Projektivní diferenciální geometrie

Styk křivek a ploch

In: Eduard Čech (author): Projektivní diferenciální geometrie. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1926. pp. [96]--213.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402423

Kapitola II.

Styk křivek a ploch.

Okolí ar. bodu a okolí bodu.

152. Buď opět m libovolné číslo přirozené. Buď x ar. bod; buď ε kladné číslo. Množství všech ar. bodů y takových, že $|y^{(i)} - x^{(i)}| < \varepsilon$ $(i = 0, 1, \dots m)$, nazývá se okolí ar. bodu x, určitěji okolí ar. bodu x určené číslem ε.

Je-li $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, je patrně okolí určené číslem ε' částí okolí určeného číslem ε. Chceme-li se omeziti na okolí určená čísly ε menšími než jisté kladné číslo A, mluvíme o dosti malých okolích ar. bodu x. Tak na př. pravíme-li, že nějakou podmínku splňují všecka dosti malá okolí ar. bodu x, míníme, že existuje $A > 0$ takové, že ona podmínka je splněna, kdykoli $\varepsilon < A$.

153. Buď x vlastní ar. bod; buď $\varepsilon > 0$ a aspoň pro jeden z případů $i = 0, 1 \dots m$ buď $\varepsilon < |x^{(i)}|$; buď V okolí ar. bodu x určené číslem ε. Množství W bodů obsahujících aspoň jeden ar. bod V nazývá se okolí bodu $\{x\}$, určitěji okolí bodu $\{x\}$ určené ar. bodem x a číslem ε.

Zřejmě okolí bodu $\{x\}$ určené ar. bodem x a číslem ε rovná se okolí bodu $\{x\}$ určenému ar. bodem λx a číslem $|\lambda|\varepsilon$, kdykoliv $\lambda \neq 0$. Probíhá-li V dosti malá okolí ar. bodu x, pravíme, že W probíhá dosti malá okolí bodu $\{x\}$.

154. Buď V (W) okolí ar. bodu x (bodu $\{x\}$). Buď K kolineace ar. bodů. Buď v K $x \sim \bar{x}$, $V \sim \bar{V}$ $(W \sim \bar{W})$. Existuje okolí V' ar. bodu $\bar{x}$ (bodu $\{\bar{x}\}$) obsažené ve $\bar{V}$ $(\bar{W})$.

Zřejmě stačí provésti důkaz pro V. Buď $(x_0 x_1 \dots x_m) \neq 0$. Buď v $K: x_i \sim \bar{x}_i$ $(i = 0, 1 \dots m)$, $y \sim \bar{y}$. Buď

$$y - x = \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_m x_m, \tag{1}$$

takže

$$\bar{y} - \bar{x} = \mu_0 \bar{x}_0 + \mu_1 \bar{x}_1 + \dots + \mu_m \bar{x}_m. \tag{2}$$

Ježto $(\bar{x}_0 \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m) \neq 0$, plyne, že (2)

$$(3) \qquad \mu_i = c_{i0}(\bar{y}^{(0)} - \bar{x}^{(0)}) + c_{i1}(\bar{y}^{(1)} - \bar{x}^{(1)}) + \ldots + c_{im}(\bar{y}^{(m)} - \bar{x}^{(m)}), \quad (i = 0, 1 \ldots m),$$

při čemž c_{ik} jsou pevná (na y nezávislá) čísla. Buďte A, B taková čísla, že $|x^{(i)}| < A$, $|c_{ik}| < B$ $(i, k = 0, 1 \ldots m)$. Buď V množství těch ar. bodů y, pro něž $|y^{(i)} - x^{(i)}| < \varepsilon$ $(i = 0, 1 \ldots m)$. Pak lze za V' zvoliti množství těch ar. bodů $\bar{y}$, pro něž

$$(4) \qquad |\bar{y}^{(i)} - \bar{x}^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{(m+1)^2 AB}.$$

Vskutku, když $\bar{y}$ náleží do V', je dle (4) a (3) $|\mu_i| < \dfrac{\varepsilon}{(m+1)A}$, tedy dle (1) $|y^{(i)} - x^{(i)}| < \varepsilon$, t. j. y náleží do V a tedy $\bar{y}$ do $\bar{V}$.

Aritmetické křivky.

155. Spojitou funkci proměnné u nazýváme funkcí třídy 0. Funkci, jejíž r-tá derivace (všecky derivace) existuje, nazýváme funkcí třídy r (třídy ∞).

Z těchto definic je patrno: Funkce třídy r je také třídy s, je-li $0 \leqq s < r \leqq \infty$; s-tá derivace funkce třídy r existuje a jest funkcí třídy $r - s$, je-li $0 < s < r$.

156. Souřadnice ar. bodu $x = x(u)$ buďte funkce třídy $r \geqq 1$ (může býti $r = \infty$) v $\langle a, b\rangle$; ar. body $x(u_1)$, $x(u_2)$ buďte lin. nezávislé, kdykoli u_1 a u_2 jsou dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$; ar. body x, $\dfrac{dx}{du}$ buďte lin. nezávislé pro každé u z $\langle a, b\rangle$: pak pravíme, že množství ar. bodů $x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) jest ar. křivka třídy r. Ar. křivku značíme obvykle: $C_a\, x(u)$, určitěji $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$); stručněji $C_a x$. Pravíme, že u jest parametr ar. křivky $C_a\, x(u)$.

Je-li $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) ar. křivka třídy 1; je-li $\varrho = \varrho(u)$ funkce třídy 0 v $\langle a, b\rangle$; je-li $\varrho(u) \neq 0$ pro každé u z $\langle a, b\rangle$: pravíme, že množství ar. bodů ϱx (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) jest ar. křivka třídy 0.

Je zřejmé, že ar. křivka třídy r jest ar. křivkou třídy s, kdykoli $s < r$. Také se snadno vidí, že kolineace ar. bodů přiřazuje ar. křivce třídy r ar. křivku třídy r.

Množství ar. nadrovin duální k ar. křivce třídy r nazývá se duální ar. křivka třídy r; označení $\mathfrak{C}_a\, \xi(u)$.

157. Souřadnice ar. bodu $x = x(u)$ buďte funkce třídy $r \geqq 1$ v $\langle a, b\rangle$. Buď u_0 pevné číslo z $\langle a+0, b-0\rangle$; ar. body $x(u_0)$,

$\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}$ buďte lin. nezávislé. Lze určiti $\varepsilon > 0$ tak, že množství ar. bodů $x(u)$ (u v $\langle u_0 - \varepsilon + 0, u_0 + \varepsilon - 0\rangle$) jest ar. křivka třídy r.

Ukažme nejprve: existuje $\delta_1 > 0$ takové, že ar. body $x(u)$, $\frac{dx}{du}$ jsou lin. nezávislé, kdykoli u jest v $\langle u_0 - \delta_1, u_0 + \delta_1\rangle$. Jinak bylo by lze udati posloupnost čísel u_n ($n = 1, 2, 3 \ldots$) z $\langle a, b\rangle$ takovou, že 1° $u_n \to u_0$, 2° pro každé n lze určiti čísla λ_n, μ_n taková, že $|\lambda_n, \mu_n|_b \neq 0_b$ a že

$$\lambda_n x(u_n) + \mu_n \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_n} = 0_b.$$

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že $\lambda_n^2 + \mu_n^2 = 1$. Posloupnosti čísel λ_n, μ_n jsou ohraničené, můžeme tedy vybrati částečnou posloupnost indexů $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ tak, aby existovaly limity $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_{i_\nu} = \lambda$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mu_{i_\nu} = \mu$. Zřejmě je pak $\lambda x(u_0) + \mu \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} = 0_b$ ($|\lambda, \mu|_b \neq 0_b$) proti předpokladu.

Ukažme za druhé: existuje $\delta_2 > 0$ takové, že ar. body $x(u)$, $x(v)$ jsou lin. nezávislé, kdykoli u, v jsou dvě různá čísla z $\langle u_0 - \delta_2, u_0 + \delta_2\rangle$. Jinak bylo by lze udati posloupnosti čísel u_n, v_n ($u_n \neq v_n$; $n = 1, 2, 3\ldots$) z $\langle a, b\rangle$ a čísel λ_n, μ_n ($\lambda_n^2 + \mu_n^2 = 1$) tak, že 1° $u_n \to u_0$, $v_n \to u_0$, 2°

$$\lambda_n x(u_n) + \mu_n \frac{x(v_n) - x(u_n)}{v_n - u_n} = 0. \qquad (i = 0, 1 \ldots m)$$

Vybereme-li opět částečné posloupnosti tak, aby existovaly limity $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_{i_\nu} = \lambda$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mu_{i_\nu} = \mu$, obdržíme zase týž spor: $\lambda x(u_0) + \mu \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} = 0_b$ ($|\lambda, \mu|_b \neq 0_b$) proti předpokladu.

Stačí nyní zvoliti $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \delta_1$, $\varepsilon < \delta_2$.

158. Buď $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a + 0, b - 0\rangle$) ar. křivka třídy $r \geq 1$. Proměnná u_1 jest parametr ar. křivky $C_a\, x(u)$, když a jen když $u_1 = \varphi(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$), kde funkce $\varphi(u)$ splňuje tyto podmínky: 1° je třídy r v $\langle a, b\rangle$, 2° $\frac{d\varphi}{du} \neq 0$ pro všecka u z $\langle a, b\rangle$.

Snadno se vidí, že podmínky stačí. Předpokládejme tedy, že proměnná u_1 jest parametr pro $C_a\, x$, že tedy existuje interval $\langle a_1, b_1\rangle$ a ar. křivka $C_a\, x_1(u_1)$ (u_1 v $\langle a_1 + 0, b_1 - 0\rangle$) rovná ar. křivce $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a + 0, b - 0\rangle$). Ježto souřadnice ar. bodu $x(u)$ jsou spojité v $\langle a, b\rangle$ a podobně pro $x_1(u_1)$, jest množství ar. bodů $x_1(u_1)$, (u_1 v $\langle a_1, b_1\rangle$) rovno množství ar. bodů $x(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$). Ježto $x(u) \neq x(u')$, kdykoli u a u' jsou dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$ a podobně pro $x_1(u_1)$, existuje jedna a jen jedna funkce $u_1 = \varphi(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$) taková, že

$$(1) \qquad x_1[\varphi(u)] = x(u).$$

jest ukázati, že funkce $\varphi(u)$ splňuje podmínky 1^0, 2^0. Buď u_0 libovolné číslo z $\langle a, b\rangle$ a buď $u'_0 = \varphi(u_0)$. Ježto $C_a\, x_1(u_1)$ jest ar. křivka, jsou pro $u_1 = u'_0$ ar. body x_1, $\frac{dx_1}{du_1}$ lin. nezávislé, tedy též $\frac{dx_1}{du_1} \neq 0_b$. Můžeme tedy předpokládati, že $\left(\frac{dx_1{}^{(0)}}{du_1}\right)_{u_1 = u'_0} \neq 0$. Dle věty o funkcích implicitních lze pak udati $\varepsilon > 0$ tak, že, když u jest v $\langle u_0 - \varepsilon,\ u_0 + \varepsilon\rangle$, funkce $\varphi(u)$ určená rovnicí

$$[x_1{}^{(0)}(u_1)]_{u_1 = \varphi(u)} = x^{(0)}(u)$$

je třídy r. Ježto u_0 lze zvoliti libovolně v $\langle a, b\rangle$, jest $\varphi(u)$ třídy r v $\langle a, b\rangle$. Dle (1) jest

$$\left(\frac{dx_1}{du_1}\right)_{u_1 = \varphi(u)} \cdot \frac{d\varphi}{du} = \frac{dx}{du},$$

z čehož plyne vlastnost 2^0, neboť dle definice ar. křivky jest $\frac{dx}{du} \neq 0_b$.

159. Buď $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a + 0,\ b - 0\rangle$) ar. křivka třídy $r \geq 1$. Buď $\varrho = \varrho(u)$ funkce definovaná pro všecka u z $\langle a + 0,\ b - 0\rangle$. Množství ar. bodů $\varrho(u)\, x(u)$ (u v $\langle a + 0,\ b - 0\rangle$ jest ar. křivka třídy r, když a jen když definici funkce $\varrho(u)$ lze rozšířiti na uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ tak, že 1^0 $\varrho(u)$ je třídy r v $\langle a, b\rangle$, 2^0 $\varrho(u) \neq 0$ všude v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz je zřejmý. Rozšíření definice funkce $\varrho(u)$ na $\langle a, b\rangle$ dá se provésti zřejmě jen jedním způsobem, totiž dle rovnic

$$\rho(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \rho(a + \varepsilon), \qquad \rho(b) = \lim_{\varepsilon \to 0} \rho(b - \varepsilon).$$

Křivky.

160. Buď $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a + 0,\ b - 0\rangle$) ar. křivka třídy $r \geq 1$ (může býti $r = \infty$). Množství bodů $\{x(u)\}$ (u v $\langle a + 0,\ b - 0\rangle$) nazývá se křivka třídy r. Křivku značíme obvykle $C\{x(u)\}$, určitěji $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a + 0,\ b - 0\rangle$), stručněji $C\{x\}$. Pravíme, že u je parametr křivky $C\{x(u)\}$.

Jsou-li u_1, u_2 dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$, jsou body $\{x(u_1)\}$, $\{x(u_2)\}$ různé. Vskutku dle **156** ar. body $x(u_1)$, $x(u_2)$ jsou lin. nezávislé. Křivka třídy r je také křivkou třídy s, když $1 \leq s < r$. Kolineace ar. bodů přiřazuje křivce třídy r křivku třídy r.

Množství nadrovin duální ke křivce třídy r nazývá se duální křivka třídy r; označení $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$.

161. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a + 0,\ b - 0\rangle$) křivka třídy r. Proměnná u jest parametr křivky $C\{x(u)\}$, když a jen když

$u_1 = \varphi(u)$ (u v $\langle a, b\rangle$), kde funkce $\varphi(u)$ splňuje tyto podmínky: 1⁰ je třídy r v $\langle a, b\rangle$, 2⁰ $\frac{d\varphi}{du} \neq 0$ pro všecka u z $\langle a, b\rangle$.

Vychází ihned ze **158.**

162. Povšimněme si, že dle **160** pravíme, že $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) je křivka třídy r, jen když $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) jest ar. křivka třídy r. Je-li však $\varrho(u)$ funkce jakkoli definovaná v $\langle a+0, b-0\rangle$, jen když $\varrho(u) \neq 0$ pro všecka u z $\langle a+0, b-0\rangle$, jest $\{\varrho(u)\ x(u)\} = \{x(u)\}$ pro všecka u z $\langle a+0, b-0\rangle$. Není-li opak výslovně uveden, vždy, kdykoli řekneme, že $C\{x(u)\}$ je křivka třídy r, míníme, že z každého bodu $\{x(u)\}$ byl vybrán ar. bod $x(u)$, takže $C_a\, x(u)$ jest ar. křivka třídy r. Pak jest $C\{x(u)\} = C\{\varrho(u)\ x(u)\}$ jen, když $\varrho(u)$ je třídy r v $\langle a, b\rangle$ (v. **159**).

163. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) křivka třídy r. Body $\{x(a)\}$, $\{x(b)\}$ nazýváme koncové body křivky $C\{x(u)\}$.

Bod $\{y\}$ jest koncový bod křivky $C\{x(u)\}$, když a jen když: 1⁰ $\{y\}$ není bod křivky $C\{x(u)\}$, 2⁰ v každém okolí bodu $\{y\}$ existují body křivky $C\{x(u)\}$.

Ze **156** a **160** je patrné, že podmínky 1⁰, 2⁰ jsou nutné. Předpokládejme naopak, že jsou splněny. Buď $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ posloupnost kladných čísel a buď $\varepsilon_n \to 0$. Buď W_n okolí bodu $\{y\}$ určené ar. bodem y a číslem ε_n. Dle podmínky 2⁰ každé W_n obsahuje aspoň jeden bod z $C\{x(u)\}$. Buď tedy $x(u_n)$ takový ar. bod z $C_a\, x(u)$, že bod $\{x(u_n)\}$ jest obsažen ve W_n. Dle definice W_n existuje λ_n takové, že $|\lambda_n x^{(i)}(u_n) - y^{(i)}| < \varepsilon_n$ ($i = 0, 1 \ldots m$; $n = 1, 2, 3 \ldots$), takže

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n x^{(i)}(u_n) = y^{(i)}. \qquad (i = 0, 1, \ldots m). \tag{1}$$

Ježto $a < u_n < b$ pro každé n, lze z posloupnosti $u_1, u_2, u_3 \ldots$ vybrati konvergentní posloupnost $u_{\nu_1}, u_{\nu_2}, u_{\nu_3}, \ldots$ Číslo $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} u_{\nu_n}$ jest patrně v $\langle a, b\rangle$. Ježto $x^{(i)}(u)$ jsou spojité v $\langle a, b\rangle$ (v. **156**), jest

$$\lim_{n\to\infty} x^{(i)}(u_{\nu_n}) = x^{(i)}(\nu). \qquad (i = 0, 1 \ldots m). \tag{2}$$

Dle (1) jest však

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{\nu_n} x^{(i)}(u_{\nu_n}) = y^{(i)}. \tag{3}$$

Ježto $y \neq 0_b$, $x(\nu) \neq 0_b$, plyne z (2) a (3), že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{\nu_n} = \lambda$, že $\lambda \neq 0$ a že $y = \lambda x(\nu)$, tedy $\{y\} = \{x(\nu)\}$. Odtud plyne ihned, že $\nu = a$ nebo $\nu = b$, neboť jinak by nebyla splněna podmínka 1⁰. Bod $\{y\}$ je tedy vskutku koncový bod pro $C\{x(u)\}$.

164. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) křivka třídy r. Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$. Buď W okolí bodu $\{x(u_0)\}$; buď M_u množství takových u z $\langle a+0, b-0\rangle$, že bod $\{x(u)\}$ jest obsažen ve W. Buď C^W množství bodů $\{x(u)\}$ (u v M_u). Množství C^W nazývá se průřez křivky $C\{x(w)\}$ s okolím W.

C^W je křivka — a to křivka třídy r —, když a jen když M_u jest interval (nutně otevřený); to nastane jistě, je-li okolí W dosti malé.

Počněme touto poznámkou: Obsahuje-li M_u číslo u_1, existují čísla $u'_1 < u_1$, $u''_1 > u_1$ taková, že každé číslo z $\langle u'_1, u''_1\rangle$ náleží do M_u. Důkaz vychází snadno z definice W a ze spojitosti funkcí $x^{(i)}(u)$.

Je-li M_u interval, je to interval otevřený dle právě učiněné poznámky; že pak C^W je křivka třídy r, je zřejmé.

