **135** $\{q\}$ náleží do $\overset{u}{K}$. Zřejmě však též $\{xy\}$ náleží do $\overset{u}{K}$. Tedy dle **134** polární rovinou bodu $\{t_1x + t_2y\}$ je základní rovina $\{\zeta\}$ svazku $\{(xy); q\}$. Snadno však vidíme, že $\{t_1\xi + t_2\eta\} = \{\zeta\}$, takže dle **424** $\{\zeta\}$ je též tečnou rovinou přímkové plochy $MR\{xy\}$ v bodě $\{t_1x + t_2y\}$.

Asymptotické křivky osnovy.

449. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 2$. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x(u)$, $C_a y(u)$. Buď $\{z\} = \{c_1 x(u_0) + c_2 y(v_0)\}$ libovolný bod přímkové plochy $MR\{xy\}$. Jedna asymptotická křivka plochy $MR\{xy\}$ obsahující bod $\{z\}$ jest obsažena v řadě bodové soumístné s přímkou $\{xy\}_{u_0}$; druhou asymptotickou křivkou (v. **280**) přímkové plochy $MR\{xy\}$ obsahující bod $\{z\}$ jest křivka $C\{t_1(u)x(u) + t_2(u)y(u)\}$, kde funkce t_1, t_2 mají tyto vlastnosti: $1^0 \{|t_1(u_0), t_2(u_0)|_b\} = \{|c_1, c_2|_b\}$; 2^0 splňují diferenciální rovnici

$$(1) \qquad t_1 Dt_2 - t_2 Dt_1 + at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2 = 0.$$

Křivku $C\{t_1 x + t_2 y\}$ nazýváme asymptotickou křivkou osnovy $R\{xy\}$*). Její tečnu v bodě $\{z_0\}$ nazýváme asymptotickou tečnou osnovy $R\{xy\}$ v bodě $\{z_0\}$ **).

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že $t_1(u) \neq 0$ pro všecka u. Buď

$$x_1 = t_1 x + t_2 y, \quad y_1 = \frac{1}{t_1} y.$$

Buď $x_1 \sim \xi_1$ v Chaslesově korespondenci. Dle **424** $\{\xi_1\}$ je tečnou rovinou přímkové plochy $MR\{xy\}$ v bodě $\{x_1\}$. Dle **279** je tedy $C\{x_1\}$ asymptotickou křivkou přímkové plochy $MR\{xy\}$, když a jen když $S\xi_1 D^2 x_1 = 0$. Jsou-li tedy a_1, b_1, c_1 asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x_1$, $C_a y_1$, jest dle **427** (2) $C\{x_1\}$ asymptotickou křivkou, když a jen když jest identicky $a_1 = 0$, čili dle **429** (3), když a jen když platí rovnice (1).

450. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 2$. Nechť ar. body $\overset{u}{\dot{x}}, \overset{u}{\dot{y}}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď $\overset{u}{R_2}$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $\overset{u}{R'_2}$ regulus komplementární k $\overset{u}{R_2}$. Buď $\{z\} = \{c_1 x(u_0) + c_2 y(v_0)\}$ libovolný bod přímkové plochy $MR\{xy\}$. Buď $\{q\}$ asymptotická tečna osnovy $R\{xy\}$ v bodě $\{z\}$. Přímka $\{q\}$ náleží regulu $\overset{u_0}{R'_2}$, takže

$$(1) \qquad \{q\} = \{(c_1 x(u_0) + c_2 y(u_0),\ c_1 \dot{x}(u_0) + c_2 \dot{y}(v_0)\}.$$

Buď $C\{t_1 x + t_2 y\} = C$ asymptotická křivka osnovy $R\{xy\}$ obsahující bod $\{z\}$, takže platí rovnice **449** (1). Máme ukázati, že tečnou křivky

*) Naproti tomu řadu bodovou $\{x(u_0), y(u_0)\}^C$ nepovažujeme za asymptotickou křivku osnovy $R\{xy\}$, ač jest rovněž asymptotickou křivkou přímkové plochy $MR\{xy\}$.

**) Přímku $\{xy\}_{u_0}$ nepovažujeme za asymptotickou tečnu osnovy $R\{xy\}$.

C v bodě $\{z\}$ je přímka

$$\{\overset{u}{q}\} = \{(t_1 x + t_2 y,\ t_1 \dot{x} + t_2 \dot{y})\},$$

což jistě je splněno (v. **195** (1)), když

$$(2) \qquad (t_1 x + t_2 y,\ t_1 \dot{x} + t_2 \dot{y}) = [t_1 x + t_2 y,\ D(t_1 x + t_2 y)].$$

Dle **449** (1) existuje λ takové, že

$$(3) \qquad Dt_1 - bt_1 - ct_2 = \lambda t_2,\ Dt_2 + at_1 + bt_2 = \lambda t_1.$$

Ze (3) a **438** (1) vychází však snadno

$$D(t_1 x + t_2 y) = t_1 \dot{x} + t_2 \dot{y} + \lambda(t_1 x + t_2 y),$$

z čehož plyne (2).

451. Buď $R_a(xy)$ zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 2$. Když a jen když ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky, jest $C\{t_1 x + t_2 y\}$ asymptotickou křivkou osnovy $R\{xy\}$, kdykoli t_1 a t_2 jsou konstanty.

Vskutku rovnice **449** (1) je splněna — jsou-li t_1 a t_2 libovolné konstanty — když a jen když $a = b = c = 0$.

452. Buď $R\{xy\}_u$ zborcená osnova třídy $r \geqq 2$. Buďte $\{\overset{1}{z}_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ čtyři různé body incidentní s přímkou $\{xy\}_{u_1}$; buď d jejich dvojpoměr. Buď $\overset{i}{C}$ asymptotická křivka osnovy $R\{xy\}_u$ obsahující bod $\{\overset{1}{z}_i\}$. Buď $\{\overset{2}{z}_i\}$ bod křivky $\overset{i}{C}$ incidentní s přímkou $\{xy\}_{u_2}$. Body $\{\overset{2}{z}_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ jsou různé a jejich dvojpoměr rovná se d.

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu asymptoticky. Dle **451** jest $\overset{i}{C} = C\{\overset{i}{t}_1 x + \overset{i}{t}_2 y\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, při čemž $\{|\overset{i}{t}_1, \overset{i}{t}_2|_b\}$ jsou pevné body. Dvojpoměr bodů $\{\overset{1}{z}_i\}$ rovná se dvojpoměru jednorozměrných bodů $\{|\overset{i}{t}_1, \overset{i}{t}_2|_b\}$. Totéž však platí i o dvojpoměru bodů $\{\overset{2}{z}_i\}$.

453. Buď $R_a(xy)_u$ regulární ar. osnova třídy $r \geqq 3$. Buď $\{z_0\} = \{c_1 x(u_0) + c_2 y(u_0)\}$ libovolný bod přímkové plochy $R\{xy\}$. Buď $C = C\{t_1 x + t_2 y\}$ asymptotická křivka osnovy $R\{xy\}$ obsahující bod $\{z_0\}$. Bod $\{z_0\}$ jest inflexní bod křivky C, když a jen když $\{z_0\}$ je fleknod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Je-li $r \geqq 4$ a není-li $\{z_0\}$ inflexní bod křivky C, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $C\{t_1 x + t_2 y\}$ (u v $\langle u_0 - \varepsilon + 0,\ u_0 + \varepsilon - 0\rangle$) jest regulární křivka.

Dle **434** a **451** můžeme bez újmy obecnosti předpokládati, že 1° ar. křivky $C_a x$, $C_a y$, vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky, takže dle **438** (1), (2)

$$D^2x = -(B+j)x + Ay, \quad D^2y = -Cx + (B-j)y, \tag{1}$$

2° t_1, t_2 jsou konstanty ($t_1 = c_1$, $t_2 = c_2$). Buď

$$z = t_1 x + t_2 y,$$

takže $C = C\{z\}$. Dle (1) jest

$$(z, Dz, D^2z) = -(At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2)(x, y, t_1 Dx + t_2 Dy),$$

tedy dle **424** (1) a **430** (2)

$$(z, Dz, D^2z) = -f(t_1, t_2)(t_1\xi + t_2\eta). \tag{2}$$

Je-li $r \geqq 4$, obdržíme derivováním ze (2)

$$(z, Dz, D^3z) = -f(t_1, t_2)(t_1 D\xi + t_2 D\eta) + \mu(z, Dz, D^2z)$$

kde na hodnotě μ nezáleží. Odtud plyne dle **438** (8), ježto $a = b = c = 0$ a $(z, Dz, D^2z, D^3z) = -S(z, Dz, D^3z)D^2z$,

$$(z, Dz, D^2z, D^3z) = -\omega[f(t_1 t_2)]^2. \tag{3}$$

Ze (2) vychází, že bod $\{z(u)\}$ jest inflexním bodem křivky $C\{z\}$, když a jen když je fleknodem osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Je-li $f(t_1, t_2) \neq 0$ pro $u = u_0$, platí táž nerovnost — a tedy dle (3) též nerovnost $(z, Dz, D^2z, D^3z) \neq 0$ — pro všecka u dosti blízká k u_0. Odtud snadno vidíme, že lze určiti $\varepsilon > 0$ tak, že $C\{z\}$ (u v $\langle u_0 - \varepsilon + 0, u_0 + \varepsilon - 0\rangle$) jest regulární křivka.

454. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná regulární ar. osnova třídy $r \geqq 3$; buď D její diferenciální parametr. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď $x \backsim \xi$, $y \backsim \eta$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$ v ar. přímce $(xy)_u$. Buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)$. Buď $C = C\{t_1 x + t_2 y\} = C\{t_1(u)x(u) + t_2(u)y(u)\}$ regulární křivka třídy $\geqq 3$. Křivka C buď asymptotickou křivkou osnovy $R\{xy\}$. Znamení křivky C jest $-\omega$. Buď $\operatorname{sgn}|f(t_1, t_2)| = \sigma = \pm 1$. Diferenciální parametr ar. křivky $C_a t_1 x + t_2 y$ jest

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt[8]{|f(t_1, t_2)|}} D. \tag{1}$$

Jest

$$\mathfrak{C}_a \omega\sigma(t_1\xi + t_2\eta) = \text{Adj}.\, C_a t_1 x + t_2 y. \tag{2}$$

Ze **424** a **430** (7) vychází snadno, že lze bez újmy obecnosti předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Je-li tomu tak, můžeme dle **451** předpokládati, že t_1 a t_2 jsou konstanty. Rovnice (1) vychází pak snadno ze **453** (2). Z (1) a **453** (3) vychází ihned rovnice (2). Ze **453** (3) je mimo to patrné, že $-\omega$ je znamení křivky C. Rovnice (2) dá se, nehledíme-li na znamení $\omega\sigma = \pm 1$, dle **359** též tak dokázati, že odvodíme, že

$$[t_1\xi + t_2\eta,\ D(t_1\xi + t_2\eta)] = -\omega\,[t_1 x + t_2 y,\ D(t_1 x + t_2 y)]. \tag{3}$$

Mimo to plyne ze (3) dle **359** také znovu, že $-\omega$ je znamení křivky C. Ježto t_1 a t_2 jsou konstanty, jest rovnice (3) důsledkem rovnic

$$\begin{aligned} (\xi, D\xi) &= -\omega(x, Dx), & (\xi, D\eta) &= -\omega(y, Dx), \\ (\eta, D\xi) &= -\omega(x, Dy), & (\eta, D\eta) &= -\omega(y, Dy). \end{aligned} \tag{4}$$

Ukažme na příklad, že prvá rovnice (4) je správná; ostatní rovnice (4) dokáží se podobně.

Dle **424** (3), (4), (7) a **427** (1) jest, ježto $a = 0$,

$$\{\xi, D\xi\} = \text{Adj.}\,\{x, Dx\}.$$

Dle **102** existuje tedy λ takové, že

$$(\xi, D\xi) = \lambda(x, Dx); \tag{5}$$

máme ukázati, že $\lambda = -\omega$. Avšak dle **102** (3) a **422** (2) jest

$$S(x, Dx)(y, Dy) = -\omega,$$

takže dle (5)

$$S(\xi, D\xi)(y, Dy) = -\lambda\omega,$$

tedy dle **98** (1)

$$\begin{vmatrix} S\xi y & S\xi Dy \\ SyD\xi & SDy . D\xi \end{vmatrix} = -\lambda\omega. \tag{6}$$

Levá strana v (6) jest však rovna 1 dle **424**, takže $\lambda\omega = -1$, $\lambda = -\omega$, jak bylo tvrzeno.

455. Buď $R_a(xy)_u$ regulární ar. osnova třídy $r \geqq 4$. Buď $\overset{u}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $C = C\{t_1(u)\,x(u) + t_2(u)\,y(u)\}$ regulární křivka třídy $\geqq 4$; buď $\Gamma\{q(u)\} =$ Ass. C. Křivka C buď asymptotickou křivkou osnovy $R\{xy\}$. Buď $\overset{u}{L}_c$ oskulační lin. kongruence osnovy $\Gamma\{q\}$ v přímce $\{q(u)\}$. Buď $\{z\}^u$ bod incidentní s $\{q(u)\}$. Buď $\{\zeta\}$ tečná rovina kvadriky MR^2 v bodě $\{z\}$. Svazek přímek $\{z; \zeta\}^r$ náleží lin. kongruenci $\overset{u}{L}_c$.

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky a že t_1, t_2 jsou konstanty. Dle

450 (1) jest, ježto $a = b = c = 0$,

$$z = \lambda(t_1 x + t_2 y) + \mu D(t_1 x + t_2 y).$$

Dle **441** jest

$$\zeta = \lambda(t_1 \xi + t_2 \eta) + \mu D(t_1 \xi + t_2 \eta).$$

Teorém nyní vychází snadno ze **376** a **454** (2).

456. Buď $R_a(xy)_u$ regulární ar. osnova třídy $r \geqq 5$. Buď $\overset{u}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $\overset{u}{R}{}'_2$ regulus komplementární k $\overset{u}{R}_2$. Buď $\overset{u}{J}_f$ involuce v regulu $\overset{u}{R}{}'_2$ definovaná ve **444**. Buď $\overset{u}{L}$ oskulační lin. kongruence osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $C = C\{t_1(u)x(u) + t_2(u)y(u)\}$ regulární křivka třídy $\geqq 5$; buď $\Gamma\ \{q(u)\} = \text{Ass. } C$. Křivka C buď asymptotickou křivkou osnovy $R\{xy\}$. Buď $\overset{u}{K}_c$ oskulační lin. komplex osnovy $\Gamma\{q\}$ v přímce $\{q(u)\}$. Lin. komplex $\overset{u}{K}_c$ obsahuje lin. kongruenci $\overset{u}{L}$. Lin. komplex $\overset{u}{K}_c$ obsahuje dvě a jen dvě přímky regulu $\overset{u}{R}{}'_2$, totiž přímku $\{q(u)\}$ a onu přímku, jež spolu s $\{q(u)\}$ tvoří pár involuce $\overset{u}{J}_f$.

Je dovoleno předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky a že t_1, t_2 jsou konstanty. Ze **455** snadno vychází, že oskulační lin. kongruence $\overset{u}{L}_c$ osnovy $\Gamma\{q\}$ v přímce $\{q(u)\}$ obsahuje regulus $\overset{u}{R}_2$. Ježto $\overset{u}{K}_c$ zřejmě obsahuje $\overset{u}{L}_c$, vidíme, že lin. komplex $\overset{u}{K}_c$ obsahuje regulus $\overset{u}{R}_2$. Položme

$$z = z(u) = t_1 x + t_2 y, \quad \zeta = t_1 \xi + t_2 \eta. \tag{1}$$

Dle **450** (1) jest

$$q(u) = (z, Dz).$$

Buď

$$r = (Dz, D^2 z) + \omega(D\zeta, D^2 \zeta). \tag{2}$$

Dle **378** a **454** jest lin. komplex $\overset{u}{K}_c$ adjungován k $\{r\}$. Ježto $a = b = c = 0$, jest dle **438**

$$\begin{aligned} D^2 x &= -(B + j)x + Ay, & D^2 y &= -Cx + (B - j)y, \\ D^2 \xi &= (B - j)\xi - A\eta, & D^2 \eta &= C\xi - (B + j)\eta. \end{aligned} \tag{3}$$

Ze (3) nalezneme snadno, že

$$\begin{aligned} (Dz, D^2 z) &= [(B + j)t_1 + Ct_2][t_1(x\,Dx) + t_2(x\,Dy)] - \\ &\quad - [At_1 + (B - j)t_2][t_1(y\,Dx) + t_2(y\,Dy)], \\ (D\zeta, D^2\zeta) &= -[(B - j)t_1 + Ct_2][t_1(\xi\,D\xi) + t_2(\xi\,D\eta)] + \\ &\quad + [At_1 + (B + j)t_2][t_1(\eta\,D\xi) + t_2(\eta\,D\eta)], \end{aligned}$$

takže dle (2) a **454** (4) jest

$$(4)\qquad r = 2t_1(Bt_1 + Ct_2)(xDx) - (At_1^2 - Ct_2^2)\,[(xDy) + (yDx)] - 2t_2(At_1 + Bt_2)(yDy).$$

Buď $\{\bar{q}\}$ libovolná přímka regulu $\overset{u}{R}{}'_2$. Dle **128** a **440** jest

$$(5)\qquad \bar{q} = (\lambda_1 x + \lambda_2 y,\ \lambda_1 Dx + \lambda_2 Dy).$$

Přímka $\{\bar{q}\}$ náleží do $\overset{u}{K}_c$, když a jen když $Sr\bar{q} = 0$. Avšak dle (4), (5) a **422** (2) jest

$$\begin{aligned}\omega Sr\bar{q} &= 2t_2(At_1 + Bt_2)\lambda_1^2 - 2(At_1^2 - Ct_2^2)\lambda_1\lambda_2 - 2t_1(Bt_1 + Ct_2)\lambda_2^2 = \\ &= 2(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)\,[A\lambda_1 t_1 + B(\lambda_1 t_2 + \lambda_2 t_1) + C\lambda_2 t_2].\end{aligned}$$

Prvý faktor vymizí, když $\{\bar{q}\} = \{q\}$; druhý faktor vymizí, když (v. **444** (2)) přímky $\{q\}$ a $\{\bar{q}\}$ tvoří pár involuce J_f.

Ježto lin. komplex $\overset{u}{K}_c$ obsahuje $\overset{u}{R}_2$ a jeden pár involuce J_f, obsahuje $\overset{u}{K}_c$ dle **136** a **444** lin. kongruenci $\overset{u}{L}$.

457. Buď $R\{xy\}$ regulární osnova třídy $r \geqq 4$ bez pentataktických přímek. Oskulační lin. kongruence osnovy $\{R(xy)\}_u$ v přímce $\{xy\}_u$ nebuď speciální pro žádné u. Když a jen když oskulační lin. komplex $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ je speciálni pro každé u, osnova $R\{xy\}$ má řídící přímku*).

Má-li $R\{xy\}$ řídící přímku $\{r\}$, vidíme snadno že (speciální) lin. komplex adjungovaný k $\{r\}$ jest oskulačním lin. komplexem osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ pro každé u. Obráceně předpokládejme, že oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ je speciální pro každé u. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky, takže $\dot{A} = DA$, $\dot{B} = DB$, $\dot{C} = DC$. Dle **446** diskriminant kvadratické formy

$$g(t_1 t_2) = \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ t_2^2 & -t_1 t_2 & t_1^2 \end{vmatrix}$$

jest identicky roven 0. Odtud vychází, že lze určiti jedním a jen jedním způsobem křivku $C\{t_1 x + t_2 y\}$ tak, že jest identicky $g(t_1, t_2) = 0$. Mimo to dle **446** řídící přímka oskulačního lin. komplexu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}$ jest incidentní s bodem $\{t_1 x + t_2 y\}$, takže, jak jsme rovněž ve **446** viděli, $\{t_1 x + t_2 y\}$ je fleknod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}$. Tedy funkce

---

*) Pravíme, že osnova $R\{xy\}$ má řídící přímku $\{r\}$, když každá přímka osnovy $R\{xy\}$ jest incidentní s $\{r\}$.

t_1, t_2 splňují identicky netoliko rovnici

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} At_1+Bt_2, & Bt_1+Ct_2 \\ \dot{A}t_1+\dot{B}t_2, & \dot{B}t_1+\dot{C}t_2 \end{vmatrix}=0,$$

nýbrž i rovnici

$$(2)\qquad (At_1+Bt_2)\,t_1+(Bt_1+Ct_2)\,t_2=0.$$

Naproti tomu nejsou pro žádné u splněny současně obě rovnice

$$At_1+Bt_2=0,\quad Bt_1+Ct_2=0,$$

neboť pro takové u bylo by $B^2-AC=0$, takže dle **444** oskulační lin. kongruence osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ byla by speciální. Ježto tedy v determinantu nalevo v (1) pro žádné u nevymizí současně oba prvky prvého řádku, lze určiti $\lambda=\lambda(u)$ tak, že

$$\dot{A}t_1+\dot{B}t_2=\lambda\,(At_1+Bt_2),\quad \dot{B}t_1+\dot{C}t_2=\lambda\,(Bt_1+Ct_2).$$

Odtud a ze (2) vychází, že jest identicky

$$(3)\qquad (\dot{A}t_1+\dot{B}t_2)\,t_1+(\dot{B}t_1+\dot{C}t_2)\,t_2=0.$$

Ježto $a=b=c=0$, vychází ze (2) derivováním

$$(\dot{A}t_1+\dot{B}t_2)\,t_1+(\dot{B}t_1+\dot{C}t_2)\,t_2+(At_1+Bt_2)\,Dt_1+(Bt_1+Ct_2)\,Dt_2=0,$$

takže dle (3) jest identicky

$$(4)\qquad (At_1+Bt_2)\,Dt_1+(Bt_1+Ct_2)\,Dt_2=0.$$

Ze (2) a (4) vychází, že jest identicky

$$(5)\qquad t_1Dt_2-t_2Dt_1=0;$$

neboť kdyby pro nějaké u neplatilo (5), bylo by dle (2) a (4) současně

$$At_1+Bt_2=0,\quad Bt_1+Ct_2=0,$$

což není možné, jak jsme již viděli. Z (5) a **449** (1) vychází, že $C=C\{t_1x+t_2y\}$ jest asymptotickou křivkou osnovy $R\{xy\}$. Dle (2) a **453** jsou tedy všecky body křivky C inflexní. Dle **186** jsou tedy všecky body křivky C incidentní s pevnou přímkou $\{r\}$. Zřejmě $\{r\}$ jest řídící přímkou osnovy $R\{xy\}$.

458. Buď $R\{xy\}_u$ regulární osnova třídy $r\geq 4$ bez pentataktických přímek. Oskulační lin. kongruence osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ buď parabolická pro každé u. Pak oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ je speciální pro každé u.

Dle **444** jest identicky $g_1 = B^2 - AC = 0$, tedy též $Dg_1 = 0$, takže

$$4g_1g_2 - (Dg_1)^2 = 0.$$

Teorém nyní vychází ze **446**.

459. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná regulární ar. osnova třídy $r \geqq 4$. Buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ její fleknodální forma; buď $\dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2$ asymptotická derivace formy $f(t_1, t_2)$. Buď $C_a t_1(u)x(u) + t_2(u)x(u)$ regulární ar. křivka virtuální třídy $r \geqq 6$; buď $\Theta(u)$ její druhý unimodulární invariant. Křivka $C\{t_1x + t_2y\}$ buď asymptotickou křivkou osnovy $R\{xy\}$. Buď sgn $|f(t_1, t_2)| = \sigma = \pm 1$. Pak jest

(1) $$\Theta = -2\sigma \frac{\begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix}}{[f(t_1, t_2)]^2}.$$

Ze **78** (6), **430** (7), **434** a **435** (7) vychází snadno, že můžeme předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Ze **388** (2) a **451** vychází, že můžeme mimo to předpokládati, že t_1 a t_2 jsou konstanty. Dle **360** (2), **453** (3) a **454** (2) jest pak

$$\Theta = -\sigma\omega \frac{SD^3(t_1x + t_2y)\,D^3(t_1\xi + t_2\eta)}{[f(t_1, t_2)]^2},$$

z čehož plyne (1), jakmile dokážeme, že

(2) $$\begin{aligned} &\omega SD^3x\,D^3\xi = 2(ADB - BDA), \quad \omega SD^3x\,D^3\eta = ADC - CDA, \\ &\omega SD^3y\,D^3\xi = ADC - CDA, \quad \omega SD^3y\,D^3\eta = 2(BDC - CDB). \end{aligned}$$

Dle **438** je však, ježto $a = b = c = 0$,

$$\begin{aligned} &D^2x = -(B + j)x + Ay, \quad D^2y = -Cx + (B - j)y, \\ &D^2\xi = (B - j)\xi - A\eta, \quad D^2\eta = -C\xi + (B - j)\eta, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} D^3x &= -(B - j)Dx + ADy - D(B - j)\,.\,x + DA\,.\,y, \\ D^3y &= -CDx + (B - j)Dy - DC\,.\,x + D(B - j)y, \\ D^3\xi &= (B - j)D\xi - AD\eta + D(B - j)\,.\,\xi - DA\,.\,\eta, \\ D^3\eta &= -CD\xi + (B - j)D\eta - DC\,.\,\xi + D(B - j)\,.\,\eta, \end{aligned}$$

z čehož plynou rovnice (2) dle **424** (3), (4), (7) a **427** (1).

460. Buď $R(xy)$ regulární ar. osnova třídy $r \geqq 6$. Když a jen když osnova $R\{xy\}$ jest obsažena v pevné lin. kongruenci, jest každá asymptotická křivka osnovy $R\{xy\}$ obsažena v pevném lin. komplexu.

Vychází snadno ze **379**, **445** a **459**.

Norma osnovy.

461. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 1$. Buď D její diferenciální parametr. Buď τ funkce třídy 1 všude různá od nuly. Pak diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a\tau(xy)$ jest $\varDelta = |\tau|^{-1} D$.

Buď $\varrho = \sqrt{|\tau|}$. Buď $\bar{x} = \varrho x$, $\bar{y} = \operatorname{sgn} \tau \,.\, \varrho y$, takže $\tau(xy) = (\bar{x}\bar{y})$. Zřejmě jest

$$\left(\bar{x}\bar{y}\frac{d\bar{x}}{du}\frac{d\bar{y}}{du}\right) = \varrho^4 \left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right),$$

takže dle **422** (1) jest $\varDelta = |\varrho|^{-2} D = |\tau|^{-1} D$.

462. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova třídy $r \geqq 1$. Buď $x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)$ v přímce $\{xy\}$. Buď τ funkce třídy 1 všude různá od nuly. Pak jest $x \sim \operatorname{sgn} \tau \,.\, \xi$, $y \sim \operatorname{sgn} \tau \,.\, \eta$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a\tau(xy)$.

Buď opět $\varrho = \sqrt{|\tau|}$, $\bar{x} = \varrho x$, $\bar{y} = \operatorname{sgn} \tau \,.\, \varrho y$, takže $\tau(xy) = (\bar{x}\bar{y})$. V Chaslesově korespondenci $\mathfrak{K}$ orientované ar. osnovy $R_a\tau(xy)$ je dle **424**

$$\bar{x} \sim (\bar{x}, \bar{y}, \Delta\bar{x}), \quad \bar{y} \sim (\bar{x}, \bar{y}, \Delta\bar{y}),$$

kde $\varDelta$ je diferenciální parametr pro $R_a\tau(xy)$. Dle **461** je však $\varDelta = |\tau|^{-1} D$, takže

$$(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\bar{x}) = \operatorname{sgn} \tau \,.\, \varrho\,(x, y, Dx) = \operatorname{sgn} \tau \,.\, \varrho\xi,$$
$$(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\bar{y}) = \varrho\,(x, y, Dy) = \varrho\eta,$$

takže jest v $\mathfrak{K}$: $\bar{x} = \varrho x \sim \operatorname{sgn} \tau \,.\, \varrho\xi$, $\bar{y} = \operatorname{sgn} \tau \,.\, \varrho y \sim \varrho\eta$, a tedy též $x \sim \operatorname{sgn} \tau \,.\, \xi$, $y \sim \operatorname{sgn} \tau \,.\, \eta$.

463. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 2$. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x$, $C_a y$. Buď ϱ funkce třídy 1 všude různá od nuly. Buď $\bar{x} = \varrho x$, $\bar{y} = \varrho y$. Buďte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a\varrho x$, $C_a\varrho y$. Pak jest

$$\bar{a} = \varrho^{-2} a, \quad \bar{b} = \varrho^{-2} b, \quad \bar{c} = \varrho^{-2} c. \tag{1}$$

Diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(\bar{x}\bar{y}) = R_a\varrho^2(xy)$ je (v. **461**) $\varDelta = \varrho^{-2} D$. Buď $x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)$. Dle **427** (1) a **462** jest

$$\bar{a} = -\frac{\omega}{2} S\Delta(\varrho x)\,\Delta(\varrho\xi) = -\frac{\omega}{2}\varrho^{-4} SD(\varrho x)\,D(\varrho\xi) =$$
$$= -\frac{\omega}{2}\varrho^{-4} S(\varrho Dx + D\varrho \,.\, x)(\varrho D\xi + D\varrho \,.\, \xi),$$

tedy dle **424**

$$\bar{a} = -\frac{\omega}{2}\rho^{-2} S Dx\, D\xi,$$

což je prvá rovnice (1). Stejně obdrží se druhé dvě rovnice (1).

464. Buď $R_a(xy)_u$ zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ její fleknodální forma. Buď ϱ funkce třídy 2 všude různá od nuly. Buď $\bar{x} = \varrho x$, $\bar{y} = \varrho y$. Definujme $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ vzhledem k ar. křivkám $C_a\bar{x}$, $C_a\bar{y}$ stejně, jako jsme definovali A, B, C vzhledem k ar. křivkám $C_a x$, $C_a y$. Pak jest

$$\bar{A} = \rho^{-4}A,\quad \bar{B} = \rho^{-4}B,\quad \bar{C} = \rho^{-4}C. \tag{1}$$

Buď $D(\varDelta)$ diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)$ $(R_a(\bar{x}\bar{y}))$; dle **461** jest $\varDelta = \varrho^{-2}D$. Bud $x \backsim \xi$ v Chaslesově korespondenci orientované ar. osnovy $R_a(xy)$. Buď $\bar{\xi} = \varrho\xi$. Je tedy

$$\Delta\bar{x} = \rho^{-1}\left(Dx + \frac{D\rho}{\rho}x\right),\quad \Delta^2\bar{x} = \rho^{-3}\left[D^2x + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - 2\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right)x\right],$$

$$\Delta\bar{\xi} = \rho^{-1}\left(D\xi + \frac{D\rho}{\rho}\xi\right),\quad \Delta^2\bar{\xi} = \rho^{-3}\left[D^2\xi + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - 2\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right)\xi\right].$$

Dle **430** (1) a **462** jest

$$2\omega\bar{A} = S(\Delta\bar{x}\,\Delta^2\bar{\xi} - \Delta^2\bar{x}\,\Delta\bar{\xi}) =$$

$$= \rho^{-4}S\left(Dx + \frac{D\rho}{\rho}x\right)\left[D^2\xi + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - 2\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right)\xi\right] -$$

$$- \rho^{-4}S\left[D^2x + \left(\frac{D^2\rho}{\rho} - 2\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right)x\right]\left(D\xi + \frac{D\rho}{\rho}\xi\right),$$

takže dle **424** (3), (4), (7) a **427** (2), (3) jest

$$2\omega\bar{A} = \rho^{-4}S(Dx\,D^2\xi - D^2x\,D\xi) = 2\omega\rho^{-4}A,$$

v souhlase s prvou rovnicí (1). Stejně dokáží se další dvě rovnice (1).