Předpokládejme nyní, že C^W je křivka a že M_u není interval. Buď A, B, resp. dolní a horní hranice množství M_u. Z předchozí poznámky vychází, že ani A, ani B nenáležejí do M_u, takže ani $\{x(A)\}$ ani $\{x(B)\}$ není bod křivky C^W. Z definice dolní hranice množství čísel a ze spojitosti funkcí $x^{(i)}(u)$ v $\langle a, b\rangle$ však vychází snadno, že v každém okolí bodu $\{x(A)\}$ existují body křivky C^W; a stejně pro $\{x(B)\}$. Dle **163** jsou tedy $\{x(A)\}$, $\{x(B)\}$ koncové body křivky C^W. Ježto M_u není interval, existuje v $\langle A+0, B-0\rangle$ aspoň jedno číslo nenáležející do M_u. Pro určitost předpokládejme, že takové číslo existuje na př. v $\langle u_0+0, B-0\rangle$. Buď tedy v dolní hranice množství čísel z $\langle u_0+0, B-0\rangle$ nenáležejících do M_u. Zřejmě jest $u_0 < v < B$, tedy dle **160** $\{x(v)\} \neq \{x(A)\}$, $\{x(v)\} \neq \{x(B)\}$. Číslo v nenáleží do M_u; neboť jinak by dle poznámky na počátku důkazu učiněné existoval interval $\langle v', v''\rangle$ ($v' < v < v''$) obsažený v M_u, což odporuje definici čísla v. Bod $\{x(v)\}$ není tedy bod křivky C_W. Z definice v a ze spojitosti funkcí $x^{(i)}(u)$ vychází však, že v každém okolí bodu $\{x(v)\}$ existují body křivky C^W. Tedy dle **163** $\{x(v)\}$ je koncový bod křivky C^W. To je však nemožné, neboť křivka má jen dva koncové body.

Zbývá ukázati, že M_u jest interval, když okolí W je dosti malé. Buď c největší z čísel $|x^{(i)}(u_0)|$ ($i = 0, 1 \ldots m$); jest $c > 0$, ježto $x(u_0) \neq 0_b$. Je-li $0 < \varepsilon < c$, označme: W_ε okolí bodu $\{x(u_0)\}$ určené ar. bodem $x(u_0)$ a číslem ε; M_u^ε množství takových u z $\langle a+0, b-0\rangle$, že $\{x(u)\}$ náleží do W_ε; A_ε (B_ε) dolní (horní) hranice množství M_u^ε, takže $A_\varepsilon < u_0 < B_\varepsilon$. Ukažme nejprve: ke každému kladnému číslu η existuje kladné číslo $\gamma(\eta)$ takové, že A_ε a B_ε jsou v $\langle u_0-\eta, u_0+\eta\rangle$ kdykoli $\varepsilon < \gamma(\eta)$. Kdyby totiž tomu tak nebylo, existovalo by $\eta > 0$ a posloupnost $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0, \ldots$ taková, že $\varepsilon_n \to 0$ a aspoň jedna z relací

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} A_{\varepsilon_n} = u_0, \qquad \lim_{n\to\infty} B_{\varepsilon_n} = u_0$$

není správná. Zřejmě můžeme předpokládati, že limity nalevo existují — jinak bychom vybrali vhodnou částečnou posloupnost. Buď tedy

$$\lim_{n\to\infty} A_{\varepsilon_n} = \nu_1, \qquad \lim_{n\to\infty} B_{\varepsilon_n} = \nu_2,$$

při čemž buď $\nu_1 \neq u_0$ nebo $\nu_2 \neq u_0$. Z definice A_ε a B_ε však vychází snadno, že existují čísla λ'_n, λ''_n taková, že

$$|\lambda'_n x^{(i)}(A_{\varepsilon_n}) - x^{(i)}(u_0)| \leq \varepsilon_n, \qquad |\lambda''_n x^{(i)}(B_{\varepsilon_n}) - x^{(i)}(u_0)| \leq \varepsilon_n;$$

bylo by tedy

$$\lim_{n\to\infty} \lambda'_n x^{(i)}(A_{\varepsilon_n}) = x^{(i)}(u_0), \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda''_n x^{(i)}(B_{\varepsilon_n}) = x^{(i)}(u_0).$$

Dle (1) je však

$$\lim_{n\to\infty} x^{(i)}(A_{\varepsilon_n}) = x^{(i)}(\nu_1), \qquad \lim_{n\to\infty} x^{(i)}(B_{\varepsilon_n}) = x^{(i)}(\nu_2).$$

Bylo by tedy $\{x(\nu_1)\} = \{x(u_0)\}$, $\{x(\nu_2)\} = \{x(u_0)\}$, tedy dle definice křivky $\nu_1 = \nu_2 = u_0$, proti předpokladu.

Snadno vidíme, že existuje $k > 0$ takové, že pro všechna φ z $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ aspoň jedna souřadnice ar. bodu

$$y = \sin\varphi\, x(u_0) + \cos\varphi \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} \tag{2}$$

jest absolutně větší než k. Jinak by totiž existovala posloupnost $k_1 > 0$, $k_2 > 0 \ldots$ taková, že $k_n \to 0$ a ke každému k_n aspoň jedno φ_n z $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ tak, že

$$\left| \sin\varphi_n x^{(i)}(u_0) + \cos\varphi_n \left(\frac{dx^{(i)}}{du}\right)_{u=u_0} \right| \leq k_n. \qquad (i = 0, 1 \ldots m)$$

Zřejmě můžeme předpokládati, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \Phi$. Ježto $k_n \to 0$, bylo by pak

$$\sin\Phi\, x(u_0) + \cos\Phi \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} = 0_b,$$

což je nemožné, neboť ar. body $x(u_0)$ a $\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}$ jsou lin. nezávislé.

Můžeme předpokládati, že $k < 3c$. Ježto $x^{(i)}(u)$ jsou funkce třídy 1, jsou

$$\sin\varphi x^{(i)}(u) + \cos\varphi \frac{dx^{(i)}}{du} \qquad (i = 0, 1 \ldots m) \tag{3}$$

spojité funkce dvou proměnných u, φ; existuje tedy číslo $\eta_0 > 0$ takové, že

$$\left| \sin\varphi\, [x^{(i)}(u) - x^{(i)}(u_0)] + \cos\varphi \left[\frac{dx^{(i)}}{du} - \left(\frac{dx^{(i)}}{du}\right)_{u=u_0} \right] \right| < \frac{k}{3}, \quad (i = 0, 1 \ldots m)$$

pro všecka u z $\langle u_0 - \eta_0, u_0 + \eta_0 \rangle$ a pro všecka φ z $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Nyní jsme s to ukázati, že M_u^ε jest interval, kdykoli $\varepsilon < \gamma(\eta_0)$. Máme zjistiti, že pak do M_u^ε náležejí všecka u z $\langle A_\varepsilon + 0, B_\varepsilon - 0\rangle$; ukažme na př., že do M_u^ε náležejí všechna u z $\langle u_0 + 0, B_\varepsilon - 0\rangle$. Dle definice B_ε existuje číslo λ_ε takové, že

$$|\lambda_\varepsilon x^{(i)}(B_\varepsilon) - x^{(i)}(u_0)| \leqq \varepsilon. \tag{4}$$

Jest $\lambda_\varepsilon > 0$; vskutku aspoň pro jeden index i jest $|x^{(i)}(u_0)| = c$; ježto $k < 3c$, vychází ze (3), učiníme-li $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $u = B_\varepsilon$, že sgn $x^{(i)}(B_\varepsilon) =$ sgn $x^{(i)}(u_0)$; kdyby bylo $\lambda_\varepsilon \leqq 0$, byla by tedy pro toto i levá strana v (4) $\geqq c$, kdežto pravá strana jest $< c$. Můžeme tedy položiti

$$\lambda_\varepsilon = e^{(B_\varepsilon - u_0)\operatorname{tg}\varphi_\varepsilon},$$

kde $-\frac{\pi}{2} < \varphi_\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Klademe-li

$$X(u) = e^{(u-u_0)\operatorname{tg}\varphi_\varepsilon}\, x(u) - x(u_0),$$

je tedy

$$X(u_0) = 0_h, \qquad |X^{(i)}(B_\varepsilon)| \leqq \varepsilon. \qquad (i = 0, 1 \ldots m) \tag{5}$$

Dále jest

$$\frac{dX}{du} = f(u)\left[\sin\varphi_\varepsilon\, x(u) + \cos\varphi_\varepsilon \frac{dx}{du}\right],$$

kde $f(u) = \frac{1}{\cos\varphi_\varepsilon} e^{(u-u_0)\operatorname{tg}\varphi_\varepsilon} > 0$. Dle definice čísla k existuje aspoň jeden index i_0 takový, že $|y^{(i_0)}| > k$. Ze (3) vychází, že $\frac{dX^{(i_0)}}{du}$ je pro všecka u z $\langle u_0, B_\varepsilon\rangle$ stále téhož znamení a $\left|\frac{dX^{(i_0)}}{du}\right| > \frac{2k}{3} f(u)$. $|X^{(i_0)}(u)|$ je tedy stoupající funkce u v $\langle u_0, B_\varepsilon\rangle$, takže pro $i = i_0$ jest

$$|X^{(i)}(u)| < \varepsilon \tag{6}$$

pro všecka u z $\langle u_0 + 0, B_\varepsilon - 0\rangle$. Totéž však platí i o všech jiných indexech i. Je-li totiž nejprve i takový index, že $|y^{(i)}| \geqq \frac{k}{3}$, jest $|X^{(i)}(u)|$ opět stoupající funkce v $\langle u_0, B_\varepsilon\rangle$, takže z (5) plyne (6). Je-li však $|y^{(i)}| < \frac{k}{3}$, je dle (3) pro všecka u z $\langle u_0, B_\varepsilon\rangle$ $\left|\frac{dX^{(i)}}{du}\right| < \frac{2k}{3} f(u)$, tedy $\left|\frac{dX^{(i)}}{du}\right| < \left|\frac{dX^{(i_0)}}{du}\right|$. Ježto $\frac{dX^{(i_0)}}{du}$ má stále totéž znamení, jest pro všechna u z $\langle u_0 + 0, B_\varepsilon - 0\rangle$ $|X^{(i)}(u)| < |X^{(i_0)}(u)| < \varepsilon$, takže (6) platí i v tomto případě. Z (6) následuje, že každé číslo z $\langle u_0 + 0, B_\varepsilon - 0\rangle$ náleží do M_u^ε, jak bylo dokázati.

165. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě křivky o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Existuje-li okolí W bodu $\{x(u_0)\}$ takové, že průřez křivky $C\{x(u)\}$ s W rovná se průřezu křivky $C\{y(v)\}$ s W, pravíme, že křivky $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ splynou v okolí bodu $\{x(u_0)\}$.

Dle **164** splynou $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ v okolí bodu $\{x(u_0)\}$, když a jen když existují kladná čísla δ_1, δ_2, δ'_1, δ'_2 taková, že

$$C\{x(u)\}\ (u \text{ v } \langle u_0 - \delta_1 + 0,\ u_0 + \delta_2 - 0\rangle) = C\{y(v)\}\ (v \text{ ve } \langle v_0 - \delta'_1 + 0,\ v_0 + \delta'_1 - 0\rangle).$$

Algebraické křivky.

166. Množství bodů $\overline{C}$ nazývá se zobecněná křivka třídy $r \geq 1$, lze-li ke každému bodu $\{x\}$ z $\overline{C}$, až snad na konečný počet bodů, které pak nazýváme singulární, udati okolí W_x a křivku třídy $r\, C_x$ tak, že průřez $\overline{C}$ s W_x, t. j. množství všech bodů obsažených i v $\overline{C}$ i ve W_x rovná se průřezu křivky C_x s W_x. Pravíme pak, že $\overline{C}$ a C_x splynou v okolí bodu $\{x\}$.

Zřejmě každá křivka je také zobecněnou křivkou.

Každá definice (každý theorém) o bodu $\{x\}$ křivky C_x, v níž (v němž) lze křivku C_x nahraditi kteroukoli jinou křivkou, jež splyne (v. **165**) s C_x v okolí bodu $\{x\}$, dá se bezprostředně přenésti s C_x na $\overline{C}$. Vyslovíme takovou definici (theorém) pouze o křivce, i když ji (ho) v dalším textu užijeme na zobecněnou křivku.

Někdy je výhodné, považovati za singulární i některé (v konečném počtu) z těch bodů zobecněné křivky $\overline{C}$, jež nejsou singulární dle hořejší definice.

167. Buďte $\overset{0}{P}_r, \overset{1}{P}_r, \ldots \overset{k}{P}_r$ nadrovinové formy ($k \geq 1$); buď $\{x\}$ bod. Existují-li nadrovinové formy $\overset{0}{Q}_r, \overset{1}{Q}_r \ldots \overset{k}{Q}_r$ takové, že 1⁰

$$\overset{0}{Q}_r \overset{0}{P}_r = \overset{1}{Q}_r \overset{1}{P}_r + \ldots + \overset{k}{Q}_r \overset{k}{P}_r$$

a 2⁰ $\overset{0}{Q}_r$ není incidentní s $\{x\}$, pravíme, že nadrovinová forma $\overset{0}{P}_r$ jest lin. závislá na nadrovinových formách $\overset{1}{P}_r, \ldots \overset{k}{P}_r$ vzhledem k bodu $\{x\}$.

Existují-li čísla c_1, $c_2 \ldots c_k$ taková, že

$$\overset{0}{P}_r = c_1 \overset{1}{P}_r + \ldots + c_k \overset{k}{P}_r,$$

je patrné, že $\overset{0}{P}_r$ jest lin. závislá na $\overset{1}{P}_r, \ldots \overset{k}{P}_r$ vzhledem ke každému bodu.

168. Od tohoto místa počínaje předpokládáme stále $m > 1$.

Buďte $\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r, \ldots \overset{k}{P}_r$ ($k \geqq m-1$) nadrovinové formy. Buď C^a množství všech bodů incidentních s každou z forem $\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r, \ldots \overset{k}{P}_r$. Pro stručnost pravíme, že bod $\{x\}$ má vlastnost α, když z forem $\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r, \ldots \overset{k}{P}_r$ lze vybrati $m-1$, na př. $\overset{i_1}{P}_r, \overset{i_2}{P}_r \ldots \overset{i_{m-1}}{P}_r$ tak, že 1^0 každá z forem $\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r \ldots \overset{k}{P}_r$ jest lineárně závislá na $\overset{i_1}{P}_r, \overset{i_2}{P}_r, \ldots \overset{i_{m-1}}{P}_r$; 2^0 jsou-li ξ, η jakékoli ar. nadroviny, jakobien $(\overset{i_1}{P}_r, \overset{i_2}{P}_r \ldots \overset{i_{m-1}}{P}_r, \xi, \eta)$ jest incidentní s $\{x\}$. Vlastnost 2^0 lze vysloviti také takto: ať jakkoli zvolíme ar. body $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$, nadrovinová forma (v. **48**).

$$
\begin{vmatrix}
[\overset{i_1}{P}_r; x_1], & [\overset{i_1}{P}_r; x_2], & \ldots & [\overset{i_1}{P}_r; x_{m-1}] \\
[\overset{i_2}{P}_r; x_1], & [\overset{i_2}{P}_r; x_2], & \ldots & [\overset{i_2}{P}_r; x_{m-1}] \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
[\overset{i_{m-1}}{P}_r; x_1], & [\overset{i_{m-1}}{P}_r; x_2], & \ldots & [\overset{i_{m-1}}{P}_r; x_{m-1}]
\end{vmatrix} \tag{1}
$$

jest incidentní s $\{x\}$. Obsahuje-li C^a nejvýš konečný počet bodů o vlastnosti α a aspoň jeden bod, jenž nemá vlastnost α, jest C^a zobecněná křivka třídy ∞. Pravíme, že C^a jest algebraická křivka; označení $C^a = C[\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r \ldots \overset{k}{P}_r]$. Bod obsažený v C^a nazýváme singulárním bodem algebraické křivky C^a, když má vlastnost α. Každý bod singulární dle definice ve **160**, je singulární i dle této definice.

Předpoklad 1^0 jest ovšem vždy splněn, když $k = m-1$.

Ukažme, že oba způsoby, jak jsme vyslovili vlastnost 2^0, jsou ekvivalentní. Předpokládejme na př., že nadrovinová forma (1) jest incidentní s x, ať jakkoli zvolíme $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$, a ukažme, že, ať jakkoli zvolíme ξ, η nadrovinová forma $(\overset{i_1}{P}_r, \overset{i_2}{P}_r \ldots \overset{i_{m-1}}{P}_r, \xi, \eta)$ jest incidentní s x. Jsou-li ar. nadroviny ξ, η lin. závislé, je tomu tak zřejmě dle definice jakobienu. Jsou-li však ξ, η lin. nezávislé, zvolme lin. nezávislé ar. body $x_0, x_1, \ldots x_m$ tak, že $\{x_1, x_2 \ldots x_{m-1}\} = \text{Adj.}\,\{\xi, \eta\}$. Dle formule duální k **51** (5) existuje číslo c takové, že

$$(\overset{i_1}{P}_r, \overset{i_2}{P}_r, \ldots \overset{i_{m-1}}{P}_r, \xi, \eta) = c Q_r,$$

kde Q_r jest nadrovinová forma (1). Ježto dle předpokladu $S Q_r x = 0$, jest také

$$S(\overset{i_1}{P}_r, \overset{i_1}{P}_r \ldots \overset{i_{m-1}}{P}_r, \xi, \eta)\, x = 0.$$

Podobně vidíme, že když nadrovinová forma $(\overset{i_1}{P_r}, \overset{i_2}{P_r} \dots \overset{i_{m-1}}{P_r}, \xi, \eta)$ jest incidentní s x, ať jakkoli zvolíme ξ, η, totéž platí o nadrovinové formě (1), ať jakkoli zvolíme $x_1, x_2 \dots x_{m-1}$.

Buď nyní $\{x_0\}$ nesingulární bod algebraické křivky $C^a = C[\overset{1}{P_r}, \overset{2}{P_r} \dots \overset{k}{P_r}]$. Je třeba ukázati existenci takového okolí W bodu $\{x_0\}$, že průřez C^W množství C^a s okolím W je křivka třídy ∞. Ježto $\{x_0\}$ není singulární, jest možno určiti $\overset{i_1}{P_r}, \overset{i_2}{P_r}, \dots \overset{i_{m-1}}{P_r}$, tak, že 1⁰ existují nadrovinové formy $\overset{j}{Q_r}, \overset{j,\alpha}{Q_r}$ $(j = 1, 2 \dots k;\ \alpha = 1, 2 \dots m-1)$ takové, že $S\overset{j}{Q_r}x_0 \neq 0$ $(j = 1, 2 \dots k)$ a

$$\overset{j}{Q_r}\overset{j}{P_r} = \sum_{\alpha=1}^{m-1} \overset{j,\alpha}{Q_r}\overset{i_\alpha}{P_r}, \qquad (j = 1, 2 \dots k) \tag{2}$$

2⁰ existují ar. body $x_1, x_2, \dots x_{m-1}$ takové, že nadrovinová forma (1) není incidentní s x_0. Ježto $S\overset{j}{Q_r}x_0 \neq 0$ a výrazy $S\overset{j}{Q_r}x$ jsou spojité funkce souřadnic ar. bodu x, můžeme zvoliti W tak malé, že $S\overset{j}{Q_r}x \neq 0$, kdykoli bod $\{x\}$ náleží do W. Dle (2) náleží pak bod $\{x\}$ z W do C^a, když a jen když

$$S\overset{i_1}{P_r}x = 0,\ S\overset{i_2}{P_r}x = 0, \dots S\overset{i_{m-1}}{P_r}x = 0. \tag{3}$$

Zvolme nyní x_m tak, že $(x_0\, x_1 \dots x_m) \neq 0$. To lze, neboť ar. body $x_0, x_1 \dots x_{m-1}$, jsou lin. nezávislé; vskutku, je-li $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_{m-1} x_{m-1} = 0_b$, obdržíme násobením prvků α^{ho} sloupce determinantu (1) číslem λ_α $(\alpha = 1, 2 \dots m-1)$ a sečtením výrazů tak obdržených v jednotlivých řádcích nadrovinové formy

$$-\lambda_0[\overset{i_1}{P_r};\ x_0],\ -\lambda_0[\overset{i_2}{P_r};\ x_0], \dots -\lambda_0[\overset{i_{m-1}}{P_r};\ x_0],$$

jež jsou incidentní s $\{x_0\}$ dle **50**; odtud vidíme snadno, že nadrovinová forma (1) byla by incidentní s x_0, kdyby ar. body $x_0, x_1 \dots x_{m-1}$ byly lin. závislé. Ježto $(x_0\, x_1 \dots x_m) \neq 0$ a ježto výraz $(x\, x_1 \dots x_m)$ je spojitá funkce souřadnic ar. bodu x, můžeme o okolí W učiniti další předpoklad, že pro každý bod $\{x\}$ z W jest $(x x_1 \dots x_m) \neq 0$, načež můžeme bez újmy obecnosti předpokládati, že

$$x = x_0 + \nu_1 x_1 + \dots \nu_{m-1} x_{m-1} + \nu x_m. \tag{4}$$

Ukažme nyní, že 1⁰ ke každému dosti malému číslu $\delta > 0$ lze udati číslo $\delta_1 > 0$ takové, že, kdykoli $|\nu| < \delta$, lze určiti jedním a jen jedním způsobem $\nu_1 = f_1(\nu), \nu_2 = f_2(\nu), \dots \nu_{m-1} = f_{m-1}(\nu)$ tak, že jsou splněny rovnice (3) a (4) a $|\nu_i| < \delta_1$ $(i = 1, 2 \dots m-1)$; 2⁰ takto určené funkce jsou třídy ∞ v $\langle -\delta, \delta \rangle$. Dle známé věty o funkcích implicitních je k tomu cíli třeba pouze zjistiti, že, dosadíme-li za x ze (4), determinant $(m-1)$-ho stupně, v jehož α-tém řádku a β-tém sloupci jest

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial v_\beta} S \overset{i_\alpha}{P_r} x \qquad (\alpha = 1, 2 \dots m-1,;\ \beta = 1, 2 \dots m-1)$$

jest od nuly různý pro $x = x_0$, tedy pro $v_1 = \dots = v_{m-1} = v = 0$. Dle (4) a **62** (2) je však

$$A_{\alpha\beta} = n_\alpha S \left[\overset{i_\alpha}{P_r}; \frac{\partial x}{\partial v_\beta} \right] x = n_\alpha S [\overset{i_\alpha}{P_r}; x_\beta]\, x,$$

při čemž n_α je stupeň nadrovinové formy $\overset{i_\alpha}{P_r}$. Uvažovaný determinant dělený $n_1 n_2 \dots n_{m-1}$ rovná se tudíž pro $x = x_0$ výrazu

$$S \begin{vmatrix} [\overset{i_1}{P_r}; x_1], & [\overset{i_1}{P_r}; x_2], \dots & [\overset{i_1}{P_r}; x_{m-1}] \\ . & . \quad \dots & . \\ [\overset{i_{m-1}}{P_r}; x_1], & [\overset{i_{m-1}}{P_r}; x_2], \dots & [\overset{i_{m-1}}{P_r}; x_{m-1}] \end{vmatrix} x_0,$$

jenž dle předpokladu jest od nuly různý.

Klademe-li

$$x_0 + f_1(v)\, x_1 + \dots + f_{m-1}(v)\, x_{m-1} + v x_m,$$

můžeme zřejmě určiti kladné $\delta_2 \leq \delta$ tak malé, že množství bodů $C\{y(v)\}$ (v v $\langle -\delta, \delta \rangle$) jest křivka. Dále je patrné, že průřez C^α s W je roven průřezu křivky $C\{y(v)\}$ (v v $\langle -\delta, \delta \rangle$) s W, když W je tak malé, že, kdykoli bod $\{x\}$, kde ar. bod x je tvaru (4), náleží do W, jest $|v_i| < \delta_1$ ($i = 1, 2 \dots m-1$), $|v| < \delta_2$. Že lze W voliti tak malé, aby těmto požadavkům bylo vyhověno, se snadno nahlédne.

169. Řada bodová $\{x_1, x_2\}^C$ jest algebraická křivka bez singulárních bodů; jest $\{x_1, x_2\}^C = C[\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m-1}]$, když $\{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m-1}\} = \text{Adj.}\ \{x_1, x_2\}$.

Vychází ihned ze **161**. Ostatně je zřejmé, že $\{x_1, x_2\}^C$ splyne na př. v okolí bodu $\{x_1\}$ s křivkou $C\{x_1 + u x_2\}$.

Buď $m = 2$. Kuželosečka jest algebraická křivka bez singulárních bodů, jak vychází ihned ze **168**. Proto jsme v **88** zavedli označení $C[P_r]$.

170. Buď $m = 2$. Buď $\{x_0\}$ singulární bod algebraické křivky $C[P_r]$. Buď M množství ar. bodů x takových, že $[P_r; x; x]$ (v. **48**) jest incidentní s x_0. Pak buďto 1° množství M je celý prostor ar. bodů, nebo 2° M jest bod $\{x_0\}$, nebo 3° M skládá se ze dvou řad ar. bodů o průřezu $\{x_0\}$, nebo 4° M je řada ar. bodů obsahující $\{x_0\}$. Nastane-li případ 3°, pravíme, že $\{x_0\}$ je dvojný bod algebraické křivky $C[P_r]$.

Buďte x_1, x_2 ar. body takové, že $(x_0\, x_1\, x_2) \neq 0$; buď ξ_0, ξ_1, ξ_2 duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2. Pak jest $(\xi_0\, \xi_1\, \xi_2) \neq 0$ a můžeme psáti

$$P_r = a\xi_0^n + b_1\xi_0^{n-1}\xi_1 + b_2\xi_0^{n-1}\xi_2 + c_{11}\xi_0^{n-2}\xi_1^2 + c_{12}\xi_0^{n-2}\xi_1\xi_2 + c_{22}\xi_0^{n-2}\xi_2^2 + Q_r$$

při čemž každý člen v Q_r obsahuje jako faktor buď ξ_1^3, nebo $\xi_1^2\xi_2$, nebo $\xi_1\xi_2^2$, nebo ξ_2^3. Dle **48** (4) jest

$$n\,[P_r; x] = (na\,S\xi_0 x + b_1 S\xi_1 x + b_2 S\xi_2 x)\,\xi_0^{n-2} + \ldots,$$

kde vynechané členy obsahují jako faktor buď ξ_1 nebo ξ_2. Ježto $\{x_0\}$ je singulární bod pro $C[P_r]$, je dle **168** $S[P_r; x]\,x_0 = 0$ pro každý ar. bod x, k čemuž zřejmě je nutné a stačí $a = b_1 = b_2 = 0$. Je tudíž dle **48** (4)

$$n\,[P_r; x] = [c_{11} S\xi_1 x\,.\,\xi_1 + c_{12}(S\xi_2 x\,.\,\xi_1 + S\xi_1 x\,.\,\xi_2) + c_{22}(S\xi_2 x\,.\,\xi_2)]\,\xi_0^{n-2} + \ldots,$$

kde vynechané členy obsahují buď ξ_1^2, nebo $\xi_1\,\xi_2$, nebo ξ_2^2. Odtud opět dle **48** (4)

$$n(n-1)\,[P_r; x; x] = [c_{11}(S\xi_1 x)^2 + 2c_{12} S\xi_1 x\, S\xi_2 x + c_{22}(S\xi_2 x)^2]\,\xi_0^{n-2} + \ldots,$$

kde vynechané členy obsahují ξ_1 nebo ξ_2, takže $S[P_r; x; x]\,x_0 = 0$, když a jen když

$$c_{11}(S\xi_1 x)^2 + 2c_{12} S\xi_1 x\, S\xi_2 x + c_{22}(S\xi_2 x)^2 = 0,$$

čili, klademe-li

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

když

$$c_{11}\lambda_1^2 + 2c_{12}\lambda_1\lambda_2 + c_{22}\lambda_2^2 = 0. \tag{1}$$

Z (1) vidíme ihned, že nastane: případ 1°, když $c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0$; případ 2°, když $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0$; případ 3°, když $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$; případ 4°, když není současně $c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0$, avšak $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} = 0$.

171. Buď $m = 2$. Buď $\{x_0\}$ dvojný bod algebraické křivky $C[P_r]$. Je-li W dosti malé okolí bodu $\{x_0\}$, průřez $C[P_r]$ s W skládá se ze dvou křivek třídy ∞, jež mají společný pouze bod $\{x_0\}$; tyto dvě křivky nazývají se větve algebraické křivky $C[P_r]$ v okolí dvojného bodu $\{x_0\}$.

Zvolme x_1, x_2 tak, že řady ar. bodů $\{x_0, x_1\}$, $\{x_0, x_2\}$ tvoří množství M ze **170**. Buď opět ξ_0, ξ_1, ξ_2 duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2. Dle **170** (1) bude $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} \neq 0$, takže můžeme předpokládati, že $c_{12} = 1$, tedy

$$P_r = \xi_0^{n-2}\xi_1\xi_2 + Q_r,$$

kde Q_r je přímková forma, jejíž každý člen obsahuje jako faktor buď ξ_1^3 nebo $\xi_1^2\xi_2$ nebo $\xi_1\,\xi_2^2$ nebo ξ_2^3. Ježto $Sx_0\xi_0 \neq 0$, můžeme okolí W bodu $\{x_0\}$

zvoliti tak malé, že $Sx\xi_0 \neq 0$ pro každý bod $\{x\}$ z W, takže můžeme bez újmy obecnosti předpokládati, že

$$x = x_0 + ux_1 + vx_2,$$

načež

$$SP_r x = uv + \varphi(u, v), \tag{1}$$

při čemž $\varphi(u, v) = SQ_r x$ je polynom v u, v, jehož každý člen jest aspoň třetího stupně.

Je-li dáno jakékoli kladné číslo δ, a zvolíme-li okolí W bodu $\{x_0\}$ dosti malé, bude pro každý od $\{x_0\}$ různý bod $\{x\}$ průřezu $C[P_r]$ s W buď $\left|\frac{v}{u}\right| < \delta$, nebo $\left|\frac{u}{v}\right| < \delta$. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by v každém okolí bodu $\{x_0\}$ od $\{x_0\}$ různý bod $\{x\}$ z $C[P_r]$, kde

$$x = x_0 + ux_1 + \tau ux_2, \qquad \delta \leq |\tau| \leq \frac{1}{\delta}. \tag{2}$$

Avšak bod $\{x\}$, kde x je dáno rovnicí (2), náleží dle (1) do $C[P_r]$ když a jen když

$$u^2\tau + \varphi(u, \tau u) = 0. \tag{3}$$

Ježto každý člen polynomu φ jest aspoň třetího stupně, jest identicky $\varphi(u, \tau u) = - u^3 \psi(u, \tau)$, kde ψ je polynom, takže ze (3) obdržíme

$$\tau = u\psi(u, \tau). \tag{4}$$

Odtud snadno obdržíme spor: vskutku když číslo ε určující okolí W konverguje k nule, pravá strana ve (4) by konvergovala k nule, ježto $|\tau| \leq \frac{1}{\delta}$, kdežto levá strana by zůstávala absolutně větší nebo rovna $\delta > 0$.

Vzhledem k právě dokázanému výsledku stačí ukázati, že při dosti malém okolí W množství těch bodů průřezu $C[P_r]$ s W pro něž $\left|\frac{v}{u}\right| < \delta$, je křivka třídy ∞. Běží o to, rozřešiti rovnici (4) za předpokladu, že $|u|$, $|\tau|$ jsou malé. Dle známé věty o funkcích implicitních obdržíme jedno a jen jedno řešení $\tau = f(u)$, kde $f(u)$ je funkce třídy ∞ v jistém intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$ a $f(0) = 0$. Zřejmě existuje $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ takové, že $C\{y(u)\}$ (u v $\langle -\varepsilon_1 + 0, \varepsilon_1 - 0\rangle$), kde

$$y(u) = x_0 + ux_1 + uf(u)x_2, \tag{5}$$

je křivka, načež ta část průřezu dosti malého okolí W bodu $\{x_0\}$ s $C[P_r]$, v níž $\left|\frac{v}{u}\right| < \delta$, rovná se průřezu W s křivkou $C\{y(u)\}$ (u v $\langle -\varepsilon_1 + 0, \varepsilon_1 - 0\rangle$).

172. Buď $m = 3$. Buďte $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ lin. nezávislé ar. roviny, Množství bodů incidentních s rovinovými formami

$$\xi_0 \xi_2 - \xi_1^2, \quad \xi_0 \xi_3 - \xi_1 \xi_2, \quad \xi_1 \xi_3 - \xi_2^2 \tag{1}$$

jest algebraická křivka bez singulárních bodů; nazýváme ji kubickou křivkou. Označení

$$C\begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

nebo stručně C_3.

Označení (2) je odůvodněno tím, že formy (1) jsou determinanty matice

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Že pro každý bod obsažený v C_3 je splněn požadavek **168** 1°, je patrné z identit

$$\begin{aligned} &\xi_2(\xi_0 \xi_2 - \xi_1^2) - \xi_1(\xi_0 \xi_3 - \xi_1 \xi_2) + \xi_0(\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2) = 0, \\ &\xi_3(\xi_0 \xi_2 - \xi_1^2) - \xi_2(\xi_0 \xi_3 - \xi_1 \xi_2) + \xi_1(\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Snadno se vidí, že žádný bod z C_3 není incidentní současně s ξ_0 i s ξ_3. Abychom ukázali, že každý bod $\{x\}$ z C_3 splňuje požadavek **168** 2°, předpokládejme, že na př. $S\xi_0 x \neq 0$, takže jest ukázati, že existují ar. roviny ξ, η takové, že jakobien $(\xi_0 \xi_2 - \xi_1^2, \xi_0 \xi_3 - \xi_1 \xi_2, \xi, \eta)$ není incidentní s x.

Dle **51** je však

$$Q_r = (\xi_0 \xi_2 - \xi_1^2, \xi_0 \xi_3 - \xi_1 \xi_2, \xi_0, \xi_1) = \tfrac{1}{4}(\xi_2 \xi_3 \xi_0 \xi_1)\, \xi_0^2,$$

takže $SQ_r x \neq 0$.

173. Buď $m = 3$. Buď $\{x\}$ bod kubické křivky C_3. Existují ar. roviny $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ takové, že 1°

$$C_3 = C\begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix}$$

a 2° $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\} = \text{Adj.}\, \{x\}$.

Buďte $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ lin. nezávislé ar. roviny takové, že

$$C_3 = C\begin{bmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix}.$$

Je-li $S\eta_0 x = S\eta_1 x = S\eta_2 x = 0$, stačí zvoliti $\xi_i = \eta_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Je-li $S\eta_1 x = S\eta_2 x = S\eta_3 x = 0$, stačí zvoliti $\xi_i = \eta_{3-i}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Není-li tomu tak, uvažme, že, ježto $\{x\}$ náleží do C_3, všecky determinanty matice

$$\begin{pmatrix} S\eta_0 x & S\eta_1 x & S\eta_2 x \\ S\eta_1 x & S\eta_2 x & S\eta_3 x \end{pmatrix}$$

jsou rovny nule. Existuje tedy takové λ, že

(1) $$S\eta_0 x + \lambda S\eta_1 x = S\eta_1 x + S\eta_2 x = S\eta_2 x + S\eta_3 x = 0.$$

Zvolme nyní

(2) $$\begin{aligned}\xi_0 &= \eta_0 + 3\lambda\eta_1 + 3\lambda^2\eta_2 + \lambda^3\eta_3,\\ \xi_1 &= \eta_1 + 2\lambda\eta_2 + \lambda^2\eta_3,\\ \xi_2 &= \eta_2 + \lambda\eta_3,\\ \xi_3 &= \eta_3.\end{aligned}$$

Dle (2) jest $(\xi_0\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3) = (\eta_0\,\eta_1\,\eta_2\,\eta_3) \neq 0$. Dle (1) jest $S\xi_i x = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Ježto

$$\begin{vmatrix}\xi_0 & \xi_1\\ \xi_1 & \xi_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\eta_0 & \eta_1\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix} + \lambda\begin{vmatrix}\eta_0 & \eta_2\\ \eta_1 & \eta_3\end{vmatrix} + \lambda^2\begin{vmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}\xi_0 & \xi_2\\ \xi_1 & \xi_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\eta_0 & \eta_2\\ \eta_1 & \eta_3\end{vmatrix} + 2\lambda\begin{vmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_2 & \xi_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix},$$

jest

$$C\begin{bmatrix}\eta_0 & \eta_1 & \eta_2\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}\xi_0 & \xi_1 & \xi_2\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix}.$$

Styk křivek.

174. Buď opět $m \geqq 2$. Buď P_r nadrovinová forma; buď $C = C\{x(u)\}$ křivka třídy $r \geqq 1$; buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky C. Pravíme, že P_r a C mají jednobodový styk v bodě $\{x(u_0)\}$, když P_r jest incidentní s $x(u_0)$. Pravíme, že P_r a C mají s-bodový $(2 \leqq s \leqq r + 1)$ styk v bodě $\{x(u_0)\}$, když

(1) $$\left[\frac{d^\alpha}{du^\alpha}\Big(SP_r x(u)\Big)\right]_{u=u_0} = 0, \qquad (\alpha = 0, 1 \ldots s - 1)$$

při čemž symbol $\dfrac{d^0}{du^0} = 1$. Pravíme, že P_r a C mají právě s-bodový $(1 \leqq s \leqq r)$ styk v bodě $\{x(u_0)\}$, když v tomto bodě mají styk s-bodový, ne však $(s + 1)$-bodový.

Z definice vychází ihned, že z s-bodového styku P_r a C v bodě $\{x(u_0)\}$ plyne s-bodový styk v témž bodě pro P_r a kteroukoli křivku, jež splyne s C v okolí bodu $\{x(u_0)\}$. Také snadno se vidí: Buďte P_r, Q_r nadrovinové formy; buď $C = C\{x(u)\}$ křivka třídy r; buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky C. Mají-li P_r a C s-bodový styk v $\{x(u_0)\}$, mají-li dále Q_r a C s'-bodový styk v $\{x(u_0)\}$, a je-li $s + s' \leqq r + 1$, má nadrovinová forma $P_r \cdot Q$ $(s + s')$-bodový styk s C v $\{x(u_0)\}$. Důkaz vychází ihned z formule:

$$\frac{d^\alpha}{du^\alpha}[S(P_r\,.\,Q_r)\,x(u)] = \frac{d^\alpha}{du^\alpha}[SP_r\,x(u)\,.\,SQ_r\,x(u)] =$$
$$= \sum_{\beta=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\frac{d^\beta}{du^\beta}\Big(SP_r\,x(u)\Big)\frac{d^{\alpha-\beta}}{du^{\alpha-\beta}}(SQ_r\,x(u));$$

vskutku, když $\alpha < s + s'$, je buď $\beta < s$ nebo $\alpha - \beta < s'$.