465. Buď $R_a(xy)_u$ orientovaná zborcená ar. osnova virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď D její diferenciální parametr. Buď τ funkce třídy $r-1$ všude různá od nuly. Buď g_1 $(\bar{g}_1)$ první unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$ $(R_a\tau(xy))$. Buď j $(\bar{j})$ čtvrtý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$ $(R_a\tau(xy))$. Jest

$$\bar{g}_1 = \tau^{-4}g_1, \tag{1}$$

$$\bar{j} = \tau^{-2}\left[j + \sqrt{|\tau|}\,D^2\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\right]. \tag{2}$$

Je-li $r \geqq 4$, buď $g_2\,(\bar{g}_2)$ druhý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)\,(R_a\tau(xy))$. Jest

$$(3) \qquad \bar{g}_2 = \tau^{-6}\left[g_2 - 2\frac{D\tau}{\tau}Dg_1 + 4\left(\frac{D\tau}{\tau}\right)^2 g_1\right].$$

Je-li $r \geqq 5$, buď $g_3\,(\bar{g}_3)$ třetí unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)\,(R_a\tau(xy))$. Jest

$$(4) \qquad \bar{g}_3 = |\tau|^{-9} g_3.$$

Ze **436** a **437** vychází snadno, že unimodulární invarianty orientované ar. osnovy $R_a(yx) = R_a - (xy)$ jsou: g_1, g_2, g_3, j. Formule (1), (2), (3), (4) jsou tedy správné, když $\tau = -1$. Odtud snadno vidíme, že stačí je dokázati za předpokladu, že $\tau > 0$. Buď tedy $\tau > 0$ a položme $\tau = \varrho^2$, $\bar{x} = \varrho x$, $\bar{y} = \varrho y$, takže $(\bar{x}\bar{y}) = \tau(xy)$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Dle **463** vytvořují pak ar. křivky $C_a\bar{x}$, $C_a\bar{y}$ ar. osnovu $R_a(\bar{x}\bar{y})$ asymptoticky. Buď $\varDelta = \varrho^{-2} D$ (v. **461**) diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)$. Rovnice (1) plyne ihned ze **464** (1). Rovnice (2) odvodí se ze **437** (1) stejným počtem, jako jsme odvodili **464** (1) ze **430** (1). Dle **464** (1) jest

$$(5) \qquad \Delta\bar{A} = \rho^{-6}\left(DA - 4\frac{D\rho}{\rho}A\right),\ \Delta\bar{B} = \rho^{-6}\left(DB - 4\frac{D\rho}{\rho}B\right),\ \Delta\bar{C} = \rho^{-6}\left(DC - 4\frac{D\rho}{\rho}C\right),$$

$$(6) \qquad \begin{aligned} \Delta^2\bar{A} &= \rho^{-8}\left[D^2A - 10\frac{D\rho}{\rho}DA + 4\left(-\frac{D^2\rho}{\rho} + 7\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right)A\right],\\ \Delta^2\bar{B} &= \rho^{-8}\left[D^2B - 10\frac{D\rho}{\rho}DB + 4\left(-\frac{D^2\rho}{\rho} + 7\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right)B\right],\\ \Delta^2\bar{C} &= \rho^{-8}\left[D^2C - 10\frac{D\rho}{\rho}DC + 4\left(-\frac{D^2\rho}{\rho} + 7\frac{(D\rho)^2}{\rho^2}\right)C\right]. \end{aligned}$$

Dle (5) jest

$$\begin{aligned} \bar{g}_2 = (\Delta\bar{B})^2 - \Delta\bar{A}\,.\,\Delta\bar{C} &= \rho^{-12}\left[\left(DB - 4\frac{D\rho}{\rho}B\right)^2 - \left(DA - 4\frac{D\rho}{\rho}A\right)\left(DC - 4\frac{D\rho}{\rho}C\right)\right] = \\ &= \rho^{-12}\left[(DB)^2 - DA\,.\,DC + 4\frac{D\rho}{\rho}(ADC + CDA - 2BDB) + 16\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)^2(B^2 - AC)\right] = \\ &= \rho^{-12}\left[g_2 - 4\frac{D\rho}{\rho}Dg_1 + 16\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)^2 g_1\right] \end{aligned}$$

v souhlase se (3). Dle (5), (6) a **464** (1) jest

$$\bar{g}_3 = \begin{vmatrix} \bar{A}, & \bar{B}, & \bar{C} \\ \Delta\bar{A}, & \Delta\bar{B}, & \Delta\bar{C} \\ \Delta^2\bar{A}, & \Delta^2\bar{B}, & \Delta^2\bar{C} \end{vmatrix} = \rho^{-18}\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ DA, & DB, & DC \\ D^2A, & D^2B, & D^2C \end{vmatrix} = \rho^{-18} g_3$$

v souhlase se (4).

466. Buď $R\{xy\}_u$ regulární osnova virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď g_1 prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$. Pravíme, že $R\{xy\}$ jest 1° positivní, 2° negativní, 3° nulová osnova*), je-li pro všecka u: 1° $g_1 > 0$, 2° $g_1 < 0$, 3° $g_1 = 0$.

K této definici jsme oprávněni dle **465** (1).

467. Buď $R\{xy\}$ positivní nebo negativní osnova virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď g_1 prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$. Buď $\alpha = \pm 1$. Buď

(1) $$p_N = \alpha \sqrt[4]{|g_1|}\,(xy).$$

Ar. osnova $R_a p_N$ nazývá se norma osnovy $R\{xy\}$; označení

(2) $$R_a p_N = NR\{xy\}.$$

Má tedy osnova $R\{xy\}$ dvě normy ($\alpha = 1$, $\alpha = -1$). $R_a p_N$ jest zborcená ar. osnova virtuální třídy $r - 2$.

Že jsme k definici normy oprávněni, vychází ze **465** (1).

468. Buď $R\{xy\}$ positivní (negativní) osnova virtuální třídy $r \geqq 5$. Ar. osnova $NR\{xy\}$ jest regulární ar. osnova virtuální třídy $r - 2$, jejíž prvý unimodulární invariant jest identicky roven $+1\,(-1)$. Obráceně, když prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_u(xy)$ virtuální třídy $\geqq 3$ rovná se identicky $+1\,(-1)$, jest osnova $R\{xy\}$ positivní (negativní) a jest

$$R_a(xy) = NR\{xy\}.$$

Důkaz je snadný.

469. Buď $R\{xy\}$ positivní nebo negativní osnova virtuální třídy $r \geqq 3$. Buď

$$R_a p_N = NR\{xy\}.$$

Buď K kolineace ar. bodů. Buď $K = UP$, kde V jest kolineace modulu ± 1 a P jest podobnost. Buď $x \backsim x'$, $y \backsim y'$ v K; buď $p_N \backsim p'_N$ v Ass. U. Pak jest

$$R_a p'_N = NR\{x'y'\}.$$

Důkaz je snadný.

470. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná positivní nebo negativní osnova virtuální třídy $r \geqq 3$. Normální parametr s oriento-

---

*) Mluvíce o nulové osnově, máme vždy na mysli regulární osnovy.

vané ar. osnovy $NR\{xy\}$ nazývá se normálním parametrem orientované osnovy $R\{xy\}$. Pro opačně orientovanou osnovu jest $-s$ normálním parametrem.

Dle **423** (1) a **467** jest, je-li g_1 prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$ a je-li c konstanta,

(1) $$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt[4]{|g_1|} \sqrt{\left|\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)\right|}\, du + c.$$

471. Buď $R\{xy\}_a$ nulová osnova virtuální třídy $r \geq 3$. Buď $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)$. Lze určiti znamení $\beta = \pm 1$ a funkce φ_1, φ_2 třídy $r-3$, tak, že jest identicky

(1) $$At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 = \beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2.$$

Znamení β není osnovou $R\{xy\}$ určeno, nýbrž přejde v $-\beta$, přejdeme-li od $R_a(xy)$ k $R_{a\tau}(xy)$, kde $\tau < 0$. Vedle φ_1, φ_2 rovnici (1) vyhovují ovšem $-\varphi_1$, $-\varphi_2$. Buďte λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 funkce třídy 2 takové, že jest identicky

(2) $$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = s = \pm 1.$$

Buď

(3) $$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Přejdeme-li od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ k ar. křivkám $C_a x_1$, $C_a y_1$, přejdou φ_1, φ_2 po řadě ve φ_1^*, φ_2^* tak, že jest identicky

(4) $$\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1^* + \mu_1\varphi_2^*, \quad \varphi_2 = \lambda_2\varphi_1^* + \mu_2\varphi_2^*.$$

Buď ϱ funkce třídy 2 všude různá od nuly. Buď

(5) $$\bar{x} = \varrho x, \quad \bar{y} = \varrho y.$$

Přejdeme-li od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ k ar. křivkám $C_a\bar{x}$, $C_a\bar{y}$, přejdou φ_1, φ_2 po řadě ve $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, kde

(6) $$\bar{\varphi}_1 = \varrho^{-2}\varphi_1, \quad \bar{\varphi}_2 = \varrho^{-2}\varphi_2.$$

Rovnice (4) plynou snadno ze **430** (7). Rovnice (6) vycházejí ihned ze **464** (1).

472. Buď $R\{xy\}_a$ nulová osnova virtuální třídy $r \geq 4$. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)$. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x$, $C_a y$. Buď $f(t_1, t_2) = \beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ ($\beta = \pm 1$) fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)$. Buď $\dot{f}(t_1, t_2)$ asymptotická derivace formy $f(t_1, t_2)$. Buď

(1) $$\dot{\varphi}_1 = D\varphi_1 - b\varphi_1 - c\varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = D\varphi_2 + a\varphi_1 + b\varphi_2.$$

Pravíme, že forma $\dot{\varphi}_2 t_1 - \dot{\varphi}_1 t_2$ jest (prvá) asymptotická derivace formy $\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2$. Pro dané u jest $\varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \varphi_2 \dot{\varphi}_1 = 0$, když a jen když $\{xy\}_u$ jest pentataktická přímka osnovy $R\{xy\}$. Jest identicky

(2) $$\dot{f}(t_1, t_2) = 2\beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)(\dot{\varphi}_2 t_1 - \dot{\varphi}_1 t_2).$$

Je-li $r \geqq 5$, buď $\ddot{f}(t_1, t_2)$ druhá asymptotická derivace formy $f(t_1, t_2)$ a buď

(3) $$\ddot{\varphi}_1 = D\dot{\varphi}_1 - b\dot{\varphi}_1 - c\dot{\varphi}_2, \quad \ddot{\varphi}_2 = D\dot{\varphi}_2 + a\dot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_2.$$

Pravíme, že forma $\ddot{\varphi}_2 t_1 - \ddot{\varphi}_1 t_2$ jest druhá asymptotická derivace formy $\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2$. Jest identicky

(4) $$\ddot{f}(t_1, t_2) = 2\beta[(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)(\ddot{\varphi}_2 t_1 - \ddot{\varphi}_1 t_2) + (\dot{\varphi}_2 t_1 - \dot{\varphi}_1 t_2)^2].$$

Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ funkce třídy $r-1$ takové, že jest identicky

(5) $$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = s = \pm 1.$$

Buď

(6) $$x_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad y_1 = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Přejdeme-li od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ k ar. křivkám $C_a x_1$, $C_a y_1$, nechť přejdou $\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$ po řadě ve $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dot{\varphi}_1^*, \dot{\varphi}_2^*, \ddot{\varphi}_1^*, \ddot{\varphi}_2^*$. Pak jest

(7) $$\varphi_1^* \dot{\varphi}_2^* - \varphi_2^* \dot{\varphi}_1^* = s(\varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \varphi_2 \dot{\varphi}_1),$$

(8) $$\dot{\varphi}_1^* \ddot{\varphi}_2^* - \dot{\varphi}_2^* \ddot{\varphi}_1^* = s(\dot{\varphi}_1 \ddot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_2 \ddot{\varphi}_1).$$

Dle **471** (1) jest

(9) $$A = \beta\varphi_2^2, \quad B = -\beta\varphi_1\varphi_2, \quad C = \beta\varphi_1^2,$$

tedy

$$DA = 2\beta\varphi_2 \,.\, D\varphi_2, \quad DB = -\beta(\varphi_1 \,.\, D\varphi_2 + \varphi_2 \,.\, D\varphi_1), \quad DC = 2\beta\varphi_1 \,.\, D\varphi_1,$$

takže dle (1) a **435** (1) jest

(10) $$\dot{A} = 2\beta\varphi_2\dot{\varphi}_2, \quad \dot{B} = -\beta(\varphi_1\dot{\varphi}_2 + \varphi_2\dot{\varphi}_1), \quad \dot{C} = 2\beta\varphi_1\dot{\varphi}_1,$$

z čehož plyne (2) dle **435** (11). Podobně obdrží se (4).

Položme

(11) $$t_1 = \lambda_1 t_1^* + \mu_1 t_2^*, \quad t_2 = \lambda_2 t_1^* + \mu_2 t_2^*.$$

Dle (5) a **471** (4) jest

(12) $$\varphi_2^* t_1^* - \varphi_1^* t_2^* = s(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2).$$

Přejdeme-li od $C_a x$, $C_a y$ k $C_a x_1$, $C_a y_1$, nechť přejde β v β_1. Dle **430** (7) a **471** (1) jest

(13) $$\beta^* = s\beta.$$

Dle (2), (12), (13) a **435** (7) jest

(14) $$\dot\varphi_2^* t_1^* - \dot\varphi_1^* t_2^* = s(\dot\varphi_2 t_1 - \dot\varphi_1 t_2).$$

Dle (4), (12), (13), (14) a **435** (10) jest

(15) $$\ddot\varphi_2^* t_1^* - \ddot\varphi_1^* t_2^* = s(\ddot\varphi_2 t_1 - \ddot\varphi_1 t_2).$$

Buďte τ_1, τ_2 nové neodvislé proměnné a položme

(16) $$\tau_1 = \lambda_1 \tau_1^* + \mu_1 \tau_2^*, \quad \tau_2 = \lambda_2 \tau_1^* + \mu_2 \tau_2^*.$$

Pak jest dle (12) a (14)

$$\begin{vmatrix} \varphi_2^* t_1^* - \varphi_1^* t_2^*, & \dot\varphi_2^* t_1^* - \dot\varphi_1^* t_2^* \\ \varphi_2^* \tau_1^* - \varphi_1^* \tau_2^*, & \dot\varphi_2^* \tau_1^* - \dot\varphi_1^* \tau_2^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2, & \dot\varphi_2 t_1 - \dot\varphi_1 t_2 \\ \varphi_2 \tau_1 - \varphi_1 \tau_2, & \dot\varphi_2 \tau_1 - \dot\varphi_1 \tau_2 \end{vmatrix}$$

čili

$$(\varphi_1^* \dot\varphi_2^* - \varphi_2^* \dot\varphi_1^*)(t_1^* \tau_2^* - t_2^* \tau_1^*) = (\varphi_1 \dot\varphi_2 - \varphi_2 \dot\varphi_1)(t_1 \tau_2 - t_2 \tau_1),$$

z čehož plyne (7), neboť dle (5), (11) a (16) jest

$$t_1^* \tau_2^* - t_2^* \tau_1^* = s(t_1 \tau_2 - t_2 \tau_1).$$

Podobně obdrží se (8) ze (13).

Zbývá ukázati (v. **445**), že $\varphi_1 \dot\varphi_2 - \varphi_2 \dot\varphi_1 = 0$, když a jen když vymizí všecky determinanty matice

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ \dot A & \dot B & \dot C \end{pmatrix}.$$

To je však ihned patrné z (9) a (10).

473. Buď $R\{xy\}$ nulová osnova virtuální třídy $r \geqq 4$ bez pentataktických přímek. Buď $\beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ ($\beta = \pm 1$) fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)$. Buď $\dot\varphi_2 t_1 - \dot\varphi_1 t_2$ asymptotická derivace formy $\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2$. Buď $\alpha = \pm 1$. Buď

(1) $$p_N = \alpha \sqrt[8]{\varphi_1 \dot\varphi_2 - \varphi_2 \dot\varphi_1}\,(xy).$$

Ar. osnova $R_a p_N$ nazývá se norma osnovy $R\{xy\}$; označení

(1) $$R_a p_N = NR\{xy\}.$$

Má tedy osnova $R\{xy\}$ dvě normy ($\alpha = 1$, $\alpha = -1$). $R_a p_N$ je zborcená ar. osnova virtuální třídy $r - 3$.

Je třeba ukázati, že ar. osnova $NR\{xy\}$ jest osnovou $R\{xy\}$ až na libovolné znamení α úplně určena. Ze **472** (7) jest nejprve patrné, že $NR\{xy\}$ jest určena až na znamení α ar. osnovou $R_a(xy)$. Buď nyní τ funkce třídy 3 všude různá od nuly. Máme ukázati, že $NR\{xy\}$ až na znamení α zůstane nezměněna, když od $R_a(xy)$ přejdeme k $R_a\tau(xy)$. Dle **472** (7) je tomu tak, když $\tau = -1$. Buď tedy $\tau > 0$ a položme $\tau = \varrho^2$, $\bar{x} = \varrho x$, $\bar{y} = \varrho y$. Zřejmě máme pouze ukázati, že, když φ_1, φ_2, $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ přejdou po řadě ve $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\dot{\bar{\varphi}}_1$, $\dot{\bar{\varphi}}_2$, jest

$$(2) \qquad \bar{\varphi}_1\dot{\bar{\varphi}}_2 - \bar{\varphi}_2\dot{\bar{\varphi}}_1 = \rho^{-6}(\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1).$$

Vzhledem ke **472** (7) stačí dokázati (2) za předpokladu, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Dle **463** vytvořují pak také ar. křivky $C_a\bar{x}$, $C_a\bar{y}$ ar. osnovu $R_a(\bar{x}\bar{y})$ asymptoticky, takže, je-li $D(\varDelta)$ diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)$ $(R_a(\bar{x}\bar{y}))$, jest

$$\dot{\varphi}_i = D\varphi_i, \quad \dot{\bar{\varphi}}_i = \Delta\bar{\varphi}_i. \qquad (i = 1, 2)$$

Dle **461** je však $\varDelta = \varrho^{-2} D$, takže dle **471** (6)

$$(3) \qquad \dot{\bar{\varphi}}_i = \rho^{-4}\left(\dot{\varphi}_i - 2\frac{D\rho}{\rho}\varphi_i\right). \qquad (i = 1, 2)$$

Ze (3) a **471**.(6) vychází (2).

474. Buď $R\{xy\}$ nulová osnova virtuální třídy $r \geqq 7$ bez pentataktických přímek. Ar. osnova $NR\{xy\}$ jest regulární ar. osnova virtuální třídy $r-3$, jejíž prvý (druhý) unimodulární invariant jest identicky roven 0 (1). Obráceně, je-li g_1 (g_2) prvý (druhý) unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$ virtuální třídy $\geqq 4$ a je-li identicky $g_1 = 0$, $g_2 = 1$, osnova $R\{xy\}$ jest nulová a $R_a\{xy\} = NR\{xy\}$.

Vskutku dle **472** (10) jest identicky

$$(1) \qquad \dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C} = (\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1)^2.$$

475. Buď $R\{xy\}$ nulová osnova virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď

$$R_a p_N = NR\{xy\}.$$

Buď K kolineace ar. bodů. Buď $K = UP$, kde U jest kolineace modulu ± 1 a P jest podobnost. Buď $x \sim x'$, $y \sim y'$ v K; buď $p_N \sim p'_N$ v Ass. U. Pak jest

$$R_a p'_N = NR\{x'y'\}.$$

Důkaz je snadný.

476. Buď $R\{xy\}_a$ orientovaná nulová osnova virtuální třídy $r \geqq 4$ bez pentataktických přímek. Normální parametr s orientované ar. osnovy $NR\{xy\}$ nazývá se normálním parametrem orientované osnovy $R\{xy\}$. Pro opačně orientovanou osnovu jest $-s$ normálním parametrem.

Dle **423** (1), **473** (1) a **474** (1) jest v obvyklém označení, je-li c libovolná konstanta,

$$(1)\qquad s=\int_{u_0}^{u}\sqrt[3]{\left|\varphi_1\dot\varphi_2-\varphi_2\dot\varphi_1\right|}\sqrt{\left|\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)\right|}\,du+c=\int_{u_0}^{u}\sqrt[6]{\dot B^2-\dot A\dot C}\sqrt{\left|\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)\right|}\,du+c.$$

477. Buďte x_0, x_1, x_2, x_3 lin. nezávislé ar. body. Množství R_3 přímek $\{p\}$, kde

$$(1)\qquad p=\lambda_1^3(x_0x_2)+\lambda_1^2\lambda_2[(x_0x_3)+(x_1x_2)]-\lambda_1\lambda_2^2(x_3x_1)-\lambda_2^3(x_0x_1)$$

jest algebraická osnova. Pravíme, že R_3 jest Cayleyova osnova.

Pro jasnost položme

$$X_0=(x_0x_1),\ X_1=(x_0x_2),\ X_2=(x_0x_3),\ X_3=(x_2x_3),\ X_4=(x_3x_4),\ X_5=(x_1x_2)$$

a považujeme X_i ($i=0, 1, 2, 3, 4, 5$) za pětirozměrné ar. body, tvořící jehlan dle **106** (1). Buď $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \Xi_4, \Xi_5$ duální jehlan adjungovaný k $X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$. Máme ukázati, že množství C_3 pětirozměrných bodů $\{X\}$, kde

$$X=\lambda_1^3X_1+\lambda_1^2\lambda_2(X_2+X_5)-\lambda_1\lambda_2^2X_4-\lambda_2^3X_0$$

jest algebraická křivka. To však vychází snadno ze **168**, neboť zřejmě jest

$$C_3=C[\Xi_3,\ \Xi_2-\Xi_5,\ \Xi_0\Xi_1-\Xi_2\Xi_4,\ \Xi_0\Xi_2+\Xi_4^2,\ \Xi_1\Xi_4+\Xi_2^2].$$

478. Buď $R\{xy\}$ regulární osnova virtuální třídy $r\geq 4$ obsažená v pevné parabolické lineární kongruenci*). Buď $\beta(\varphi_1t_2-\varphi_2t_1)^2$ ($\beta=\pm1$) fleknodální forma ar. osnovy $R_a\{xy\}$. Buď $\dot\varphi_2t_1-\dot\varphi_2t_1$ asymptotická derivace formy $\varphi_2t_1-\varphi_1t_2$. Lze určiti funkci χ třídy $r-3$ všude různou od nuly tak, že jest identicky

$$(1)\qquad \dot\varphi_1-\frac{D\chi}{\chi}\varphi_1=\dot\varphi_2-\frac{D\chi}{\chi}\varphi_2=0.$$

Zvolme χ dle (1); buď $\alpha\neq0$ libovolná konstanta. Buď

$$(2)\qquad p_N=\alpha\chi(xy).$$

---

*) Osnova $R\{xy\}$ je nulová. Je-li totiž regulární osnova $R\{xy\}$ obsažena v pevné lin. kongruenci L, snadno se vidí (v. **444**) že $R\{xy\}$ jest 1[0] positivní, 2[0] negativní, 3[0] nulová, když lin. kongruence L jest 1[0] hyperbolická, 2[0] eliptická, 3[0] parabolická.

Ar. osnova $R_\alpha p_N$ nazývá se norma osnovy $R\{xy\}$; označení

(3) $$R_\alpha p_N = NR\{xy\}.$$

Má tedy osnova $R\{xy\}$ nekonečně mnoho norem (ježto $\alpha \neq 0$ je libovolné). $R_\alpha p_N$ je zborcená ar. osnova virtuální třídy $r-2$.

Ježto $R_\alpha\{xy\}$ jest nulová a jest obsažena v pevné lin. kongruenci, jest identicky $\varphi_1\dot\varphi_2 - \varphi_2\dot\varphi_1 = 0$ dle **445** a **472**. Lze tedy rovnicím (1) vyhověti a to ovšem nekonečně mnoha způsoby. Vzhledem k libovolné konstantě α ve (2) nezáleží však na tom, které řešení rovnic (1) zvolíme za χ. Je třeba ukázati, že ar. osnova $NR\{xy\}$ jest až na libovolnou konstantu α osnovou $R\{xy\}$ úplně určena. Ukažme nejprve, že $NR\{xy\}$ jest určena ar. osnovou $R_\alpha\{xy\}$; t. j., že ar. osnovou $R_\alpha\{xy\}$ jest určena funkce $\frac{D\varrho}{\varrho}$. To však je snadno patrné ze **472** (12), (14), vyslovíme-li podmínku (1) pro $\frac{D\chi}{\chi}$ takto: Forma

$$\dot\varphi_1 t_2 - \dot\varphi_2 t_1 + \frac{D\chi}{\chi}(\varphi_1 t_2 - \varphi_2 t_1)$$

jest identicky rovna nule. Dále máme ukázati, že ar. osnova $NR\{xy\}$ se nemění, přejdeme-li od $R_\alpha\{xy\}$ k $R_\alpha\tau\{xy\}$. Z cit. rovnic **472** (12), (14) vychází, že tomu tak jest, když $\tau = -1$. Můžeme tedy předpokládati, že $\tau = \varrho^2 > 0$. Zřejmě stačí ukázati, že, přejdeme-li od $C_\alpha x$, $C_\alpha y$ k $C_\alpha \varrho x$, $C_\alpha \varrho y$, přejde χ v $\varrho^{-2}\chi$. Mimo to dle toho, co již bylo dokázáno, můžeme předpokládati, že ar. křivky $C_\alpha x$, $C_\alpha y$ vytvořují ar. osnovu $R_\alpha\{xy\}$ asymptoticky, takže dle **463** totéž platí o ar. křivkách $C_\alpha \varrho x$, $C_\alpha \varrho y$ a o ar. osnově $R_\alpha \varrho^2 (xy)$. Že však za těchto předpokladů přejde χ skutečně v $\varrho^{-2}\chi$, je zřejmé; neboť rovnice (1) dají se pak psáti — ježto $\dot\varphi_i = D\varphi_i$ $(i = 1, 2)$ —

(4) $$D\left(\frac{\varphi_1}{\chi}\right) = D\left(\frac{\varphi_2}{\chi}\right) = 0$$

a φ_1, φ_2 přejdou ve $\varrho^{-2}\varphi_1$, $\varrho^{-2}\varphi_1$ dle **471** (6).

479. Buď $R\{xy\}_u$ regulární osnova virtuální třídy $r \geq 5$, obsažená v pevné parabolické lin. kongruenci. Buď D diferenciální parametr ar. osnovy $R_\alpha(xy)$; buď j čtvrtý unimodulární invariant této ar. osnovy. Buď $R_\alpha \chi(xy) = NR\{xy\}$; $\chi > 0$*). Když a jen když jest identicky

(1) $$j + \sqrt{\chi}\, D^2\left(\frac{1}{\sqrt{\chi}}\right) = 0,$$

jest osnova $R\{xy\}$ obsažena v pevné Cayleyově osnově**).

*) Předpoklad $\chi > 0$ není na újmu obecnosti, neboť χ je určeno pouze až na multiplikativní konstantu.

**) Je-li (1) splněno pro $u = u_0$, pravíme, že $\{xy\}_{u_0}$ jest Cayleyovská přímka osnovy $R\{xy\}$.

Předpokládejme nejprve, že rovnice (1) je splněna. Předpokládejme také — což je dovoleno — že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Buď $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 = \beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ $(\beta = \pm 1)$ fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)$. Dle **478** (4) jest

$$\varphi_1 = c_1\chi, \quad \varphi_2 = c_2\chi, \tag{2}$$

kde c_1, c_2 jsou konstanty, z nichž aspoň jedna je různá od nuly; buď na př. $c_1 \neq 0$. Dle (1), (2) a **438** jest

$$\begin{aligned} D^2x &= \left[\beta c_1 c_2 \chi^2 + \sqrt{\chi}\, D^2\left(\frac{1}{\sqrt{\chi}}\right)\right] x + \beta c_2^2 \chi^2 y, \\ D^2y &= -\beta c_1^2 \chi^2 x + \left[-\beta c_1 c_2 \chi^2 + \sqrt{\chi}\, D^2\left(\frac{1}{\sqrt{\chi}}\right)\right] y. \end{aligned} \tag{3}$$

Položme

$$x' = \sqrt{\chi}\,(c_1 x + c_2 y), \quad y' = \sqrt{\chi}\, y, \tag{4}$$

$$s = \int_{u_0}^{u} x \sqrt{\left|\left(xy\,\frac{dx}{du}\,\frac{dy}{du}\right)\right|}\, du. \tag{5}$$

Ze (3), (4) a (5) vychází po snadném počtu

$$\frac{d^2x'}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y'}{ds^2} = -\beta c_1 x'. \tag{6}$$

Buď $\gamma = \operatorname{sgn} c_1 = \pm 1$. Z (6) vychází snadno, že existují lin. nezávislé pevné ar. body x_0, x_1, x_2, x_3 takové, že

$$x' = -\beta\gamma \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{|c_1|}}(x_0 + s x_1),$$

$$y' = \frac{1}{6}\gamma \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{|c_1|}}(3 c_1 s^2 x_0 + c_1 s^3 x_1) + \frac{\sqrt{|c_1|}}{\sqrt{3}}(x_2 + s x_3),$$

takže

$$-\beta\gamma(x'y') = -\gamma x |c_1| (xy) = (x_0 x_2) + s[(x_0 x_3) + (x_1 x_2)] - s^2 (x_3 x_1) - s^3 (x_0 x_1) \tag{7}$$

Ze (7) a **477** (1) plyne, že $R\{xy\}$ jest obsažena v Cayleyově osnově.

Obráceně předpokládejme, že $R\{xy\}$ jest obsažena v Cayleyově osnově. Ze **477** (1) vychází snadno, že můžeme zvoliti ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ a parametr u tak, že jest

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u x_1, \\ y &= x_2 + u x_3 + \tfrac{3}{2} u^2 x_0 + \tfrac{1}{2} u^3 x_1, \end{aligned} \tag{8}$$

při čemž x_0, x_1, x_2, x_3 jsou pevné lin. nezávislé ar. body; vskutku dle (8) jest

$$(xy) = (x_0 x_2) + u[(x_0 x_3) + (x_1 x_2)] - u^2 (x_3 x_1) - u^3 (x_0 x_1),$$

v souhlase se **477** (1). Z (8) vychází po snadném počtu, že podmínka (1) je splněna.

480. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná regulární osnova virtuální třídy $r \geq 5$ obsažená v pevné parabolické lin. kongruenci bez Cayleyovských bodů. Buď D diferenciální parametr ar. osnovy $R_a(xy)$; buď j čtvrtý unimodulární invariant této ar. osnovy. Buď $R_a \chi(xy) = N R\{xy\}$.

Výraz

$$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\left| j + \sqrt{|\chi|}\, D^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|\chi|}}\right)\right|}\ \sqrt{\left|\left(xy\,\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right)\right|}\, du + c, \tag{1}$$

kde c jest libovolná konstanta, nazývá se normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}$. Normální parametr opačně orientované ar. osnovy jest $-s$.

Je třeba ukázati, že normální parametr s jest orientovanou ar. osnovou $R\{xy\}$ úplně určen, nehledíme-li na libovolnou konstantu c. Nejprve je zřejmé, že s jest určen orientovanou ar. osnovou $R_a(xy)$. Přejdeme-li však od ar. osnovy $R_a(xy)$ k ar. osnově $R_a\ \tau(xy)$, přejde j v hodnotu $\bar{j}$ udanou ve **465** (2), $|\chi|$ přejde — jak jsme ve **478** viděli — v $|\tau|^{-1}\chi$ a $\left|\left(xy\,\dfrac{dx}{du}\dfrac{dy}{du}\right)\right|$ přejde patrně v $\tau^2 \left|\left(xy\,\dfrac{dx}{du}\dfrac{dy}{du}\right)\right|$. Odtud a ze **461** snadným počtem vychází, že s se nemění.

Hlavní přímka oskulačního regulu.

481. Buď $R\{xy\}_u$ regulární osnova třídy $r \geq 4$. Buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)$; buď $\dot{f}(t_1, t_2) = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2$ asymptotická derivace formy $f(t_1, t_2)$. Nechť ar. body $\dot{x}$, $\dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď $C = C\{t_1x + t_2y\}$ asymptotická křivka osnovy $R\{xy\}$. Zvolme libovolně u; pro toto u bod $\{t_1x + t_2y\}$ nebuď fleknod osnovy $R\{xy\}$. Položme

$$x = 4f(t_1, t_2)\,(t_1\dot{x} + t_2\dot{y}) + \dot{f}(t_1, t_2)\,(t_1x + t_2y). \tag{1}$$

Bod $\{z\}$ jest pól přímky $\{xy\}$ vzhledem k oskulační kuželosečce křivky C v bodě $\{t_1x + t_2y\}$. Ponechme u pevné a měňme ar. bod $|t_1, t_2|_b$. Množství bodů $\{z\}$ jest algebraická křivka $\overset{u}{C}_z$.

Když $\{xy\}_u$ není pentataktická přímka osnovy $R\{xy\}$ a když oskulační komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ není speciální, $\overset{u}{C}_z$ jest kubická křivka. Když $\{xy\}_u$ není pentataktická přímka osnovy $R\{xy\}$ a když oskulační komplex osnovy $R\{xy\}$ je speciální, $\overset{u}{C}_z$ jest kuželosečka. Když $\{xy\}_u$ jest pentataktická přímka osnovy $R\{xy\}$, $\overset{u}{C}_z$ jest řada bodová.

Dle **430** (7), **432** (6), **435** (7) a **451** můžeme předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky — takže $\dot{A}=DA$, $\dot{x}=Dx$ atd. — a že t_1, t_2 jsou konstanty. Buď

$$\Gamma_a p = \mathrm{Ass.}\, C_a\, t_1 x + t_2 y.$$

Dle **351** (1) a **454** (1) jest

$$p = \frac{1}{\sqrt[3]{|f(t_1, t_2)|}}\,(t_1 x + t_2 y, t_1 Dx + t_2 Dy), \tag{2}$$

takže

$$Dp = \frac{1}{\sqrt[3]{|f(t_1, t_2)|}}\Big[(t_1 x + t_2 y, t_1 D^2 x + t_2 D^2 y) - \tag{3}$$

$$- \frac{1}{3}\frac{\dot{f}(t_1, t_2)}{f(t_1, t_2)}(t_1 x + t_2 y, t_1 Dx + t_2 Dy)\Big].$$

Dle **438** je však, ježto $a = b = c = 0$,

$$(t_1 x + t_2 y, t_1 D^2 x + t_2 D^2 y) = f(t_1, t_2)\,(xy). \tag{4}$$

Ze (2), (3) a (4) vychází, že

$$\{xy\} = \{3 f(t_1, t_2)\, Dp + \dot{f}(t_1, t_2)\, p\},$$

takže dle (1) a **383** bod $\{z\}$ je vskutku pól přímky $\{xy\}$ vzhledem k oskulační kuželosečce křivky C v bodě $\{t_1 x + t_2 y\}$.

Předpokládejme nejprve, že $\{xy\}_u$ není pentataktická přímka osnovy $R\{xy\}$ a že oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ není speciální, takže dle **446** .

$$4 g_1 g_2 - (Dg_1)^2 = 4(B^2 - AC)(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}) - (A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})^2 \neq 0.$$

Buď

$$y_1 = 4A\dot{x} + \dot{A}x,\quad y_2 = 8B\dot{x} + 4A\dot{y} + 2\dot{B}x + \dot{A}y,$$

$$y_3 = 4C\dot{x} + 8B\dot{y} + \dot{C}y + 2\dot{B}y,\quad y_4 = 4C\dot{y} + \dot{C}y,$$

takže dle (1)

$$z = t_1^3 y_1 + t_1^2 t_2 y_2 + t_1 t_2^2 y_3 + t_2^3 y_4. \tag{5}$$

Ar. body y_1, y_2, y_3, y_4 jsou lin. nezávislé, neboť

$$(y_1 y_2 y_3 y_4) = \begin{vmatrix} \dot{A}, & 0, & 4A, & 0 \\ 2\dot{B}, & \dot{A} & 8B, & 4A \\ \dot{C}, & 2\dot{B}, & 4C, & 8B \\ 0 & \dot{C}, & 0 & 4C \end{vmatrix} (xy\dot{x}\dot{y}) = -16\,\omega\,[4g_1 g_2 - (Dg_1)^2] \neq 0.$$

Buď $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ duální jehlan adjungovaný k y_1, y_2, y_3, y_4. Z (5) vychází ihned, že

$$\overset{u}{C}_z = C\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\\ \eta_2 & \eta_3 & \eta_4\end{bmatrix},$$

takže $\overset{u}{C}_z$ jest kubická křivka.

Předpokládejme nyní, že $\{xy\}_u$ není pentataktická přímka osnovy $R\{xy\}$ a že oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ je speciální. Forma

$$\begin{vmatrix} A & B & C\\ \dot A & \dot B & \dot C\\ t_2^2 & -t_1t_2 & t_1^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} At_1+Bt_2, & Bt_1+Ct_2\\ \dot At_1+\dot Bt_2, & \dot Bt_1+\dot Ct_2\end{vmatrix}$$

má dle **446** dvojnásobný kořen $\{|\lambda_2, -\lambda_1|_b\}$. Dle **78** jest tento kořen společným kořenem forem $f(t_1, t_2)$, $\dot f(t_1, t_2)$, takže

$$(6)\qquad \begin{aligned} f(t_1, t_2) &= (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2)\\ \dot f(t_1, t_2) &= (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)(\mu'_1 t_1 + \mu'_2 t_2). \end{aligned}$$

Dle (1) je tedy

$$(7)\qquad \{z\} = \{4(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2)(t_1\dot x + t_2\dot y) + (\mu'_1 t_1 + \mu'_2 t_2)(t_1 x + t_2 y)\}.$$

Jest $\mu_1\mu'_2 - \mu_2\mu'_1 \neq 0$, neboť jinak by zřejmě vymizely všecky determinanty matice

$$(8)\qquad \begin{pmatrix} A & B & C\\ \dot A & \dot B & \dot C\end{pmatrix}$$

a $\{xy\}_u$ byla by pentataktická přímka. Položme

$$\begin{aligned} y_1 &= 4\mu_1\dot x + \mu'_1 x,\\ y_2 &= 4\mu_2\dot x + 4\mu_1\dot y + \mu'_2 x + \mu'_1 y,\\ y_3 &= 4\mu_2\dot y + \mu'_2 y. \end{aligned}$$

Ar. body y_1, y_3 jsou zřejmě lin. nezávislé. Kdyby bylo $y_2 = \tau_1 y_1 + \tau_3 y_3$, bylo by — jak vychází porovnáním koeficientů při x a $\dot x$ —

$$\mu'_2 = \tau_1\mu'_1, \quad \mu_2 = \tau\mu_1$$

a tedy $\mu_1\mu'_2 - \mu_2\mu'_1 = 0$, což, jak jsme viděli, nenastane. Jsou tedy ar. body y_1, y_2, y_3 lin. nezávislé a můžeme určiti ar. bod y_4 tak, že $(y_1 y_2 y_3 y_4) \neq 0$. Dle (7) jest

$$(9)\qquad \{z\} = t_1^2 y_1 = t_1 t_2 y_2 + t_2^2 y_3.$$

Buď $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ duální jehlan adjungovaný k y_1, y_2, y_3, y_4. Z (9) vychází ihned, že

$$\overset{u}{C}_z = C[\eta_4, \eta_1\eta_3 - \eta_2^2],$$

takže $\overset{u}{C}_z$ jest kuželosečka.

Konečně předpokládejme, že $\{xy\}_u$ jest pentataktická přímka osnovy $R\{xy\}$. Všecky determinanty matice (7) jsou rovny nule, takže poměr $\dot f(t_1, t_2) : f(t_1, t_2) = \alpha' : \alpha$ $(\alpha \neq 0)$ nezávisí na $|t_1, t_2|_b$. Dle (1) jest

$$\{z\} = \{4\alpha(t_1\dot x + t_2\dot y) + \alpha'(t_1 x + t_2 y)\},$$

takže

$$\overset{u}{C}_z = \{4\alpha\dot x + \alpha' x,\ 4\alpha\dot y + \alpha' y\}^{\sigma}.$$

482. Buď $R\{xy\}_u$ positivní nebo negativní osnova třídy $r \geqq 4$. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď g_1 prvý unimodulární invariant této ar. osnovy. Nechť ar. body $\dot x$, $\dot y$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď $\overset{u}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $R_a p_N = N\,R\{xy\}$. Buď $\overset{u}{K}_n$ lin. komplex adjungovaný k $\{Dp\}$. Dvě a jen dvě přímky regulu $\overset{u}{R}_2$ náležejí lin. komplexu $\overset{u}{K}_n$; je to přímka $\{xy\}$ a přímka $\{q_N\}$, kde

(1) $$q_N = (8g_1\dot x + Dg_1 . x,\ 8g_1\dot y + Dg_1 . y).$$

Pravíme, že $\{q_N\}$ je hlavní přímka oskulačního regulu $\overset{u}{R}_2$. Když a jen když pro každé u jest $\{q_N\} = \{\dot x\dot y\}$, existuje konstanta λ taková, že $N\,R\{xy\} = R_a\,\lambda(xy)$.

Dle **467** jest, je-li $\alpha = \pm 1$,

$$p_N = \alpha \sqrt[4]{|g_1|}\,(xy),$$

tedy dle **440** (2)

(2) $$Dp_N = \alpha\sqrt[4]{|g_1|}\left[(x\dot y) - (y\dot x) + \frac{1}{4}\frac{Dg_1}{g_1}(xy)\right].$$

Dle **440** (1) přímka $\{r\}$ náleží regulu $\overset{u}{R}_2$, když a jen když

(3) $$r = (\lambda_1 x + \lambda_2\dot x,\ \lambda_1 y + \lambda_2\dot y).$$

Přímka $\{r\}$ náleží lin. komplexu $\overset{u}{K}_n$, když a jen když $Sr\,Dp_N = 0$. Dle (2) a (3) je však, ježto $(xy\,\dot x\dot y) = \omega$,

$$Sr\,Dp_N = \alpha\sqrt[4]{|g_1|}\,S\left[(x\dot y) - (y\dot x) + \frac{1}{4}\frac{Dg_1}{g_1}(xy)\right]\left\{\lambda_1^2(xy) + \lambda_1\lambda_2\left[(x\dot y) - (y\dot x)\right] + \lambda_2^2(\dot x\dot y)\right\} =$$

$$= \omega\,\lambda_2\left[-2\lambda_1 + \frac{1}{4}\frac{Dg_1}{g_1}\lambda_2\right].$$

Je-li $\lambda_2 = 0$, jest $\{r\} = \{xy\}$; je-li $-2\lambda_1 + \dfrac{1}{4}\dfrac{Dg_1}{g_1}\lambda_2 = 0$, jest $\{r\} = \{q_N\}$.

Dle (1) jest $\{\dot x\dot y\} = \{q_N\}$, když a jen když $Dg_1 = 0$, tedy g_1 konstantní, tedy $p_N = c(xy)$, kde c je konstanta.

483. Buď $R\{xy\}_u$ positivní nebo negativní osnova třídy $r \geqq 4$. Buď $\overset{u}{R}_2$ její oskulační regulus v přímce $\{xy\}_u$. Buď $\overset{u}{R}'_2$ regulus komplementární k $\overset{u}{R}_2$. Buď $\{q_N\}$ hlavní přímka regulu $\overset{u}{R}_2$. Definujme algebraickou křivku $\overset{u}{C}_z$ jako ve **481**. Když $\overset{u}{C}_z$ je bodová řada, přímka $\{q_N\}$ je s ní soumístná. Když $\overset{u}{C}_z$ jest kuželosečka, takže oskulační lin. komplex $\overset{u}{K}$ osnovy $R\{xy\}$ je speciální, přímka $\{q_N\}$ jest incidentní s řídící přímkou lin. komplexu $\overset{u}{K}$; buď $\{z_N\}$ průsečík těchto dvou přímek: bod $\{z_N\}$ náleží kuželosečce $\overset{u}{C}_z$. Když $\overset{u}{C}_z$ jest kubická křivka a když existují (dva) komplexové body osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$, asymptotické tečny osnovy $R\{xy\}$ v těchto komplexových bodech jsou incidentní každá s právě jedním bodem kubické křivky $\overset{u}{C}_z$: buďte $\{z_1\}$, $\{z_2\}$ tyto dva body. Buď $\{p_i\}$ $(i=1,2)$ přímka regulu $\overset{u}{R}_2$ incidentní se $\{z_i\}$. Přímka $\{p_i\}$ $(i=1,2)$ je tečnou kubické křivky $\overset{u}{C}_z$ v bodě $\{z_i\}$. Páry přímek: $\{xy\}$, $\{q_N\}$; $\{p_1\}$, $\{p_2\}$ regulu $\overset{u}{R}_2$ jsou harmonické. Kdykoli $\overset{u}{C}_z$ jest kubická křivka, existuje neparabolická involuce $\overset{u}{J}_h$ v regulu $\overset{u}{R}_2$ o této vlastnosti: Jsou-li $\{z_i\}$ $(i=1,2,3,4)$ čtyři různé body kubické křivky $\overset{u}{C}_z$ takové, že přímky $\{z_1 z_2\}$, $\{z_3 z_4\}$ náležejí regulu $\overset{u}{R}_2$, a je-li $\{r_i\}$ $(i=1,2,3,4)$ přímka regulu $\overset{u}{R}'_2$ incidentní se $\{z_i\}$: pár přímek $\{z_1 z_2\}$, $\{z_3 z_4\}$ náleží involuci $\overset{u}{J}_h$, když a jen když páry přímek $\{r_1\}$, $\{r_2\}$; $\{r_3\}$, $\{r_4\}$ regulu $\overset{u}{R}'_2$ jsou harmonické. Přímky $\{xy\}$ a $\{q_N\}$ tvoří pár involuce $\overset{u}{J}_h$.

Užijme téhož označení, jako ve **481** a **482**. Nechť nejprve $\overset{u}{C}_z$ je řada bodová. Dle **445** a **481** existuje λ takové, že

$$\dot{A} = \lambda A, \quad \dot{B} = \lambda B, \quad \dot{C} = \lambda C.$$

Dle **436** (1), (2) jest

$$Dg_1 = -(A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B}) = 2\lambda(B^2 - AC) = 2\lambda g_1,$$

takže $\dot{f}(t_1, t_2) = \lambda f(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\frac{Dg_1}{g_1} f(t_1, t_2)$, tedy dle **481** (1)

$$\{z\} = \{8g_1(t_1\dot{x} + t_2\dot{y}) + Dg_1(t_1 x + t_2 y)\}.$$

Srovnáním se **482** (1) vychází, že přímka $\{q_N\}$ a řada bodová $\overset{u}{C}_z$ jsou soumístné.

Buď nyní $\overset{u}{C}_z$ kuželosečka. Dle **481** (7) a **482** (1) bod $\{z\}$ jest incidentní s $\{qx\}$, když a jen když zvolíme $|t_1, t_2|_b$ tak, že

$$(1) \qquad Dg_1(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) - 2g_1(\mu'_1 t_1 + \mu'_2 t_2).$$

Máme ukázati, že takto určený bod jest incidentní s řídící přímkou oskulačního komplexu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}$, t. j. (v. **446** a **481** (6)), že forma (1) jest — až na faktor nezávislý na t_1, t_2 — rovna $\lambda_1 t + \lambda_2 t_2$. Že tomu tak jest, vychází z identity (na hodnotě ϱ nezáleží)

$$(2) \qquad g_2(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2)^2 - Dg_1(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2)(\mu'_1 t_1 + \mu'_2 t_2) + g_1(\mu'_1 t_1 + \mu'_2 t_2)^2 = \\ = \rho(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)^2;$$

neboť ježto levá strana ve (2) jest úplný čtverec, jest zřejmě rovna

$$\frac{1}{4g_1}[2g_1(\mu'_1 t_1 + \mu'_2 t_2) - Dg_1(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2)]^2.$$

Identita (2) vychází ihned ze **78** (8) a **481** (6).

Konečně předpokládejme, že $\overset{u}{C}_z$ jest kubická křivka. Hledejme nejprve, zda některá tečna kubické křivky $\overset{u}{C}_z$ náleží regulu $\overset{u}{R}_2$. Abychom obdrželi tečnu křivky $\overset{u}{C}_z$ v bodě $\{z\}$, v němž $t_2 \neq 0$, můžeme zřejmě ve **481** (1) považovati t_2 za konstantu a t_1 za parametr. Obdržíme, že hledaná tečna jest $\left\{\left(z, \frac{\partial z}{\partial t_1}\right)\right\}$.

Avšak

$$z = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial z}{\partial t_1} t_1 + \frac{\partial z}{\partial t_2} t_2\right), \quad \left(z, \frac{\partial z}{\partial t_1}\right) = -\frac{1}{3} t_2 \left(\frac{\partial z}{\partial t_1}, \frac{\partial z}{\partial t_2}\right).$$

Hledaná tečna je tedy $\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t_1}, \frac{\partial z}{\partial t_2}\right)\right\}$, což ovšem platí i když $t_2 = 0$. Avšak ze **481** (1) obdrží se po snadném počtu

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t_1}, \frac{\partial z}{\partial t_2}\right) = 3[\dot f(t_1, t_2)]^2 (xy) + 12 f(t_1, t_2) \dot f(t_1, t_2)[(x\dot y) - (y\dot x)] +$$

$$+ 48[f(t_1, t_2)]^2 (\dot x \dot y) - 24 \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, Bt_1 + Ct_2 \\ \dot A t_1 + \dot B t_2, \dot B t_1 + \dot C t_2 \end{vmatrix} [t_1^2 (x\dot x) + t_1 t_2 \{(x\dot y) + (y\dot x)\} + t_2^2 (y\dot y)].$$

Dle **440** náleží tedy přímka $\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial t_1}, \frac{\partial z}{\partial t_2}\right)\right\}$ regulu $\overset{u}{R}_2$, když a jen když

$$\begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, Bt_1 + Ct_2 \\ \dot A t_1 + \dot B t_2, \dot B t_1 + \dot C t_2 \end{vmatrix} = 0.$$

To je však (v. **448**) podmínka, aby bod $\{t_1 x + t_2 y\}$ byl komplexový bod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}$.

Buď nyní

(3) $$\{p_1\} = \{(\lambda_1 x + \lambda_2 \dot{x}, \lambda_1 y + \lambda_2 \dot{y})\}$$

přímka regulu $\overset{u}{R}_2$, obsahující body $\{z_1\}$, $\{z_2\}$ kubické křivky $\overset{u}{C}_z$; buď také

(4) $$\{p_2\} = \{(\mu_1 x + \mu_2 \dot{y}, \mu_1 y + \mu_2 \dot{y})\}$$

přímka regulu $\overset{u}{R}_2$, obsahující body $\{z_3\}$, $\{z_4\}$ kubické křivky $\overset{u}{C}_z$. Buď

(5) $$z_i = 4 f(\overset{i}{t}_1, \overset{i}{t}_2)(\overset{i}{t}_1 \dot{x} + \overset{i}{t}_2 \dot{y}) + \dot{f}(t_1, t_2)(\overset{i}{t}_1 x + \overset{i}{t}_2 y). \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Ze (3) a (5) vychází snadno, že $\{|\overset{1}{t}_1, \overset{1}{t}_2|_b\}$ a $\{|\overset{2}{t}_1, \overset{2}{t}_2|_b\}$ jsou kořeny kvadratické formy

(6) $$\begin{vmatrix} \lambda_1, \dot{f}(t_1, t_2) \\ \lambda_2, 4f(t_1, t_2) \end{vmatrix} = (4A\lambda_1 - \dot{A}\lambda_2)\, t_1^2 + 2(4B\lambda_1 - \dot{B}\lambda_2)\, t_1 t_2 + (4C\lambda_1 - \dot{C}\lambda_2)\, t_2^2.$$

Podobně ze (4) a (5) vychází, že $\{|\overset{3}{t}_1, \overset{3}{t}_2|_b\}$ a $\{|\overset{4}{t}_1\, \overset{4}{t}_2|_b\}$ jsou kořeny kvadratické formy

(7) $$\begin{vmatrix} \mu_1, \dot{f}(t_1, t_2) \\ \mu_2, 4f(t_1, t_2) \end{vmatrix} = (4A\mu_1 - \dot{A}\mu_2)\, t_1^2 + 2(4B\mu_1 - \dot{B}\mu_2)\, t_1 t_2 + (4C\mu_1 - \dot{C}\mu_2)\, t_2^2.$$

Buď $\{r_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ přímka regulu $\overset{u}{R'}_2$ incidentní se $\{z_i\}$; buď $\{x_i\}$ bod přímky $\{yz\}$ incidentní s $\{r_i\}$. Dle (5) jest

(8) $$x_i = \overset{i}{t}_1 x + \overset{i}{t}_2 y.$$

Dle **129** páry přímek $\{r_1\}$, $\{r_2\}$; $\{r_3\}$, $\{r_4\}$ regulu $\overset{u}{R'}_2$ jsou harmonické, když a jen když páry bodů $\{x_1\}$, $\{x_2\}$; $\{x_3\}$, $\{x_4\}$ řady bodové $\{x, y\}^0$ jsou harmonické, tedy dle (8) a **87**, když a jen když páry jednorozměrných bodů

$$\{|\overset{1}{t}_1, \overset{1}{t}_2|_b\}, \{|\overset{2}{t}_1, \overset{2}{t}_2|_b\}; \{|\overset{3}{t}_1, \overset{3}{t}_2|_b\}, \{|\overset{4}{t}_1, \overset{4}{t}_2|_b\}$$

jsou harmonické, tedy dle **76**, když a jen když kvadratické formy (6) a (7) jsou apolární, t. j., když přímky (3) a (4) tvoří pár involuce $\overset{u}{J}_h$, definované rovnicí

(9) $$(4A\lambda_1 - \dot{A}\lambda_2)(4C\mu_1 - \dot{C}\mu_2) + (4C\lambda_1 - \dot{C}\lambda_2)(4A\mu_1 - \dot{A}\mu_2) - \\ - (4B\lambda_1 - \dot{B}\lambda_2)(4B\mu_1 - \dot{B}\mu_2) = 0.$$

Je-li $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, t. j. je-li $\{p_2\} = \{xy\}$, rovnice (9) redukuje se na

$$(4A\lambda_1 - \dot{A}\lambda_2) C + (4C\lambda_1 - \dot{C}\lambda_2) A - (4B\lambda_1 - \dot{B}\lambda_2) B = 0$$

čili

$$8(B^2 - AC)\lambda_1 + (A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})\lambda_2 = 0,$$

což dává $\lambda_1 : \lambda_2 = Dg_1 : 8g_1$, t. j. $\{p_1\} = \{q_N\}$.

484. Buď $R\{xy\}_u$ nulová osnova třídy $r \geqq 5$ bez pentataktických přímek. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď $\beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ $(\beta = \pm 1)$ fleknodální forma této ar. osnovy. Buď $\dot{\varphi}_2 t_1 - \dot{\varphi}_1 t_2$ asymptotická derivace formy $\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2$. Nechť ar. body $\dot{x}$, $\dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď $\overset{u}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $R_a p_N = N R\{xy\}$. Buď $\overset{u}{K}_n$ lin. komplex adjungovaný k $\{Dp\}$. Dvě a jen dvě přímky regulu $\overset{u}{R}_2$ náležejí lin. komplexu $\overset{u}{K}_n$; je to přímka $\{xy\}$ a přímka $\{q_N\}$, kde

$$(1) \quad q_N = [D(\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1)x + 6(\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1)\dot{x},\ D(\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1)y + 6(\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1)\dot{y}].$$

Pravíme, že $\{q_N\}$ je hlavní přímka oskulačního regulu $\overset{u}{R}_2$. Když a jen když pro každé u jest $\{q_N\} = \{\dot{x}\dot{y}\}$, existuje konstanta λ taková, že $NR\{xy\} = R_a\,\lambda(xy)$.

Důkaz je takřka stejný jako ve **482.**

485. Buď $R\{xy\}_u$ nulová osnova třídy $r \geqq 5$ bez pentataktických přímek. Buď $\beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ $(\beta = \pm 1)$ fleknodální forma ar. osnovy $R\{xy\}$, takže pro každé u bod $\{\varphi_1 x + \varphi_2 y\}$ jest (jediný) fleknod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $\{q_N\}$ hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}$. Definujme $\overset{u}{C}_z$ jako ve **481**; v našem případě $\overset{u}{C}_z$ jest kuželosečka, obsahující fleknod $\{\varphi_1 x + \varphi_2 y\}$. Buď $\{\zeta\}$ oskulační rovina křivky $C\{\varphi_1 x + \varphi_2 y\}$. Průsečík $\{z_N\}$ přímky $\{q_N\}$ s rovinou $\{\zeta\}$ náleží kuželosečce $\overset{u}{C}_z$.

Že $\overset{u}{C}_z$ je kuželosečka, plyne ze **458** a **481**. Dle **471** (1), **472** (2) a **481** (1) jest

$$(1) \quad \{z\} = \{2(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)(t_1\dot{x} + t_2\dot{y}) + (\dot{\varphi}_2 t_1 - \dot{\varphi}_1 t_2)(t_1 x + t_2 y)\}.$$

Buď

$$(2) \quad \psi = \varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1,$$

$$(3) \quad z_N = 18\psi^2(\dot{\varphi}_1\dot{x} + \dot{\varphi}_2\dot{y}) - 6\psi D\psi(\varphi_1\dot{x} + \varphi_2\dot{y}) + 3\psi D\psi(\dot{\varphi}_1 x + \dot{\varphi}_2 y) - (D\psi^2\varphi_1 x + \varphi_2 y).$$

Snadno vidíme, že $\{z\} = \{z_N\}$, když $t_i = 3\dot{\varphi}_i\psi = \varphi_i D\psi$ $(i = 1, 2)$, takže bod $\{z_N\}$ náleží kuželosečce $\overset{u}{C}_z$. Rovněž snadno vidíme, že bod $\{z_N\}$ jest incidentní s přímkou $\{q_N\}$. Zbývá ukázati, že bod $\{z_N\}$ jest incidentní se ζ, t. j. že jest lin. závislý na ar. bodech

$$\varphi_1 x + \varphi_2 y,\ D(\varphi_1 x + \varphi_2 y),\ D^2(\varphi_1 x + \varphi_2 y).$$

Dle **438** a **472** (1), (3), (9) je však

$$(4)\qquad D(\varphi_1 x+\varphi_2 y)=\varphi_1\dot{x}+\varphi_2\dot{y}+\dot{\varphi}_1 x+\dot{\varphi}_2 y,$$

$$(5)\qquad D^2(\varphi_1 x+\varphi_2 y)=2(\dot{\varphi}_1\dot{x}+\dot{\varphi}_2\dot{y})+\ddot{\varphi}_1 x+\ddot{\varphi}_2 y-j(\varphi_1 x+\varphi_2 y).$$

Ze (3), (4) a (5) vychází ihned, že

$$\begin{aligned} z_N-9\psi^2.D^2(\varphi_1 x+\varphi_2 y)+6\psi.D\psi.D(\varphi_1 x+\varphi_2 y)=\\ =-9\psi[\psi(\ddot{\varphi}_1 x+\ddot{\varphi}_2 y)-D\psi(\dot{\varphi}_1 x+\dot{\varphi}_2 y)]+[9j\psi^2-(D\psi)^2](\varphi_1 x+\varphi_2 y),\end{aligned}$$

takže stačí ukázati ještě, že ar. bod

$$\psi(\ddot{\varphi}_1 x+\ddot{\varphi}_2 y)-D\psi(\dot{\varphi}_1 x+\dot{\varphi}_3 y)$$

jest lin. závislý na ar. bodě $\varphi_1 x+\varphi_2 y$, což plyne ihned z identity

$$\begin{aligned}(\varphi_1\dot{\varphi}_2-\varphi_2\dot{\varphi}_1)(\ddot{\varphi}_1 x+\ddot{\varphi}_2 y)-(\varphi_1\ddot{\varphi}_2-\varphi_2\ddot{\varphi}_1)(\dot{\varphi}_1 x+\dot{\varphi}_2 y)+(\dot{\varphi}_1\ddot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_2\ddot{\varphi}_1)(\varphi_1 x+\varphi_2 y)=\\ =\begin{vmatrix}\varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_1 x+\varphi_2 y\\ \dot{\varphi}_1, & \dot{\varphi}_2, & \dot{\varphi}_1 x+\dot{\varphi}_2 y\\ \ddot{\varphi}_1, & \ddot{\varphi}_2, & \ddot{\varphi}_1 x+\ddot{\varphi}_2 y\end{vmatrix}=0,\end{aligned}$$

neboť dle (2) a **472** (1), (3) jest

$$(6)\qquad \varphi_1\ddot{\varphi}_2-\varphi_2\ddot{\varphi}_1=D(\varphi_1\dot{\varphi}_2-\varphi_2\dot{\varphi}_1)=D\psi.$$

486. Buď $R\{xy\}_u$ regulární osnova třídy $r\geq 5$ obsažená v pevné parabolické lin. kongruenci. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)$. Nechť ar. body $\dot{x},\dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď $\overset{u}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď $R_a\,\chi(xy)=$ $=N\,R\{xy\}$. Buď $\overset{u}{K}_n$ lin. komplex adjungovaný k $\{D[\chi(xy)]\}$. Dvě a jen dvě přímky regulu $\overset{u}{R}_2$ náležejí lin. komplexu $\overset{u}{K}_n$; je to přímka $\{xy\}$ a přímka $\{q_N\}$, kde

$$q_N=(2\chi\dot{x}+D\chi.x,\ 2\chi\dot{y}+D\chi.y).$$

Pravíme, že $\{q_N\}$ je hlavní přímka oskulačního regulu $\overset{u}{R}_2$. Když a jen když pro každé u jest $\{q_N\}=\{\dot{x}\dot{y}\}$, jest $R_a(xy)=$ $=N\,R\{xy\}$.