Je však třeba ukázati, že k učiněné definici jsme oprávněni, že tedy podmínky (1) přejdou podmínky s nimi ekvivalentní, když buď místo $x(u)$ zavedeme $\varrho(u)\,x(u)$, kde ϱ je funkce třídy r všude různá od nuly, nebo místo u zavedeme v kladouce $u = \varphi(v)$, kde $\varphi(v)$ je funkce třídy r a $\frac{d\varphi}{dv}$ je všude různé od nuly (v. **161** a **162**). Za tím účelem uvažme nejprve, že rovnice (1) dají se shrnouti v jedinou, a to

$$\lim_{u \to u_0}\frac{SP_r\,x(u)}{(u-u_0)^{s-1}} = 0.$$

Stačí pak si všimnouti, že 1⁰ $SP_r\,\varrho(u)\,x(u) = [\varrho(u)]^n\,SP_r\,x(u)$, kde n je stupeň P_r, takže

$$\lim_{u \to u_0}\frac{SP_r[\varrho(u)\,x(u)]}{(u-u_0)^{s-1}} = [\varrho(u_0)]^n\lim_{u \to u_0}\frac{SP_r\,x(u)}{(u-u_0)^{s-1}};$$

a 2⁰, když $u_0 = \varphi(v_0)$, $\lim_{v \to v_0}\frac{u-u_0}{v-v_0} = \left[\frac{d\varphi}{dv}\right]_{v=v_0}$, takže

$$\lim_{v \to v_0}\frac{SP_r\,x[\varphi(v)]}{(v-v_0)^{s-1}} = \left[\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^{s-1}\right]_{v=v_0}.\lim_{u \to u_0}\frac{SP_r\,x(u)}{(u-u_0)^{s-1}}.$$

175. Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy $r \geqq 1$; buď $\{x(u_0)\}$ bod této křivky. Zvolme číslo s tak, že $2 \leqq s \leqq r+1$. Buď T množství ar. bodů y té vlastnosti, že, kdykoli nadrovinová forma P_r má s-bodový styk s křivkou $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, polára $[P_r; y]$ ar. bodu y vzhledem k formě P_r jest incidentní s $\{x(u_0)\}$. Pak jest $T = \left\{x(u_0), \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}\right\}$.

Z **15** vychází ihned, že T je lineární systém. Mají-li P_r a $C\{x(u)\}$, s-bodový styk v $x(u_0)$, jest, ježto $s \geqq 2$ (v. **62** (2))

$$SP_r\,x(u_0) = 0$$
$$S\left[P_r;\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}\right]x(u_0) = 0,$$

tedy $x(u_0)$ a $\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}$ jsou obsaženy v T. Ježto T je lin. systém, zbývá ukázati, že, když ar. body $x(u_0) = x_0$, $\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} = x_1$, x_2 jsou lin. nezávislé, existuje nadrovinová forma P_r, mající s $C\{x(u)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x(u_0)\}$ a taková, že $S[P_r; x_2]\, x_0 \neq 0$. Buďte $x_3 \dots x_m$ pevné ar. body takové, že $(x_0 x_1 \dots x_m) \neq 0$; buď $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m$ duální jehlan adjungovaný k $x_0, x_1 \dots x_m$. Ukažme, že žádané vlastnosti má nadrovinová forma stupně $s-1$

$$P_r = \xi_0^{s-2}\xi_2 + c_2\xi_0^{s-3}\xi_1^2 + c_3\xi_0^{s-4}\xi_1^3 + \dots + c_{s-1}\xi_1^{s-1}, \tag{1}$$

zvolíme-li vhodně koeficienty $c_2, c_3 \dots c_{s-1}$. Buď

$$x(u) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m,$$

takže $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_m$ jsou funkce třídy r proměnné u a

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(\lambda_0)_{u=u_0} = 1,\ (\lambda_i)_{u=u_0} = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots m) \\ &\left(\frac{d\lambda_1}{du}\right)_{u=u_0} = 1,\ \left(\frac{d\lambda_k}{du}\right)_{u=u_0} = 0. \qquad (k = 0, 2, 3 \dots m) \end{aligned}$$

Zřejmě jest

$$\varphi_s(u) = SP_r x(u) = \lambda_0^{s-2}\lambda_2 + c_2\lambda_0^{s-3}\lambda_1^2 + \dots + c_{s-1}\lambda_1^{s-1}.$$

Dle (2) jest pro $u = u_0$: $\varphi_2(u_0) = [\lambda_0^{s-2}\lambda_2]_{u=u_0} = 0$, $\left[\frac{d\varphi_2}{du}\right]_{u=u_0} = \left[\frac{d}{du}\lambda_0^{s-2}\lambda_2\right]_{u=u_0} = 0$. Můžeme tedy dokazovati indukcí vzhledem k s, t. j. předpokládati, že jsme již určili $c_2, c_3 \dots c_{s-2}$ tak, že pro $u = u_0$ funkce

$$\varphi_{s-1}(u) = \lambda_0^{s-3}\lambda_2 + c_2\lambda_0^{s-4}\lambda_1^2 + \dots + c_{s-2}\lambda_1^{s-2}$$

vymizí i se svými derivacemi až po $(s-2)$-tou včetně, načež stačí ukázati, že lze určiti c_{s-1} tak, že pro $u = u_0$ funkce

$$\varphi_s(u) = \lambda_0\varphi_{s-1}(u) + c_{s-1}\lambda_1^{s-1}$$

vymizí i se svými derivacemi až pro $(s-1)$-tou včetně. Dle (2) a předpokládané vlastnosti funkce $\varphi_{s-1}(u)$ je však patrně

$$\varphi_s(u_0) = 0, \left[\frac{d^\alpha}{du^\alpha}\varphi_s(u)\right]_{u=u_0} = 0, \qquad (\alpha = 1, 2 \dots s-2)$$

$$\left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}}\varphi_s(u)\right]_{u=u_0} = \left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}}\varphi_{s-1}(u)\right]_{u=u_0} = (s-1)!\, c_{s-1},$$

takže c_{s-1} lze žádaným způsobem určiti. Dle (1) a **47** (6) jest

$$[P_r; x_2] = \frac{1}{s-1}\xi_0^{s-2},$$

takže

$$S[P_r;\, x_2]\, x_0 = \frac{1}{s-1} \neq 0,$$

jak bylo žádáno.

176. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ křivky třídy r. Buď $\{x_0\} = \{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$ bod náležející oběma těmto křivkám. Pravíme, že $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají s-bodový ($1 \leq s \leq r+1$) styk v bodě $\{x_0\}$, když každá nadrovinová forma, která má v $\{x_0\}$ s-bodový styk s $C\{x(u)\}$, má v $\{x_0\}$ s-bodový styk s $C\{y(v)\}$. Pravíme, že $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají právě s-bodový ($1 \leq s \leq r$) styk v bodě $\{x_0\}$, když mají v tomto bodě s-bodový styk, ne však $(s+1)$-bodový styk.

V této definici křivky $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ chovají se nesymetricky; že však ve skutečnosti lze je vyměniti, plyne ze **178.** Je zřejmé, že styk zůstane zachován, když kteroukoli z obou křivek nahradíme jinou křivkou, jež s ní splyne v okolí bodu $\{x_0\}$. Také je zřejmé, že jednobodový styk dvou křivek nastane v každém společném bodě.

177. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ křivky třídy r, obsahující bod $\{x_0\}$ a mající v tomto bodě s-bodový ($1 \leq s \leq r+1$) styk. Buď K kolineace ar. bodů; buď v K: $x(u) \sim x'(u)$, $y(v) \sim y'(v)$, $x_0 \sim x'_0$. Křivky $C\{x'(u)\}$, $C\{y'(v)\}$ mají v bodě $\{x'_0\}$ s-bodový styk.

Buď P_r nadrovinová forma, která má s $C\{x(u)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x_0\}$; buď $P_r \sim P_r'$ v Ass. K. Pak P_r' má dle **47** s $C\{x'(u)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x'_0\}$.

178. Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy r obsahující bod $\{x_0\}$ ($x_0 = x(u_0)$). Křivka $C\{z(w)\}$ třídy r má s $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x_0\}$ s-bodový ($1 \leq s \leq r+1$) styk, když a jen když obsahuje $\{x_0\}$ a v okolí tohoto bodu splyne s křivkou $C\{y(v)\}$, při čemž

$$\left[\frac{d^\alpha y(v)}{dv^\alpha}\right]_{v=v_0} = \left[\frac{d^\alpha x(u)}{du^\alpha}\right]_{u=u_0}, \quad \left(\alpha = 0, 1 \ldots s-1;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{1}$$

Že vyslovená podmínka stačí pro s-bodový styk křivek $C\{x(u)\}$ a $C\{z(w)\}$, je zřejmé. Předpokládejme tedy naopak, že křivky $C\{x(u)\}$ a $C\{z(w)\}$ mají v bodě $\{x_0\}$ s-bodový styk. Je zřejmé, že lze pak splniti tu rovnici (1), v níž $\alpha = 0$. Můžeme tedy rovnice (1) dokazovati indukcí vzhledem k α, t. j. předpokládati, že jsme již pro jisté β ($0 \leq \beta < s-1$) určili křivku $C\{y_1(v_1)\}$, která splyne s $C\{z(w)\}$ v okolí bodu $\{x_0\}$ a je taková, že

$$\left[\frac{d^\alpha y_1(v_1)}{dv_1^{\,\alpha}}\right]_{v_1=v_0} = \left[\frac{d^\alpha x(u)}{du^\alpha}\right]_{u=u_0}, \quad (0 \leq \alpha \leq \beta) \tag{2}$$

načež je pouze třeba ukázati, že lze nalézti kladné číslo δ a funkce $\varphi(\nu)$, $\varrho(\nu)$ třídy r ve $\langle\nu_0-\delta,\ \nu_0+\delta\rangle$ tak, že 1⁰ $\dfrac{d\varphi}{d\nu}\neq 0$, $\varrho(\nu)\neq 0$ všude ve $\langle\nu_0-\delta,\ \nu_0+\delta\rangle$, 2⁰ $\varphi(\nu_0)=\nu_0$, a 3⁰ že, klademe-li $y(\nu)=\varrho(\nu)y_1[\varphi(\nu)]$, jsou splněny ty rovnice (1), v nichž $\alpha\leqq\beta+1$.

Buď nyní P_r nadrovinová forma, mající s $C\{x(u)\}$ a tedy dle předpokladu také s $C\{y_1(\nu_1)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x_0\}$. Je tedy zejména

$$\left[\frac{d^{\beta+1}}{d\nu_1{}^{\beta+1}}SP_r y_1(\nu_1)\right]_{\nu_1=\nu_0}=0,\ \left[\frac{d^{\beta+1}}{du^{\beta+1}}SP_r x(u)\right]_{u=u_0}=0. \tag{3}$$

Snadno se vidí (v. **62**), že

$$\frac{d^{\beta+1}}{du^{\beta+1}}SP_r x(u)=nS\left[P_r;\ \frac{d^{\beta+1}x}{du^{\beta+1}}\right]x(u)+\ldots,$$

kde vynechané členy obsahují pouze $x(u)$, $\dfrac{dx}{du}$, $\ldots$ $\dfrac{d^{\beta}x}{du^{\beta}}$ a n je stupeň formy P_r; podobně pro $y_1(\nu_1)$. Dle (2) a (3) je tedy

$$S\left[P_r;\ \left(\frac{d^{\beta+1}y_1(\nu_1)}{d\nu_1{}^{\beta+1}}\right)_{\nu_1=\nu_0}-\left(\frac{d^{\beta+1}x(u)}{du^{\beta+1}}\right)_{u=u_0}\right]x(u_0)=0. \tag{4}$$

Rovnice (4) platí, ať jakkoli zvolíme nadrovinovou formu P_r, jen když má s $C\{x(u)\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$. Dle **175** existují tedy čísla λ_0, λ_1 taková, že

$$\left[\frac{d^{\beta+1}y_1(\nu_1)}{d\nu_1{}^{\beta+1}}\right]_{\nu_1=\nu_0}=\left[\frac{d^{\beta+1}x(u)}{du^{\beta+1}}\right]_{u=u_0}+\lambda_0x_0+\lambda_1x_1, \tag{5}$$

kde $x_1=\left(\dfrac{dx}{du}\right)_{u=u_0}$. Zřejmě $1+\lambda_1\neq 0$, když $\beta=0$; neboť jinak by dle (5) ar. body $\left[\dfrac{dy_1}{d\nu_1}\right]_{\nu_1=\nu_0}$ a $x_0=(y_1)_{\nu_1=\nu_0}$ byly lin. závislé.

Zvolme nyní, když $\beta=0$,

$$\rho(\nu)=1-\frac{\lambda_0}{1+\lambda_1}(\nu-\nu_0),$$
$$\varphi(\nu)=\nu_0+\frac{\nu-\nu_0}{1+\lambda_1};$$

když $\beta>0$, zvolme

$$\rho(\nu)=1-\frac{\lambda_0}{(\beta+1)!}(\nu-\nu_0)^{\beta+1},$$
$$\varphi(\nu)=\nu-\frac{\lambda_1}{(\beta+1)!}(\nu-\nu_0)^{\beta+1}.$$

Zřejmě $\varphi(v_0) = v_0$ a lze určiti $\delta > 0$ tak, že $\varrho(v) \neq 0, \frac{d\varphi}{dv} \neq 0$ ve $\langle v_0 - \delta, v_0 + \delta\rangle$; z rovnic (2) a (5) pak snadno zjistíme, že, když

$$y(v) = \rho(v) y_1 [\varphi(v)],$$

jsou splněny ty rovnice (1), v nichž $\alpha \leqq \beta + 1$, jak bylo ukázati.

179. Buď $s \geqq 1$, $1 \leqq s' \leqq s$, $s + s' \leqq r + 1$. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě křivky třídy r o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha, \quad \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = y_\alpha. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Buď

(1) $$y_0 = x_0,\ y_1 = x_1,\ \ldots\ y_{s-1} = x_{s-1},$$

takže $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$. Křivky $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají $(s+s')$-bodový styk v $\{x_0\}$, když a jen když existují čísla a_ν, b_ν $(0 \leqq \nu \leqq s' - 1)$ taková, že

(2) $$y_{s+\lambda} - x_{s+\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{s+\lambda}{\nu} (a_{\lambda-\nu} x_{\nu+1} + b_{\lambda-\nu} x_\nu). \qquad (0 \leqq \lambda \leqq s' - 1)$$

Dle **178** mají $C\{x\}$ a $C\{y\}$ $(s+s')$-bodový styk v $\{x_0\}$, když a jen když existuje kladné číslo δ a funkce $\varrho(u)$, $\varphi(u)$ třídy r v $\langle u_0 - \delta, u_0 + \delta\rangle$ takové, že 1° $\varphi(u_0) = u_0$, $\varrho(u) \neq 0, \frac{d\varphi}{du} \neq 0$ všude v $\langle u_0 - \delta, u_0 + \delta\rangle$, 2°, klademe-li $\bar{x}(u) = \varphi(u)\, x[\varphi(u)]$

(3) $$\left(\frac{d^\alpha \bar{x}}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = y_\alpha. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s + s' - 1)$$

Snadno vidíme, připomeneme-li si, že ar. body x_0 a x_1 jsou lin. nezávislé, že ty rovnice (3), v nichž $0 \leqq \alpha \leqq s - 1$, jsou splněny, když a jen když

$$\rho(u_0) = 1, \quad \left(\frac{d\rho}{du}\right)_{u=u_0} = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=u_0} = 1, \quad \left(\frac{d^\alpha \rho}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha \varphi}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = 0.$$
$$(2 \leqq \alpha \leqq s - 1)$$

Můžeme tedy předpokládati, že

(4) $$\rho(u) = 1 + \sum_{\alpha=0}^{s'-1} \frac{b_\alpha}{(s+\alpha)!} (u - u_0)^{s+\alpha} + f_0(u),$$

(5) $$\varphi(u) = u + \sum_{\alpha=0}^{s'-1} \frac{a_\alpha}{(s+\alpha)!} (u - u_0)^{s+\alpha} + f_1(u),$$

při čemž $f_0(u)$, $f_1(u)$ a v dalším se vyskytující $f_2(u), f_3(u) \ldots$ jsou funkce třídy r v $\langle u_0 - \delta, u_0 + \delta\rangle$ takové, že

$$\left(\frac{d^\alpha f_i}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = 0. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s + s' - 1;\ i = 0, 1, 2\ldots)$$

Jest patrně

$$x(u) = x_0 + \sum_{\alpha=1}^{s+s'-1} \frac{(u - u_0)^\alpha}{\alpha!} x_\alpha + X_0(u), \tag{6}$$

při čemž souřadnice ar. bodu $X_0(u)$ a v dalším se vyskytujících $X_1(u)$, $X_2(u)$ jsou funkce třídy r v $\langle u_0 - \delta, u_0 + \delta\rangle$ takové, že

$$\left(\frac{d^\alpha X_i(u)}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = 0_b. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s + s' - 1;\ i = 0, 1, 2\ldots)$$

Z (5) vychází

$$[\varphi(u) - u_0]^\alpha = (u - u_0)^\alpha + \alpha \sum_{\beta=0}^{s'-\alpha} \frac{a_\beta}{(s+\beta)!} (u - u_0)^{s+\alpha+\beta-1} + f_\alpha(u),$$

$$[\varphi(u) - u_0]^{s'+\gamma} = (u - u_0)^{s'-\gamma} + f_{s'+\gamma}(u),$$

$$(1 \leqq \alpha \leqq s',\ 1 \leqq \gamma \leqq s - 1)$$

takže dle (6) jest

$$x[\varphi(u)] = x_0 + \sum_{\alpha=1}^{s'} \frac{x_\alpha}{\alpha!}\left[(u - u_0)^\alpha + \alpha \sum_{\beta=0}^{s'-\alpha} \frac{a_\beta}{(s+\beta)!} (u - u_0)^{s+\alpha+\beta-1} + f_\alpha(u)\right] +$$
$$+ \sum_{\gamma=1}^{s-1} \frac{x_{s'+\gamma}}{(s'+\gamma)!} [(u - u_0)^{s'+\gamma} + f_{s'+\gamma}(u)] + X_0(u),$$

což se dá psáti ve tvaru

$$x[\varphi(u)] =$$
$$= x_0 + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \frac{(u - u_0)^\alpha}{\alpha!} x_\alpha + \sum_{\lambda=0}^{s'-1} \frac{(u - u_0)^{s+\lambda}}{(s+\lambda)!}\left[x_{s+\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{s+\lambda}{\nu} a_{\lambda-\nu} x_{\nu+1}\right] + X_1(u).$$

Odtud a ze (4) máme, ježto $\bar{x}(u) = \varrho(u)\, x[\varphi(u)]$,

$$\bar{x}(u) = x_0 + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \frac{(u - u_0)^\alpha}{\alpha!} x_\alpha +$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{s'-1} \frac{(u - u_0)^{s+\lambda}}{(s+\lambda)!}\left[x_{s+\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{s+\lambda}{\nu} (a_{\lambda-\nu} x_{\nu+1} + b_{\lambda-\nu} x_\nu)\right] + X_2(u).$$

Je tedy

$$\left(\frac{d^\alpha \bar{x}}{du}\right)_{u=u_0} = x_\alpha, \quad \left(\frac{d^{s+\lambda} \bar{x}}{du}\right)_{u=u_0} = x_{s+\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{s+\lambda}{\nu} (a_{\lambda-\nu} x_{\nu+1} + b_{\lambda-\nu} x_\nu).$$

Tím jsou podmínky (3) převedeny na (2).

180. Ježto vzhledem ke styku v bodě $\{x_0\}$ můžeme křivku nahraditi kteroukoli jinou křivkou, jež s ní splyne v okolí bodu W, vidíme, že definice styku křivek v bodě $\{x_0\}$ se bezprostředně rozšiřuje v definici styku dvou zobecněných křivek v bodě $\{x_0\}$, jenž oběma je společný a pro žádnou z nich není singulární. Platí pak věta:

Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy r obsahující bod $\{x_0\} = \{x(u_0)\}$. Buď $C^a = C[\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r, \dots \overset{k}{P}_r]\,(k \geq m - 1)$ algebraická křivka, jež rovněž obsahuje $\{x_0\}$; nebuď však $\{x_0\}$ singulární pro C^a. Křivka $C\{x(u)\}$ a algebraická křivka C^a mají v bodě $\{x_0\}$ s-bodový $(1 \leq s \leq r + 1)$ styk, když a jen když pro $i = 1, 2 \dots k$ nadrovinová forma $\overset{i}{P}_r$ a křivka $C\{x(u)\}$ mají s-bodový styk v bodě $\{x_0\}$.

Buď $C\{y(v)\}$ (v v J) křivka, která splyne s C^a v okolí bodu $\{x_0\} = \{y(v_0)\}$. Zřejmě $S\overset{i}{P}_r y(v) = 0\,(i = 1, 2, \dots k)$ pro všecka v z J. Derivujeme-li $(s - 1)$-krát, vidíme, že $\overset{i}{P}_r$ a $C\{y(v)\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$. Mají-li tedy $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$, mají $\overset{i}{P}_r\,(i = 1, 2 \dots k)$ a $C\{x(u)\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$. Obráceně předpokládejme, že $\overset{i}{P}_r (i = 1, 2 \dots k)$ a $C\{x(u)\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$. Abychom ukázali, že $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$, stačí ukázati, že existuje $\delta > 0$ a funkce $\varrho(u)$, $\varphi(u)$ třídy r v $\langle u_0 - \delta, u_0 + \delta\rangle$ takové, že 1° $\varphi(u_0) = u_0$, $\varrho(u) \neq 0$, $\dfrac{d\varphi}{du} \neq 0$ pro všecka u z $\langle u_0 - \delta, u_0 + \delta\rangle$ a 2°, klademe-li $x_1(u) = \varrho(u)\, x(u)$,

$$\left(\frac{d^\alpha x_1}{du^\alpha}\right)_{u = u_0} = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v = v_0}. \qquad \left(\alpha = 0, 1 \dots, s - 1;\ \frac{d^0}{du^0} = 1\right) \tag{1}$$

Důkaz rovnic (1) je však úplně týž jako důkaz ve **178**, pouze je třeba ukázati (místo věty ve **175**), že, když ar. bod y nenáleží do $\left\{x_0, \left(\dfrac{dy}{dv}\right)_{v = v_0}\right\}$, aspoň jedna z forem $\overset{i}{P}_r\,(i = 1, 2 \dots k)$ má tu vlastnost, že polára $[\overset{i}{P}_r;\ y]$ není incidentní s $\{x_0\}$. Že tomu tak jest, ukážeme ve **187**.

181. Buď $m = 2$. Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy r obsahující bod $\{x_0\}$. Buď $\{x_0\}$ singulární bod algebraické křivky $C[P_r]$. Pravíme, že $C\{x(u)\}$ a $C[P_r]$ mají s-bodový $(1 \leq s \leq r + 1)$ styk v bodě $\{x_0\}$, když $C\{x(u)\}$ a P_r mají s-bodový styk v bodě $\{x_0\}$.

V případě, že $\{x_0\}$ je nesingulární bod algebraické křivky $C[P_r]$, byl styk $C\{x(u)\}$ s $C[P_r]$ definován ve **180**, kde bylo ukázáno, že i pak platí, že styk $C\{x(u)\}$ s $C[P_r]$ jest s-bodový, když a jen když styk $C\{x(u)\}$ s P_r jest s-bodový. V případě nyní uvažovaném platí však dále:

Buď $\{x_0\}$ singulární bod algebraické křivky $C[P_r]$. Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy r obsahující bod $\{x_0\}$. Pak $C[P_r]$ a $C\{x(u)\}$ mají dvojbodový styk v bodě $\{x_0\}$. Je-li $2 \leqq s \leqq r+1$, mají-li $C[P_r]$ a $C\{x(u)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x_0\}$, a je-li $C\{y(v)\}$ křivka třídy r mající s $C\{x(u)\}$ $(s-1)$-bodový styk v bodě $\{x_0\}$, mají také $C[P_r]$ a $C\{y(v)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x_0\}$.

Křivka $C\{x(u)\}$ třídy r má dvojbodový styk s P_r v $\{x(u_0)\}$, když

$$SP_r x(u_0) = 0,$$

$$S\left[P_r; \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}\right] x(u_0) = 0.$$

Tyto rovnice jsou však vždy splněny, když $\{x(u_0)\} = \{x_0\}$. Neboť, ježto $\{x_0\}$ je singulární pro $C[P_r]$, je dle **161** $S[P_r; x_1] x_0 = 0$ pro každý ar. bod x_1.

Předpokládejme dále, že $C\{x(u)\}$ má s-bodový $(2 \leqq s \leqq r+1)$ styk s P_r v $\{x_0\}$ a že $C\{y(v)\}$ má $(s-1)$-bodový styk s $C\{x(u)\}$ v $\{x_0\} = \{y(v_0)\}$. Abychom ukázali, že $C\{y(v)\}$ a P_r mají s-bodový styk v $\{x_0\}$, můžeme dle **178** předpokládati, že jest

$$\left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = \left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0}. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq s-2;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right). \tag{1}$$

Běží pak pouze o to, zjistiti, že

$$\left[\frac{d^{s-1}}{dv^{s-1}} SP_r y(v)\right]_{v=v_0} = 0.$$

Avšak dle (1) jest (v. **62**), je-li n stupeň formy P_r,

$$\left[\frac{d^{s-1}}{dv^{s-1}} SP_r y(v)\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} SP_r x(u)\right]_{u=u_0} =$$

$$= nS\left[P_r; \left(\frac{d^{s-1} y}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1} x}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0}\right] x(u_0).$$

Ježto dle předpokladu

$$\left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} SP_r x(u)\right]_{u=u_0} = 0,$$

zbývá pouze zjistiti, že

$$S\left[P_r; \left(\frac{d^{s-1} y}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1} x}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0}\right] x_0 = 0,$$

což plyne opět z definice singulárního bodu algebraické křivky.

182. Buď m opět libovolné. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) křivka třídy r. Buď $\overset{u}{P}_r = \Sigma A_{ikl}\ldots \xi^i \eta^k \zeta^l \ldots$ nadrovinová forma závislá na u tak, že koeficienty $A_{ikl}\ldots$ i souřadnice ar. nadrovin $\xi, \eta, \zeta \ldots$ jsou funkce třídy $s (1 \leqq s \leqq r+1)$ v $\langle a+0, b-0\rangle$. Když a jen když pro každé u z $\langle a+0, b-0\rangle$ jest

$$S\left(\frac{d^\alpha}{du^\alpha}\overset{u}{P}_r\right) x(u) = 0, \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1) \tag{1}$$

při čemž $\dfrac{d^0}{du^0} = 1$, mají pro každé u z $\langle a+0, b-0\rangle$ $\overset{u}{P}_r$ a $C\{x(u)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x(u)\}$.

Běží o to, ukázati, že, když a jen když pro všecka u z $J^* = \langle a+0, b-0\rangle$ platí (1), platí pro všecka u, u_1 z J^* (u a u_1 považujeme za dvě neodvisle proměnné)

$$\left[\frac{d^\alpha}{du^\alpha} S\overset{u_1}{P}_r\, x(u)\right]_{u=u_1} = 0. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1) \tag{2}$$

Jak rovnice (1), tak rovnice (2) jsou však obsaženy v soustavě rovnic

$$\left\{\frac{d^\beta}{du^\beta}\left[S\left(\frac{d^\alpha}{du_1{}^\alpha}\overset{u_1}{P}_r\right) x(u)\right]\right\}_{u=u_1} = 0. \qquad (0 \leqq \alpha+\beta \leqq s-1) \tag{3}$$

Stačí tedy ukázati, že jak z (1), tak ze (2) lze odvoditi (3). Předpokládejme na př., že platí (1). Ty rovnice (3), v nichž $\beta = 0$, jsou totožné s rovnicemi (1). Předpokládejme tedy, že platí ty rovnice (3), v nichž $\beta = h$, a ukažme, že platí i ty, v nichž $\beta = h+1$ $(0 \leqq h \leqq s-2)$. To je však patrné z identit

$$\frac{d}{du_1}\left\{\frac{d^h}{du^h}\left[S\left(\frac{d^\alpha}{du_1{}^\alpha}\overset{u_1}{P}_r\right) x(u)\right]\right\}_{u=u_1} = \left\{\frac{d^{h+1}}{du^{h+1}}\left[S\left(\frac{d^\alpha}{du_1{}^\alpha}\overset{u_1}{P}_r\right) x(u)\right]\right\}_{u=u_1} +$$
$$+\left\{\frac{d^h}{du^h}\left[S\left(\frac{d^{\alpha+1}}{du_1{}^{\alpha+1}}\overset{u_1}{P}_r\right) x(u)\right]\right\}_{u=u_1}. \qquad (0 \leqq \alpha+h \leqq s-2)$$

183. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) křivka třídy r. Buď $\overset{u}{P}_r = \Sigma A_{ikl}\ldots \xi^i \eta^k \zeta^l \ldots$ nadrovinová forma závislá na u tak, že koeficienty $A_{ikl}\ldots$ i souřadnice ar. nadrovin $\xi, \eta, \zeta \ldots$ jsou funkce třídy s $(2 \leqq s \leqq r+1)$ v $\langle a+0,\ b-0\rangle$. Tehdy a jen tehdy mají pro každé u z $\langle a-0,\ b+0\rangle$ $\overset{u}{P}_r$ a $C\{x(u)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x(u)\}$, když pro každé u z $\langle a+0,\ b-0\rangle$ 1° $\overset{u}{P}_r$ jest incidentní s $x(u)$, 2° $\dfrac{d}{du}\overset{u}{P}_r$ a $C\{x(u)\}$ mají $(s-1)$-bodový styk v bodě $\{x(u)\}$.

Věta je zřejmá, píšeme-li podmínky pro s-bodový styk $\overset{u}{P}_r$ a $C\{x(u)\}$ v $\{x(u)\}$ ve tvaru **182** (1) a podobně podmínky pro $(s-1)$-bodový styk $\frac{d}{du}\overset{u}{P}_r$ s $C\{x(u)\}$.

184. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) křivka třídy r. Buď $\overset{u}{P}_r = \Sigma A_{ikl}\ldots\xi^i\eta^k\zeta^l\cdots$ nadrovinová forma závislá na u tak, že koeficienty $A_{ikl}\ldots$ i souřadnice ar. nadrovin $\xi, \eta, \zeta\cdots$ jsou funkce třídy s $(1 \leq s \leq r)$ v $\langle a+0,\ b-0\rangle$. Pro každé u z $\langle a+0,\ b-0\rangle$ mějte $\overset{u}{P}_r$ a $C\{x(u)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x(u)\}$. Buď u_0 číslo z $\langle a+0,\ b-0\rangle$. $\overset{u_0}{P}_r$ a $C\{x(u)\}$ mají $(s+1)$-bodový styk v bodě $\{x(u_0)\}$, když a jen když $\left[\frac{d}{du}\overset{u}{P}_r\right]_{u=u_0}$ a $C\{x(u)\}$ mají s-bodový styk v $\{x(u_0)\}$.

Jsou-li u, u_1 jakákoli čísla z $\langle a+0,\ b-0\rangle$, platí dle předpokladu rovnice **182** (1) a tedy též **182** (3), zejména

$$\left[\frac{d^\alpha}{du^\alpha} S\overset{u_1}{P}_r x(u)\right]_{u=u_1} = 0, \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots s-1)$$

$$\left[\frac{d^\alpha}{du^\alpha} S\left(\frac{d}{du_1}\overset{u_1}{P}_r\right) x(u)\right]_{u=u_1} = 0 \qquad (\alpha = 0, 1 \ldots s-2).$$

Běží pouze o to, ukázati, že pak podmínky

$$\left[\frac{d^s}{du^s} S\overset{u_1}{P}_r x(u)\right]_{u=u_1=u_0} = 0$$

a

$$\left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} S\left(\frac{d}{du_1}\overset{u_1}{P}_r\right) x(u)\right]_{u=u_1=u_0} = 0$$

jsou ekvivalentní. To však vychází ihned z identity

$$0 = \frac{d}{du_1}\left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} S\overset{u_1}{P}_r x(u)\right]_{u=u_1} =$$

$$= \left[\frac{d^s}{du^s} S\overset{u_1}{P}_r x(u)\right]_{u=u_1} + \left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} S\left(\frac{d}{du_1} S\overset{u_1}{P}_r\right) x(u)\right]_{u=u_1}.$$

Tečná řada ar. bodů a tečná řada bodová.

185. Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$. Řada ar. bodů

$$S = \left\{x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}\right\}$$

nazývá se tečná řada ar. bodů křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$;

množství bodů obsažených v S nazývá se tečná řada bodová křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Ar. nadrovina ξ náleží do Adj. S, když a jen když má s $C\{x(u)\}$ dvojbodový styk v bodě $\{x(u_0)\}$. Řada bodová $\{y_1, y_2\}^C$ jest tečná řada bodová křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, když a jen když má s $C\{x(u)\}$ dvojbodový styk v $\{x(u_0)\}$. Křivka $C\{y(v)\}$ obsahující $\{x(u_0)\}$ má v tomto bodě dvojbodový styk s $C\{x(u)\}$, když a jen když obě křivky mají v $\{x(u_0)\}$ touž tečnou řadu bodovou.

Že ξ náleží do Adj. S, když a jen když ξ a $C\{x(u)\}$ mají dvojbodový styk v $\{x(u_0)\}$, vychází ihned ze **174**. Řada bodová $C[\xi_0, \xi_1 \dots \xi_{m-2}]$ (v. **169**) má tedy dle **180** dvojbodový styk s $C\{x(u)\}$ v $\{x(u_0)\}$, když a jen když $\{\xi_0, \xi_1 \dots \xi_{m-2}\} = \text{Adj. } S$. Výrok o $C\{y(v)\}$ je pak zřejmý.

186. Buď $\{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) třídy 2. Buď S^C tečná řada bodová křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Mají-li S^C a $C\{x(u)\}$ trojbodový styk v $\{x(u_0)\}$, pravíme, že $\{x(u_0)\}$ jest inflexní bod křivky $C\{x(u)\}$. Bod $\{x(u_0)\}$ jest inflexní bod křivky $C\{x(u)\}$, když a jen když ar. bod $\left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0}$ jest lin. závislý na $x(u_0)$, $\left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}$. Když a jen když všecky body křivky $C\{x(u)\}$ jsou obsaženy v pevné řadě bodové, jsou všecky body křivky $C\{x(u)\}$ inflexní.

Buď Adj. $\left\{x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}\right\} = \{\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m-1}\}$. Dle **169** jest $S^C = C[\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m-1}]$. Dle **180** je tedy $\{x(u_0)\}$ inflexní bod pro $C\{x(u)\}$, když a jen když

$$S\xi_i x(u_0) = S\xi_i \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0} = S\xi_i \left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0}, \qquad (i = 1, 2 \dots m-1)$$

tedy když $x(u_0)$, $\left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}$, $\left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0}$ náležejí do $\left\{x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}\right\}$, když ar. bod $\left[\frac{d^2x}{du^2}\right]_{u=u_0}$ jest lin. závislý na $x(u_0)$, $\left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}$.

Existuje-li pevná řada ar. bodů $S' = \{y_1, y_2\}$, obsahující všecky body křivky $C\{x(u)\}$, je pro všecka u z $\langle a+0, b-0\rangle$

$$x(u) = \lambda_1(u) y_1 + \lambda_2(u) y_2. \tag{1}$$

Funkce $\lambda_1(u)$, $\lambda_2(u)$ jsou zřejmě třídy 2, zvolíme-li za y_1, y_2 pevné ar. body z S'. Můžeme tedy (1) dvakrát derivovati a obdržíme

$$\frac{dx}{du} = \frac{d\lambda_1}{du} y_1 + \frac{d\lambda_2}{du} y_2, \quad \frac{d^2x}{du^2} = \frac{d^2\lambda_1}{du^2} y_1 + \frac{d^2\lambda_2}{du^2} y_2. \tag{2}$$

Rovnice (1) a prvá rovnice (2) praví, že $S' = \left[x(u), \frac{dx}{du}\right]$, neboť $x(u)$, $\frac{dx}{du}$ jsou dle **150** lin. nezávislé; druhá (2) praví pak, že $\frac{d^2x}{du^2}$ náleží do $\left[x(u), \frac{dx}{du}\right]$, takže $\{x(u)\}$ je inflexní bod pro $C\{x(u)\}$, ať jakkoli jsme zvolili u v $\langle a+0, b-0\rangle$.

Jsou-li naopak všecky body křivky $C\{x(u)\}$ inflexní, existují funkce $a_0(u)$, $a_1(u)$ takové, že pro všecka u z $\langle a+0, b-0\rangle$ jest

$$\frac{d^2x}{du^2} = a_0 x + a_1 \frac{dx}{du}. \tag{3}$$

Ježto x, $\frac{dx}{du}$ jsou lin. nezávislé pro všecka u z $\langle a+0, b-0\rangle$, lze ke každému u_0 z $\langle a+0, b-0\rangle$ udati aspoň jedním způsobem indexy i, k, tak, že pro $u = u_0$ a tedy též pro $|u - u_0| < \varepsilon$, kde ε je jisté kladné číslo, jest

$$\begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(k)} \\ \frac{dx^{(i)}}{du} & \frac{dx^{(k)}}{du} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vypočteme-li tedy $a_0(u)$, $a_1(u)$ z rovnic

$$\frac{d^2x^{(i)}}{du^2} = a_0 x^{(i)} + a_1 \frac{dx^{(i)}}{du}, \quad \frac{d^2x^{(k)}}{du^2} = a_0 x^{(k)} + a_1 \frac{dx^{(k)}}{du},$$

vidíme, že funkce $a_0(u)$, $a_1(u)$ jsou spojité pro $u = u_0$, tedy pro každé u z $\langle a+0, b-0\rangle$. Dle **65** existuje tedy řada ar. bodů, obsahující všecky body křivky $C\{x(u)\}$.

187. Buď $\{x_0\}$ nesingulární bod algebraické křivky $C^a = C[\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r, \dots \overset{k}{P}_r]$ $(k > m-1)$. Ar. bod y náleží tečné řadě ar. bodů algebraické křivky C^a v bodě $\{x_0\}$, když a jen když pro $i = 1, 2 \dots k$ polára $[\overset{i}{P}_r; y]$ ar. bodu y vzhledem k $\overset{i}{P}_r$ jest incidentní s x_0.