Důkaz je stejný jako ve **482**.

487. Buď $R\{xy\}_u$ regulární osnova třídy $r\geq 5$ obsažená v pevné parabolické lin. kongruenci. Buď $\{q_N\}$ hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Definujme $\overset{u}{C}_z$ jako ve **481**; $\overset{u}{C}_z$ jest řada bodová soumístná s $\{q_N\}$.

Dle **471** (1), **472** (2) a **478** (1) jest

$$\dot{f}(t_1, t_2) : f(t_1, t_2) = 2D\chi : \chi,$$

takže dle **481** (1)

$$\{z\} = \{2\chi(t_1\dot{x} + t_2\dot{y}) + D\chi(t_1x + t_2y)\}.$$

Lokálni jehlan a projektivni křivosti positivni nebo negativni osnovy.

488. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná positivní nebo negativní osnova virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď g_1, g_2, j po řadě prvý, druhý a čtvrtý unimodulární invariant této ar. osnovy. Buď $\varepsilon = \operatorname{sgn} g_1 = \pm 1$, takže $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$), když $R\{xy\}_u$ jest positivní (negativní) osnova. Je-li $r \geqq 5$, buď g_3 třetí unimodulárni invariant orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď*)

$$h = \varepsilon \frac{4g_1g_2 - (Dg_1)^2}{4|g_1|^{\frac{5}{2}}}, \tag{1}$$

$$k = \frac{g_3}{|g_1|^{-\frac{9}{4}}}, \tag{2}$$

$$\iota = \frac{1}{|g_1|^{\frac{5}{2}}}[g_1^2 j - \tfrac{1}{8} g_1 D^2 g_1 + \tfrac{9}{64}(Dg_1)^2]. \tag{3}$$

Hodnoty výrazů h, k, ι pro dané u jsou orientovanou osnovou $R\{xy\}_u$ a přímkou $\{xy\}_u$ úplně určeny; pravíme, že h, k, ι jest po řadě prvá, druhá, třetí projektivní křivost orientované osnovy $R\{xy\}$. Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}_u$, h a ι se nemění, k přejde v $-k$. Je-li $\varepsilon = -1$, jest $h \geqq 0$. Je-li identicky $h = 0$, jest identicky $k = 0$.

Je-li osnova $R\{xy\}$ obsažena v pevné lin. kongruenci, jest identicky $h = 0$. Nemá-li osnova $R\{xy\}$ pentataktických přímek, jest identicky $h = 0$, když a jen když $R\{xy\}$ má řídící přímku.

Buď K kolineace ar. bodů; buď v K: $x(u) \sim x'(u)$, $y(u) \sim y'(u)$; každá projektivní křivost orientované osnovy $R\{x'y'\}_u$ rovná se identicky příslušné projektivní křivosti orientované osnovy $R\{xy\}_u$.

Dle **422, 436** a **437** jsou h, k, ι úplně určeny orientovanou ar. osnovou $R_a(xy)_u$ a přejdou po řadě v $h, -k, \iota$, změníme-li orientaci této ar. osnovy.

---

*) h má význam, když $r \geqq 4$; k a ι mají význam, když $r \geqq 5$.

Zbývá ukázati, že h, k, ι se nemění, přejdeme-li od $R_a(xy)$ k $R_a\,\tau(xy)$. To vychází po snadném počtu ze **461** a **465**.

Je-li $\varepsilon = -1$, forma $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ jest eliptická. Forma

$$\begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix}$$

nemůže pak (v. **78**) býti eliptická, takže dle **78** (7) jest $h \geqq 0$. Abychom ukázali, že, je-li identicky $h = 0$, je také $k = 0$, předpokládejme — což je dovoleno — že ar. křivky C_ax, C_ay vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Jest

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ DA & DB & DC \\ D^2A & D^2B & D^2C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & -2B & A \\ DC & -2DB & DA \\ D^2C & -2D^2B & D^2A \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2(B^2 - AC), & ADC + CDA - 2BDB, & AD^2C + CD^2A - 2BD^2B \\ ADC + CDA - 2BDB, & -2[(DB)^2 - DA\,.\,DC], & DA.D^2C + DC.D^2A - 2DB \\ AD^2C + CD^2A - 2BD^2B, & DA.D^2C + DC.D^2A - 2DB.D^2B, & -2[(D^2B)^2 - D^2AD^2C] \end{vmatrix},$$

t. j.

$$2g_3^2 = \begin{vmatrix} -2g_1, & -Dg_1, & -D^2g_1 + 2g_2 \\ -Dg_1, & -2g_2, & -Dg_2 \\ -D^2g_1 + 2g_2, & -Dg_2, & -2[(D^2B)^2 - D^2AD^2C] \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Buď identicky $h = 0$, tedy

$$\begin{gathered} 4g_1g_2 - (Dg_1)^2 = 0, \\ \tfrac{1}{2}D(4g_1g_2 - Dg_1)^2 = 2g_1Dg_2 + 2g_2Dg_1 - Dg_1D^2g_1 = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Buď M matice prvých dvou řádků determinantu napravo ve (4). Dle (5) determinant z prvých dvou sloupců matice M, a rovněž determinant z prvého a třetího sloupce matice M jsou rovny nule. Kdyby tedy determinant ze druhého a třetího sloupce matice M nebyl roven nule, byly by dle známé věty elementární algebry oba prvky prvého sloupce matice M rovny nule; to je nemožné, neboť $g_1 \neq 0$. Má tedy matice M hodnost 1, prvé dva řádky v determinantu napravo ve (4) jsou lin. závislé a $g_3 = 0$, takže $k = 0$.

Náleží-li osnova $R\{xy\}$ pevné lin. kongruenci, forma

$$\begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix}$$

jest dle **445** identicky rovna nule, tedy její diskriminant je roven nule, takže $h = 0$ dle (1) a **78** (7). Nemá-li osnova $R\{xy\}$ pentataktických přímek, je dle (1) a **446** identicky $h = 0$, když a jen když všecky oskulační lin. komplexy osnovy $R\{xy\}$ jsou speciální, t. j. (v. **457**) když a jen když $R\{xy\}$ má řídící přímku.

Že h, k, ι se nemění kolineacemi, je zřejmé.

489. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná positivní nebo negativní osnova virtuální třídy $r \geqq 4$. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď $f(t_1, t_2) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ fleknodální forma této ar. osnovy. Buď $g_1 = B^2 - AC$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} g_1 = \pm 1$. Buď $\dot{f}(t_1, t_2) = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2$ asymptotická derivace formy $f(t_1, t_2)$. Buď h prvá projektivní křivost osnovy $R\{xy\}$. Buď

(1) $$F(t_1, t_2) = |g_1|^{-\frac{1}{2}} f(t_1, t_2),$$

(2) $$\dot{F}(t_1, t_2) = \frac{\varepsilon}{2} |g_1|^{-\frac{7}{4}} [2g_1 \dot{f}(t_1, t_2) + Dg_1 f(t_1, t_2)],$$

(3) $$G(t_1, t_2) = |g_1|^{-\frac{5}{4}} \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix}.$$

Jest identicky

(4) $$h\,[F(t_1, t_2)]^2 + \varepsilon\,[\dot{F}(t_1, t_2)]^2 - [G(t_1, t_2)]^2 = 0.$$

Je-li $r \geqq 5$, buď $\ddot{f}(t_1, t_2)$ druhá asymptotická derivace formy $f(t_1, t_2)$ a buď

(5) $$\ddot{F}(t_1, t_2) = \frac{1}{16 g_1^3} \{16 g_1^2 \ddot{f}(t_1, t_2) - 20 g_1 Dg_1 \dot{f}(t_1, t_2) + \\ + [15 (Dg_1)^2 - 8 g_1 D^2 g_1] f(t_1, t_2)\}.$$

Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, formy $F(t_1, t_2)$, $\dot{F}(t_1, t_2)$. $G(t_1, t_2)$, $\ddot{F}(t_1, t_2)$ přejdou po řadě ve $F(t_1, t_2)$, $-\dot{F}(t_1, t_2)$, $-G(t_1, t_2)$, $\ddot{F}(t_1, t_2)$.

Buďte l_1, l_2, m_1, m_2 funkce třídy $r-1$; buď

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{\sqrt{|s|}}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2}{\sqrt{|s|}}, \quad \mu_1 = \frac{m_1}{\sqrt{|s|}}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{\sqrt{|s|}}.$$

Buď

$$x_1 = l_1 x + l_2 y, \quad y_1 = m_1 x + m_2 y.$$

Přejdeme-li od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ k ar. křivkám $C_a x_1$, $C_a y_1$, nechť přejdou formy $F(t_1, t_2)$, $\dot{F}(t_1, t_2)$, $G(t_1, t_2)$, $\ddot{F}(t_1, t_2)$ po řadě ve formy $F_1(t^*_1, t^*_2)$, $\dot{F}_1(t_1^*, t_2^*)$, $G_1(t_1^*, t_2^*)$, $\ddot{F}_1(t_1^*, t_2^*)$. Buď

$$t_1 = \lambda_1 t_1^* + \mu_1 t_2^*, \quad t_2 = \lambda_2 t_2^* + \mu_2 t_2^*.$$

Pak jest

(6) $$F_1(t_1^*, t_2^*) = \operatorname{sgn} s \; F(t_1, t_2),$$

$$\dot F_1(t_1^*, t_2^*) = \operatorname{sgn} s.\, \dot F(t_1, t_2), \tag{7}$$

$$G_1(t_1^*, t_2^*) = G_1(t_1, t_2), \tag{8}$$

$$\ddot F_1(t_1^*, t_2^*) = \operatorname{sgn} s\, \ddot F(t_1, t_2). \tag{9}$$

Že formy $F, \dot F, G, \ddot F$ přejdou po řadě ve $F, -\dot F, -G, \ddot F$, změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, je zřejmé.

Identita (4) vychází snadno ze **78** (8).

Že rovnice (6), (7) a (9) jsou správné, když $s = \pm 1$, vychází snadno ze **430** (7) a **435** (7), (10). Odtud vychází ihned dle **78** (6), že také rovnice (8) je správná, když $s = \pm 1$. Abychom ukázali, že (6), (7), (8) a (9) platí, ať s je jakékoli, potřebujeme tedy ještě pouze — jak snadno se nahlédne — dokázati je za předpokladů: 1°.

$$l_1 = m_2 = \rho \neq 0, \quad l_2 = m_1 = 0.$$

2° ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Za těchto dvou předpokladů vycházejí však rovnice (6), (7), (8) a (9) snadno ze **461**, **464** a **465** (1).

490. Buď $R\{xy\}_a$ orientovaná positivní osnova třídy $r \geqq 4$ bez pentataktických přímek. Žádný oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ nebuď speciální. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R\{xy\}$. Buď g_1 prvý unimodulární invariant této ar. osnovy. Nechť ar. body $\dot x, \dot y$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním vzhledem k ar. osnově $R_a(xy)$. Buď $R_a\, \alpha \sqrt[4]{g_1}\,(xy) = NR\{xy\}$, takže $\alpha = \pm 1$. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď h prvá projektivní křivost této osnovy. Definujme formy $F(t_1, t_2)$, $\dot F(t_1, t_2)$, $G(t_1, t_2)$ jako ve **489**. Lze určiti funkce $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ třídy $r-4$ a znamení $\beta = \pm 1$ tak, aby bylo identicky

$$(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2 = \frac{\beta\gamma}{2\sqrt{|h|}}\,[G(t_1, t_2) - \dot F(t_1, t_2)], \tag{1}$$

$$(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2 = \frac{\beta}{2\sqrt{|h|}}\,[G(t_1, t_2) + \dot F(t_1, t_2)], \tag{2}$$

$$2(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1) = F(t_1, t_2), \tag{3}$$

při čemž jest

$$\gamma = \operatorname{sgn} h = \pm 1. \tag{4}$$

Jest také identicky

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \pm 1. \tag{5}$$

Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \beta$ takto určeny, položme: 1° když $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[8]{g_1}\,(\lambda_1 x + \lambda_2 y), \quad x_2 = \sqrt[8]{g_1}\,(\mu_1 x + \mu_2 y), \\ x_3 &= \tfrac{1}{8} g_1^{-\frac{9}{8}}\,[8 g_1 (\lambda_1 \dot x + \lambda_2 \dot y) + D g_1 (\lambda_1 x + \lambda_2 y)], \\ x_4 &= \tfrac{1}{8} g_1^{-\frac{9}{8}}\,[8 g_1 (\mu_1 \dot x + \mu_2 \dot y) + D g_1 (\mu_1 x + \mu_2 y)], \end{aligned} \tag{6}$$

2^0 když $\alpha = -1$

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
x_1 &= -\sqrt[8]{g_1}\,(\mu_1 x + \mu_2 y), \quad x_2 = \sqrt{g_1}\,(\lambda_1 x + \lambda_2 y),\\
x_3 &= -\tfrac{1}{8} g_1^{-\frac{7}{8}} [8 g_1 (\mu_1 \dot{x} + \mu_2 \dot{y}) + D g_1 (\mu_1 x + \mu_2 y)],\\
x_4 &= \tfrac{1}{8} g_1^{-\frac{7}{8}} [8 g_1 (\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y}) + D g_1 (\lambda_1 x + \lambda y)].
\end{aligned}
$$

Jest identicky

$$
(8) \qquad (x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = \omega.
$$

Zvolíme-li znamení α, jest pro každé u jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 orientovanou osnovou $R\{xy\}$ a přímkou $\{xy\}_u$ dvojznačně určen: vedle x_1, x_2, x_3, x_4 stejné oprávnění má jehlan $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, $-x_4$. Pravíme, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_a \alpha \sqrt[8]{g_1}\,(xy)$. Změníme-li znamení α, jest $-x_2$, x_1, $-x_4$, x_3 lokální jehlan. Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, jest x_1, x_2, $-x_3$, $-x_4$ lokální jehlan*).

Body $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ jsou fleknody osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Je-li $\gamma = -1$, body $\{x_1 + x_2\}$, $\{x_1 - x_2\}$ jsou komplexové body osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Přímky $\{x_1\, x_3\}$, $\{x_2\, x_4\}$ jsou fleknodální tečny osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Přímka $\{x_3\, x_4\}$ jest hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Ukažme nejprve, že kvadratické formy $F(t_1, t_2)$, $\dot{F}(t_1, t_2)$, $G(t_1, t_2)$ jsou lin. nezávislé. Dle **489** (1), (2), (3) stačí ukázati, že jsou lin. nezávislé formy

$$
f(t_1, t_2),\ \dot{f}(t_1\ t_2),
\begin{vmatrix} A t_1 + B t_2, & B t_1 + C t_2 \\ \dot{A} t_1 + \dot{B} t_2, & \dot{B} t_1 + \dot{C} t_2 \end{vmatrix}
= (A\dot{B} - B\dot{A})\, t_1^2 + (A\dot{C} - C\dot{A})\, t_1 t_2 + (B\dot{C} - C\dot{B})\, t_2^2.
$$

Máme tedy ukázati, že jest různý od nuly determinant

$$
\begin{vmatrix} A, & \dot{A}, & A\dot{B} - B\dot{A} \\ 2B, & 2\dot{B}, & A\dot{C} - C\dot{A} \\ C, & \dot{C}, & B\dot{C} - C\dot{B} \end{vmatrix}
= 4 (A\dot{B} - B\dot{A})(B\dot{C} - C\dot{B}) - (A\dot{C} - C\dot{A})^2 =
$$
$$
= 4 (B^2 - AC)(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}) - (A\dot{C} + C\dot{A} - B\dot{B})^2 = 4 g_1 g_2 - (D g_1)^2,
$$

tedy dle **488** (1), že $h \neq 0$. Ježto však $R\{xy\}$ nemá pentataktických přímek, je dle **446** pro každé u $4 g_1 g_2 - (D g_1)^2 \neq 0$, neboť oskulační komplex osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ není speciální pro žádné u.

---

*) Nezáleží-li na tom, jak bylo zvoleno znamení α a orientace osnovy $R\{xy\}$, pravíme stručně, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Pak jest ovšem lokální jehlan určen osmiznačně.

Ježto $\varepsilon = \text{sgn}\,(B^2 - AC) = 1$ (neboť $R\{xy\}$ je positivní osnova), lze určiti $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tak, že jest vyhověno rovnici (3). Diskriminant pravé strany ve (3) jest však dle **489** (1) roven 1; počítáme-li diskriminant levé strany, vidíme, že platí (5). Součin pravých stran rovnic (1) a (2) jest dle (4) roven

$$\frac{1}{4h}\left\{[G(t_1, t_2)]^2 - [\dot{F}(t_1, t_2)]^2\right\},$$

čili dle **489** (4), ježto $\varepsilon = 1$, roven $\frac{1}{4}[F(t_1, t_2)]^2$, t. j. dle (3) roven

$$(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2 (\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2.$$

Odtud vychází nejprve, že bude-li vyhověno rovnicím (2) a (3), bude vyhověno též rovnicím (1) a (5). Za druhé však vychází odtud, že zvolíme-li $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tak, že jest vyhověno rovnici (3), pravá strana rovnice (2) nabude některé ze tří hodnot

$$\nu_1 (\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1),$$
$$\nu_2 (\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2,$$
$$\nu_3 (\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2,$$

kde $\nu_i\,(i = 1, 2, 3)$ nezávisí na t_1, t_2. Prvý případ je však vyloučen, neboť dle (3) by pak bylo identicky v t_1, t_2

$$\frac{\beta}{\sqrt{|h|}}\left[G(t_1, t_2) + \dot{F}(t_1, t_2)\right] - \nu_1 F(t_1, t_2) = 0,$$

což je nemožné, neboť formy $F, \dot{F}, G$ jsou lin. nezávislé. Druhý případ přejde ve třetí, píšeme-li místo $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ po řadě $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$, čímž rovnice (3) se nezmění. Můžeme tedy předpokládati, že nastane případ třetí, t. j. že

$$\nu_3 (\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2 = \frac{\beta}{2\sqrt{|h|}}\left[G(t_1, t_2) + \dot{F}(t_1, t_2)\right].$$

Jest $\nu_3 \neq 0$, neboť jinak by formy $\dot{F}, G$ byly lin. nezávislé; můžeme tedy — majíce k disposici libovolné znamení β — předpokládati, že $\nu_3 > 0$. Stačí nyní místo $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ zavésti po řadě $\sqrt{\nu_3}\,.\,\lambda_1$, $\sqrt{\nu_3}\,.\,\lambda_2$, $\frac{1}{\sqrt{\nu_3}}\mu_1$, $\frac{1}{\sqrt{\nu_3}}\mu_2$, čímž rovnice (3) se nezmění, načež bude splněna i rovnice (2), a tedy — jak jsme viděli — též (1) a (5). Je-li $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ jedno řešení těchto rovnic, je patrně $-\lambda_1, -\lambda_2, -\mu_1, -\mu_2$ druhé řešení a jiných řešení není. Vidíme tedy, že, jsou-li dány ar. křivky $C_\alpha x$, $C_\alpha y$ a znamení α, jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 je určen dvojznačně.

Přejděme nyní, jako ve **489**, od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ k ar. křivkám $C_a x_1$, $C_a y_1$, kladouce

$$x_1 = l_1 x + l_2 y, \quad y_1 = m_1 x + m_2 y,$$
$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = s,$$

a zaveďme současně t_1^*, t_2^* místo t_1, t_2 substitucí

(9) $$t_1 = \frac{l_1 t_1^* + m_1 t_2^*}{\sqrt{|s|}}, \quad t_2 = \frac{l_2 t_1^* + m_2 t_2^*}{\sqrt{|s|}},$$

takže jest

(10) $$t_1^* x_1 + t_2^* y_1 = |s|^{\frac{1}{2}} (t_1 x + t_2 y).$$

Vzniknou-li $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$ z x_1, y_1 asymptotickým derivováním, je také

(11) $$t_1^* \dot{x}_1 + t_2^* \dot{y}_1 = |s|^{-\frac{1}{2}} \left[t_1 \dot{x} + t_2 \dot{y} + \frac{1}{2} \frac{Ds}{s} (t_1 x + t_2 y) \right].$$

Snadno vidíme, že rovnici (11) stačí verifikovati ve dvou případech: 1° když $|s| = 1$, 2° když $s > 0$, $l_1 = m_2 = \sqrt{s}$, $l_2 = m_1 = 0$. V prvém případě (11) plyne ze **432** (6), ve druhém případě ze **461** a **463** (1). Nechť β, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 přejde těmito substitucemi po řadě v β_1, λ_1^*, λ^*_2, μ_1^*, μ_2^* Dle (1), (2), (3) a **489** (6), (7), (8) máme vyhověti: 1° když $s > 0$, rovnicím

$$\beta_1 (\lambda_1^* t_2^* - \lambda_2^* t_1^*)^2 = \beta (\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2,$$
$$\beta_1 (\mu_1^* t_2^* - \mu_2^* t_1^*)^2 = \beta (\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2,$$
$$(\lambda_1^* t_2^* - \lambda_2^* t_1^*)(\mu_1^* t_2^* - \mu_2^* t_1^*) = (\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1);$$

2° když $s < 0$, rovnicím

$$\beta_1 (\lambda_1^* t_2^* - \lambda_2^* t_1^*)^2 = \beta\gamma (\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2,$$
$$\beta_1 (\mu_1^* t_2^* - \mu_2^* t_1^*)^2 = \beta\gamma (\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2,$$
$$(\lambda_1^* t_2^* - \lambda_2^* t_1^*)(\mu_1^* t_2^* - \mu_2^* t_1^*) = -(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1).$$

Ježto je dovoleno současně změniti znamení při λ_1^*, λ_2^*, μ_1^*, μ_2^*, stačí dle (9) zvoliti tyto výrazy: 1° když $s > 0$, dle rovnic

(12) $$\lambda_1 = \frac{l_1 \lambda_1^* + m_1 \lambda_2^*}{\sqrt{s}}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2 \lambda_1^* + m_2 \lambda_2^*}{\sqrt{s}},$$
$$\mu_1 = \frac{l_1 \mu_1^* + m_1 \mu_2^*}{\sqrt{s}}, \quad \mu_2 = \frac{l_2 \mu_1^* + m_2 \mu_2^*}{\sqrt{s}},$$

2° když $s < 0$, dle rovnic

(13) $$\lambda_1 = -\frac{l_1 \mu_1^* + m_1 \mu_2^*}{\sqrt{|s|}}, \quad \lambda_2 = -\frac{l_2 \mu_1^* + m_2 \mu_2^*}{\sqrt{|s|}},$$
$$\mu_1 = \frac{l_1 \lambda_1^* + m_1 \lambda_2^*}{\sqrt{|s|}}, \quad \mu_2 = \frac{l_2 \lambda_1^* + m_2 \lambda_2^*}{\sqrt{|s|}},$$

takže dle (10) a (11) jest: 1° když $s > 0$,

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
&\lambda_1{}^* x_1 + \lambda_2{}^* y_1 = s^{\frac{1}{2}} (\lambda_1 x + \lambda_2 y), \quad \mu_1{}^* x_1 + \mu_2{}^* y_1 = s^{\frac{1}{2}} (\mu_1 x + \mu_2 y), \\
&\lambda_1{}^* \dot{x}_1 + \lambda_2{}^* \dot{y}_1 = s^{-\frac{1}{2}} \left[\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \frac{1}{2} \frac{Ds}{s} (\lambda_1 x + \lambda_2 y)\right], \\
&\mu_1{}^* \dot{x}_1 + \mu_2{}^* \dot{y}_1 = s^{-\frac{1}{2}} \left[\mu_1 \dot{x} + \mu_2 \dot{y} + \frac{1}{2} \frac{Ds}{s} (\mu_1 x + \mu_2 y)\right];
\end{aligned}
$$

2° když $s < 0$,

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
&\lambda_1{}^* x_1 + \lambda_2{}^* y_1 = |s|^{\frac{1}{2}} (\mu_1 x + \mu_2 y), \quad \mu_1{}^* x_1 + \mu_2{}^* y_1 = -|s|^{\frac{1}{2}} (\lambda_1 x + \lambda_2 y), \\
&\lambda_1{}^* \dot{x}_1 + \lambda_2{}^* \dot{y}_1 = |s|^{-\frac{1}{2}} \left[\mu_1 \dot{x} + \mu_2 \dot{y} + \frac{1}{2} \frac{Ds}{s} (\mu_1 x + \mu_2 y)\right], \\
&\mu_1{}^* \dot{x}_1 + \mu_2{}^* \dot{y}_1 = -|s|^{-\frac{1}{2}} \left[\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \frac{1}{2} \frac{Ds}{s} (\lambda_1 x + \lambda_2 y)\right].
\end{aligned}
$$

Chceme-li při přechodu od $C_a x$, $C_a y$ k $C_a x_1$, $C_a y_1$ zachovati normu $R_a \alpha \sqrt[4]{g_1}(xy)$, musí znamení α přejíti ve znamení $\alpha_1 = \alpha \,.\, \mathrm{sgn}\, s$. Je-li totiž g^* prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(x_1 y_1) = R_a\, s(xy)$, jest dle **465** (1)

$$
(16)\qquad g_1{}^* = s^{-4} g_1,
$$

takže $\alpha_1 \sqrt[4]{g_1{}^*}\,(x_1 y_1) = \alpha \sqrt[4]{g_1}\,(xy)$. Je-li $\triangle$ diferenciální parametr ar. osnovy $R_a(x_1 y_1)$, jest $\triangle = |s|^{-1} D$ dle **461**, takže dle (16)

$$
(17)\qquad \Delta g_1{}^* = |s|^{-5} \left(D g_1 - 4 \frac{Ds}{s} g_1\right).
$$

Ze (6), (7), (14), (15), (16) a (17) vychází, že lokální jehlan zůstane nezměněn. Že lokální jehlan změní se v souhlase s teorémem, přejdeme-li od normy $R_a \alpha \sqrt[4]{g_1}\,(xy)$ k normě $R_a - \alpha \sqrt[4]{g_1}\,(xy)$ nebo změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, je zřejmé.

Rovnice (8) vychází ihned z (5) a **433** (2).

Že $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ jsou fleknody, je zřejmé dle (3). Ježto $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ jsou fleknody, jsou $\{x_1 x_3\}$, $\{x_2 x_4\}$ fleknodální tečny dle **443** (1). Dle (6) a (7) jest

$$
\{x_3 x_4\} = \{(8 g_1 \dot{x} + D g_1 \,.\, x,\ 8 g_1 \dot{y} + D g_1 \,.\, y)\},
$$

takže $\{x_3 x_4\}$ jest hlavní přímka oskulačního regulu dle **474** (1). Buď $\gamma = -1$; dle (1) a (2) jest

$$
\begin{aligned}
\beta \sqrt{|h|}\, G(t_1, t_2) &= (\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2 - (\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2 = \\
&= -[(\lambda_1 + \mu_1) t_2 - (\lambda_2 + \mu_2) t_1]\,[(\lambda_1 - \mu_1) t_2 - (\lambda_2 - \mu_2) t_1],
\end{aligned}
$$

takže dle **448** (1) a **489** (3) komplexové body jsou

$$
\{\lambda_1 x + \lambda_2 y \pm (\mu_1 x + \mu_2 y)\},
$$

t. j. $\{x_1 \pm x_2\}$.

491. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná negativní osnova třídy $r \geq 4$ bez pentataktických přímek. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď g_1 prvý unimodulární invariant této ar. osnovy. Nechť ar. body $\dot{x}, \dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním vzhledem k ar. osnově $R_a(xy)$. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď h prvá projektivní křivost této osnovy. Definujme formy $F(t_1, t_2)$, $\dot{F}(t_1, t_2)$, $G(t_1, t_2)$ jako ve **489.** Lze určiti funkce $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ třídy $r-4$ a znamení $\beta = \pm 1$ tak, aby bylo identicky

(1) $$(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2 = \frac{\beta}{2\sqrt{h}}\left[\sqrt{h}\, F(t_1, t_2) - \dot{F}(t_1, t_2)\right],$$

(2) $$(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2 = \frac{\beta}{2\sqrt{h}}\left[\sqrt{h}\, F(t_1, t_2) + \dot{F}(t_1, t_2)\right],$$

(3) $$2\sqrt{h}\,(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1) = G(t_1, t_2).$$

Jest také identicky

(4) $$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \pm 1.$$

Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \beta$ takto určeny, položme

(5) $$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[8]{|g_1|}\,(\lambda_1 x + \lambda_2 y), \quad x_2 = \sqrt[8]{|g_1|}\,(\mu_1 x + \mu_2 y), \\ x_3 &= -\frac{1}{8}|g_1|^{-\frac{9}{8}}\,[8 g_1 (\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y}) + D g_1 (\lambda_1 x + \lambda_2 y)], \\ x_4 &= -\frac{1}{8}|g_1|^{-\frac{9}{8}}\,[8 g_1 (\mu_1 \dot{x} + \mu_2 \dot{y}) + D g_1 (\mu_1 x + \mu_2 y)]. \end{aligned}$$

Jest identicky

(6) $$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \omega.$$

Pro každé u jest jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 orientovanou osnovou $R\{xy\}$ a přímkou $\{xy\}_u$ dvojznačně určen: vedle x_1, x_2, x_3, x_4 stejné oprávnění má jehlan $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$. Pravíme, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Pro opačně orientovanou osnovu jest $-x_2, x_1, x_4, -x_3$ lokální jehlan*).

Body $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ jsou komplexové body osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Přímka $\{x_1 x_3\}$ ($\{x_2 x_4\}$) jest asymptotická tečna osnovy $R\{xy\}$ v bodě $\{x_1\}$ ($\{x_2\}$). Přímka $\{x_3 x_4\}$ jest hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

---

*) Nezáleží-li na tom, jak osnova $R\{xy\}$ byla orientována, pravíme stručně, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Pak jest ovšem lokální jehlan určen čtyřznačně.