Buď S množství všech ar. bodů y takových, že pro $i = 1, 2 \dots k$ jest $S[\overset{i}{P}_r; y]\, x_0 = 0$. Z **15** je zřejmé, že S je lin. systém, ve **175** jsme viděli, že S obsahuje tečnou řadu ar. bodů algebraické křivky C^a v bodě $\{x_0\}$. Stačí tedy ještě ukázati, že dimense S není větší než 1. Zvolme za tím účelem ar. body $x_1, x_2 \dots x_{m-1}$ tak, že, je-li Q_r nadrovinová forma **168** (1), jest $SQ_r x_0 \neq 0$. Ar. body $x_1, x_2 \dots x_{m-1}$ jsou lin. nezávislé, jak jsme při důkaze ve **168** si povšimli. Kdyby dimense S byla větší než 1, obsahoval by tedy průřez lin. systémů S a $\{x_1, x_2 \dots x_{m-1}\}$

aspoň jeden vlastní ar. bod y, jak snadno vidíme ze **17**. Jinak řečeno, existovala by čísla $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{m-1}$, ne vesměs rovná nule, taková, že ar. bod

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{m-1} x_{m-1}$$

náleží do S. Kdybychom pak násobili v determinantu **168** (1) i-tý sloupec číslem λ_i ($i = 1, 2 \dots m-1$) a pak sečtli v každém řádku, byly by součty nadrovinové formy incidentní s $\{x_0\}$. Z toho by však snadno plynulo, že $SQ_r x_0 = 0$, což je spor.

188. Buď $m = 2$. Buď $\{x_0\}$ dvojný bod algebraické křivky $C[P_r]$. Buďte C_1, C_2 větve algebraické křivky $C[P_r]$ v okolí bodu $\{x_0\}$. Buď S_1 (S_2) tečná řada ar. bodů křivky C_1 (C_2) v bodě $\{x_0\}$. Množství M uvažované ve **170** skládá se z S_1 a z S_2.

Užijme předpokladů a označení ze **171**. Máme pak ukázati, že tečná řada ar. bodů křivky $C\{y(u)\}$ v bodě $\{y(0)\}$ jest $\{x_0, x_1\}$. To však vychází ihned ze **171** (5), neboť $f(0) = 0$.

189. Buď $m = 2$. Buď $\{x_0\}$ dvojný bod algebraické křivky $C[P_r]$. Buďte C_1, C_2 větve algebraické křivky $C[P_r]$ v okolí bodu $\{x_0\}$. Buď $C\{x(v)\}$ křivka třídy r obsahující $\{x_0\}$. $C\{x(v)\}$ a $C[P_r]$ mají s-bodový ($3 \leqq s \leqq r+1$) styk v $\{x_0\}$, když a jen když buď 1° $C\{x(v)\}$ a C_1, nebo 2° $C\{x(v)\}$ a C_2 mají $(s-1)$-bodový styk v $\{x_0\}$.

Je zřejmé, že C_1 a $C[P_r]$ mají $(s-1)$-bodový styk v $\{x_0\}$. Mají-li tedy $C\{x(v)\}$ a C_1 $(s-1)$-bodový styk v $\{x_0\}$, mají dle **181** $C\{x(v)\}$ a $C[P_r]$ s-bodový styk v $\{x_0\}$.

Užijme nyní předpokladů a označení ze **171**. Ježto $\{x_0\}$ je singulární bod pro $C[P_r]$, jest dle **168**

$$S[P_r; x]\, x_0 = 0 \tag{1}$$

pro každý ar. bod x. Dále jest dle **170** a dle toho, jak ar. body x_1, x_2 byly zavedeny ve **171**,

$$S[P_r; x_1; x_1]\, x_0 = S[P_r; x_2; x_2]\, x_0 = 0. \tag{2}$$

Je však

$$S[P_r; x_1; x_2]\, x_0 \neq 0. \tag{3}$$

Vskutku, dle **170** jest na př.

$$S[P_r; x_1 + x_2; x_1 + x_2]\, x_0 \neq 0,$$

avšak

$$S[P_r; x_1 + x_2; x_1 + x_2] = S[P_r; x_1; x_1] + S[P_r; x_2; x_2] + 2S[P_r; x_1; x_2],$$

takže dle (2) vychází (3). Dle **50** a dle (1) jest

$$S[P_r; x_1; x_0]\, x_0 = S[P_r; x_1]\, x_0 = 0. \tag{4}$$

Z (2) a (4) vychází

$$S[P_r; x_1; \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] x_0 = \lambda_2 S[P_r; x_1; x_2] x_0.$$

Dle (3) jsme tedy vedeni k této pomocné větě: Jest

$$S[P_r; x_1; x] x_0 = 0,$$

když a jen když ar. bod x náleží do $\{x_0, x_1\}$.

Buď nyní $C\{x(u)\}$ křivka třídy r, obsahující bod $\{x_0\}$, takže můžeme předpokládati $x_0 = x(v_0)$, a mající v $\{x_0\}$ s-bodový ($3 \leqq s \leqq r+1$) styk s P_r. Je tedy

$$\left[\frac{d^\alpha}{dv^\alpha} SP_r x(v)\right]_{v=v_0} = 0. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1) \tag{4}$$

Je však, když n je stupeň formy P_r,

$$\frac{d^2}{du^2} SP_r x(v) = n S\left[P_r; \frac{d^2x}{dv^2}\right] x(v) + n(n-1) S\left[P_r; \frac{dx}{dv}; \frac{dx}{dv}\right] x(v).$$

Dle (1) dává tedy ta rovnice (4), v níž $\alpha = 2$:

$$S\left[P_r; \left(\frac{dx}{dv}\right)_{v=v_0}; \left(\frac{dx}{dv}\right)_{v=v_0}\right] x_0 = 0.$$

Dle **170** a **188** náleží tedy $\left(\frac{dx}{dv}\right)_{v=v_0}$ buď do $\{x_0, x_1\}$ nebo do $\{x_0, x_2\}$, t. j. buď $C\{x(v)\}$ a C_1 nebo $C\{x(v)\}$ a C_2 mají v bodě $\{x_0\}$ stejnou tečnou řadu ar. bodů. Dle **185** má tedy $C\{x(v)\}$ v bodě $\{x_0\}$ dvojbodový styk buď s C_1 nebo s C_2. Když $s = 2$, je tím již dokázáno, že $C\{x(v)\}$ má v $\{x_0\}$ $(s-1)$-bodový styk buď s C_1 nebo s C_2, jak bylo tvrzeno. Můžeme tedy dokazovati dále indukcí vzhledem k s, t. j. předpokládati, že $C\{x(v)\}$ má v $\{x_0\}$ $(s-2)$-bodový styk na př. s $C_1 = C\{y(u)\}$, kde $y(u)$ je definováno ve **171** (5), takže zejména

$$y(0) = x_0, \left(\frac{dy}{du}\right)_{u=0} = x_1. \tag{5}$$

Dle **178** můžeme předpokládati, že

$$\left(\frac{d^\alpha x}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = \left(\frac{d^\alpha y}{du^\alpha}\right)_{u=0}. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-3) \tag{6}$$

D e **62** jest

$$\frac{d^{s-1}}{dv^{s-1}} SP_r x(v) = n S\left[P_r; \frac{d^{s-1}x}{dv^{s-1}}\right] x(v) + (s-1) n(n-1) S\left[P_r; \frac{dx}{dv}; \frac{d^{s-2}x}{dv^{s-2}}\right] x(v) + \ldots,$$

kde vynechané členy obsahují pouze $x(v), \frac{dx}{dv}, \dots \frac{d^{s-3}x}{dv^{s-3}}$. Ta rovnice (4), v níž $\alpha = s-1$, a zřejmá rovnice $\left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}} SP_r y(u)\right]_{u=0}$ dávají tedy vzhledem k (6)

$$S\left[P_r; \left(\frac{d^{s-1}x}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1}y}{du^{s-1}}\right)_{u=0}\right] x_0 +$$

$$+ (s-1)(n-1) S\left[P_r; \left(\frac{dy}{du}\right)_{u=0}; \left(\frac{d^{s-2}x}{dv^{s-2}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-2}y}{du^{s-2}}\right)_{u=0}\right] x_0 = 0.$$

Dle (1) a (5) je tedy

$$(7) \qquad S\left[P_r; x_1; \left(\frac{d^{s-2}x}{dv^{s-2}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-2}y}{du^{s-2}}\right)_{u=0}\right] x_0 = 0.$$

Dle pomocné věty výše dokázané soudíme ze (7) a (5), že existují čísla a_0, b_0 taková, že

$$(8) \qquad \left(\frac{d^{s-2}x}{dv^{s-2}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-2}y}{du^{s-2}}\right)_{u=0} = a_0 x_1 + b_0 x_0.$$

Z (6) a (8) plyne však, že $C\{x(v)\}$ a $C\{y(u)\}$ mají v $\{x_0\}$ $(s-1)$-bodový styk, jak bylo tvrzeno.

Křivky ve dvojrozměrném prostoru.

190. Ve **190** až **194** předpokládáme $m = 2$. Přímka $\{\xi\}$ nazývá se tečna křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, když ar. přímka ξ má v $\{x(u_0)\}$ dvojbodový styk s $C\{x(u)\}$. Existuje jedna a jen jedna tečna křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Je to přímka

$$(1) \qquad \{\xi\} = \left\{\left(x(u_0), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}\right)\right\}.$$

Přímka $\{\xi\}$ je tečna křivky $C(x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, když a jen když Adj. $\{\xi\}$ je tečná řada ar. bodů křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Vychází ihned ze **185**.

191. Ar. křivka $C_a x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) třídy $r \geqq 2$ nazývá se regulární, když: 1^0 jsou-li u_1, u_2 dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$, ar. přímky $\left[\left(x\frac{dx}{du}\right)\right]_{u=u_1}$ a $\left[\left(x\frac{dx}{du}\right)\right]_{u=u_2}$ jsou lin. nezávislé, 2^0 pro každé u z $\langle a, b\rangle$ jest

$$(1) \qquad \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2}\right) \neq 0.$$

Křivka $C\{x(u)\}$ nazývá se regulární, když ar. křivka $C_a x(u)$ jest regulární. Žádný bod regulární křivky není inflexní; tečny regulární křivky ve dvou různých bodech jsou různé.

Že jsme k definici regulární ar. křivky a regulární křivky oprávněni, je zřejmé. Výrok o inflexních bodech vychází ze **186** a výrok o tečnách regulární křivky je zřejmý.

192. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) regulární křivka třídy $r \geqq 2$. Množství tečen $\{\xi(u)\}$ křivky $C\{x(u)\}$ je duální křivka $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ třídy $r-1$. Pravíme, že duální křivka $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) jest adjungována ke křivce $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) a píšeme

$$\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\, C\{x(u)\}.$$

Dle **190** (1) můžeme předpokládati, že

$$\xi(u) = \left(x\,\frac{dx}{du}\right). \tag{1}$$

Odtud plyne

$$\frac{d\xi}{du} = \left(x\,\frac{d^2x}{du^2}\right)$$

takže dle **89** (1)

$$\left(\xi\,\frac{d\xi}{du}\right) = \left(x\,\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\right)x. \tag{2}$$

Z definice regulární křivky vychází nyní snadno, že $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ jest duální křivka.

193. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 2$. Buď

$$\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\, C\{x(u)\}. \tag{1}$$

$\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ jest regulární duální křivka, kdykoli je třídy 2; zejména tedy, kdykoli $r \geqq 3$. Když $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ jest regulární, jest

$$C\{x(u)\} = \text{Adj.}\, \mathfrak{C}\{\xi(u)\}. \tag{2}$$

Jako ve **192**, zvolme

$$\xi = \left(x\,\frac{dx}{du}\right).$$

Buď nejprve $r \geqq 3$. Pak jest

$$\frac{d\xi}{du} = \left(x\,\frac{d^2x}{du^2}\right),\quad \frac{d^2\xi}{du^2} = \left(x\,\frac{d^3x}{du^3}\right) + \left(\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\right),$$

takže

$$\left(\xi\,\frac{d\xi}{du}\,\frac{d^2\xi}{du^2}\right) = \left[\left(x\,\frac{dx}{du}\right),\ \left(x\,\frac{d^2x}{du^2}\right),\ \left(x\,\frac{d^3x}{du^3}\right) + \left(\frac{dx}{du}\,\frac{d^2x}{du^2}\right)\right].$$

Avšak

$$\left[\left(x\frac{dx}{du}\right), \left(x\frac{d^2x}{du^2}\right), \left(x\frac{d^3x}{du^3}\right)\right] = 0,$$

neboť všecky tři ar. přímky na levé straně náležejí do Adj. $\{x\}$, takže jsou lin. závislé. Dle **89** (2) je tedy

$$\left(\xi\frac{d\xi}{du}\frac{d^2\xi}{du^2}\right) = \left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right)^2. \tag{3}$$

Ze (3) a **192** (2) vychází ihned, že $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ je regulární a že platí (2).

Buď nyní $r = 2$ a buď $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ třídy 2. To znamená, že existují funkce třídy 1 $\varrho(u_1)$, $\varphi(u_1)$ takové, že všude $\varrho(u_1) \neq 0$, $\frac{d\varphi}{du_1} \neq 0$ a že, klademe-li

$$\xi_1(u_1) = \varrho(u_1)\,\xi[\varphi(u_1)], \tag{4}$$

souřadnice $\xi_1^{(i)}(u_1)$ $(i = 0, 1, 2)$ jsou třídy 2. Ze (4) plyne derivováním

$$\frac{d\xi_1}{du_1} = \frac{d\varrho}{du_1}\,\xi[\varphi(u_1)] + \varrho(u_1)\left[\frac{d\xi}{du}\right]_{u=\varphi(u_1)}\frac{d\varphi}{du_1},$$

takže jest dle **192** (2)

$$\left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\right) = \lambda(u_1)\,x[\varphi(u_1)], \tag{5}$$

kde

$$\lambda(u_1) = [\varrho(u_1)]^2\frac{d\varphi}{du_1}\left[\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right)\right]_{u=\varphi(u_1)}.$$

Funkce $\lambda(u_1)$ je třídy 1, neboť ostatní výrazy vyskytující se v (5) jsou dle předpokladu třídy 1. Z (5) tedy plyne

$$\left(\xi_1\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\right) = \lambda(u_1)\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_1}\frac{d\varphi}{du_1} + \frac{d\lambda}{du_1}\,x[\varphi(u_1)]. \tag{6}$$

Z (5) a (6) vychází dle **89** (1)

$$\left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\right)\xi_1(u_1) = \lambda^2\frac{d\varphi}{du_1}\left[\left(x\frac{dx}{du}\right)\right]_{u=\varphi(u_1)}.$$

Pravá strana této rovnice je zřejmě $\neq 0_r$, takže

$$\left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\right) \neq 0. \tag{7}$$

Z (5) a (7) vychází ihned, že $\mathfrak{C}_a\,\xi_1(u_1)$ je regulární.

194. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ regulární křivky třídy $r \geqq 2$ o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Buď

$$\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj. } C\{x(u)\}, \quad \mathfrak{C}\{\eta(v)\} = \text{Adj. } C\{y(v)\}.$$

Mají-li křivky $C\{x\}$, $C\{y\}$ s-bodový $(2 \leqq s \leqq r)$ styk v $\{x(u_0)\}$, mají $\mathfrak{C}\{\xi\}$, $\mathfrak{C}\{\eta\}$ s-přímkový styk*) v $\{\xi(u_0)\}$.

Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha, \quad \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = y_\alpha. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r; \ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Dle **178** můžeme předpokládati, že

$$x_\alpha = y_\alpha. \tag{1} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

Dle **190** (1) můžeme předpokládati, že

$$\xi(u) = \left(x \frac{dx}{du}\right), \quad \eta(v) = \left(y \frac{dy}{dv}\right).$$

Z (1) vychází ihned, že

$$\left(\frac{d^\alpha \xi}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha \eta}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} \tag{2} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-2)$$

a že

$$\left(\frac{d^{s-1}\eta}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1}\xi}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0} = (x_0, y_s - x_s).$$

Dle **191** (1) jest

$$\text{Adj. } \{x_0\} = \{(x_0 x_1), (x_0 x_2)\} = \left\{\xi(u_0), \left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0}\right\}.$$

Avšak zřejmě $(x_0, y_s - x_s)$ náleží do Adj. $\{x_0\}$. Existují tedy čísla a_0, b_0 taková, že

$$\left(\frac{d^{s-1}\eta}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1}\xi}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0} = a_0 \left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0} + b_0 \xi(u_0). \tag{3}$$

Ze (2) a (3) vychází dle **179**, že $\mathfrak{C}\{\xi\}$ a $\mathfrak{C}\{\eta\}$ mají s-přímkový styk v $\{\xi(u_0)\}$.

---

*) Pro $m = 2$ k výrazu „s-bodový styk“ je duální výraz „s-přímkový styk“.

Křivky v trojrozměrném prostoru.

195. Ve **195** až **229** předpokládáme, že $m=3$. Přímka $\{p\}$ soumístná s tečnou řadou ar. bodů křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, t. j. přímka

$$(1)\qquad \{p\}=\left\{\left(x(u_0),\left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_0}\right)\right\},$$

nazývá se tečna křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Rovina $\{\xi\}$ nazývá se tečnou rovinou křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, když ar. rovina ξ má s $C\{x(u)\}$ dvojbodový styk v $\{x(u_0)\}$. Rovina $\{\xi\}$ je tečnou rovinou křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, když a jen když náleží svazku rovin soumístnému s tečnou (1) křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Viz **185.**

196. Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy $r\geqq 2$. Rovina $\{\xi\}$ nazývá se oskulační rovinou křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, když ar. rovina ξ má s $C\{x(u)\}$ trojbodový styk v $\{x(u_0)\}$. Když $\{x(u_0)\}$ jest inflexní bod křivky $C\{x(u)\}$, každá tečná rovina křivky $C\{x(u)\}$ v $\{x(u_0)\}$ jest oskulační. Když $\{x(u_0)\}$ není inflexní bod křivky $C\{x(u)\}$, existuje jedna a jen jedna oskulační rovina křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$; je to rovina $\{\xi\}$, kde

$$(1)\qquad \xi=\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right). \qquad (u=u_0)$$

Vychází ihned ze **186.**

197. Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy $r\geqq 3$. Rovina $\{\xi\}$ nazývá se hyperoskulační rovina křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, když ar. rovina ξ má s $C\{x(u)\}$ čtyřbodový styk v $\{x(u_0)\}$. Hyperoskulační rovina křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ existuje, když a jen když

$$(1)\qquad \left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)=0 \qquad \text{pro } u=u_0.$$

Křivka $C\{x(u)\}$ nazývá se rovinná křivka, existuje-li rovina $\{\xi\}$ incidentní se všemi body křivky $C\{x(u)\}$; je-li $C\{x(u)\}$ třídy 3, je pak rovina $\{\xi\}$ hyperoskulační rovinou pro $C\{x(u)\}$ v každém jejím bodě. Je-li $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) křivka třídy 3 bez inflexních bodů, a je-li pro všecka u z $\langle a+0,\ b-0\rangle$

$$(2)\qquad \left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)=0,$$

jest $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) rovinná křivka.