Důkaz jest obdobný důkazu ve **490**. Všimněme si, že pro všecka u jest $h > 0$. Ježto $\varepsilon = -1$, jest $h \geqq 0$ dle **488**. Kdyby pro nějaké u bylo $h = 0$, musila by pro toto u forma

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix}$$

býti identicky v t_1, t_2 rovna nule, takže $\{xy\}_u$ byla by pentataktická přímka. Jinak by totiž dvojnásobný kořen formy (7) byl dle **78** kořenem formy $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$, což je nemožné, neboť tato forma jest eliptická, ježto $R\{xy\}$ jest negativní osnova.

492. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná positivní osnova třídy $r \geqq 5$ bez pentataktických přímek. Žádný oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}$ nebuď speciální. Buď $R_a\tau(xy) = NR\{xy\}$; buď $\alpha = \operatorname{sgn}\tau$. Buď h, k, ι po řadě prvá, druhá, třetí projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u$. Buď $\gamma = \operatorname{sgn} h = \pm 1$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}_u$ v přímce $\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_a\tau(xy)$. Určeme znamení $\beta = \pm 1$ jako ve **490** *). Buď s normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}$. Platí rovnice

$$(1) \qquad \begin{aligned}
\frac{dx_1}{ds} &= -\frac{1}{4}\frac{k}{h}x_1 + \frac{\beta}{2}\sqrt{|h|}\,x_2 + x_3, \\
\frac{dx_2}{ds} &= -\frac{\beta\gamma}{2}\sqrt{|h|}\,x_1 + \frac{1}{4}\frac{k}{h}x_2 + x_4, \\
\frac{dx_3}{ds} &= (1-\iota)\,x_1 - \frac{1}{4}\frac{k}{h}x_3 + \frac{\beta}{2}\sqrt{|h|}\,x_4, \\
\frac{dx_4}{ds} &= -(1+\iota)\,x_2 - \frac{\beta\gamma}{2}\sqrt{|h|}\,x_3 + \frac{1}{4}\frac{k}{h}x_4.
\end{aligned}$$

Buď $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ duální jehlan adjungovaný k x_1, x_2, x_3, x_4. Platí rovnice

$$(2) \qquad \begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{ds} &= \frac{1}{4}\frac{k}{h}\xi_1 + \frac{\beta\gamma}{2}\sqrt{|h|}\,\xi_2 - (1-\iota)\,\xi_3, \\
\frac{d\xi_2}{ds} &= -\frac{\beta}{2}\sqrt{|h|}\,\xi_1 - \frac{1}{4}\frac{k}{h}\xi_2 + (1+\iota)\,\xi_4, \\
\frac{d\xi_3}{ds} &= -\xi_1 + \frac{1}{4}\frac{k}{h}\xi_3 + \frac{\alpha\beta}{2}\sqrt{|h|}\,\xi_4, \\
\frac{d\xi_4}{ds} &= -\xi_2 - \frac{\beta}{2}\sqrt{|h|}\,\xi_3 - \frac{1}{4}\frac{k}{h}\xi_4.
\end{aligned}$$

Rovnice (2) vycházejí z (1) dle **69**. Rovnice (1) stačí zřejmě dokázati za předpokladu, že $r \geqq 9$, takže $C_a x_1$, $C_a x_2$ jsou třídy 5. Můžeme

*) Dle **490** (2) β je na př. rovno znamení koeficientu při t_1^2 ve formě

$$G(t_1, t_2) + \dot{F}(t_1, t_2).$$

tedy při důkaze rovnic (1) předpokládati, že

(3) $$x_1 = x, \quad x_2 = y.$$

Pro určitost předpokládejme, že $\alpha = 1$. Dle **490** (5), (6) jest

$$(x_1 x_2) = \pm \sqrt[4]{g_1}\,(xy),$$

takže dle (3) $g_1 = 1$. Je tedy dle prvých dvou rovnic **490** (6)

(4) $$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1,$$

takže dle ostatních rovnic **490** (6)

$$x_3 = \dot{x}, \quad x_4 = \dot{y}.$$

Je tedy dle **438**

(5) $$\begin{aligned} Dx_1 &= -bx_1 + ax_2 + x_3, & Dx_2 &= -cx_1 + bx_2 + x_4, \\ Dx_3 &= -(B+j)\,x_1 + Ax_2 - bx_3 + ax_4, & Dx_4 &= -Cx_1 + (B-j)\,x_2 - cx_3 + bx_4. \end{aligned}$$

Dle (4) a **490** (3) jest, ježto $g_1 = 1$,

(6) $$A = 0, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

Ježto $g_1 = 1$, jest $Dg_1 = 0$, tedy dle **489** (2)

$$\dot{F}(t_1, t_2) = \dot{A}\,t_1^2 + 2\,\dot{B}\,t_1, t_2 + \dot{C}\,t_2^2.$$

Na druhé straně dle (4) a **490** (1), (2) jest

$$\dot{F}(t_1, t_2) = \beta\sqrt{|h|}\,(t_1^2 - \gamma t_2^2),$$

takže

(7) $$\dot{A} = \beta\sqrt{|h|}, \quad \dot{B} = 0, \quad \dot{C} = -\beta\gamma\sqrt{|h|}.$$

Dle (6) a **435** (1) je však

$$\dot{A} = 2a, \quad \dot{B} = 0, \quad \dot{C} = -2c,$$

tedy

(8) $$a = \frac{\beta}{2}\sqrt{|h|}, \quad c = \frac{\beta\gamma}{2}\sqrt{|h|}.$$

Dle (7), (8) a **435** (8) jest

(9) $$\ddot{A} = \frac{\beta}{2}\sqrt{|h|}\left(\frac{Dh}{h} + 4b\right), \quad \ddot{C} = -\frac{\beta\gamma}{2}\sqrt{|h|}\left(\frac{Dh}{h} - 4b\right).$$

Dle (6), (7) a (9) jest

$$g_3 = \begin{vmatrix} 0, & \beta\sqrt{|h|}, & \frac{\beta}{2}\sqrt{|h|}\left(\frac{Dh}{h} + 4b\right) \\ -1, & 0, & \ddot{B} \\ 0, & -\beta\gamma\sqrt{|h|}, & -\frac{\beta\gamma}{2}\sqrt{|h|}\left(\frac{Dh}{h} - 4b\right) \end{vmatrix} = 4\,bh.$$

Dle **488** (2) je však $g_3 = k$, tedy

$$b = \frac{1}{4}\frac{k}{h}. \tag{10}$$

Ježto $g_1 = 1$, $Dg_1 = 0$, $D^2 g_1 = 0$, jest dle **488** (3)

$$\iota = j. \tag{11}$$

Konečně dle **470** (1) jest

$$\frac{d}{ds} = D. \tag{12}$$

Z (5), (6), (8), (10), (11) a (12) vychází (1).

493. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná negativní osnova třídy $r \geq 5$ bez pentataktických přímek. Buď h, k, ι po řadě prvá, druhá, třetí projektivní křivost osnovy $R\{xy\}$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Určeme znamení $\beta = \pm 1$ jako ve **491** *). Buď s normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}$. Platí rovnice

$$(1)\quad \begin{aligned}
\frac{dx_1}{ds} &= \frac{1}{2}\sqrt{h}\,x_1 + \frac{\beta}{8}\frac{k}{h}\,x_2 + x_3,\\
\frac{dx_2}{ds} &= -\frac{\beta}{8}\frac{k}{h}\,x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{h}\,x_2 + x_4,\\
\frac{dx_3}{ds} &= -\iota x_1 + \beta x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{h}\,x_3 + \frac{\beta}{8}\frac{k}{h}\,x_4,\\
\frac{dx_4}{ds} &= -\beta x_1 - \iota x_2 - \frac{\beta}{8}\frac{k}{h}\,x_3 - \frac{1}{2}\sqrt{h}\,x_4.
\end{aligned}$$

Buď $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ duální jehlan adjungovaný k x_1, x_2, x_3, x_4. Platí rovnice

$$(2)\quad \begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{ds} &= -\frac{1}{2}\sqrt{h}\,\xi_1 + \frac{\beta}{8}\frac{k}{h}\,\xi_2 + \iota\xi_3 + \beta\xi_4,\\
\frac{d\xi_2}{ds} &= -\frac{\beta}{8}\frac{k}{h}\,\xi_1 + \frac{1}{2}\sqrt{h}\,\xi_2 - \beta\xi_3 + \iota\xi_4,\\
\frac{d\xi_3}{ds} &= -\xi_1 - \frac{1}{2}\sqrt{h}\,\xi_3 + \frac{\beta}{8}\frac{k}{h}\,\xi_4,\\
\frac{d\xi_4}{ds} &= -\xi_2 - \frac{\beta}{8}\frac{k}{h}\,\xi_3 + \frac{1}{2}\sqrt{h}\,\xi_4.
\end{aligned}$$

Důkaz je podobný jako ve **492**.

494. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná positivní osnova třídy $r \geq 5$ bez pentataktických přímek. Osnova $R\{xy\}$ měj řídící

---

*) Dle **491** (1), (2) β je na př. rovno znamení koeficientu při t_1^2 ve formě $F(t_1, t_2)$.

přímku. Definujme formy $\dot{F}(t_1, t_2)$, $\ddot{F}(t_1, t_2)$ jako ve **489**. Lze určiti $l = l(u)$ tak, že jest identicky

$$\ddot{F}(t_1, t_2) = 2l\dot{F}(t_1, t_2). \tag{1}$$

Hodnota výrazu l pro dané u jest orientovanou osnovou $R\{xy\}$ a přímkou $\{xy\}_u$ úplně určena. Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, přejde l v $-l$. Pravíme, že l jest projektivní torse orientované osnovy $R\{xy\}$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď v K: $x(u) \sim x'(u), y(u) \sim y'(u)$; projektivní torse orientované osnovy $R\{x'y'\}$ jest rovněž l.

Ze **489** vychází ihned, že, lze-li vůbec nalézti l tak, aby rovnice (1) byla splněna, jest l určeno jednoznačně orientovanou osnovou $R\{xy\}$ a mění znamení, změníme-li orientaci. Abychom dokázali, že rovnici (1) lze vyhověti, můžeme zřejmě předpokládati, že $r \geq 8$, takže $N R\{xy\}$ je třídy 5. Mimo to můžeme dle **489** (7), (9) předpokládati, že $R_a(xy) = N R\{xy\}$, takže $g_1 = 1$, tedy dle **489** (2), (5)

$$\dot{F}(t_1, t_2) = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1 t_2 + \dot{C}t_2^2,$$
$$\ddot{F}(t_1, t_2) = \ddot{A}t_1^2 + 2\ddot{B}t_1 t_2 + \ddot{C}t_2^2.$$

Pro žádné u není $\dot{F}(t_1, t_2)$ rovna nule identicky v t_1, t_2; neboť jinak by dle **445** příslušná přímka $\{xy\}_u$ byla pentataktická. Stačí tedy ukázati, že všecky determinanty matice

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{C} \end{pmatrix} \tag{2}$$

jsou rovny nule. Ježto $R\{xy\}$ má řídící přímku, jest $h = k = 0$ dle **488**. Dle **436** (4) a **488** (2) je tedy

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{C} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Kdyby pro nějaké u nebyly všecky determinanty matice (2) rovny nule, bylo by dle (3) možno určiti λ, μ tak, aby pro toto u bylo

$$A = \lambda\dot{A} + \mu\ddot{A},\quad B = \lambda\dot{B} + \mu\ddot{B},\quad C = \lambda\dot{C} + \mu\ddot{C}. \tag{4}$$

Stačí tedy ze (4) odvoditi spor. Ježto $Dg_1 = 0$, jest dle **436** (2)

$$A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B} = 0. \tag{5}$$

Derivujeme-li **436** (2), obdržíme dle **435** (1), (8) a **436** (3), že

$$A\ddot{C} + C\ddot{A} - 2B\ddot{B} = 2g_2 - D^2 g_1.$$

Ježto $g_1=1$, jest $Dg_1=D^2g_1=0$. Mimo to $h=0$, takže dle **488** (1) $g_2=0$. Tedy

$$(6)\qquad A\ddot{C}+C\ddot{A}-2B\ddot{B}=0.$$

Dle (4) je však

$$2(B^2-AC)=2B(\lambda\dot{B}+\mu\ddot{B})-A(\lambda\dot{C}+\mu\ddot{C})-C(\lambda\dot{A}+\mu\ddot{A})=$$
$$=-\lambda(A\dot{C}+C\dot{A}-2B\dot{B})-\mu(A\ddot{C}+C\ddot{A}-2B\ddot{B}),$$

takže dle (5) a (6)

$$g_1=B^2-AC=0,$$

což je spor.

495. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná positivní osnova třídy $r\geqq 4$ bez pentataktických přímek. Osnova $R\{xy\}$ měj řídící přímku. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď g_1 prvý unimodulární invariant této ar. osnovy. Nechť ar. body $\dot{x},\dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x,y asymptotickým derivováním vzhledem k ar. osnově $R_a(xy)$. Buď $R_a\,\alpha\sqrt[4]{g_1}(xy)=$ $=N\,R\{xy\}$, takže $\alpha=\pm 1$. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}$. Definujme formy $F(t_1,t_2)$, $\dot{F}(t_1,t_2)$ jako ve **489**. Lze určiti funkce $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$ třídy $r-4$ a znamení $\beta=\pm 1$ tak, aby bylo identicky

$$(1)\qquad 2(\lambda_1 t_2-\lambda_2 t_1)(\mu_1 t_2-\mu_2 t_1)=F(t_1,t_2),$$

$$(2)\qquad (\lambda_1 t_2-\lambda_2 t_1)^2=\beta\dot{F}(t_1,t_2).$$

Jest také identicky

$$(3)\qquad \lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=\pm 1.$$

Jsou-li $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,\beta$ takto určeny, položme

$$(4)\qquad \begin{aligned} x_1&=\sqrt[8]{g_1}\,(\lambda_1 x+\lambda_2 y),\quad x_2=\alpha\sqrt[8]{g_1}\,(\mu_1 x+\mu_2 y),\\ x_3&=\frac{1}{8}g_1^{-\frac{9}{8}}[8g_1(\lambda_1\dot{x}+\lambda_2\dot{y})+Dg_1(\lambda_1 x+\lambda_2 y)],\\ x_4&=\frac{\alpha}{8}g_1^{-\frac{9}{8}}[8g_1(\mu_1\dot{x}+\mu_2\dot{y})+Dg_1(\mu_1 x+\mu_2 y)].\end{aligned}$$

Jest identicky

$$(5)\qquad (x_1x_2x_3x_4)=\omega.$$

Zvolíme-li znamení α, jest pro každé u jehlan x_1,x_2,x_3,x_4 orientovanou osnovou $R\{xy\}$ a přímkou $\{xy\}_u$ dvojznačně určen: vedle x_1,x_2,x_3,x_4 stejné oprávnění má jehlan $-x_1,-x_2,-x_3,$ $-x_4$. Pravíme, že x_1,x_2,x_3,x_4 jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_a\,\alpha\sqrt[4]{g_1}(xy)$. Změníme-li znamení α, jest $x_1,-x_2,x_3,-x_4$ lokální jehlan.

Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, jest $x_1, x_2, -x_3, -x_4$ lokální jehlan *).

Body $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ jsou fleknody osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Přímky $\{x_1\, x_3\}$, $\{x_2\, x_4\}$ jsou fleknodální tečny osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Přímka $\{x_1\, x_3\}$ jest řídící přímka osnovy $R\{xy\}$. Přímka $\{x_3\, x_4\}$ jest hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Ježto $g_1 = B^2 - AC > 0$, lze určiti λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 tak, že jest vyhověno rovnici (1). Porovnáme-li diskriminanty obou stran v (1), vidíme, že platí (3). Ježto $R\{xy\}$ má řídící přímku, jest její oskulační lin. komplex v přímce $\{xy\}_u$ speciální pro každé u; dle **446** a **489** (3) forma $G(t_1, t_2)$ je dělitelna buď $(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2$ nebo $(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2$. Zřejmě můžeme předpokládati, že G je dělitelna $(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2$. Dle **488** je však $h = 0$, takže dle **489** (4) $F(t_1, t_2) = \pm\, G(t_1, t_2)$; tedy lze určiti β tak, že platí (2). Můžeme předpokládati, že $\beta = \pm 1$. Jinak stačilo by místo λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, zavésti po řadě $\frac{\lambda_1}{\sqrt{|\beta|}}, \frac{\lambda_2}{\sqrt{|\beta|}}, \sqrt{|\beta|}\,.\,\mu_1, \sqrt{|\beta|}\,.\,\mu_2$, což nemění rovnici (1); není totiž $\beta = 0$, jak snadno vychází odtud, že $R\{xy\}$ nemá pentataktických přímek.

Je-li λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 jedno řešení rovnic (1), (2), je patrně $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\mu_1$, $-\mu_2$ druhé řešení a jiných řešení není. Vidíme tedy, že, jsou-li dány ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ a znamení α, jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 jest určen dvojznačně. Že lokální jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 jest orientovanou osnovou $R\{xy\}$ a její normou $R_a\, \alpha\, \sqrt[4]{g_1}\,(xy)$ (dvojznačně) určen, vidíme podobně jako ve **490**. Že lokální jehlan mění se v souhlase s teorémem, když změníme znamení α nebo orientaci osnovy $R\{xy\}$, je zřejmé. Že $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ jsou fleknody, $\{x_1\, x_3\}$, $\{x_2\, x_4\}$ fleknodální tečny, $\{x_3\, x_4\}$ hlavní přímka oskulačního regulu, vidíme stejně jako ve **490**. Dle (2) a **446** přímka $\{x_1\, x_3\}$ jest řídící přímkou oskulačního lin. komplexu, t. j. řídící přímkou osnovy $R(xy\}$.

496. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná positivní osnova třídy $r \geq 5$ bez pentataktických přímek. Osnova $R\{xy\}$ měj řídící přímku. Buď $R_a\, \tau(xy) = NR\{xy\}$; buď $\alpha = \operatorname{sgn} \tau$. Buď ι třetí projektivní křivost*) osnovy $R\{xy\}$. Buď l projektivní torse orientované osnovy $R\{xy\}_u$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}_u$ v přímce $\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_a \tau(xy)$. Určeme znamení β jako ve **495*****). Buď s normální

---

*) Nezáleží-li na tom, jak bylo zvoleno znamení α a orientace osnovy $R\{xy\}$, pravíme stručně, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Pak jest ovšem lokální jehlan určen osmiznačně.

) Prvá a druhá projektivní křivost jsou dle **488 identicky rovny nule.

***) Dle **495** (2) je β na př. rovno znamení koeficientu při t_1^2 ve formě $F(t_1, t_2)$.

parametr orientované osnovy $R\{xy\}$. Platí rovnice

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{ds} &= l x_1 + x_3, \\
\frac{dx_2}{ds} &= \frac{\beta}{2} x_1 - l x_2 + x_4, \\
\frac{dx_3}{ds} &= (1 - \iota) x_1 + l x_3, \\
\frac{dx_4}{ds} &= -(1 + \iota) x_2 + \frac{\beta}{2} x_3 - l x_4.
\end{aligned}
$$

Buď $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, duální jehlan adjungovaný k x_1, x_2, x_3, x_4. Platí rovnice

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{ds} &= -l\xi_1 - \frac{\beta}{2} \xi_2 - (1 - \iota) \xi_3, \\
\frac{d\xi_2}{ds} &= l\xi_2 + (1 + \iota) \xi_4, \\
\frac{d\xi_3}{ds} &= -\xi_1 - l\xi_3 - \frac{\beta}{2} \xi_4, \\
\frac{d\xi_4}{ds} &= -\xi_2 + l\xi_4.
\end{aligned}
$$

Rovnice (2) vycházejí z (1) dle **69**. Rovnice (1) stačí zřejmě dokázati za předpokladu, že $r \geqq 9$, takže $C_a x_1$, $C_a x_2$ jsou třídy **5**. Můžeme tedy při důkaze rovnic (1) předpokládati, že

$$
(3) \qquad x_1 = x, \; x_2 = y.
$$

Pro určitost předpokládejme, že $\alpha = 1$. Dle **495** (3), (4) jest

$$
(x_1 x_2) = \pm \sqrt[4]{g_1}\,(xy),
$$

takže dle (3) $g_1 = 1$. Je tedy dle prvých dvou rovnic **495** (4)

$$
(4) \qquad \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 0, \; \mu_1 = 0, \; \mu_2 = 1,
$$

takže dle ostatních rovnic **495** (4)

$$
x_3 = \dot{x}, \; x_4 = \dot{y}.
$$

Je tedy dle **438**

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
&Dx_1 = -bx_1 + ax_2 + x_3, \; Dx_2 = -cx_1 + bx_2 + x_4, \\
&Dx_3 = -(B + j)x_1 + Ax_2 - bx_3 + ax_4, \; Dx_4 = -Cx_1 + (B - j)x_2 - cx_3 + bx_4.
\end{aligned}
$$

Dle (4) a **495** (1), (2) jest, ježto $g_1 = 1$,

$$
(6) \qquad A = 0, \; B = -1, \; C = 0,
$$

$$\dot{A} = 0,\ \dot{B} = 0,\ \dot{C} = \beta. \tag{7}$$

Derivujeme-li (6), obdržíme dle (7) a **435** (1)

$$a = 0,\ c = -\frac{\beta}{2}. \tag{8}$$

Derivujeme-li třetí rovnici (7), obdržíme dle (7) a **435** (8)

$$\ddot{C} = -2\beta b. \tag{9}$$

Ježto $g_1 = 1$, jest dle **489** (2), (5) a **494** (1)

$$\ddot{C} = 2l\dot{C},$$

takže dle (7) a (9)

$$b = -l. \tag{10}$$

Ježto $g_1 = 1$, jest dle **488** (3)

$$\iota = j \tag{11}$$

a dle **470** (1)

$$\frac{d}{ds} = D. \tag{12}$$

Z (5), (6), (8), (10), (11) a (12) vychází (1).

497. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná positivní osnova třídy $r \geqq 4$. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď g_1 prvý unimodulární invariant této ar. osnovy. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x$, $C_a y$. Nechť ar. body $\dot{x}, \dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď $R_a\, \alpha \sqrt[4]{g_1}\,(xy) = N R\{xy\}$, takže $\alpha = \pm 1$. Definujme formu $F(t_1, t_2)$ jako ve **489**. Lze určiti funkce $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ třídy $r-3$ tak, aby bylo identicky

$$2(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)(\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1) = F(t_1, t_2), \tag{1}$$

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1, \tag{2}$$

$$a\lambda_1\mu_1 + b(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + c\lambda_2\mu_2 = \mu_2 D\lambda_1 - \mu_1 D\lambda_2 = \lambda_2 D\mu_1 - \lambda_1 D\mu_2. \tag{3}$$

Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ takto určeny, položme

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[8]{g_1}\,(\lambda_1 x + \lambda_2 y),\quad x_2 = \alpha\sqrt[8]{g_1}\,(\mu_1 x + \mu_2 y), \\ x_3 &= \frac{1}{8} g_1^{-\frac{9}{8}}\,[8g_1(\lambda_1\dot{x} + \lambda_2\dot{y}) + Dg_1(\lambda_1 x + \lambda_2 y)], \\ x_4 &= \frac{\alpha}{8} g_1^{-\frac{9}{8}}\,[8g_1(\mu_1\dot{x} + \mu_2\dot{y}) + Dg_1(\mu_1 x + \mu_2 y)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Jest identicky

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \omega. \tag{5}$$

Proměnný jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 není orientovanou osnovou $R\{xy\}^n$ a znamením α úplně určen; je-li však x_1, x_2, x_3, x_4 jedno jeho určení, každé další je tvaru

$$\tau x_1,\ \frac{1}{\tau} x_2,\ \tau x_3,\ \frac{1}{\tau} x_4,$$

kde $\tau \neq 0$ jest libovolná konstanta. Změníme-li znamení α, přejde x_1, x_2, x_3, x_4 v $x_1, -x_2, x_3, -x_4$. Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, přejde x_1, x_2, x_3, x_4 v $x_1, x_2, -x_3, -x_4$.

Body $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ jsou fleknody osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Přímky $\{x_1 x_3\}$, $\{x_2 x_4\}$ jsou fleknodální tečny osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Přímka $\{x_3 x_4\}$ jest hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Je-li osnova $R\{xy\}$ obsažena v pevné lin. kongruenci *), pravíme, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_u\, \alpha \sqrt[4]{g_1}\, (xy)$ **).

Ježto $g_1 = B^2 - AC > 0$, lze určiti $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ tak, že jest

$$2(\varphi_1 t_2 - \varphi_2 t_1)(\psi_1 t_2 - \psi_2 t_1) = F(t_1, t_2).$$

Porovnáním diskriminantů obdržíme $\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 = \pm 1$. Můžeme předpokládati, že

$$\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 = 1;$$

v opačném případě stačilo by vyměniti φ_1, φ_2 s ψ_1, ψ_2. Snadno se vidí, že nejobecnější řešení rovnic (1), (2) jest

$$\lambda_1 = \sigma \varphi_1,\quad \lambda_2 = \sigma \varphi_2,\quad \mu_1 = \frac{1}{\sigma} \psi_1,\quad \mu_2 = \frac{1}{\sigma} \psi_2,$$

kde $\sigma \neq 0$ jest libovolná funkce u. Pro určení σ máme podmínku (3); všimněme si, že ze (2) vychází derivováním, že

$$\mu_2 D\lambda_1 - \mu_1 D\lambda_2 = \lambda_2 D\mu_1 - \lambda_1 D\mu_2.$$

Všímajíce si rovnice (2), obdržíme snadno, že podmínka pro σ jest

$$\frac{D\sigma}{\sigma} = a \varphi_1 \psi_1 + b(\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1) + c \varphi_2 \psi_2 - (\psi_2 D\varphi_1 - \psi_1 D\varphi_2).$$

Odtud vidíme, že 1° rovnice (1), (2), (3) lze řešiti (kvadraturou); 2° je-li $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ jedno řešení, nejobecnější řešení se obdrží, bereme-li místo $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ po řadě

$$\tau \lambda_1,\ \tau \lambda_2,\ \frac{1}{\tau} \mu_1,\ \frac{1}{\tau} \mu_2,$$

---

*) Tato lin. kongruence jest hyperbolická, neboť $R\{xy\}$ jest positivní osnova; její řídící přímky jsou $\{x_1 x_3\}$, $\{x_2 x_4\}$.

**) Nezáleží-li na volbě znamení α ani na orientaci $R\{xy\}$, pravíme stručně, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

kde $\tau \neq 0$ jest libovolná konstanta. Odtud vychází ihned, že s jehlanem x_1, x_2, x_3, x_4 stejně jest oprávněn každý jehlan tvaru

$$\tau x_1, \quad \frac{1}{\tau} x_2, \quad \tau x_3, \quad \frac{1}{\tau} x_4$$

a žádný jiný jehlan.

Přejděme nyní od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ k ar. křivkám $C_a x_1$, $C_a y_1$, kde

$$x_1 = l_1 x + l_2 y, \quad y_1 = m_1 x + m_2 y,$$
$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = s \neq 0.$$

Současně zaveďme t_1^*, t_2^* místo t_1, t_2 substitucí

$$t_1 = \frac{l_1 t_1^* + m_1 t_2^*}{\sqrt{|s|}}, \quad t_2 = \frac{l_2 t_1^* + m_2 t_2^*}{\sqrt{|s|}}, \tag{6}$$

takže platí rovnice **490** (10), (11). Snadno se nahlédne, že rovnice odpovídající rovnicím (1), (2), (3) budou splněny, zavedeme-li místo $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ po řadě $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \mu_1^*, \mu_2^*$ dle rovnic

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{l_1 \lambda_1^* + m_1 \lambda_2^*}{\sqrt{|s|}}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2 \lambda_1^* + m_2 \lambda_2^*}{\sqrt{|s|}}, \\ \mu_1 &= \operatorname{sgn} s \, \frac{l_1 \mu_1^* + m_1 \mu_2^*}{\sqrt{|s|}}, \quad \mu_2 = \operatorname{sgn} s \, \frac{l_2 \mu_1^* + m_2 \mu_2^*}{\sqrt{|s|}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Vskutku: 1° že je splněna rovnice odpovídající rovnici (2), vychází ihned ze (6); 2° že je splněna rovnice odpovídající rovnici (1), vychází ze **489** (6); že je splněna rovnice odpovídající rovnici (3), vychází z identity

$$\begin{aligned} & a_1 \lambda_1^* \mu_1^* + b_1 (\lambda_1^* \mu_2^* + \lambda_2^* \mu_1^*) + c_1 \lambda_2^* \mu_2^* = \\ & = s^{-1} [a \lambda_1 \mu_1 + b (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + c \lambda_2 \mu_2], \end{aligned} \tag{8}$$

v níž a_1, b_1, c_1 jsou asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x_1$, $C_a y_1$. Identitu (8) zřejmě postačí verifikovati ve dvou případech: 1° když $s = \pm 1$, 2° když $l_1 = m_2 = \sqrt{s}$, $l_2 = m_1 = 0$. V prvém případě (8) vychází snadným počtem ze **429** (3); ve druhém případě ze **463** (1).

Ježto $\sqrt[4]{g_1} (xy) = \operatorname{sgn} s \sqrt[4]{g_1^*} (x_1 y_1)$, přejde α v $\alpha_1 = \alpha \operatorname{sgn} s$. Je nyní snadno dle (7) a **490** (10), (11) verifikovati, že přechodem od $C_a x$, $C_a y$ k $C_a x_1$, $C_a y_1$ jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 se nemění. Že se tento jehlan mění v souhlase s teorémem, když změníme znamení α nebo orientaci osnovy $R\{xy\}$, je zřejmé. Rovněž snadno se vidí, že $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ jsou fleknody, $\{x_1 x_3\}$, $\{x_3 x_4\}$ fleknodální tečny a $\{x_3 x_4\}$ hlavní přímka oskulačního regulu.

498. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná negativní osnova třídy $r \geq 4$. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a\{xy\}_u$. Buď g_1 prvý unimodulární invariant této ar. osnovy. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek

$C_a x$, $C_a y$. Nechť ar. body $\dot{x}$, $\dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď $R_a \alpha \sqrt[4]{|g_1|}\,(xy) = N R\{xy\}$, takže $\alpha = \pm 1$. Definujme formu $F(t_1 t_2)$ jako ve **489**. Lze určiti funkce λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 třídy $r-3$ a znamení $\beta = \pm 1$ tak, aby bylo identicky

$$(\lambda_1 t_2 - \lambda_2 t_1)^2 + (\mu_1 t_2 - \mu_2 t_1)^2 = \beta F(t_1, t_2), \tag{1}$$

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(a\lambda_1 + b\lambda_2 + D\lambda_2)\lambda_1 + (b\lambda_1 + c\lambda_2 - D\lambda_1)\lambda_2 + (a\mu_1 + b\mu_2 + D\mu_2)\mu_1 +\\ + (b\mu_1 + c\mu_2 - D\mu_1)\mu_2 = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Jsou-li λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 takto určeny, položme

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[8]{|g_1|}\,(\lambda_1 x + \lambda_2 y), \quad x_2 = \alpha \sqrt[8]{|g_1|}\,(\mu_1 x + \mu_2 y),\\ x_3 &= -\frac{1}{8}\,|g_1|^{-\frac{9}{8}}\,[8 g_1 (\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y}) + D g_1 (\lambda_1 x + \lambda_2 y)],\\ x_4 &= -\frac{\alpha}{8}\,|g_1|^{-\frac{9}{8}}\,[8 g_1 (\mu_1 \dot{x} + \mu_2 \dot{y}) + D g_1 (\mu_1 x + \mu_2 y)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Jest identicky

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \omega. \tag{5}$$

Proměnný jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 není orientovanou osnovou $R\{xy\}$ a znamením α úplně určen; je-li však x_1, x_2, x_3, x_4 jedno jeho určení, každé další je tvaru

$$x_1 \cos\tau + x_2 \sin\tau, \quad -x_1 \sin\tau + x_2 \cos\tau, \quad x_3 \cos\tau + x_4 \sin\tau, \quad -x_3 \sin\tau + x_4 \cos\tau.$$

kde τ je libovolná konstanta. Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, přejde x_1, x_2, x_3, x_4 v $x_1, x_2, -x_3, -x_4$. Změníme-li znamení α, přejde x_1, x_2, x_3, x_4 v $x_1, -x_2, x_3, -x_4$.

Přímka $\{x_3 x_4\}$ je hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Je-li osnova $R\{xy\}$ obsažena v pevné lin. kongruenci*), pravíme, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}_u$ v přímce $\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_a \alpha \sqrt[4]{|g_1|}\,(xy)$**).

499. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná regulární osnova třídy $r \geqq 5$ obsažená v pevné hyperbolické lin. kongruenci. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 její lokální jehlan v přímce $\{xy\}_u$. Buď ι její třetí projektivní křivost***). Buď s její normální parametr. Platí

*) eliptické, neboť $R\{xy\}$ jest negativní osnova.

**) Nezáleží-li na volbě znamení α ani na orientaci osnovy $R\{xy\}$, pravíme stručně, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

***) Prvá a druhá projektivní křivost jsou dle 488 identicky rovny nule.

rovnice

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{ds}=x_3,\ \frac{dx_2}{ds}=x_4,\quad \frac{dx_3}{ds}=(1-\iota)\,x_1,\ \frac{dx_4}{ds}=-(1+\iota)\,x_2.$$

Buď $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ duální jehlan adjungovaný k x_1, x_2, x_3, x_4. Platí rovnice

$$(2)\qquad \frac{d\xi_1}{ds}=-(1-\iota)\,\xi_3,\ \frac{d\xi_2}{ds}=(1+\iota)\,\xi_4,\quad \frac{d\xi_3}{ds}=-\xi_1,\ \frac{d\xi_4}{ds}=-\xi_2.$$

Rovnice (2) vycházejí z (1) dle **69.** Rovnice (1) stačí zřejmě dokázati za předpokladu $r \geqq 8$, takže $C_a x_1$, $C_a x_2$ jsou třídy 5. Můžeme tedy při důkaze rovnic (1) předpokládati, že

$$(3)\qquad x_1=x,\ x_2=y.$$

Dle **497** (2), (4) je pak

$$(x_1\, x_2)=\pm \sqrt[4]{g_1}\,(xy),$$

takže dle (3) $g_1=1$. Dle (3) a prvých dvou rovnic **497** (4) jest

$$(4)\qquad \lambda_1=1,\ \lambda_2=0,\ \mu_1=0,\ \mu_2=1.$$

Dle (4) a dalších rovnic **497** (4) jest, ježto $g_1=1$,

$$x_3=\dot{x},\ x_4=\dot{y},$$

takže dle **438**

$$(5)\qquad \begin{aligned} &Dx_1=-bx_1+ax_2+x_3,\ Dx_2=-cx_1+bx_2+x_4,\\ &Dx_3=-(B+j)\,x_1+Ax_2-bx_3+ax_4,\ Dx_4=-Cx_1+(B-j)\,x_2-cx_3+bx_4. \end{aligned}$$

Dle (4) a **497** (1) jest, ježto $g_1=1$,

$$(6)\qquad A=0,\ B=-1,\ C=0.$$

Dle (4) a **497** (3) jest

$$(7)\qquad b=0.$$

Derivujeme-li (6), obdržíme dle **435** (1)

$$(8)\qquad \dot{A}=2a,\ \dot{B}=0,\ \dot{C}=-2c.$$

Ježto osnova $R\{xy\}$ jest obsažena v pevné lin. kongruenci, vymizí dle **445** všecky determinanty matice

$$\begin{pmatrix} A & B & C\\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C}\end{pmatrix},$$

takže dle (6) a (8)

$$a = c = 0. \tag{9}$$

Ježto $g_1 = 1$, jest dle **470** (1) a **488** (3)

$$\frac{d}{ds} = D, \ \iota = j. \tag{10}$$

Z (5), (6), (7), (9) a (10) vychází (1).

500. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná regulární osnova třídy $r \geqq 5$ obsažená v pevné eliptické lin. kongruenci. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 její lokální jehlan v přímce $\{xy\}_u$. Buď ι její třetí projektivní křivost*). Buď s její normální parametr. Určeme znamení $\beta = \pm 1$ jako ve **498****). Platí rovnice

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{ds} = x_3, \ \frac{dx_2}{ds} = x_4, \\ &\frac{dx}{ds} = -\iota x_1 + \beta x_2, \ \frac{dx_4}{ds} = -\beta x_1 - \iota x_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Buď $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ duální jehlan adjungovaný k x_1, x_2, x_3, x_4. Platí rovnice

$$\begin{aligned} &\frac{d\xi_1}{ds} = \iota\xi_3 + \beta\xi_4, \ \frac{d\xi_2}{ds} = -\beta\xi_3 + \iota\xi_4, \\ &\frac{d\xi_3}{ds} = -\xi_1, \ \frac{d\xi_4}{ds} = -\xi_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Důkaz je podobný jako ve **499**.

501. Buďte $R\{xy\}_u$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), $R\{x'y'\}_v$ (v v $\langle a'+0, b'-0\rangle$) orientované positivní (negativní)***) osnovy třídy $r \geqq 5$ bez pentataktických přímek. Žádný oskulační lin. komplex osnovy $R\{xy\}_u$ nebuď speciální. Buď $s(u)$ normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$. Buď $h(u)$, $k(u)$, $\iota(u)$ po řadě prvá, druhá, třetí projektivní křivost orientované osnovy $R\{xy\}_u$. Když a jen když existuje funkce $\varphi(v)$ třídy r v $\langle a', b'\rangle$ taková, že 1⁰ $\frac{d\varphi}{dv} \neq 0$ všude v $\langle a', b'\rangle$; 2⁰ $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$ (v tom případě buď $\delta = +1$) nebo $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$ (v tom případě buď $\delta = -1$); 3⁰ $\delta\, s[\varphi(v)]$ jest normální parametr orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$, 4⁰ $h[\varphi(v)]$, $\delta\, k[\varphi(v)]$, $\iota[\varphi(v)]$ jest

---

*) Prvá a druhá projektivní křivost jsou dle **488** identicky rovny nule.

**) Dle 498 (1) β je rovno na př. znamení koeficientu při t_1^2 ve formě $F(t_1, t_2)$.

***) Je-li $R\{xy\}$ positivní (negativní), také $R\{x'y'\}$ buď positivní (negativní).

po řadě prvá, druhá, třetí projektivní křivost orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$: existuje kolineace K ar. bodů taková, že $R\{xy\} \sim R\{x'y'\}$ v Ass. K.

Že podmínky jsou nutné, je zřejmé; že stačí, vychází snadno dle **68** ze **492** a **493**.

502. Buďte $R\{xy\}_u$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), $R\{x'y'\}_v$ (v v $\langle a'+0, b'-0\rangle$) orientovaná regulární osnova třídy $r \geqq 5$ bez pentataktických přímek. Osnova $R\{xy\}$ měj řídící přímku; stejně osnova $R\{x'y'\}$. Buď $s(u)$ normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$. Buď $\iota(u)$ ($l(u)$) třetí projektivní křivost (projektivní torse) orientované osnovy $R\{xy\}_u$. Když a jen když existuje funkce $\varphi(v)$ třídy r v $\langle a', b'\rangle$ taková, že 1° $\frac{d\varphi}{dv} \neq 0$ všude v $\langle a', b'\rangle$; 2° $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$ (v tom případě buď $\delta = +1$) nebo $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$ (v tom případě buď $\delta = -1$); $\delta\, s[\varphi(v)]$ jest normální parametr orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$; 4° $\iota[\varphi(v)]$ ($\delta\, l[\varphi(v)]$) jest třetí projektivní křivost (projektivní torse) orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$: existuje kolineace K ar. bodů taková, že $R\{xy\} \sim R\{x'y'\}$ v Ass. K.

Podmínky jsou zřejmě nutné; že stačí, vychází dle **68** ze **496**.

503. Buďte $R\{xy\}_u$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), $R\{x'y'\}_v$ (v v $\langle a'+0, b'-0\rangle$) orientované regulární osnovy třídy $r \geqq 5$. Osnova $R\{xy\}$ buď obsažena v pevné lin. kongruenci; stejně osnova $R\{x'y'\}$. Obě tyto lin. kongruence buďte hyperbolické nebo obě eliptické. Buď $s(u)$ normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$. Buď $\iota(u)$ třetí projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u$. Když a jen když existuje funkce $\varphi(v)$ třídy r v $\langle a', b'\rangle$ taková, že 1° $\frac{d\varphi}{dv} \neq 0$ všude v $\langle a', b'\rangle$; 2° $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$ (v tom případě buď $\delta = +1$) nebo $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$ (v tom případě buď $\delta = -1$); 3° $\delta\, s[\varphi(v)]$ jest normální parametr orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$; 4° $\iota[\varphi(v)]$ jest třetí projektivní křivost orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$: existuje kolineace K ar. bodů taková, že $R\{xy\} \sim R\{x'y'\}$ v Ass. K.

Podmínky jsou zřejmě nutné; že stačí, vychází dle **68** ze **499** a **500**.

Lokální jehlan a projektivní křivosti nulové osnovy.

504. Buď $R\{xy\}_u$ nulová osnova třídy $r \geqq 6$ bez pentataktických přímek. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď $\beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ ($\beta = \pm 1$) fleknodální forma této ar. osnovy. Buď $\dot{\varphi}_2 t_1 - \dot{\varphi}_1 t_2$ ($\ddot{\varphi}_2 t_1 - \ddot{\varphi}_1 t_2$) prvá (druhá) asymptotická derivace formy $\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2$. Buď

$$\psi = \varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \varphi_2 \dot{\varphi}_1, \quad \varepsilon = \beta \operatorname{sgn} \psi = \pm 1. \tag{1}$$

Znamení ε jest orientovanou osnovou $R\{xy\}_u$ úplně určeno a přejde v $-\varepsilon$, změníme-li orientaci této osnovy. Pravíme, že $R\{xy\}_u$ jest positivně (negativně) orientována, když $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$).

Buď

$$g = |\psi|^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{\dot{\varphi}_2 \ddot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1 \ddot{\varphi}_2}{\psi} - \frac{1}{3} \frac{D^2 \psi}{\psi} + \frac{5}{9} \left(\frac{D\psi}{\psi} \right)^2 \right], \tag{2}$$

$$\iota = |\psi|^{-\frac{2}{3}} \left[j - \frac{1}{6} \frac{D^2 \psi}{\psi} + \frac{7}{18} \left(\frac{D\psi}{\psi} \right)^2 \right]. \tag{3}$$

Hodnoty výrazů g, ι pro dané u jsou osnovou $R\{xy\}$ a přímkou $\{xy\}_u$ úplně určeny; pravíme, že g (ι) jest prvá (druhá) projektivní křivost osnovy $R\{xy\}$. Výraz $g - 2\iota$ má význam, i když $r = 5$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď v K: $x(u) \sim x'(u)$, $y(u) \sim y'(u)$; prvá (druhá) projektivní křivost osnovy $R\{x'y'\}$ jest rovněž rovna $g(\iota)$.

Ze **472** (7), (8) vychází snadno, že g a ι jsou ar. osnovou $R_a(xy)$ jednoznačně určeny a že se nemění, přejdeme-li od $R_a(xy)$ k $R_a - (xy)$. Že $g - 2\iota$ má význam, když $r = 5$, je zřejmé. Abychom viděli, že g a ι jsou úplně určeny osnovou $R\{xy\}$, stačí tedy ukázati, že se nemění, přejdeme-li od $C_a x$, $C_a y$ k $C_a \bar{x}$, $C_a \bar{y}$, kde $\bar{x} = \varrho x$, $\bar{y} = \varrho y$; mimo to můžeme při tomto důkaze předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky, takže $\dot{\varphi}_i = D\varphi_i$, $\ddot{\varphi}_i = D^2 \varphi_i$ ($i = 1, 2$). Důkaz pak vychází snadno ze **461** a **471** (6).

Že g a ι se nemění kolineacemi, je zřejmé. Že znamení ε jest orientovanou osnovou $R\{xy\}$ určeno a že přejde v $-\varepsilon$, změníme-li orientaci, vychází snadno ze **435** (7), **464** (1), **471** (6) a **472** (7).

505. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná nulová osnova třídy $r \geqq 5$ bez pentataktických přímek. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď $\beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ ($\beta = \pm 1$) fleknodální forma této ar. osnovy. Buď $\dot{\varphi}_2 t_1 - \dot{\varphi}_1 t_2$ asymptotická derivace formy $\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2$. Nechť ar. body $\dot{x}, \dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buď $\psi = \varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \varphi_2 \dot{\varphi}_1$. Buď ω znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď

$$\begin{aligned} x_1 &= |\psi|^{-\frac{1}{6}} (\varphi_1 x + \varphi_2 y), \\ x_2 &= \varepsilon |\psi|^{-\frac{1}{2}} \left[\dot{\varphi}_1 x + \dot{\varphi}_2 y - \frac{1}{3} \frac{D\psi}{\psi} (\varphi_1 x + \varphi_2 y) \right], \end{aligned} \tag{1}$$

$$x_3 = \varepsilon |\psi|^{-\frac{1}{6}} \left[\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \frac{1}{6}\frac{D\psi}{\psi}(\varphi_1 x + \varphi_2 y)\right],$$

$$(1) \qquad x_4 = |\psi|^{-\frac{5}{6}} \left[\dot{\varphi}_1 \dot{x} + \dot{\varphi}_2 \dot{y} - \frac{1}{3}\frac{D\psi}{\psi}(\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y}) + \frac{1}{6}\frac{D\psi}{\psi}(\dot{\varphi}_1 x + \dot{\varphi}_2 y) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{18}\left(\frac{D\psi}{\psi}\right)^2 (\varphi_1 x + \varphi_2 y)\right].$$

Jest identicky

$$(2) \qquad (x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = \omega.$$

Pro každé u jest jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 osnovou $R\{xy\}$ a přímkou $\{xy\}_u$ dvojznačně určen: vedle x_1, x_2, x_3, x_4 stejné oprávnění má $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$. Pravíme, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Bod $\{x_1\}$ je fleknod osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Přímka $\{x_1 x_3\}$ je fleknodální tečna osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Bod $\{x_4\}$ náleží kuželosečce $\overset{u}{C}_z$ definované ve **481**. Přímka $\{x_2 x_4\}$ jest asymptotická tečna osnovy $R\{xy\}$ v bodě $\{x_2\}$. Přímka $\{x_3 x_4\}$ je hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Ze **432** a **472** (7), (12), (14) vychází snadno, že jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 jest (dvojznačně) určen ar. osnovou $R_a(xy)_u$ a že se nemění, přejdeme-li od $R_a(xy)_u$ k $R_a -(xy)_u$. Abychom ukázali, že jest (dvojznačně) určen osnovou $R\{xy\}$, stačí tedy ukázati, že se nemění, přejdeme-li od $C_a x$, $C_a y$ k $C_a \varrho x$, $C_a \varrho y$, při čemž můžeme předpokládati, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Že za těchto předpokladů lokální jehlan se nemění, vychází snadným počtem ze **461** a **471** (6).

Že bod $\{x_1\}$ je fleknod a že přímka $\{x_1 x_3\}$ je fleknodální tečna, je zřejmé. Snadno se vidí ze **450** (1), že $\{x_2 x_4\}$ jest asymptotická tečna. Že bod $\{x_4\}$ náleží kuželosečce $\overset{u}{C}_z$ a hlavní přímce oskulačního regulu, vychází ze **485** (3). Přímka $\{x_3 x_4\}$ zřejmě náleží oskulačnímu regulu; tedy je to hlavní přímka oskulačního regulu.

506. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná nulová osnova třídy $r \geq 6$ bez pentataktických přímek. Buď $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$), je-li $R\{xy\}_u$ positivně (negativně) orientována. Buď $g(\iota)$ prvá (druhá) projektivní křivost osnovy $R\{xy\}$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 její lokální jehlan. Buď s normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$. Platí rovnice

$$(1) \qquad \varepsilon \frac{dx_1}{ds} = x_2 + x_3, \quad \varepsilon \frac{dx_2}{ds} = g x_1 + x_4,$$
$$\varepsilon \frac{dx_3}{ds} = -\iota x_1 + x_4, \quad \varepsilon \frac{dx_4}{ds} = -x_1 - \iota x_2 + g x_3.$$

Buď $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ duální jehlan adjungovaný k x_1, x_2, x_3, x_4. Platí rovnice

(2)
$$\varepsilon\frac{d\xi_1}{ds} = -g\xi_2 + \iota\xi_3 + \xi_4,\quad \varepsilon\frac{d\xi_2}{ds} = -\xi_1 + \iota\xi_4,$$
$$\varepsilon\frac{d\xi_3}{ds} = -\xi_1 - g\xi_4,\quad \varepsilon\frac{d\xi_4}{ds} = -\xi_2 - \xi_3.$$

Rovnice (2) plynou z (1) dle **69**. Při důkaze rovnic (1) můžeme bez újmy obecnosti předpokládati, že

$$x_1 = x,\ x_2 = \varepsilon y.$$

Pak jest dle prvých dvou rovnic **505** (1)

3) $$\varphi_1 = 1,\ \varphi_2 = 0,\ \dot\varphi_1 = 0,\ \dot\varphi_2 = 1,\ \beta = \varepsilon$$

a tedy dle ostatních rovnic **505** (1)

$$x_3 = \varepsilon\dot x,\ x_4 = \dot y,$$

takže dle **438**

(4)
$$Dx_1 = -bx_1 + \varepsilon ax_2 + \varepsilon x_3,\ \varepsilon Dx_2 = -cx_1 + \varepsilon bx_2 + x_4,$$
$$\varepsilon Dx_3 = -(B+j)x_1 + \varepsilon Ax_2 - \varepsilon bx_3 + ax_4,\ Dx_4 = -Cx_1 + \varepsilon(B-j)x_2 - \varepsilon cx_3 + bx_4.$$

Dle (3) a **471** (1) jest

(5) $$A = 0,\ B = 0,\ C = \beta = \varepsilon.$$

Derivujeme-li (5), obdržíme dle **435** (1)

$$\dot A = 0,\ \dot B = -\varepsilon a,\ \dot C = -2\varepsilon b.$$

Dle (3) a **472** (2) je však

(6) $$\dot A = 0,\ \dot B = -\varepsilon,\ \dot C = 0,$$

takže

(7) $$a = 1,\ b = 0.$$

Dle (3) jest $\psi = 1$, tedy $D\psi = 0$, $D^2\psi = 0$, takže dle **504** (1) a (2)

(8) $$g = \ddot\varphi_1,$$

(9) $$\iota = j.$$

Derivujeme-li (6), obdržíme dle **435** (8)

$$\ddot C = -2\varepsilon C.$$

Dle (3), (8) a **472** (4) je však

$$\ddot C = 2\varepsilon g,$$

takže

(10) $$c = -g.$$

Konečně dle **476** (1) jest, ježto $\psi = 1$,

$$\frac{d}{ds} = D. \tag{11}$$

Ze (4), (5), (7), (9), (10) a (11) vychází (1).

507. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná regulární osnova třídy $r \geqq 6$ obsažená v parabolické lin. kongruenci bez Cayleyovských přímek. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď j čtvrtý unimodulární invariant této ar. osnovy. Buď $R_a \chi(xy) = NR\{xy\}$. Položme

$$\zeta = j + \sqrt{|\chi|}\, D^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|\chi|}}\right). \tag{1}$$

Buď

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \zeta = \pm 1. \tag{2}$$

Znamení ε jest osnovou $R\{xy\}$ úplně určeno; pravíme, že ε jest normální znamení této osnovy. Buď

$$\iota = \frac{\chi^2 D(\chi^{-2}\zeta)}{|\zeta|^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

Hodnota výrazu ι pro dané u jest orientovanou osnovou $R\{xy\}_u$ a přímkou $\{xy\}_u$ úplně určena; pravíme, že ι jest projektivní křivost osnovy $R\{xy\}$. Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, ι přejde v $-\iota$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď v K: $x(u) \sim x'(u)$, $y(u) \sim y'(u)$. Normální znamení (projektivní křivost) osnovy $R\{x'y'\}_u$ jest $\varepsilon(\iota)$.

Je zřejmé, že ε a ι jsou určeny orientovanou ar. osnovou $R_a(xy)$ a že se nemění, přejdeme-li od $R_a(xy)$ k $R_a-(xy)$. Abychom viděli, že ε a ι jsou určeny orientovanou osnovou $R\{xy\}$, stačí tedy ukázati, že se nemění, přejdeme-li od $C_a x$, $C_a y$ k $C_a \varrho x$, $C_a \varrho y$. D přejde dle **461** v $\varrho^{-2} D$. Jak jsme ve **478** viděli, χ přejde v $\varrho^{-2}\chi$. Dle **465** (2) j přejde v $\varrho^{-4}\left[j + \varrho D^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]$. Odtud snadným počtem vychází, že ζ přejde v $\varrho^{-4}\zeta$, takže $\varepsilon = \operatorname{sgn} \zeta$ a $\chi^{-2}\zeta$ se nemění*). Nyní již lehko vidíme, že ι se nemění.

Že ε a ι se chová při změně orientace a při kolineacích v souhlase s theorémem, je zřejmé.

508. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná regulární osnova třídy $r \geqq 5$ obsažená v pevné parabolické lin. kongruenci bez Cayleyov-

*) Přes to není výraz $\chi^{-2}\zeta$ osnovou $R\{xy\}$ určen, neboť χ bylo definováno pouze až na konstantní faktor.

ských přímek. Buď D diferenciální parametr orientované ar. osnovy $R_a(xy)_u$. Buď $\beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ ($\beta = \pm 1$) fleknodální forma této ar. osnovy. Nechť ar. body $\dot{x}$, $\dot{y}$ vzniknou z ar. bodů x, y asymptotickým derivováním. Buďte a, b, c asymptotické funkce orientovaných ar. křivek $C_a x$, $C_a y$. Buď $\omega(\varepsilon)$ znamení (normální znamení) osnovy $R\{xy\}$. Buď ι projektivní křivost této osnovy. Buď $R_a \chi(xy) = NR(xy)$. Definujme ζ jako v **507** (1). Lze určiti funkce λ_1, λ_2 třídy $r - 4$ tak, že jest identicky

(1) $$\varphi_1 \lambda_2 - \varphi_2 \lambda_1 = \chi^2,$$

(2) $$D\lambda_1 = \left(b + \frac{D\chi}{\chi}\right)\lambda_1 + c\lambda_2, \quad D\lambda_2 = -a\lambda_1 + \left(-b + \frac{D\chi}{\chi}\right)\lambda_2.$$

Jsou-li λ_1, λ_2 takto určeny, položme

(3) $$\begin{aligned} x_1 &= |\chi|^{-\frac{1}{2}}(\varphi_1 x + \varphi_2 y), \quad x_2 = \beta\zeta|\chi|^{-\frac{5}{2}}(\lambda_1 x + \lambda_2 y), \\ x_3 &= |\chi\zeta|^{-\frac{1}{2}}\left[\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \frac{1}{2}\frac{D\chi}{\chi}(\varphi_1 x + \varphi_2 y)\right], \\ x_4 &= \beta\zeta|\chi^5\zeta|^{-\frac{1}{2}}\left[\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \frac{1}{2}\frac{D\chi}{\chi}(\lambda_1 x + \lambda_2 y)\right]. \end{aligned}$$

Jest identicky

(4) $$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \omega\chi^{-2}\zeta = \gamma e^{\varepsilon\int_{u_0}^{u} \iota\, ds\,*)},$$

kde γ je konstanta a sgn $\gamma = \omega$. Pro dané u není jehlan x_1, x_2, x_3, x_4 orientovanou osnovou $R\{xy\}$ a přímkou $\{xy\}_u$ úplně určen; je-li však x_1, x_2, x_3, x_4 jedno jeho určení, každé další určení je tvaru

(5) $$\mu x_1, \quad \mu x_2 + \nu e^{\varepsilon\int_{u_0}^{u} \iota\, ds} x_1, \quad \mu x_3, \quad \mu x_4 + \nu e^{\varepsilon\int_{u_0}^{u} \iota\, ds} x_3,$$

kde μ, ν jsou konstanty ($\mu \neq 0$). Pravíme, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$**). Změníme-li orientaci osnovy $R\{xy\}$, jest x_1, x_2, $-x_3$, $-x_4$ lokální jehlan.

Přímka $\{x_1 x_3\}$ jest řídící přímka osnovy $R\{xy\}$. Křivka $C\{x_2\}$ jest asymptotickou křivkou osnovy $R\{xy\}$; $\Gamma\{x_2 x_4\} = $ Ass. $C\{x_2\}$. Přímka $\{x_3 x_4\}$ jest hlavní přímka oskulačního regulu osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$.

Že lze rovnicím (1) a (2) vyhověti, vychází snadno ze **68** (2), uvážíme-li, že, klademe-li ve (2) $\lambda_1 = \varphi_1$, $\lambda_2 = \varphi_2$, obdržíme — dle definice χ —

*) Při tom s znamená normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}$.
**) Má tedy $R\{xy\}_u$ nekonečně mnoho lokálních jehlanů v přímce $\{xy\}_u$.

identity. Mimo to je zřejmé, že, je-li λ_1, λ_2 jedno řešení rovnic (1), (2), každé další je tvaru

$$\lambda_1 + \nu\varphi_1, \quad \lambda_2 + \nu\varphi_2,$$

kde ν jest libovolná konstanta. Uvážíme-li ještě, že χ jest určeno až na multiplikativní konstantu a φ_1, φ_2 až na společný faktor ± 1, vidíme snadno, že neurčitost lokálního jehlanu je v souhlase s (5).

Buďte nyní l_1, l_2, m_1, m_2 funkce třídy r takové, že

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = s = \pm 1$$

a přejděme od ar. křivek $C_a x$, $C_a y$ k ar. křivkám $C_a x_1$, $C_a y_1$, kladouce

$$x_1 = l_1 x + l_2 y, \quad y_1 = m_1 x + m_2 y,$$

takže β přejde v $s\beta$ (v. **471**), φ_1, φ_2 přejde ve φ'_1, φ'_2, kde

$$\varphi_1 = l_1 \varphi'_1 + m_1 \varphi'_2, \quad \varphi_2 = l_2 \varphi'_1 + m_2 \varphi'_2.$$

Ze **429** vychází snadno, že rovnice (1), (2) zůstanou splněny, zavedeme-li λ'_1, λ'_2 místo λ_1, λ_2 dle rovnic

$$s\lambda_1 = l_1 \lambda'_1 + m_1 \lambda'_2, \quad s\lambda_2 = l_2 \lambda'_1 + m_2 \lambda'_2,$$

takže

$$\varphi_1 x + \varphi_2 y = \varphi' x_1 + \varphi'_2 y_1,$$
$$s(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 y_1.$$

Ze **432** vidíme ihned, že lokální jehlan se nemění. Je tedy lokální jehlan až na libovolné konstanty μ, ν v (5) určen ar. osnovou $R_a(xy)$ a nemění se, přejdeme-li od $R_a(xy)$ k $R_a - (xy)$. Zbývá vyšetřovati, jaký vliv má přechod od $C_a x$, $C_a y$ ku $C_a \varrho x$, $C_a \varrho y$; při tom je dovoleno předpokládati, že $C_a x$, $C_a y$ vytvořují $R_a(xy)$ asymptoticky. Dle **478** χ přejde v $\varrho^{-2}\chi$; dle **461** D přejde v $\varrho^{-2}D$; dle **471** φ_1, φ_2 přejdou v $\varrho^{-2}\varphi_1$, $\varrho^{-2}\varphi_2$. Odtud snadno vychází, že rovnice (3) zůstanou v platnosti, zavedeme-li $\varrho^{-2}\lambda_1$, $\varrho^{-2}\lambda_2$ místo λ_1, λ_2. V **507** jsme viděli, že ζ přejde v $\varrho^{-4}\zeta$. Odtud snadno se vidí, že lokální jehlan se nemění. Výroky na konci teorému jsou zřejmé.

509. Buď $R\{xy\}_u$ orientovaná regulární osnova třídy $r \geq 6$ obsažená v pevné parabolické lin. kongruenci bez Cayleyovských přímek. Buď $\varepsilon(\iota)$ normální znamení (projektivní křivost) osnovy $R\{xy\}$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_u$. Buď s normální parametr této osnovy. Definujme znamení $\beta = \pm 1$ jako v **508**. Platí rovnice

$$\frac{dx_1}{ds} = x_3, \qquad \frac{dx_2}{ds} = \varepsilon(\iota x_2 + x_4), \tag{1}$$
$$\frac{dx_3}{ds} = -\varepsilon\left(x_1 + \frac{1}{2}\iota x_3\right), \qquad \frac{dx_4}{ds} = -x_1 - x_2 + \frac{\varepsilon}{2}\iota x_4.$$

Buď $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ duální jehlan adjungovaný k x_1, x_2, x_3, x_4. Platí rovnice

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{ds} &= \varepsilon\xi_3 + \xi_4, & \frac{d\xi_2}{ds} &= -\varepsilon\iota\xi_2 + \xi_4, \\ \frac{d\xi_3}{ds} &= -\xi_1 + \frac{\varepsilon}{2}\iota\xi_3, & \frac{d\xi_4}{ds} &= -\varepsilon\left(\xi_2 + \frac{1}{2}\iota\xi_4\right). \end{aligned}$$

Rovnice (2) plynou z (1) dle **69**. Důkaz rovnic (1) stačí provésti za předpokladu, že ar. osnova $R_a\chi\{xy\}$ je třídy 6 i můžeme bez újmy obecnosti předpokládati, že $\chi = 1$. Mimo to můžeme zřejmě — užívajíce označení z **508** — předpokládati, že

$$(3)\qquad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \chi = 1.$$

Ze (3) a **508** (1), (2) snadno vychází, že ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky. Dále jest dle (3) a **508** (3)

$$(4)\qquad x_1 = x, \quad x_2 = \beta\zeta y, \quad x_3 = |\zeta|^{-\frac{1}{3}} Dx, \quad x_4 = \beta|\zeta|^{\frac{1}{3}} Dy.$$

Dle **438** jest

$$(5)\qquad \begin{aligned} D^2 x &= -(B + j)x + Ay, \\ D^2 y &= -Cx + (B - j)y. \end{aligned}$$

Dle (3) a **471** (1) jest

$$(6)\qquad A = B = 0, \quad C = \beta.$$

Dle (3) a **507** (1), (2), (3) jest

$$(7)\qquad \zeta = j, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} j, \quad \iota = \frac{Dj}{|j|^{\frac{5}{3}}}.$$

Dle **480** (1) jest

$$(8)\qquad \frac{d}{ds} = |j|^{-\frac{1}{3}} D.$$

Ze (4), (5), (6), (7) a (8) obdržíme po snadném počtu (1).