Ar. rovina ξ má zřejmě čtyřbodový styk s $C\{x(u)\}$ v $\{x(u_0)\}$, když a jen když náleží do Adj. $\left\{x(u_0), \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0}, \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)_{u=u_0}, \left(\frac{d^3x}{du^3}\right)_{u=u_0}\right\}$. Odtud vychází ihned podmínka (1). Je-li každý bod křivky $C\{x(u)\}$ třídy 3 incidentní s pevnou rovinou $\{\xi\}$, je zřejmé, že $\{\xi\}$ je hyperoskulační rovina pro $C\{x(u)\}$ v každém jejím bodě. Je-li $C\{x(u)\}$ křivka třídy 3 bez inflexních bodů a platí-li identicky (2), jsou pro každé u ar. body $x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}$ lin. nezávislé a $\frac{d^3x}{du^3}$ je na nich lin. závislý, takže existují funkce $a_0(u)$, $a_1(u)$, $a_2(u)$ takové, že jest identicky

$$\frac{d^3x}{du^3} = a_0 x + a_1 \frac{dx}{du} + a_2 \frac{d^2x}{du^2}.$$

Snadno vidíme, že a_0, a_1, a_2 jsou spojité. Tedy dle **65** existuje rovina incidentní se všemi body z $C\{x(u)\}$.

198. Buď $\{x\}$ bod kubické křivky C_3. Buďte ξ_0, ξ_1 lin. nezávislé ar. roviny takové, že přímka $\{\xi_0\xi_1\}$ je tečnou a rovina $\{\xi_0\}$ jest oskulační rovinou křivky C_3 v bodě $\{x\}$. Existují ar. roviny ξ_2, ξ_3 takové, že

$$C_3 = C\begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Buďte η_0, η_1, η_2, η_3 ar. roviny takové, že

$$C_3 = C\begin{bmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix}.$$

Dle **173** můžeme předpokládati, že $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2\} = \text{Adj.}\ \{x\}$, že tedy ar. roviny η_0, η_1, η_2 mají v $\{x\}$ jednobodový styk s C_3. Naproti tomu η_3 zřejmě není incidentní s $\{x\}$, ježto $(\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3) \neq 0$. Má-li η_3 s-bodový ($s \geq 1$) styk s C_3 v $\{x\}$, má dle **174** rovinová forma η^2_2 $2s$-bodový styk s C_3 v $\{x\}$; snadno vidíme, že totéž platí o rovinové formě $(\eta_1\eta_3 - \eta^2_2) + \eta^2_2 = \eta_1\eta_3$. Ježto η_3 není incidentní s $\{x\}$, má také η_1 $2s$-bodový styk s C_3 v $\{x\}$. Tedy $\eta_1\eta_2$ má $3s$-bodový styk s C_3 v $\{x\}$; totéž platí o rovinové formě $(\eta_0\eta_3 - \eta_1\eta_2) + \eta_1\eta_2 = \eta_0\eta_3$. Ježto η_3 není incidentní s $\{x\}$, má také η_0 $3s$-bodový styk s C_3 v $\{x\}$. Kdyby tedy η_2 měla dvojbodový styk s C_3 v $\{x\}$, měla by každá ar. rovina z $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2\}$ dvojbodový styk s C_3 v $\{x\}$, což je nemožné. Tedy η_0 má v $\{x\}$ právě jednobodový styk s C_3. Dle předešlého má η_0 (η_1) trojbodový (dvojbodový) styk s C_3 v $\{x\}$. Není možné, aby η_1 měla trojbodový styk s C_3 v $\{x\}$; jinak by totéž platilo o rovinové formě $\eta_1\eta_3 - (\eta_1\eta_3 - \eta^2_2) = \eta^2_2$, což je nemožné, ježto styk η_2 s C_3 je právě jednobodový. Tedy dle **196** bod $\{x\}$ není inflexní pro C_3 a

(2) $$\xi_0 = a_0\eta_0, \quad \xi_1 = a_1\eta_0 + a_2\eta_1. \qquad (a_0 \neq 0,\ a_2 \neq 0)$$

Stačí nyní zvoliti

(3) $$\xi_2 = \frac{a_2^2}{a_0}\eta_2 + 2\frac{a_1 a_2}{a_0}\eta_1 + \frac{a_1^2}{a_0}\eta_0,$$
$$\xi_3 = \frac{a_2^3}{a_0^2}\eta_3 + 3\frac{a_1 a_2^2}{a_0^2}\eta_2 + 3\frac{a_1^2 a_2}{a_0^2}\eta_1 + \frac{a_1^3}{a_0^2}\eta_0,$$

aby platilo (1). Vskutku

$$\xi_0\xi_2 - \xi_1^2 = a_2^2(\eta_0\eta_2 - \eta_1^2),$$
$$\xi_0\xi_3 - \xi_1\xi_2 = \frac{a_2^3}{a_0}(\eta_0\eta_3 - \eta_1\eta_2) + 2\frac{a_1 a_2^2}{a_0}(\eta_0\eta_2 - \eta_1^2)$$
$$\xi_1\xi_3 - \xi_2^2 = \frac{a_2^4}{a_0^2}(\eta_1\eta_3 - \eta_2^2) + \frac{a_1 a_2^3}{a_0^2}(\eta_0\eta_3 - \eta_1\eta_2) + \frac{a_1^2 a_2^2}{a_0^2}(\eta_0\eta_2 - \eta_1^2).$$

199. Ar. křivka $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) třídy $r \geqq 2$ nazývá se poloregulární, když: 1^0 jsou-li u_1, u_2 dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$, ar. přímky $\left(x\dfrac{dx}{du}\right)_{u=u_1}$ a $\left(x\dfrac{dx}{du}\right)_{u=u_2}$ jsou lin. nezávislé; 2^0 pro každé u z $\langle a, b\rangle$ jest

(1) $$x\left(\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right) \neq 0_r.$$

Křivka $C\{x(u)\}$ třídy $r \geqq 2$ nazývá se poloregulární, když ar. křivka $C_a\, x(u)$ jest poloregulární. Žádný bod poloregulární křivky není inflexní; tečny poloregulární křivky ve dvou různých bodech jsou různé.

Viz **191.**

200. Ar. křivka $C_a\, x(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) třídy $r \geqq 3$ nazývá se regulární, když: 1^0 jsou-li u_1, u_2 dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$, jsou lin. nezávislé jak ar. přímky $\left(x\dfrac{dx}{du}\right)_{u=u_1}$ a $\left(x\dfrac{dx}{du}\right)_{u=u_2}$, tak ar. roviny $\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\right)_{u=u_1}$ a $\left(x\dfrac{dx}{du}\dfrac{d^2x}{du^2}\right)_{u=u_2}$; 2^0 pro každé u z $\langle a, b\rangle$ jest

(1) $$\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right) \neq 0.$$

Každá regulární ar. křivka jest poloregulární. Křivka $C\{x(u)\}$ třídy $r \geqq 3$ nazývá se regulární, když ar. křivka

$C_a x(u)$ jest regulární. Každá regulární křivka jest pologulární. Regulární křivka nemá hyperoskulačních rovin; oskulační roviny regulární křivky ve dvou různých bodech jsou různé.

201. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) regulární křivka třídy $r \geqq 3$. Množství oskulačních rovin $\{\xi(u)\}$ křivky $C\{x(u)\}$ je duální křivka $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ třídy $r-2$. Pravíme, že duální křivka $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) jest adjungována ke křivce $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) a píšeme

$$\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\, C\{x(u)\}.$$

Dle **196** (1) můžeme předpokládati, že

$$(1) \qquad \xi(u) = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2}\right).$$

Odtud plyne

$$\frac{d\xi}{du} = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^3x}{du^3}\right),$$

takže dle **109** (1)

$$(2) \qquad \left(\xi \frac{d\xi}{du}\right) = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} \frac{d^3x}{du^3}\right) \left(x \frac{dx}{du}\right).$$

Z definice regulární křivky vychází nyní snadno, že $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ jest duální křivka.

202. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 3$. Buď

$$(1) \qquad \mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\, C\{x(u)\}.$$

$\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ jest poloregulární křivka, kdykoli je třídy 2; zejména tedy, kdykoli $r \geqq 4$. $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ jest regulární křivka, kdykoli je třídy 3; zejména tedy, kdykoli $r \geqq 5$. Když $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ je regulární, jest

$$(2) \qquad C\{x(u)\} = \text{Adj.}\, \mathfrak{C}\{\xi(u)\}.$$

Jako ve **201**, zvolme

$$\xi = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2}\right).$$

Buď nejprve $r \geqq 4$. Pak jest

$$\frac{d\xi}{du} = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^3x}{d^3u}\right), \quad \frac{d^2\xi}{du^2} = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^4x}{du^4}\right) + \left(x \frac{d^2x}{du^2} \frac{d^3x}{du^3}\right),$$

takže

$$\left(\xi \frac{d\xi}{du} \frac{d^2\xi}{du^2}\right) = \left[\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^3}\right), \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^3x}{du^3}\right), \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^4x}{du^4}\right) + \left(x \frac{d^2x}{d^2u} \frac{d^3x}{du^3}\right)\right].$$

Avšak

$$\left[\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right), \left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\right), \left(x\frac{dx}{du}\frac{d^4x}{du^4}\right)\right] = 0_b,$$

neboť všecky tři ar. roviny na levé straně náležejí do Adj. $\left\{x, \dfrac{dx}{du}\right\}$ a jsou tedy lin. závislé. Dle **109** (2) je tedy

$$\left(\xi\frac{d\xi}{du}\frac{d^2\xi}{du^2}\right) = -\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)^2 x. \tag{3}$$

Ze (3) a **201** (2) vychází snadno, že $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ jest poloregulární. Dále předpokládejme, že $r \geqq 5$. Pak jest

$$\frac{d^3\xi}{du^3} = \left(x\frac{dx}{du}\frac{d^5x}{du^5}\right) + 2\left(x\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^4x}{du^4}\right) + \left(\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right),$$

takže

$$Sx\frac{d^3\xi}{du^3} = -\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right).$$

Dle (3) je tedy

$$\left(\xi\frac{d\xi}{du}\frac{d^2\xi}{du^2}\frac{d^3\xi}{du^3}\right) = \left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)^3. \tag{4}$$

Ze (3), (4) a **201** (2) soudíme snadno, že $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ jest regulární.

I když $r = 3$ $(3 \leqq r \leqq 4)$, může se státi, že $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ je třídy 2 (3). To nastane, lze-li určiti funkce $\varrho(u_1)$, $\varphi(u_1)$ třídy 1 takové, že všude $\varrho(u_1) \neq 0$, $\dfrac{d\varphi}{du_1} \neq 0$ a že, klademe-li

$$\xi_1(u_1) = \varrho(u_1)\,\xi[\varphi(u_1)] \tag{5}$$

souřadnice $\xi_1^{(i)}(u_1)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ jsou třídy 2 (3). Ze (4) plyne derivováním

$$\frac{d\xi_1}{du_1} = \frac{d\varrho}{du_1}\,\xi[\varphi(u_1)] + \varrho(u_1)\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=\varphi(u_1)}\frac{d\varphi}{du_1}, \tag{6}$$

takže jest dle **201** (2)

$$\left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\right) = \lambda(u_1)\left(x\frac{dx}{du}\right)_{u=\varphi(u_1)}, \tag{7}$$

kde

$$\lambda(u_1) = [\varrho(u_1)]^2\frac{d\varphi}{du_1}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)_{u=\varphi(u_1)}.$$

Funkce $\lambda(u_1)$ je třídy 1, neboť ostatní výrazy vyskytující se v (7) jsou třídy 1. Ze (7) plyne tedy derivováním

$$\left(\xi_1\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\right) = \frac{d\lambda}{du_1}\left(x\frac{dx}{du}\right)_{u=\varphi(u_1)} + \lambda\frac{d\varphi}{du_1}\left(x\frac{d^2x}{du^2}\right)_{u=\varphi(u_1)}. \tag{8}$$

Z (6) a (8) vychází, že jest, ať ar. rovina η je jakákoli

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad \left(\xi_1 \frac{d\xi_1}{du_1}\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\eta\right) &= S\left(\xi_1\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\right)\left(\eta\frac{d\xi_1}{du_1}\right) = \frac{d\rho}{du_1}\frac{d\lambda}{du_1}\left[S\left(x\frac{dx}{du}\right)(\eta\xi)\right]_{u=\varphi(u_1)} + \\
&+ \frac{d\rho}{du_1}\lambda\frac{d\varphi}{du_1}\left[S\left(x\frac{d^2x}{du^2}\right)(\eta\xi)\right]_{u=\varphi(u_1)} + \rho\frac{d\lambda}{du_1}\frac{d\varphi}{du_1}\left[S\left(x\frac{dx}{du}\right)\left(\eta\frac{d\xi}{du}\right)\right]_{u=\varphi(u_1)} + \\
&+ \rho\lambda\left(\frac{d\varphi}{du_1}\right)^2\left[S\left(x\frac{d^2x}{du^2}\right)\left(\eta\frac{d\xi}{du}\right)\right]_{u=\varphi(u_1)}.
\end{aligned}
$$

Zřejmě jest $Sx\xi = S\frac{dx}{du}\xi = S\frac{d^2x}{du^2}\xi = Sx\frac{d\xi}{du} = S\frac{dx}{du}\frac{d\xi}{du} = 0$, takže dle **98** (1) prvé tři členy na pravé straně rovnice (9) jsou rovny nule; dle téhož vzorce pak jest

$$
S\left(x\frac{d^2x}{du^2}\right)\left(\eta\frac{d\xi}{du}\right) = \begin{vmatrix} Sx\eta & Sx\frac{d\xi}{du} \\ S\frac{d^2x}{du^2}\eta & S\frac{d^2x}{du^2}\frac{d\xi}{du} \end{vmatrix} = Sx\eta S\frac{d^2x}{du^2}\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^3x}{du^3}\right) =
$$

$$
= -Sx\eta\,.\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right),
$$

takže (9) dává

$$
\left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\eta\right) = \mu S\eta x[\varphi(u_1)],
$$

kde

$$
\mu = -\rho\lambda\left(\frac{d\varphi}{du_1}\right)^2\left(x\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}\frac{d^3x}{du^3}\right)_{u=\varphi(u_1)}.
$$

Ježto ar. rovina η je libovolná, je tedy

$$
(10)\qquad \left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\right) = \mu x[\varphi(u_1)].
$$

Ze (7) a (10) vychází snadno, že $\mathfrak{C}_a\,\xi_1(u_1)$ jest poloregulární. Když $\mathfrak{C}_a\,\xi_1(u_1)$ je třídy 3, jest μ třídy 1, neboť totéž platí o ostatních výrazech, vyskytujících se v (10). Z (10) plyne pak derivováním

$$
(11)\qquad \left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\frac{d^3\xi_1}{du_1^3}\right) = \frac{d\mu}{du_1}x[\varphi(u_1)] + \mu\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=\varphi(u_1)}.
$$

Z (10) a (11) vychází dle **109** (1)

$$
\left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\frac{d^3\xi_1}{du_1^3}\right)\left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\right) = \mu^2\left(x\frac{dx}{du}\right)_{u=\varphi(u_1)}.
$$

Pravá strana této rovnice je patrně $\neq 0_p$. Z toho plyne, že

$$
(12)\qquad \left(\xi_1\frac{d\xi_1}{du_1}\frac{d^2\xi_1}{du_1^2}\frac{d^3\xi_1}{du_1^3}\right) \neq 0.
$$

Ze (7), (10) a (12) soudíme snadno, že $\mathfrak{C}_a\,\xi_1(u_1)$ je regulární.

203. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ regulární křivky třídy $r \geqq 3$ o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Buď

$$\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\, C\{x(u)\},\ \mathfrak{C}\{\eta(v)\} = \text{Adj.}\, C\{y(v)\}.$$

Mají-li křivky $Cx\{(u)\}$, $C\{y(v)\}$ s-bodový $(3 \leqq s \leqq r)$ styk v bodě $\{x(u_0)\}$, mají $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$, $\mathfrak{C}\{\eta(v)\}$ $(s-1)$-rovinový styk*) v $\{\xi(u_0)\}$.
Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha,\ \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = y_\alpha. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Dle **178** můžeme předpokládati, že

$$x_\alpha = y_\alpha. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1) \tag{1}$$

Dle **196** (1) můžeme předpokládati, že

$$\xi(u) = \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2}\right),\ \eta(v) = \left(y \frac{dy}{dv} \frac{d^2y}{dv^2}\right).$$

Z (1) vychází ihned, že

$$\left(\frac{d^\alpha \xi}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha \eta}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-3) \tag{2}$$

a že

$$\left(\frac{d^{s-2} \eta}{dv^{s-2}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-2} \xi}{du^{s-2}}\right)_{u=u_0} = (x_0,\ x_1,\ y_s - x_s). \tag{3}$$

Dle **200** (1) jest

$$\text{Adj.}\{x_0,\ x_1\} = \{(x_0 x_1 x_2),\ (x_0 x_1 x_3)\} = \left\{\xi(u_0),\ \left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0}\right\}.$$

Avšak zřejmě $(x_0,\ x_1,\ y_s - x_s)$ náleží do Adj. $\{x_0,\ x_1\}$. Existují tedy čísla a_0, b_0 taková, že

$$\left(\frac{d^{s-2} \eta}{dv^{s-2}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-2} \xi}{du^{s-2}}\right)_{u=u_0} = a_0 \left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0} + b_0\, \xi(u_0). \tag{4}$$

Ze (2) a (3) vychází dle **179**, že $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ a $\mathfrak{C}\{\eta(v)\}$ mají $(s-1)$-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$.

204. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r \geqq 5$ o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha,\ \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = y_\alpha. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right).$$

---

*) Pro $m = 3$ k výrazu „s-bodový styk" je duální výraz „s-rovinový styk".

Buď $4 \leqq s \leqq r-1$. Buď

(1) $$y_0 = x_0,\ y_1 = x_1,\ \ldots,\ y_{s-1} = x_{s-1},$$

takže $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$. Buď

$$\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\, C\{x(u)\},\quad \mathfrak{C}\{\eta(v)\} = \text{Adj.}\, C\{y(v)\}.$$

Když a jen když

(2) $$(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s) = 0,$$

mají duální křivky $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ a $\mathfrak{C}\{\eta(v)\}$ s-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$.