510. Buďte $R\{xy\}_u$ (u v $\langle a + 0, b - 0\rangle$), $R\{x'y'\}_v$ (v v $\langle a' + 0, b' - 0\rangle$) orientované nulové osnovy třídy $r \geq 6$ bez pentataktických přímek. Buď $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$), je-li osnova $R(xy)_u$ positivně (negativně) orientována; týž význam měj $\varepsilon' = \pm 1$ pro $R\{x'y'\}_u$. Buď $s(u)$ normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}$. Buď $g(u)$ ($\iota(u)$) prvá (druhá) projektivní křivost této osnovy. Když a jen když existuje funkce $\varphi(v)$ třídy r v $\langle a', b'\rangle$ taková, že: 1^0 $\dfrac{d\varphi}{dv} \neq 0$ všude v $\langle a', b'\rangle$; 2^0 $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$ (v tom případě buď $\delta = +1$) nebo $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$ (v tom případě buď $\delta = -1$); 3^0 $\varepsilon' = \delta\varepsilon$, 4^0 $\delta s[\varphi(v)]$ jest normální parametr orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$; 5^0 $g[\varphi(v)]$ ($\iota[\varphi(v)]$) jest prvá (druhá) projektivní křivost osnovy $R\{x'y'\}_v$: existuje kolineace K ar. bodů taková, že $R\{xy\} \sim R\{x'y'\}$ v Ass. K.

Podmínky jsou zřejmě nutné; že stačí, vychází dle **68** z **506**.

511. Buďte $R\{xy\}_u$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), $R\{x'y'\}_v$ (v v $\langle a'+0, b'-0\rangle$) orientované regulární osnovy třídy $r \geqq 6$. Osnova $R\{xy\}_u$ buď obsažena v pevné parabolické lin. kongruenci; stejně $R\{x'y'\}_v$. Ani $R\{xy\}$, ani $R\{x'y'\}$ neměj Cayleyovských přímek. Buď $s(u)$ normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$. Buď ε normální znamení osnovy $R\{xy\}_u$. Buď $\iota(u)$ projektivní torse pro $R\{xy\}_u$. Když a jen když ε jest normální znamení osnovy $R\{x'y'\}$ a mimo to existuje funkce $\varphi(v)$ třídy r v $\langle a', b'\rangle$ taková, že: 1° $\dfrac{d\varphi}{dv} \neq 0$ všude v $\langle a', b'\rangle$; 2° $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$ (v tom případě buď $\delta = 1$) nebo $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$ (v tom případě buď $\delta = -1$); 3° $\delta s[\varphi(v)]$ jest normální parametr orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$; 4° $\delta\, \iota[\varphi(v)]$ jest projektivní křivost pro $R\{x'y'\}_v$: existuje kolineace K ar. bodů taková, že $R\{xy\} \sim$ $\sim R\{x'y'\}$ v Ass. K.

Podmínky jsou zřejmě nutné; že stačí, vychází dle **68** z **509**.

Styk osnov.

512. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ regulární osnovy třídy $r \geqq 3$. Buď $g_1(u)$ ($g_1'(v)$) prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)_u$ ($R_a(x'y')_v$). Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Když a jen když sgn $g_1(u_0) =$ sgn $g_1'(v_0)$, existuje kolineace K ar. bodů taková, že 1° $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2° když $\{x'y'\}_v \sim$ $\sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}_u$ a $R\{x''y''\}_v$ mají čtyřpřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$.

Podmínka je zřejmě nutná dle **304.** Předpokládejme tedy, že je splněna. Buď $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ ($A't_1^2 + 2B't_1t_2 + C't_2^2$) fleknodální forma ar. osnovy $R_a(xy)_u$ ($R_a(x'y')_v$). Snadnou úvahou se nahlédne, že můžeme bez újmy obecnosti učiniti tyto předpoklady: 1° ar. křivky $C_a x$, $C_a y$ vytvořují ar. osnovu $R_a(xy)$ asymptoticky, 2° ar. křivky $C_a x'$, $C_a y'$ vytvořují ar. osnovu $R_a(x'y')$ asymptoticky, 3° $A(u_0) = A'(v_0)$, $B(u_0) = B'(v_0)$, $C(u_0) = C'(v_0)$. Mějte $\dot{x}$, $\dot{y}$, D, J obvyklý význam vzhledem k $R_a(xy)$; týž význam vzhledem k $R_a(x'y')$ mějte $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, Δ, J'. Zřejmě stačí ukázati: Je-li pro $u = u_0$, $v = v_0$

$$x = x', \quad y = y', \quad \dot{x} = \dot{x}', \quad \dot{y} = \dot{y}',$$

mají osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ čtyřpřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Avšak za učiněných předpokladů jest dle **440** (2) a **442** (2)

$$(x'y')_{v_0} = (xy)_{u_0},$$
$$[\Delta(x'y')]_{v=v_0} = [D(xy)]_{u=u_0},$$
$$[\Delta^2(x'y')]_{v=v_0} - [D^2(xy)]_{u=u_0} = -2[j'(v_0) - j(u_0)](xy)_{u_0},$$
$$[\Delta^3(x'y')]_{v=v_0} - [D^3(xy)]_{u=u_0} =$$
$$= -2[j'(v_0) - j(u_0)][D(xy)]_{u=u_0} - 2[(\Delta j')_{v=v_0} - (Dj)_{u=u_0}](xy)_{u_0}.$$

Odtud vychází dle **179** a **208** čtyřpřímkový styk osnov $R\{xy\}$ a $R\{x'y'\}$ v $\{xy\}_{u_0}$.

513. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě positivní osnovy třídy $r \geqq 4$ bez pentataktických přímek o společné přímce $\{xy\}_{u_0} = \{x'y'\}_{v_0}$, takže $(x'y')_{v_0} = \nu(xy)_{u_0}$. Buď $\delta = \pm 1 = \operatorname{sgn} \nu$. Buď g_1 (g_1') prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)_u$ ($R_a(x'y')_v$). Buď $h(u)$ ($h'(v)$) prvá projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u$ ($R\{x'y'\}_v$). Pro všecka $u(v)$ buď $h(u) \neq 0$ ($h'(v) \neq 0$). Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_a\sqrt[4]{g_1}(xy)$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Když a jen když 1° $h(u_0) = h'(v_0)$, 2° x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan v přímce $\{xy\}_{u_0}$ buď orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ nebo opačně orientované osnovy vzhledem k normě $R_a\delta\sqrt[4]{g_1'}(x'y')$, mají osnovy $R\{xy\}_u$ a $R\{x'y'\}_v$ pětipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Ze **304** vychází snadno, že podmínky jsou nutné. Předpokládejme tedy, že jsou splněny. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati: 1° že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ (ne opačně orientované osnovy), 2° že $\delta = +1$. V opačném případě stačilo by totiž 1° změniti orientaci osnovy $R\{x'y'\}_v$, 2° vyměniti ar. body x', y'.

Buď $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ duální jehlan adjungovaný k x_1, x_2, x_3, x_4. Buď $\overset{u_0}{R}_2$ oskulační regulus osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Ze **440** a **490** (6), (7) vychází snadno, že $M\overset{u_0}{R}_2 = M[\xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3]$. Odtud je patrné, že $\overset{u_0}{R}_2$ jest oskulační regulus osnovy $R\{x'y'\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$; mají tedy osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ trojpřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Dle **304** můžeme tedy předpokládati, že

$$(1) \qquad \left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(i = 0, 1, 2;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Ovšem, abychom docílili platnosti rovnic (1), musíme obecně mimo jiné zavésti nový parametr pro $R\{x'y'\}$. Položme zatím $\delta_1 = 1$ ($\delta_1 = -1$), když tato změna parametru nemění (mění) orientaci osnovy $R\{x'y'\}$. Uvidíme v brzku, že $\delta_1 = +1$.

Mějte $D, A, B, C, \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, j, \dot{x}, \dot{y}$ obvyklý význam vzhledem k $R_a(xy)_u$; týž význam vzhledem k $R_a(x'y')_v$ mějte $\Delta, A', B', C', \dot{A}', \dot{B}', \dot{C}', j', \dot{x}', \dot{y}'$. Ze **465** (1) je patrné, že můžeme předpokládati, že

$$(2) \qquad (Dg_1)_{u=u_0} = -(A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})_{u=u_0} \neq 0.$$

Vzhledem k $R_a(xy)_u$ definujme $\dot{F}(t_1, t_2)$ jako ve **489** (2) a $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ jako ve **490**. Stejně definujme $\dot{F}'(t_1, t_2)$, $\lambda_1', \lambda_2', \mu_1', \mu_2'$ vzhledem k $R_a(x'y')_v$. Dle předpokladu $x_1, x_2, \delta_1 x_3, \delta_1 x_4$ jest lokální jehlan orientované osnovy $R_a(x'y')_v$ vzhledem k normě $R_a \sqrt[4]{g_1'}(x'y')$. Odtud a z prvých dvou rovnic **490** (6) vychází, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ jest

(3) $$\sqrt[8]{g_1}\lambda_i = \sqrt[8]{g'_1}\lambda'_i, \quad \sqrt[8]{g_1}\mu_i = \sqrt[8]{g'_1}\mu_i. \qquad (i = 1, 2)$$

Z ostatních rovnic **490** (6) pak vychází, ježto dle (1) $\dot{x}(u_0) = \dot{x}'(v_0)$, $\dot{y}(u_0) = \dot{y}'(v_0)$, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ jest

$$\delta_1\sqrt[8]{g_1}\lambda_i = \sqrt[8]{g'_1}\lambda'_i, \quad \delta_1\sqrt[8]{g_1}\mu_i = \sqrt[8]{g'_1}\mu'_i,$$
$$\delta_1 g_1^{-\frac{7}{8}} Dg_1 \lambda_i = g'^{-\frac{7}{8}}_1 \Delta g'_1 \lambda'_i, \qquad (i = 1, 2)$$
$$\delta_1 g_1^{-\frac{7}{8}} Dg_1 \mu_i = g'^{-\frac{7}{8}}_1 \Delta g'_1 \mu'_i.$$

Porovnáním se (3) vychází jednak, že $\delta_1 = 1$, jak jsme výše tvrdili, jednak

(4) $$\left(\frac{Dg_1}{g_1}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{\Delta g'_1}{g'_1}\right)_{v=v_0}.$$

Dle (3) a **490** (5) jest

(5) $$e\lambda_i(u_0) = \lambda'_i(v_0), \quad e\mu_i(u_0) = \mu'_i(v_0) \qquad (e = \pm 1, \ i = 1, 2)$$

a

(6) $$g_1(u_0) = g'_1(v_0),$$

takže dle (4)

(7) $$(A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})_{u=u_0} = (A'\dot{C}' + C'\dot{A}' - 2B'\dot{B}')_{v=v_0}.$$

Dle (5), (6), **489** (1) a **490** (3) jest

(8) $$A(u_0) = A'(v_0), \quad B(u_0) = B'(v_0), \quad C(u_0) = C'(v_0).$$

Z (1) a (8) vychází dle **442** (2), že lze určiti a_0, b_0 tak, že

$$[\Delta^3(x'y')]_{v=v_0} - [D^3(xy)]_{u=u_0} = a_0[D(xy)]_{u=u_0} + b_0(xy)_{u_0},$$

takže dle **179** a **208** osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají čtyřpřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Dle **304** můžeme tedy předpokládati, že mimo (1) platí rovnice

(9) $$\left(\frac{d^3x}{du^3}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^3x'}{dv^3}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^3y}{du^3}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^3y'}{dv^3}\right)_{v=v_0}.$$

Abychom docílili platnosti rovnic (9), musíme ovšem obecně opět změniti parametr osnovy $R\{x'y'\}$; je však nyní ihned patrné, že tato změna parametru nemění orientaci osnovy $R\{x'y'\}$.

Dle (5) a **490** (1), (2) jest, ježto $h(u_0) = h'(v_0)$,

$$\dot{F}(t_1, t_2) = \pm \dot{F}'(t_1, t_2),$$

takže dle (1), (7), (8), (9) a **489** (2)

(10) $$e_1 \dot{A}(u_0) = \dot{A}'(v_0), \quad e_1 \dot{B}(u_0) = \dot{B}'(v_0), \quad e_1 \dot{C}(u_0) = \dot{C}'(v_0) \qquad (e_1 = \pm 1).$$

Dle (2) a (7) jest $e_1 = +1$. Z (1), (9), (10) a **445** (2) vychází tedy, že lze určiti a_1, b_1 tak, že

(11) $$[\Delta^4(x'y')]_{v=v_0} - [D^4(xy)]_{u=u_0} = a_1 [D(xy)]_{u=u_0} + b_1 (xy)_{u_0}.$$

Z (1), (9) a (11) vychází dle **179**, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají pětipřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$.

514. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě negativní osnovy třídy $r \geqq 4$ o společné přímce $\{xy\}_{u_0} = \{x'y'\}_{v_0}$. Buď $h(u)$ ($h'(v)$) prvá projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u$ ($R\{x'y'\}_v$). Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan osnovy $R\{xy\}_u$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Když a jen když 1[0] $h(u_0) = h'(v_0)$, 2[0] x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{x'y'\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$, mají osnovy $R\{xy\}$ a $R\{x'y'\}$ pětipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Důkaz je podobný důkazu v **513**.

515. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě regulární osnovy třídy $r \geqq 4$. Obě osnovy buďte positivní nebo obě negativní. Buď $h(u)$ ($h'(v)$) prvá projektivní křivost osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Pro všecka $u(v)$ buď $h(u) \neq 0$ ($h'(v) \neq 0$). Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Když a jen když $h(u_0) = h'(v_0)$, lze určiti kolineaci K ar. bodů tak, že 1[0] $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2[0] když $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x''y''\}_v$ mají pětipřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Kolineaci K lze pak určiti v podstatě dvěma způsoby*).

Pro určitost předpokládejme, že dané osnovy jsou positivní. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$ vzhledem k normě $R_a \tau(xy)$ ($\tau > 0$). Buď x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ v přímce $\{x'y'\}_{v_0}$ vzhledem k normě $R_a e\tau'(x'y')$ ($e = \pm 1$, $\tau' > 0$).

Změníme-li orientaci osnovy $R\{x'y'\}$, jest dle **490** $x'_1, x'_2, -x'_3, -x'_4$ její lokální jehlan v přímce $\{x'y\}_{v_0}$ vzhledem k normě $R_a e\tau'(x'y')$. Z **513** je patrné, že žádanou vlastnost má kolineace K, když a jen když 1[0] v K jest buď ($c \neq 0$ je libovolná konstanta)

(1) $$x'_1 \sim cx_1, \quad x'_2 \sim cx_2, \quad x'_3 \sim cx_3, \quad x'_4 \sim cx_4,$$

---

*) Slovy „v podstatě dvěma způsoby“ míníme: Existují dvě kolineace K_1, K_2 takové, že 1[0] neexistuje žádná podobnost P splňující rovnici $K_2 = PK_1$, 2[0] kolineace K vyhovuje podmínkám, když a jen když existuje podobnost P taková, že buď $K = PK_1$ nebo $K = PK_2$.

nebo

(2) $$x'_1 \sim cx_1, \quad x'_2 \sim cx_2, \quad x'_3 \sim -cx_3, \quad x'_4 \sim -cx_4;$$

2^0 znamení e je tak voleno, že, když $(x_1x_2) = \nu(xy)_{u_0}$, $(x'_1y'_2) = \nu'(x'y')_{v_0}$, jest $e = \operatorname{sgn} \nu\nu'$.

Buď v K: $x'(v) \sim x''(v)$, $y'(v) \sim y''(v)$. Následující poznámka, jejíž správnost je z důkazu ve **513** zřejmá, bude užitečná v **516**: Dle **304** lze určiti funkci $\varphi(v) = w$ proměnné v $(\varphi(v_0) = w_0)$ a funkce λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 proměnné w tak, že, klademe-li

$$x'''(w) = \lambda_1 x''(v) + \lambda_2 y''(v), \quad y'''(w) = \mu_1 x''(v) + \mu_2 y''(v),$$

jest

$$\left(\frac{d^i x'''}{dw^i}\right)_{w=w_0} = \left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0}, \quad \left(\frac{d^i y'''}{dw^i}\right)_{w=w_0} = \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0}. \quad \left(0 \leq i \leq 4;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dw^0} = 1\right)$$

Jest pak 1^0 $\dfrac{d\varphi}{dv} > 0$, když kolineace K byla určena dle (1); 2^0 $\dfrac{d\varphi}{dv} < 0$, když kolineace K byla určena dle (2).

516. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě orientované positivní (negativní) osnovy třídy $r+4$ $(r \geq 1)$ bez pentataktických přímek. Buď $h(u)$, $k(u)$, $\iota(u)$ po řadě prvá, druhá, třetí projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u$; týž význam mějte $h'(v)$, $k'(v)$, $\iota'(v)$ pro $R\{x'y'\}_v$. Pro všecka $u(v)$ buď $h(u) \neq 0$ $(h'(v) \neq 0)$. Buď $s(u)$ $(s'(v))$ normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$ $(R\{x'y'\}_v)$. Buď $\{xy\}_{u_0}$ $\{(x'y'\}_{v_0})$ přímka osnovy $R\{xy\}$ $(R\{x'y'\})$. Když a jen když existuje znamení $\delta = \pm 1$ takové, že

(1) $$\delta^i \left(\frac{d^i h}{ds^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i h'}{ds'^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(0 \leq i \leq r;\ \frac{d^0}{ds^0} = \frac{d^0}{ds'^0} = 1\right)$$

(2) $$\delta^{i+1} \left(\frac{d^i k}{ds^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i k'}{ds'^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(0 \leq i \leq r-1;\ \frac{d^0}{ds^0} = \frac{d^0}{ds'^0} = 1\right)$$

(3) $$\delta^i \left(\frac{d^i \iota}{ds^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i \iota'}{ds'^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(0 \leq i \leq r-1;\ \frac{d^0}{ds^0} = \frac{d^0}{ds'^0} = 1\right)$$

existuje kolineace K ar. bodů taková, že 1^0 $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2^0 když $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}$, $R\{x''y''\}$ mají $(r+5)$-přímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Že podmínky jsou nutné, vychází snadno ze **304**. Předpokládejme tedy, že jsou splněny. Dle **515** můžeme předpokládati, že

(4) $$\left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}. \quad \left(0 \leq i \leq 4;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Mimo to dle poznámky na konci **515** můžeme dále předpokládati, že osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ jsou tak orientovány, že v rovnicích (1), (2), (3) jest $\delta = 1$. Za těchto předpokladů ukážeme, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají $(r+5)$-přímkový styk v $\{xy\}_{u_0} = \{x'y'\}_{v_0}$. Zřejmě můžeme dokazovati indukcí vzhledem k r, t. j. míti již za dokázáno, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají $(r+4)$-přímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$, takže můžeme předpokládati, že

$$\left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}. \quad \left(0 \leqq i \leqq r+3; \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{5}$$

Nová změna parametru, jíž je třeba, aby bylo docíleno platnosti rovnic (5), nemění zřejmě orientaci osnovy $R\{x'y'\}_v$, takže předpoklad $\delta = +1$ zůstane v platnosti.

Mějte $D, A, B, C, \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, g_1, g_2, j, \dot{x}, \dot{y}$ obvyklý význam vzhledem, k $R_a(xy)_u$; příslušný význam vzhledem k $R_a(x'y')_v$ mějte $\Delta, A', B', C' g_1', g_2', j'$. Dle (5) a **179** stačí ukázati, že existují čísla a_0, b_0 taková, že

$$[\Delta^{r+4}(x'y')]_{v=v_0} - [D^{r+4}(xy)]_{u=u_0} = a_0 [D(xy)]_{u=u_0} + b_0 (xy)_{u_0}.$$

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že dané osnovy jsou třídy $r+5$. Dle (5) a **442** (3) je pak

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}[\Delta^{r+4}(x'y')]_{v=v_0} - \tfrac{1}{2}[D^{r+4}(xy)]_{u=u_0} = \\ = (\Delta^{r+1}C' - D^{r+1}C)(x\dot{x}) - (\Delta^{r+1}B' - D^{r+1}B)[(x\dot{y}) + (y\dot{x})] + \\ + (\Delta^{r+1}A' - D^{r+1}A)(y\dot{y}) - (\Delta^{r+1}j' - D^{r+1}j)\,D(xy) - (\Delta^{r+2}j' - D^{r+2}j)(xy),\end{aligned}$$

kde napravo je dosaditi $u = u_0$, $v = v_0$. Stačí tedy ukázati, že jest

$$\begin{gathered}(\Delta^{r+1}A')_{v=v_0} = (D^{r+1}A)_{u=u_0}, \quad (\Delta^{r+1}B')_{v=v_0} = (D^{r+1}B)_{u=u_0}, \\ (\Delta^{r+1}C')_{v=v_0} = (D^{r+1}C)_{u=u_0}.\end{gathered} \tag{6}$$

Dle předpokladu jest $\left(\dfrac{d^{r-1}\iota}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} = \left(\dfrac{d^{r-1}\iota'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}$, tedy dle (5) a **470** (1) $(D^{r-1}\iota)_{u=u_0} = (\Delta^{r-1}\iota')_{v=v_0}$, tedy dle (5) a **488** (3)

$$(D^{r+1}g_1)_{u=u_0} = (\Delta^{r+1}g'_1)_{v=v_0}, \tag{7}$$

tedy dle (5)

$$\alpha C(u_0) - 2\beta B(u_0) + \gamma C(u_0) = 0, \tag{8}$$

kde jsme položili pro zkrácení

$$\begin{aligned}\alpha &= (\Delta^{r+1}A')_{v=v_0} - (D^{r+1}A)_{u=u_0}, \\ \beta &= (\Delta^{r+1}B')_{v=v_0} - (D^{r+1}B)_{u=u_0}, \\ \gamma &= (\Delta^{r+1}C')_{v=v_0} - (D^{r+1}C)_{u=u_0}.\end{aligned}$$

Dále jest $\left(\frac{d^r h}{ds^r}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^r h'}{ds'^r}\right)_{v=v_0}$, tedy dle (5) $(D^r h)_{u=u_0} = (\varDelta^r h')_{v=v_0}$, tedy dle (5), (7) a **488** (1) $(D^r g_2)_{u=u_0} = (\varDelta^r g'_2)_{v=v_0}$, tedy dle (5)

$$\alpha \dot{C}(u_0) - 2\beta \dot{B}(u_0) + \gamma \dot{A}(u_0) = 0. \tag{9}$$

Konečně jest $\left(\frac{d^{r-1} k}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^{r-1} k'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}$, tedy dle (5) $(D^{r-1} k)_{u=u_0} = (\varDelta^{r-1} k')_{v=v_0}$, tedy dle (5) a **488** (2) $(D^{r-1} g_2)_{u=u_0} = (\varDelta^{r-1} g'_2)_{v=v_0}$, tedy dle (5)

$$\begin{vmatrix} A(u_0) & B(u_0) & C(u_0) \\ \dot{A}(u_0) & \dot{B}(u_0) & \dot{C}(u_0) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

V (8), (9) a (10) máme tři lineární homogenní rovnice pro α, β, γ, jichž determinant dle počtu provedeného na počátku důkazu ve **490** jest různý od nuly. Je tedy $\alpha = \beta = \gamma = 0$, t. j. rovnice (6) jsou splněny, jak bylo dokázati.

517. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě positivní osnovy třídy $r \geqq 4$ bez pentataktických přímek o společné přímce $\{xy\}_{u_0} = \{x'y'\}_{v_0}$ takže $(x'y')_{v_0} = \nu(xy)_{u_0}$. Buď $\delta = \pm 1 = \operatorname{sgn} \nu$. Osnova $R\{xy\}$ měj řídící přímku; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Buď g_1 (g'_1) prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)_u$ ($R_a(x'y')_v$). Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_a \sqrt[4]{g_1}(xy)$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Když a jen když x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan v přímce $\{xy\}_{u_0}$ buď orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ nebo opačně orientované osnovy vzhledem k normě $R_a \delta \sqrt[4]{g'_1}(x'y')$, mají osnovy $R\{xy\}_u$ a $R\{x'y'\}_v$ pětipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Důkaz je podobný jako v **513**.

518. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě positivní osnovy třídy $r \geqq 4$ bez pentataktických přímek. Osnova $R\{xy\}$ měj řídící přímku; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). V podstatě dvěma způsoby*) lze určiti kolineaci K ar. bodů tak, že 1° $\{x'y'\}_{v_0} = \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2° když $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x''y''\}_v$ mají pětipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Vychází z **517** stejně jako **515** z **513** a **514**.

519. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě orientované positivní osnovy třídy $r + 4$ ($r \geqq 1$) bez pentataktických přímek. Osnova

---

*) Viz poznámku pod čarou k **515**.

$R\{xy\}$ měj řídící přímku; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Buď $\iota(u)$ ($l(u)$) třetí projektivní křivost (projektivní torse) osnovy $R\{xy\}$; týž význam měj $\iota'(v)$, ($l'(v)$) pro $R\{x'y'\}$. Buď $s(u)$ ($s'(v)$) normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$ ($R\{x'y'\}_v$). Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Když a jen když existuje znamení $\delta = \pm 1$ takové, že

$$\delta^{i+1}\left(\frac{d^i l}{ds^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i l'}{ds'^i}\right)_{v=v_0}, \tag{1}$$

$$\delta^{i}\left(\frac{d^i \iota}{ds^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i \iota'}{ds'^i}\right)_{v=v_0}, \tag{2}$$

$$\left(0 \leqq i \leqq r-1;\ \frac{d^0}{ds^0} = \frac{d^0}{ds'^0} = 1\right)$$

existuje kolineace K ar. bodů taková, že 1° $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2° je-li $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}$, $R\{x''y''\}$ mají $(r+5)$-přímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Že podmínky jsou nutné, vychází snadno ze **304**. Předpokládejme tedy, že jsou splněny. Dle **518** můžeme předpokládati, že

$$\left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}. \quad \left(0 \leqq i \leqq 4;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{3}$$

Mimo to jako v **516** i zde není nesnadné nahlédnouti, že můžeme předpokládati, že osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ jsou tak orientovány, že v rovnicích (1), (2) jest $\delta = 1$. Za těchto předpokladů ukážeme, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají $(r+5)$-přímkový styk v $\{xy\}_{u_0} = \{x'y'\}_{v_0}$. Zřejmě můžeme dokazovati indukcí vzhledem k r, t. j. míti již za dokázáno, že osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ mají $(r+4)$-přímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$, takže můžeme předpokládati, že platí rovnice

$$\left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}. \quad \left(0 \leqq i \leqq r+3;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{4}$$

Předpoklad $\delta = 1$ tím zřejmě není porušen.

Mějte D, A, B, C, g, j obvyklý význam vzhledem k $R_a(xy)_u$; týž význam vzhledem k $R_a(x'y')_v$ mějte $\Delta, A', B', C', g_1', j'$. Máme opět ukázati, že platí rovnice **516** (6). Ježto $\left(\frac{d^{r-1}\iota}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^{r-1}\iota'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}$, jest dle (4), $(D^{r-1}\iota)_{u=u_0} = (\Delta^{r-1}\iota')_{v=v_0}$, tedy dle (4) a **488** (3)

$$(D^{r+1}g_1)_{u=u_0} = (\Delta^{r+1}g'_1)_{v=v_0}. \tag{5}$$

Definujme $\dot{F}(t_1, t_2)$, $\ddot{F}(t_1\, t_2)$ vzhledem k $R_a(xy)_u$ jako ve **489**; stejně definujme $\dot{F}'(t_1, t_2)$, $\ddot{F}'(t_1, t_2)$ vzhledem k $R_a(x'y')_v$. Ježto $\left(\frac{d^{r-1}l}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} =$

$=\left(\frac{d^{r-1}l'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}$, jest dle (4) $(D^{r-1}l)_{u=u_0}=(\Delta^{r-1}l')_{v=v_0}$ z čehož dle (4) a **494** (1) vychází snadno, že*)

$$(6)\qquad [D^{r-1}\ddot{F}(t_1, t_2)]_{u=u_0}=[\Delta^{r-1}\ddot{F}'(t_1, t_2)]_{v=v_0}.$$

Ze (4), (5), (6) a **489** (5) vychází, že

$$[D^{r+1}(At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2)]_{u=u_0}=[\Delta^{r+1}(A't_1^2+2B't_1t_2+C't_2^2)]_{v=v_0},$$

takže rovnice **516** (6) jsou splněny.

520. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě regulární osnovy třídy $r\geqq 4$ o společné přímce $\{xy\}_{u_0}=\{x'y'\}_{v_0}$, takže $(x'y')_{v_0}=\nu(xy)_{u_0}$. Buď $\delta=\pm 1=\operatorname{sgn}\nu$. Buď g_1 (g'_1) prvý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)_u$ ($R_a(x'y')_v$). Osnova $R\{xy\}$ buď obsažena v pevné hyperbolické lin. kongruenci; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}_u$ vzhledem k normě $R_a\sqrt[4]{g_1}\,(xy)$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Když a jen když x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan v přímce $\{xy\}_{u_0}$ buď orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ nebo opačně orientované osnovy vzhledem k normě $R_a\delta\sqrt[4]{g'_1}\,(x'y')$, mají osnovy $R\{xy\}_u$ a $R\{x'y'\}_v$ pětipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Ze **304** vychází snadno, že podmínky jsou nutné. Předpokládejme tedy, že jsou splněny. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati (v. **513**), 1° že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ (ne opačně orientované osnovy) a 2° že $\delta=1$. Jako v **513** vidíme, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají trojpřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$, takže můžeme předpokládati, že

$$(1)\qquad \left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0},\quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}.\quad \left(i=0,1,2;\ \frac{d^0}{du^0}=\frac{d^0}{dv^0}=1\right)$$

Jako v **513**, položme $\delta_1=1$ nebo $\delta_1=-1$ dle toho, zda změna parametru, jíž je třeba k docílení platnosti rovnic (1), nemění či mění orientaci osnovy $R\{x'y'\}$. I zde uvidíme, že $\delta_1=+1$.

Mějte $D, A, B, C, \dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, J$ obvyklý význam vzhledem k $R_a\{xy\}_u$; týž význam vzhledem k $R_a\{x'y'\}_v$ mějte $\Delta, A', B', C', \dot{A}', \dot{B}', \dot{C}', J'$. Jako v **513** (2) můžeme opět předpokládati, že

$$(2)\qquad (A\dot{C}+C\dot{A}-2B\dot{B})_{u=u_0}\neq 0.$$

Vzhledem k $R_a(xy)_u$ definujme $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ jako ve **497**; stejně definujme $\lambda'_1, \lambda'_2, \mu'_1, \mu'_2$ vzhledem k $R_a(x'y')_v$. Dle předpokladu $x_1, x_2, \delta_1 x_3, \delta_1 x_4$

*) Při provádění operace D (Δ) považujeme t_1, t_2 za konstanty.

jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ vzhledem k normě $R_a\sqrt[4]{g'_1}(x'y')$. Odtud a ze **497** (4) vychází podobně jako v **513**, že $\delta_1 = 1$ a

$$(3)\qquad e\lambda_i(u_0) = \lambda'_i(v_0),\ e\mu_i(u_0) = \mu'_i(v_0), \qquad (e = \pm 1\,;\ i = 1, 2)$$

$$(4)\qquad (A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})_{u=u_0} = (A'\dot{C}' + C'\dot{A}' - 2B'\dot{B}')_{v=v_0}.$$

Dle (3) a **497** (1) jest

$$(5)\qquad A(u_0) = A'(v_0),\ B(u_0) = B'(v_0),\ C(u_0) = C'(v_0).$$

Ježto osnova $R\{xy\}$ jest obsažena v pevné lin. kongruenci, lze dle **445** určiti $\varrho = \varrho(u)$ tak, že

$$\dot{A} = \rho A,\ \dot{B} = \rho B,\ \dot{C} = \rho C.$$

Podobně lze určiti $\varrho' = \varrho'(v)$ tak, že

$$\dot{A}' = \rho' A',\ \dot{B}' = \rho' B',\ \dot{C} = \rho' C'.$$

Ze (2) a (4) vychází, že $\varrho(u_0) = \varrho'(v_0)$, takže

$$(6)\qquad \dot{A}(u_0) = \dot{A}'(v_0),\ \dot{B}(u_0) = \dot{B}'(v_0),\ \dot{C}(u_0) = \dot{C}'(v_0).$$

Z (1), (5) a (6) soudíme podobně jako v **513**, že osnovy $R\{xy\}$ a $R\{x'y'\}$ mají pětipřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$.

521. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě regulární osnovy třídy $r \geqq 4$ o společné přímce $\{xy\}_{u_0} = \{x'y'\}_{v_0}$. Osnova $R\{xy\}$ buď obsažena v pevné eliptické lin. kongruenci; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Když a jen když x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{x'y'\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$, mají osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ pětipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Důkaz jest podobný důkazu v **520.**

522. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ regulární osnovy třídy $r \geqq 4$. Osnova $R\{xy\}$ buď obsažena v pevné lin. kongruenci; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Obě tyto lin. kongruence buďte hyperbolické nebo obě eliptické. Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}_u$ ($R\{x'y'\}_v$). V podstatě dvěma způsoby*) lze určiti kolineaci K ar. bodů tak, že 1° $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2° když $\{x'y'\}_v \sim \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x''y''\}_v$ mají pětipřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$.

Vychází z **520** a **521** stejně jako **515** z **513** a **514**.

---

*) Viz poznámku pod čarou k **515**.

523. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě orientované regulární osnovy třídy $r+4$ $(r \geqq 1)$. Osnova $R\{xy\}_u$ buď obsažena v pevné lin. kongruenci; rovněž osnova $R\{x'y'\}_v$. Obě tyto lin. kongruence buďte hyperbolické nebo obě eliptické. Buď $\iota(u)(\iota'(v))$ třetí projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u(R\{x'y'\}_v)$. Buď $s(u)(s'(v))$ normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$ $(R\{x'y'\}_v)$. Buď $\{xy\}_{u_0}$ $(\{x'y'\}_{v_0})$ přímka osnovy $R\{xy\}$ $(R\{x'y'\})$. Když a jen když existuje znamení $\delta = \pm 1$ takové, že

$$(1) \qquad \delta^i \left(\frac{d^i \iota}{ds^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i \iota'}{ds'^i}\right)_{v=v_0}, \qquad \left(0 \leq i \leq r-1;\ \frac{d^0}{ds^0} = \frac{d^0}{ds'^0} = 1\right)$$

existuje kolineace K ar. bodů taková, že 1° $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{x'y'\}_{u_0}$ v Ass. K, 2° když $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}$, $R\{x''y''\}$ mají $(r+5)$-přímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Že podmínky jsou nutné, vychází snadno ze **304.** Předpokládejme tedy, že jsou splněny. Jako v **516** vidíme, že můžeme předpokládati, že $\delta = 1$ a že

$$(2) \quad \left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(0 \leqq i \leqq r+3;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

načež máme odvoditi, že $R\{xy\}$ a $R\{x'y'\}$ mají $(r+5)$-přímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Mějte D, A, B, C, g_1 obvyklý význam vzhledem k $R_a(xy)_u$; týž význam vzhledem k $R_a(x'y')_v$ mějte Δ, A', B', C', g'_1. Jako ve **516** vidíme, že stačí ukázati, že

$$(3) \qquad \begin{gathered} (D^{r+1} A)_{u=u_0} = (\Delta^{r+1} A')_{v=v_0}, \quad (D^{r+1} B)_{u=u_0} = (\Delta^{r+1} B')_{v=v_0}, \\ (D^{r+1} C)_{u=u_0} = (\Delta^{r+1} C')_{v=v_0}. \end{gathered}$$

Jak jsme si ve **520** povšimli, lze určiti $\varrho = \varrho(u)$, $\varrho' = \varrho'(v)$ tak, že jest

$$(4) \qquad \begin{gathered} DA = \rho A, \quad DB = \rho B, \quad DC = \rho C, \\ \Delta A' = \rho' A', \quad \Delta B' = \rho' B', \quad \Delta C' = \rho' C', \end{gathered}$$

kde $\varrho(u)$ závisí pouze na x, y, $\dfrac{d^i x}{du^i}$, $\dfrac{d^i y}{dv^i}$ $(1 \leqq i \leqq 4)$ a podobně $\varrho'(v)$.

Ze (2) a (4) vychází tedy, že na důkaz rovnic (3) stačí nahlédnouti, že

$$(5) \qquad (D^r \rho)_{u=u_0} = (\Delta^r \rho')_{v=v_0}.$$

Ze (2) a (4) je však patrné, že rovnice (5) jest ekvivalentní s rovnicí

$$(6) \qquad (D^{r+1} g_1)_{u=u_0} = (\Delta^{r+1} g'_1)_{v=v_0}.$$

Stačí tedy dokázati rovnici (6). Dle předpokladu je však $\left(\frac{d^{r-1}\iota}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^{r-1}\iota'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}$, tedy dle (2) $(D^{r-1}\iota)_{u=u_0} = (\Delta^{r-1}\iota')_{v=v_0}$, z čehož vychází (6) dle (2) a **488** (3).

524. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ nulové osnovy třídy $r \geqq 6$*) bez pentataktických přímek o společné přímce $\{xy\}_{u_0} = \{x'y'\}_{v_0}$. Buď $g(u)$ ($\iota(u)$) prvá (druhá) projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u$; týž význam měj $g'(v)$ ($\iota'(v)$) pro $R\{x'y'\}_v$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan osnovy $R\{xy\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Když a jen když: 1°

$$g(u_0) - 2\iota(u_0) = g'(v_0) - 2\iota'(v_0), \tag{1}$$

2° x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan osnovy $R\{x'y'\}$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$, mají osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ šestipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Že podmínky jsou nutné, vychází snadno ze **304**. Předpokládejme tedy, že jsou splněny. Jako ve **513** vidíme, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají trojpřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Můžeme tedy dle **304** předpokládati, že

$$\left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}. \quad \left(i = 0, 1, 2;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{2}$$

Mějte D, A, B, C, $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\ddot{A}$, $\ddot{B}$, $\ddot{C}$ obvyklý význam vzhledem k $R_a(xy)_u$. Buď $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 = \beta(\varphi_2 t_1 - \varphi_1 t_2)^2$ ($\beta = \pm 1$). Definujme $\varphi_1, \varphi_2, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$ jako ve **472**. Buď $\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1 = \psi$, $\varepsilon = \beta \operatorname{sgn} \psi$. Stejně definujme Δ, A', B', C', $\dot{A}'$, $\dot{B}'$, $\dot{C}'$, $\ddot{A}'$, $\ddot{B}'$, $\ddot{C}'$, β', φ'_1, φ'_2, $\dot{\varphi}'_1$, $\dot{\varphi}'_2$, $\ddot{\varphi}'_1$, $\ddot{\varphi}'_2$, ε' vzhledem k $R_a(x'y')_v$. Dle prvé rovnice **505** (1) jest pro $u = u_0$, $v = v_0$

$$\frac{\varphi'_1}{\sqrt[6]{|\psi'|}} = \frac{\varphi_1}{\sqrt[6]{|\psi|}}, \quad \frac{\varphi'_2}{\sqrt[6]{|\psi'|}} = \frac{\varphi_2}{\sqrt[6]{|\psi|}}.$$

Dle (2) a dle třetí rovnice **505** (1) jest pro $u = u_0$, $v = v_0$

$$\varepsilon' \frac{\dot{\varphi}'_1}{\sqrt{|\psi'|}} = \varepsilon \frac{\dot{\varphi}_1}{\sqrt{|\psi|}}, \quad \varepsilon' \frac{\dot{\varphi}'_2}{\sqrt{|\psi'|}} = \varepsilon \frac{\dot{\varphi}_2}{\sqrt{|\psi|}},$$

$$\varepsilon' \frac{\Delta\psi'}{\psi'} \frac{\varphi'_1}{\sqrt{|\psi'|}} = \varepsilon \frac{\Delta\psi}{\psi} \frac{\varphi_1}{\sqrt{|\psi|}}, \quad \varepsilon' \frac{\Delta\psi'}{\psi'} \frac{\varphi'_2}{\sqrt{|\psi'|}} = \varepsilon \frac{\Delta\psi}{\psi} \frac{\varphi_2}{\sqrt{|\psi|}}.$$

Odtud snadno vychází, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ jest

$$\begin{gathered} \varphi'_1 = \varphi_1, \quad \varphi'_2 = \varphi_2, \quad \varepsilon' = \varepsilon, \\ |\psi'| = |\psi|, \quad \frac{\Delta\psi'}{\psi'} = \frac{D\psi}{\psi}. \end{gathered} \qquad (u = u_0,\ v = v_0) \tag{3}$$

---

*) Stačil by předpoklad $r \geqq 5$, neboť, jak jsme si ve **504** povšimli, výraz $g - 2\iota$ neobsahuje šesté derivace.

Ze (2), (3) a z druhé rovnice **505** (1) vychází, že

$$\dot\varphi'_1(v_0)=\dot\varphi_1(u_0),\ \dot\varphi'_2(v_0)=\dot\varphi_2(u_0). \tag{4}$$

Dle (3) a (4) jest

$$\beta'=\beta,\ \psi'(v_0)=\psi(u_0),\ (\Delta\psi')_{v=v_0}=(D\psi)_{u=u_0}. \tag{5}$$

Dle (3), (4), (5), **471** (1) a **472** (2) jest

$$A(u_0)=A'(v_0),\ B(u_0)=B'(v_0),\ C(u_0)=C'(v_0), \tag{6}$$

$$\dot A(u_0)=\dot A'(v_0),\ \dot B(u_0)=\dot B'(v_0),\ \dot C(u_0)=\dot C'(v_0). \tag{7}$$

Z (2), (6), (7) nalezneme jako ve **513**, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají pětipřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$, takže dle **304** můžeme předpokládati, že mimo (2) jsou splněny též rovnice

$$\left(\frac{d^ix}{du^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^ix'}{dv^i}\right)_{v=v_0},\ \left(\frac{d^iy}{du^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^iy'}{dv^i}\right)_{v=v_0}. \qquad (i=3,4) \tag{8}$$

Abychom ukázali, že styk osnov $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ v $\{xy\}_{u_0}$ jest šestipřímkový, stačí zřejmě ukázati, že

$$\ddot A(u_0)=\ddot A'(v_0),\ \ddot B(u_0)=\ddot B'(v_0),\ \ddot C(u_0)=\ddot C'(v_0).$$

Dle **472** (4) stačí tedy ukázati, že

$$\ddot\varphi'_1(v_0)=\ddot\varphi_1(u_0),\ \ddot\varphi'_2(v_0)=\ddot\varphi_2(u_0). \tag{9}$$

Dle poslední rovnice (5) je však

$$\varphi'_1(v_0)\,\ddot\varphi'_2(v_0)-\varphi'_2(v_0)\,\ddot\varphi'_1(v_0)=\varphi_1(u_0)\,\ddot\varphi_2(u_0)-\varphi_2(u_0)\,\ddot\varphi_1(u_0),$$

což lze psáti dle (3)

$$[\ddot\varphi'_1(v_0)-\ddot\varphi_1(u_0)]\,\varphi_2(u_0)-[\ddot\varphi'_2(v_0)-\ddot\varphi_2(u_0)]\,\varphi_1(u_0)=0. \tag{10}$$

Dle (1), (2), (8) a **504** (2), (3) jest

$$\dot\varphi'_1(v_0)\,\ddot\varphi'_2(v_0)-\dot\varphi'_2(v_0)\,\ddot\varphi'_1(v_0)=\dot\varphi_1(u_0)\,\ddot\varphi_2(u_0)-\dot\varphi_2(u_0)\,\ddot\varphi_1(u_0)=0,$$

což lze psáti dle (4)

$$[\ddot\varphi'_1(v_0)-\ddot\varphi_1(u_0)]\,\dot\varphi_2(u_0)-[\ddot\varphi'_2(v_0)-\ddot\varphi_2(u_0)]\,\dot\varphi_1(u_0)=0. \tag{11}$$

Z (10) a (11) vychází (9), neboť $\psi(u)_0\neq 0$, ježto $R\{xy\}$ nemá pentataktických přímek.

525. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ orientované nulové osnovy třídy $r\geqq 6$ bez pentataktických přímek. Buď $g(u)$ ($\iota(u)$) prvá (druhá) projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u$; týž význam měj

$g'(v)$ ($\iota'(v)$) pro $R\{x'y'\}_v$. Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Když a jen když $g(u_0)-2\iota(u_0)=g'(v_0)-2\iota'(v_0)$, lze určiti kolineaci K ar. bodů tak, že 1° $\{x'y'\}_{u_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2° když $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x''y''\}_v$ mají šestipřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Kolineaci K lze pak určiti v podstatě jedním způsobem*).

Vychází z **524.** stejně jako **515** z **513** a **514.**

526. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ orientované nulové osnovy třídy $r+5$ ($r\geqq 1$) bez pentataktických přímek. Buď $\varepsilon=1$ ($\varepsilon=-1$), je-li osnova $R\{xy\}_u$ positivně (negativně) orientována. Týž význam měj $\varepsilon'=\pm 1$ pro $R\{x'y'\}_v$. Buď $\delta=\varepsilon\varepsilon'$.

Buď $g(u)$ ($\iota(u)$) prvá (druhá) projektivní křivost osnovy $R\{xy\}$. Týž význam měj $g'(v)$ ($\iota'(v)$) pro $R\{x'y'\}$. Buď $s(u)$ ($s'(v)$) normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Když a jen když

$$\delta^i\left(\frac{d^ig}{ds^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^ig'}{ds'^i}\right)_{v=v_0},\quad \delta^i\left(\frac{d^i\iota}{ds^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^i\iota'}{ds'^i}\right)_{u=u_0},\tag{1}$$

$$(0\leqq i\leqq r-1);\ \frac{d^0}{ds^0}=\frac{d^0}{ds'^0}=1)$$

$$\delta^r\left[\frac{d^r(g-2\iota)}{ds^r}\right]_{u=u_0}=\left[\frac{d^r(g'-2\iota')}{ds'^r}\right]_{u=u_0},\tag{2}$$

existuje kolineace K ar. bodů taková, že 1° $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2° když $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}$, $R\{x''y''\}$ mají $(r+6)$-přímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Že podmínky jsou nutné, vychází snadno ze **304.** Předpokládejme tedy, že jsou splněny. Jako v **516** vidíme, že můžeme předpokládati, že

$$\left(\frac{d^ix}{du^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^ix'}{dv^i}\right)_{v=v_0},\quad \left(\frac{d^iy}{du^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^iy'}{dv^i}\right)_{v=v_0},\quad (0\leqq i\leqq r+4;\ \frac{d^0}{du^0}=\frac{d^0}{dv^0}=1)\tag{3}$$

načež máme odvoditi, že $R\{xy\}$ a $R\{x'y'\}$ mají $(r+6)$-přímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Mějte D, A, B, C, φ_1, φ_2, $\dot\varphi_1$, $\dot\varphi_2$ obvyklý význam vzhledem k $R_a(xy)_u$. Týž význam vzhledem k $R_a(x'y')_v$ mějte Δ, A', B', C', φ'_1, φ'_2, $\dot\varphi'_1$, $\dot\varphi'_2$. Jako v **516** (6) vidíme, že stačí ukázati, že platí rovnice

$$(D^{r+2}A)_{u=u_0}=(\Delta^{r+2}A')_{v=v_0},\quad (D^{r+2}B)_{u=u_0}=(\Delta^{r+2}B')_{v=v_0},$$
$$(D^{r+2}C)_{u=u_0}=(\Delta^{r+2}C')_{v=v_0},$$

---

*) Tím míníme: jsou-li K_1, K_2 dvě kolineace podmínky splňující, existuje podobnost P taková, že $K_2=PK_1$.

tedy dle (3) a **472** (9) že jest

$$(4)\qquad (D^{r+2}\varphi_1)_{u=u_0}=(\Delta^{r+2}\varphi'_1)_{v=v_0},\ (D^{r+2}\varphi_2)_{u=u_0}=(\Delta^{r+2}\varphi'_2)_{v=v_0}.$$

Dle (3) je však $\varepsilon=\varepsilon'$, tedy $\delta=1$, takže

$$(5)\qquad \left(\frac{d^{r-1}g}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^{r-1}g'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0},$$

$$(6)\qquad \left[\frac{d^r(g-2\iota)}{ds^r}\right]_{u=u_0}=\left[\frac{d^r(g'-2\iota')}{ds'^r}\right]_{v=v_0}.$$

Dle (3) a (5) jest $(D^{r-1}g)_{u=u_0}=(\varDelta^{r-1}g')_{v=v_0}$, tedy dle (3) a **504** (2)

$$[D^{r+1}(\varphi_1\dot\varphi_2-\varphi_2\dot\varphi_1)]_{u=u_0}=[\Delta^{r+1}(\varphi'_1\dot\varphi'_2-\varphi'_2\dot\varphi'_1)]_{v=v_0},$$

tedy dle (3)

$$(7)\qquad [(\Delta^{r+2}\varphi'_1)_{v=v_0}-(D^{r+2}\varphi_1)_{u=u_0}]\,\varphi_2(u_0)-[(\Delta^{r+2}\varphi'_2)_{v=v_0}-(D^{r+2}\varphi_2)_{u=u_0}]\,\varphi_1(u_0)=0.$$

Dle (3) a (6) jest $[D^r(g-2\iota)]_{u=u_0}=[\varDelta^r(g'-2\iota')]_{v=v_0}$, tedy dle (3) a **504** (2), (3): $[D^r(\dot\varphi_1\ddot\varphi_2-\dot\varphi_2\ddot\varphi_1)]_{u=u_0}=[\varDelta^r(\dot\varphi_1'\ddot\varphi_2'-\dot\varphi_2'\ddot\varphi_1')]_{v=v_0}$, tedy dle (3)

$$(8)\qquad [(\Delta^{r+2}\varphi'_1)_{v=v_0}-(D^{r+2}\varphi_1)_{u=u_0}]\,\dot\varphi_2(u_0)-[(\Delta^{r+2}\varphi'_2)_{v=v_0}-(D^{r+2}\varphi_2)_{u=u_0}]\,\dot\varphi_1(u_0)=0.$$

Jest $\varphi_1(u_0)\,\dot\varphi_2(u_0)-\varphi_2(u_0)\,\dot\varphi_1(u_0)\neq 0$, neboť $R\{xy\}$ nemá pentataktických přímek; ze (7) a (8) plyne tedy (4).

527. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ regulární osnovy třídy $r\geqq 5$ o společné přímce $\{xy\}_{u_0}=\{x'y'\}_{v_0}$. Osnova $R\{xy\}$ buď obsažena v pevné parabolické lin. kongruenci; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Ani $R\{xy\}$, ani $R\{x'y'\}$ neměj Cayleyovských přímek. Buď $\varepsilon=\pm 1$ normální znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď x_1, x_2, x_3, x_4 lokální jehlan orientované osnovy $R\{xy\}_u$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Když a jen když 1° ε jest normální znamení osnovy $R\{x'y'\}$, 2° x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan v přímce $\{xy\}_{u_0}$ orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ nebo opačně orientované osnovy, mají osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ šestipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

Ze **304** vychází snadno, že podmínky jsou nutné. Předpokládejme tedy, že jsou splněny. Můžeme předpokládati, že x_1, x_2, x_3, x_4 jest lokální jehlan v přímce $\{xy\}_{v_0}$ orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ (ne opačně orientované osnovy); v opačném případě stačilo by změniti orientaci této osnovy. Jako v **513** vidíme, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají trojpřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Dle **304** můžeme tedy předpokládati, že

$$(1)\qquad \left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0},\quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}.\quad \left(i=0,1,2;\ \frac{d^0}{du^0}=\frac{d^0}{dv^0}=1\right)$$

Jako v **513**, položme $\delta_1 = +1$ nebo $\delta_1 = -1$ dle toho, zda změna parametru, jíž je třeba k docílení platnosti rovnic (1), nemá či má za důsledek změnu orientace osnovy $R\{x'y'\}_{v}$. I zde uvidíme, že $\delta_1 = +1$.

Mějte $D, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \chi, \zeta, \lambda_1, \lambda_2$ vzhledem k $R_a(xy)_u$ týž význam, jako na př. v **508**. Definujme $\dot\varphi_1, \dot\varphi_2, \ddot\varphi_1, \ddot\varphi_2$ jako ve **472**. Vzhledem k $R_a(x'y')_v$ týž význam mějte $\Delta, \beta', \varphi'_1, \varphi'_2, \chi', \zeta', \lambda'_1, \lambda'_2, \dot\varphi'_1, \dot\varphi'_2, \ddot\varphi'_1, \ddot\varphi'_2$. Ve všech následujících rovnicích jest dosaditi $u = u_0$, $v = v_0$.

Dle předpokladu $x_1, x_2, \delta_1 x_3, \delta_1 x_4$ jest lokální jehlan orientované osnovy $R\{x'y'\}_v$ v přímce $\{xy\}_{u_0}$. Odtud a z prvé rovnice **508** (3) vychází, že

$$\frac{\varphi_1}{\sqrt{|\chi|}} = \frac{\varphi'_1}{\sqrt{|\chi'|}}, \quad \frac{\varphi_2}{\sqrt{|\chi|}} = \frac{\varphi'_2}{\sqrt{|\chi'|}}. \tag{2}$$

Dle (1) a třetí rovnice **508** (3) je však

$$\frac{\varphi_1}{\sqrt{|\chi\zeta|}} = \frac{\varphi'_1}{\sqrt{|\chi'\zeta'|}}, \quad \frac{\varphi_2}{\sqrt{|\chi\zeta|}} = \frac{\varphi'_2}{\sqrt{|\chi'\zeta'|}}, \tag{3}$$

$$\frac{D\chi}{\chi} = \frac{\Delta\chi'}{\chi'}. \tag{4}$$

Ze (2) a (3) vychází, že $|\zeta| = |\zeta'|$. Avšak $\varepsilon = \operatorname{sgn}\zeta = \operatorname{sgn}\zeta'$, tedy

$$\zeta = \zeta'. \tag{5}$$

Dle (5) a dle druhé rovnice **508** (3) jest

$$\beta\frac{\lambda_1}{|\chi|^{\frac{5}{2}}} = \beta'\frac{\lambda'_1}{|\chi'|^{\frac{5}{2}}}, \quad \beta\frac{\lambda_2}{|\chi|^{\frac{5}{2}}} = \beta'\frac{\lambda'_2}{|\chi'|^{\frac{5}{2}}}. \tag{6}$$

Dle (2) a (6) jest

$$\beta\frac{\varphi_1\lambda_2 - \varphi_2\lambda_1}{|\chi|^3} = \beta'\frac{\varphi'_1\lambda'_2 - \varphi'_2\lambda'_1}{|\chi'|^3},$$

takže dle **508** (1)

$$|\chi| = |\chi'|, \tag{7}$$

$$\beta = \beta'. \tag{8}$$

Dle (2) a (7) jest

$$\varphi_1 = \varphi'_1, \quad \varphi_2 = \varphi'_2. \tag{9}$$

Z (8) a (9) vychází snadno, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají čtyřpřímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Je-li tedy j (j') čtvrtý unimodulární invariant ar. osnovy $R_a(xy)$ ($R_a(x'y')$), můžeme předpokládati, že

$$j = j'. \tag{10}$$

Ze (4), (9) a **478** (1) vychází, že

$$\dot\varphi_1 = \dot\varphi'_1, \quad \dot\varphi_2 = \dot\varphi'_2. \tag{11}$$

Dle **507** (1) jest

$$\zeta = j - \frac{1}{2} D\left(\frac{D\chi}{\chi}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{D\chi}{\chi}\right)^2, \tag{12}$$

takže dle (5) a (10)

$$D\left(\frac{D\chi}{\chi}\right) = \Delta\left(\frac{\Delta\chi'}{\chi'}\right). \tag{13}$$

Derivujíce identitu **478** (1), obdržíme ze (4), (9), (11) a (13), že

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}'_1, \quad \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}'_2. \tag{14}$$

Z (11) a (14) vychází snadno, že osnovy $R\{xy\}$, $R\{x'y'\}$ mají šestipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

528. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě regulární osnovy třídy $r \geqq 5$. Osnova $R\{xy\}$ buď obsažena v pevné parabolické lin. kongruenci; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Ani $R\{xy\}$, ani $R\{x'y'\}$ neměj Cayleyovských přímek. Buď $\varepsilon = \pm 1$ normální znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Když a jen když ε jest normální znamení osnovy $R\{x'y'\}$, lze určiti kolineaci K ar. bodů tak, že 1⁰ $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2⁰ když $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x''y''\}_v$ mají šestipřímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$ Kolineaci K lze pak určiti v podstatě dvěma způsoby*).

Vychází z **527** stejně, jako **515** z **513** a **514**.

529. Buďte $R\{xy\}_u$, $R\{x'y'\}_v$ dvě orientované regulární osnovy třídy $r+5$ ($r \geqq 1$). Osnova $R\{xy\}$ buď obsažena v pevné parabolické lin. kongruenci; rovněž osnova $R\{x'y'\}$. Ani $R\{xy\}$, ani $R\{x'y'\}$ neměj Cayleyovských přímek. Buď $\varepsilon = \pm 1$ normální znamení osnovy $R\{xy\}$. Buď $s(u)$ ($s'(v)$) normální parametr orientované osnovy $R\{xy\}_u$ ($R\{x'y'\}_v$). Buď $\iota(u)$ ($\iota'(v)$) projektivní křivost osnovy $R\{xy\}_u$ ($R\{x'y'\}_v$). Buď $\{xy\}_{u_0}$ ($\{x'y'\}_{v_0}$) přímka osnovy $R\{xy\}$ ($R\{x'y'\}$). Když a jen když 1⁰ ε jest normální znamení osnovy $R\{x'y'\}$, 2⁰ lze určiti znamení $\delta = \pm 1$ tak, že

$$\delta^{i+1}\left(\frac{d^i\iota}{ds^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i\iota'}{ds'^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(0 \leqq i \leqq r-1;\ \frac{d^0}{ds^0} = \frac{d^0}{ds'^0} = 1\right) \tag{1}$$

lze určiti kolineaci K ar. bodů tak, že 1⁰ $\{x'y'\}_{v_0} \sim \{xy\}_{u_0}$ v Ass. K, 2⁰ když $\{x'y'\}_v \sim \{x''y''\}_v$ v Ass. K, osnovy $R\{xy\}_u$, $R\{x''y''\}_v$ mají $(r+6)$-přímkový styk v přímce $\{xy\}_{u_0}$.

---

*) Viz poznámku pod čarou ke **515**.

Že podmínky jsou nutné, vychází snadno ze **304**. Jako v **516** vidíme, že můžeme předpokládati, že $\delta = 1$ a že

$$(2)\quad \left(\frac{d^i x}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i x'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^i y'}{dv^i}\right)_{v=v_0}, \quad \left(0 \leq i \leq r+4;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

načež máme odvoditi, že $R\{xy\}$ a $R\{x'y'\}$ mají $(r+6)$-přímkový styk v $\{xy\}_{u_0}$. Mějte $D, \chi, \varphi_1, \varphi_2, \zeta$ obvyklý význam vzhledem k $R_a(xy)_u$; týž význam vzhledem k $R_a(x'y')_v$ mějte $\Delta, \chi', \varphi'_1, \varphi'_2, \zeta'$. Jako v **525** vidíme, že je třeba pouze ukázati, že

$$(3)\qquad (D^{r+2}\varphi_i)_{u=u_0} = (\Delta^{r+2}\varphi'_i)_{v=v_0}. \qquad (i = 1, 2)$$

Ze (2) a **478** (1) je patrné, že rovnice (3) jsou splněny, když a jen když

$$4)\qquad \left[D^{r+1}\left(\frac{D\chi}{\chi}\right)\right]_{u=u_0} = \left[\Delta^{r+1}\left(\frac{\Delta\chi'}{\chi'}\right)\right]_{v=v_0}.$$

Dle (2) a **526** (12) platí však (4), když a jen když

$$(5)\qquad (D^r\zeta)_{u=u_0} = (\Delta^r\zeta')_{v=v_0}.$$

Máme tedy ukázati, že platí (5), čili dle (2) a **507** (3), že

$$(6)\qquad (D^{r-1}\iota)_{u=u_0} = (\Delta^{r-1}\iota')_{v=v_0}.$$

Ježto $\left(\dfrac{d^{r-1}\iota}{ds^{r-1}}\right)_{u=u_0} = \left(\dfrac{d^{r-1}\iota'}{ds'^{r-1}}\right)_{v=v_0}$, rovnice (6) snadno plyne ze (2).