Podržme předpoklady a označení ze **203**. Z (1) vychází ihned, že

(3) $$\left(\frac{d^{s-1}\eta}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1}\xi}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0} = (x_0, x_1, y_{s+1} - x_{s+1}) + (s-2)(x_0, x_2, y_s - x_s).$$

Dle **200** (1) můžeme položiti

(4) $$\begin{aligned} y_4 - x_4 &= c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ y_s - x_s &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \\ y_{s+1} - x_{s+1} &= \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3; \end{aligned}$$

dle **203** (3) a (4) jest patrně

(5) $$\lambda_2 = b_0,\quad \lambda_3 = a_0.$$

Dosadíme-li ze (4) do (3), obdržíme

$$\left(\frac{d^{s-1}\eta}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1}\xi}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0} = [\mu_2 - (s-2)\lambda_1](x_0 x_1 x_2) + \mu_3 (x_0 x_1 x_3) + (s-2)\lambda_3 (x_0 x_2 x_3),$$

což lze patrně psáti

(6) $$\begin{aligned} \left(\frac{d^{s-1}\eta}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1}\xi}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0} &= [\mu_2 - (s-2)(\lambda_1 + c_2\lambda_3)]\,\xi(u_0) + \\ &+ [\mu_3 - (s-2)\,c_3\lambda_3]\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0} + (s-2)\,\lambda_3\left(\frac{d^2\xi}{du^2}\right)_{u=u_0}. \end{aligned}$$

Dle **179** (2) a **203** (2), (4) mají $\mathfrak{C}\{\xi\}$, $\mathfrak{C}\{\eta\}$ s-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$, když a jen když existují čísla a_1, b_1 taková, že

(7) $$\begin{aligned} &\left(\frac{d^{s-1}\eta}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1}\xi}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0} = \\ &= b_1\,\xi(u_0) + [a_1 + (s-1)\,b_0]\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0} + (s-1)\,a_0\left(\frac{d^2\xi}{du^2}\right)_{u=u_0}. \end{aligned}$$

Ar. roviny $\xi(u_0)$, $\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0}$, $\left(\frac{d^2\xi}{du^2}\right)_{u=u_0}$ jsou lin. nezávislé dle **202** (3). Z (6) tedy vidíme, že rovnici (7) lze vyhověti, když a jen když

$$(s+1)\,a_0 = (s-2)\,\lambda_3; \tag{8}$$

povšimněme si, že pak jest

$$a_1 = \mu_3 - (s-2)\,c_3\lambda_3 - (s-1)\,b_0.$$

Dle (5) rovnice (8) je ekvivalentní s rovnicí $\lambda_3 = 0$, tedy i s (2). Výraz pro a_1 je tedy jednoduše $a_1 = \mu_3 - (s-1)\,b_0$, čili dle (5)

$$a_1 = \mu_3 - (s-1)\,\lambda_2. \tag{9}$$

205. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě regulární křivky třídy $r \geqq 6$ o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha, \quad \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = y_\alpha. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Buď $5 \leqq s \leqq r-1$. Buď

$$y_0 = x_0,\ y_1 = x_1,\ \ldots\ y_{s-1} = x_{s-1}, \tag{1}$$

takže $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$. Buď

$$\mathfrak{C}\{\xi(u)\} = \text{Adj.}\,C\{x(u)\},\quad \mathfrak{C}\{\eta(v)\} = \text{Adj.}\,C\{y(v)\}.$$

Když a jen když

$$(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s) = 0,$$

$$(x_0, x_1, x_2, y_{s+1} - x_{s+1}) + s\,(x_0, x_1, x_3, y_s - x_s) = 0, \tag{2}$$

mají duální křivky $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ a $\mathfrak{C}\{\eta(v)\}$ $(s+1)$-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$. $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ a $\mathfrak{C}\{\eta(v)\}$ nemohou míti $(s+2)$-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$, když $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají právě s-bodový styk v $\{x_0\}$.

Podržme předpoklady a označení ze **203** a **204**. Z (1) vychází snadno, že

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^s\eta}{dv^s}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^s\xi}{du^s}\right)_{u=u_0} &= (x_0, x_1, y_{s+2} - x_{s+2}) + (s-1)\,(x_0, x_2, y_{s+1} - x_{s+1}) + \\ &+ \frac{s\,(s-3)}{2}\,(x_0, x_3, y_s - x_s) + \frac{(s-1)\,(s-2)}{2}\,(x_1, x_2, y_s - x_s).\end{aligned} \tag{3}$$

Položme

$$y_{s+2} - x_{s+2} = \nu_0 x_0 + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3. \tag{4}$$

Dle (4) a **204** (4) dá se (3) upraviti na tvar

$$
(5)\quad \left(\frac{d^s\eta}{dv^s}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^s\xi}{du^s}\right)_{u=u_0}=\left[\nu_2-(s-1)\mu_1+\frac{(s-1)(s-2)}{2}\lambda_0\right](x_0x_1x_2)+
$$
$$
+\left[\nu_3-\frac{s(s-3)}{2}\lambda_1\right](x_0x_1x_3)+\left[(s-1)\mu_3-\frac{s(s-3)}{2}\lambda_2\right](x_0x_2x_3)+\frac{(s-1)(s-2)}{2}\lambda_3(x_1x_2x_3).
$$

Ježto $(x_0\,x_1\,x_2\,x_3)\neq 0$ a

$$
\xi(u_0)=(x_0x_1x_2),\quad \left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0}=(x_0x_1x_3),\quad \left(\frac{d^2\xi}{du^2}\right)_{u=u_0}=(x_0x_1x_4)+(x_0x_2x_3),
$$
$$
\left(\frac{d^3\xi}{du^3}\right)_{u=u_0}=(x_0x_1x_5)+2(x_0x_2x_4)+(x_1x_2x_3)=(x_0x_1x_5)-2c_1(x_0x_1x_2)+
$$
$$
+2c_3(x_0x_2x_3)+(x_1x_2x_3),
$$

vidíme snadno, že (5) lze psáti

$$
(6)\quad \left(\frac{d^s\eta}{dv^s}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^s\xi}{du^s}\right)_{u=u_0}=\alpha\xi(u_0)+\beta\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0}+
$$
$$
+\left[(s-1)\mu_3-\frac{s(s-3)}{2}\lambda_2-(s-1)(s-2)c_3\lambda_3\right]\left(\frac{d^2\xi}{du^2}\right)_{u=u_0}+\frac{(s-1)(s-2)}{2}\lambda_3\left(\frac{d^3\xi}{du^3}\right)_{u=u_0}.
$$

Dle **179** (2) a **203** (2), (4) mají $\mathfrak{C}\{\xi\}$, $\mathfrak{C}\{\eta\}$ $(s+1)$-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$, když a jen když existují čísla a_1, b_1, a_2, b_2 taková, že platí **204** (7) a

$$
(7)\quad \left(\frac{d^s\eta}{dv^s}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^s\xi}{du^s}\right)_{u=u_0}=b_2\xi(u_0)+(a_2+sb_1)\left(\frac{d\xi}{du}\right)_{u=u_0}+
$$
$$
+s\left(a_1+\frac{s-1}{2}b_0\right)\left(\frac{d^2\xi}{du^2}\right)_{u=u_0}+\frac{s(s-1)}{2}a_0\left(\frac{d^3\xi}{du^3}\right)_{u=u_0}.
$$

Při tom a_0, b_0 mají hodnoty **204** (5). Viděli jsme, že rovnici **204** (7) lze vyhověti, když a jen když $\lambda_3=a_0=0$, t. j. platí-li prvá rovnice (2), a že pak a_1 má hodnotu **204** (9). Rovnici (7) pak se vyhoví, když a jen když

$$
s\left(a_1+\frac{s-1}{2}b_0\right)=(s-1)\mu_3-\frac{s(s-3)}{2}\lambda_2,
$$

což se dá psáti dle **204** (5) a (9)

$$
(8)\quad \mu_3=s\lambda_2.
$$

Dle **204** (4) je však

$$
\mu_3=\frac{(x_0,\ x_1,\ x_2,\ y_{s+1}-x_{s+1})}{(x_0x_1x_2x_3)},\quad \lambda_2=-\frac{(x_0,\ x_1,\ x_3,\ y_s-x_s)}{(x_0x_1x_2x_3)},
$$

takže (8) dává druhou rovnici (2).

Mají-li $\mathfrak{C}\{\xi\}$ a $\mathfrak{C}\{\eta\}$ $(s+2)$-rovinový styk v $\{\xi(u_0)\}$, mají dle **202** (2) a dle teorému duálního ke **203** $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ $(s+1)$-bodový styk v $\{x_0\}$.

Osnovy.

206. V **95** a násl. zavedli jsme do projektivní geometrie trojrozměrného prostoru pětirozměrné ar. body pod názvem ar. komplexy. Ve **156** nazvali jsme jistá množství ar. bodů ar. křivkami. Vlastnosti ar. křivek můžeme tedy ihned přenésti na analogická množství ar. komplexů. Pro nás je důležitý případ, kdy běží o množství speciálních ar. komplexů (ar. přímek); v tomto případě místo výrazu ar. křivka užíváme výrazu ar. osnova. Ar. osnova není tedy vlastně nic jiného než zvláštní případ ar. křivky s $m=5$. Pro jasnost udejme však raději znovu formální definici:

Jsou-li souřadnice ar. přímky $p=p(u)$ funkce třídy $r\geqq 1$ v $\langle a, b\rangle$ (může býti $r=\infty$); jsou-li ar. komplexy $p(u_1)$, $p(u_2)$ lin. nezávislé, kdykoli u_1, u_2 jsou dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$; jsou-li ar. komplexy $p(u)$, $\frac{dp}{du}$ lin. nezávislé pro každé u z $\langle a,b\rangle$: pak pravíme, že množství ar. přímek $p(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) jest ar. osnova třídy r. Ar. osnovu značíme obvykle $R_a p(u)$, určitěji $R_a p(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$), stručněji $R_a p$ nebo R_a. Pravíme, že u jest parametr ar. osnovy $R_a p(u)$.

Je-li $R_a p(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) ar. osnova třídy 1; je-li $\varrho=\varrho(u)$ funkce třídy 0 v $\langle a, b\rangle$; je-li $\varrho(u)\neq 0$ pro každé u z $\langle a, b\rangle$: pravíme, že množství ar. přímek ϱp (u v $\langle a, b\rangle$) jest ar. osnova třídy 0.

Jako jsme ve **160** z ar. křivky obdrželi křivku, obdržíme z ar. osnovy osnovu. Formální definice osnovy tedy jest:

Buď $R_a p(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) ar. osnova třídy $r\geqq 1$. Množství přímek $\{p(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) nazývá se osnova třídy r. Osnovu značíme obvykle $R\{p(u)\}$, určitěji $R\{p(u)\}$, (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$), stručněji $R\{p\}$ nebo R. Pravíme, že u jest parametr osnovy $R\{p(u)\}$.

207. Buď $R_a\, p(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) ar. osnova třídy $r\geqq 1$. Lze určiti ar. křivky $C_a x(u)$, $C_a y(u)$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) třídy r tak, že pro každé u z $\langle a, b\rangle$ jest $p=(xy)$.

Ukažme nejprve: Je-li u_0 libovolné číslo z $\langle a+0,\ b-0\rangle$, lze určiti $\varepsilon>0$ a ar. křivky $C_a x(u)$, $C_a y(u)$ (u v $\langle u_0-\varepsilon+0,\ u_0+\varepsilon-0\rangle$) třídy r tak, že pro každé u z $\langle u_0-\varepsilon,\ u_0+\varepsilon\rangle$ jest $p=(xy)$. Dle **104** existují ar. body x_1, x_2 takové, že $p(u_0)=(x_1\, x_2)$. Ze **112** snadno vychází, že můžeme předpokládati, že

$$(1) \qquad \left(\left[\frac{dp}{du}\right]_{u=u_0}, x_1\right) \neq 0_r, \quad \left(\left[\frac{dp}{du}\right]_{u=u_0}, x_2\right) \neq 0_r.$$

Ježto $p(u_0) \neq 0_p$, ar. body x_1, x_2 jsou lin. nezávislé; můžeme tedy určiti ar. body x_3, x_4 tak, že

$$(2) \qquad (x_1 x_2 x_3 x_4) = 1.$$

Buď $\xi = -(x_1 x_3 x_4)$, $\eta = -(x_2 x_3 x_4)$, $X(u) = (p\xi)$, $Y(u) = (p\eta)$. Zřejmě jest identicky v u: $(XY) = \lambda p$, kde λ je funkce třídy r. Dle (2) a **110** (1) je však $X(u_0) = x_1$, $Y(u_0) = x_2$, takže $\lambda(u_0) = 1$. Lze tedy určiti $\delta > 0$ tak, že $\lambda \neq 0$ všude v $\langle u_0 - \delta, u_0 + \delta\rangle$. Položme pro u v $\langle u_0 - \delta, u_0 + \delta\rangle$: $x(u) = X(u)$; $y(u) = \frac{1}{\lambda} Y(u)$. Máme ještě ukázati, že lze určiti ε $(0 < \varepsilon \leqq \delta)$ tak, aby množství ar. bodů $x(u)$ (u v $\langle u_0 - \varepsilon + 0, u_0 + \varepsilon - 0\rangle$) byla ar. křivka třídy r a stejně pro $y(u)$. Dle **157** stačí ukázati, že ar. body $X(u_0)$, $\left(\frac{dX}{du}\right)_{u=u_0}$ jsou lin. nezávislé*). Kdyby však tomu tak nebylo, existovalo by číslo ν takové, že $\left(\frac{dX}{du}\right)_{u=u_0} = \nu X(u_0)$, t. j. $\left(\frac{dp}{du}\xi\right)_{u=u_0} = \nu (p\xi)_{u=u_0} = \nu x_1$. Bylo by pak především

$$\left(\left[\frac{dp}{du} - \nu p\right]_{u=u_0}, \xi\right) = 0_b,$$

t. j. $\left(\frac{dp}{du} - \nu p\right)_{u=u_0}$ byla by ar. přímka incidentní s ξ. Je však identicky v u: $Spp = 0$ a tedy též $Sp\frac{dp}{du} = 0$, $Sp\left(\frac{dp}{du} - \nu p\right) = 0$, takže

$$\left\{p(u_0), \left[\frac{dp}{du} - \nu p\right]_{u=u_0}\right\} = \left\{p(u_0), \left[\frac{dp}{du}\right]_{u=u_0}\right\}$$ byl by svazek ar. přímek. Střed tohoto svazku je zřejmě incidentní s $\{\xi\}$ a tedy je to $\{x_1\}$, neboť žádný jiný bod z $\{\xi\}$ není incidentní s $\{p(u_0)\}$. To však je ve sporu s (1).

Ukažme dále: Je-li $a < u_1 < u_2 < b$ a jestliže, ať jakkoli zvolíme u_3 v $\langle u_1 + 0, u_2 - 0\rangle$, lze určiti ar. křivky $C_a x(u)$, $C_a y(u)$ (u v $\langle u_1 + 0, u_3 - 0\rangle$) třídy r tak, že pro každé u z $\langle u_1 + 0, u_3 - 0\rangle$ jest $p = (xy)$: pak lze určiti $\varepsilon > 0$ a ar. křivky $C_a x'(u)$, $C_a y'(u)$ (u v $\langle u_1 + 0, u_2 + \varepsilon - 0\rangle$ třídy r tak, že pro každé u z $\langle u_1 + 0, u_2 + \varepsilon - 0\rangle$ jest $p = (x'y')$. Dle toho, co již bylo dokázáno, existuje $\varepsilon' > 0$ a ar. křivky $C_a x''(u)$, $C_a y''(u)$ (u v $\langle u_2 - \varepsilon + 0, u_2 + \varepsilon - 0\rangle$) třídy r tak, že pro každé u z $\langle u_3 - \varepsilon' + 0, u_2 + \varepsilon' - 0\rangle$ jest $p = (x''y'')$. Zvolme nyní u_3 v intervalu $\langle u_2 - \varepsilon' + 0,$

*) Neboť stejně se ukáže, že také ar. body $y(u_0)$, $\left(\frac{dy}{du}\right)_{u=u_0}$ jsou lin. nezávislé.

$u_2 - 0\rangle$. Pro každé u z $\langle u_2 - \varepsilon, u_3\rangle$ jest $(xy) = (x''y'')$, takže lze určiti funkce $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ třídy r v $\langle u_2 - \varepsilon, u_3\rangle$ tak, že jest identicky

$$x = \lambda_1 x'' + \lambda_2 y'', \quad y = \mu_1 x'' + \mu_2 y'',$$
$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1.$$

Definice funkcí $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ dá se snadno (nekonečně mnoha způsoby) rozšířiti na interval $\langle u_2 - \varepsilon, u_2 + \varepsilon\rangle$ tak, že zůstanou třídy r a že je stále identicky $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1$. Stačí pak zvoliti 1^0 pro u v $\langle u_1, u_3\rangle$: $x' = x$, $y' = y$, 2^0 pro u v $\langle u_3, u_2 + \varepsilon\rangle$: $x' = \lambda_1 x'' + \lambda_2 y''$, $y' = \mu_1 x'' + \mu_2 y''$.

Z toho, co bylo dokázáno, vychází, že teorém je správný pro každý interval $\langle a_1, b_1\rangle$ obsažený v $\langle a + 0, b - 0\rangle$. Snadno se vidí, že teorém platí také v $\langle a, b\rangle$.

208. Mnohé definice a teorémy o křivkách dají se bezprostředně přenésti na osnovy; je pouze třeba ar. body a ar. roviny nahraditi ar. komplexy. Tak ze **165** je zřejmé, co znamená výrok, že osnovy $R\{p(u)\}$, $R\{q(v)\}$ splynou v okolí společné ar. přímky $\{p(u_0)\} = \{q(v_0)\}$. Ze **168** je zřejmé, co jest rozuměti pod algebraickou osnovou a singulárními přímkami algebraické osnovy. Ze **169** jest patrno, že svazek přímek jest algebraická osnova bez singulárních přímek. Z definice s-bodového styku dvou křivek třídy $\geqq s - 1$ ($\geqq 1$ pro $s = 1$) (v. **174** a **176**) obdržíme ihned definici s-přímkového styku dvou osnov třídy $\geqq s - 1$ ($\geqq 1$ pro $s = 1$). Ihned se přenesou na osnovy teorémy **177, 178, 179.**

209. Regulus jest algebraická osnova bez singulárních přímek.

Buď R_2 regulus; buď R'_2 komplementární k R_2. R'_2 buď množství přímek obsažených v lin. systému ar. komplexů $\{q_0, q_1, q_2\}$. Ze **127** vychází, že když a jen když ar. komplex $p \neq 0_p$ splňuje rovnice

$$Sq_0 p = Sq_1 p = Sq_2 p = Spp = 0,$$

jest $\{p\}$ přímka obsažená v R_2. Ze **168** snadnou úvahou vychází, že běží pouze o to, udati ar. komplexy p_0, p_1, p_2, p_3 tak, aby

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} Sq_0p_0 & Sq_0p_1 & Sq_0p_2 & Sq_0p_3 \\ Sq_1p_0 & Sq_1p_1 & Sq_1p_2 & Sq_1p_3 \\ Sq_2p_0 & Sq_2p_1 & Sq_2p_2 & Sq_2p_3 \\ Spp_0 & Spp_1 & Spp_2 & Spp_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

K tomu cíli stačí však zvoliti $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$ a určiti p_3 tak, aby $\{p_3\}$ byla přímka z R_2 různá od $\{p\}$. Ježto totiž $Spq_0 = Spq_1 = Spq_2 = 0$, redukuje se levá strana nerovnosti (1) na součin

$$Spp_3 \begin{vmatrix} Sq_0q_0 & Sq_0q_1 & Sq_0q_2 \\ Sq_1q_0 & Sq_1q_1 & Sq_1q_2 \\ Sq_2q_0 & Sq_2q_1 & Sq_2q_2 \end{vmatrix}.$$

Prvý faktor je různý od nuly dle **126**; druhý faktor je různý od nuly dle **125**, neboť lin. systém ar. komplexů $\{q_0, q_1, q_2\}$ jest obecný dle definice regulu.

V této souvislosti poznamenejme si teorém, jenž snadno plyne ze **180**: Osnova $R\{p(u)\}$ třídy r má v přímce $\{p(u_0)\}$ s-přímkový ($1 \leqq s \leqq r+1$) styk s regulem R_2 obsaženým v lin. systému ar. komplexů Adj. $\{q_0, q_1, q_2\}$, když a jen když

$$\left[\frac{d^\alpha}{du^\alpha} Sq_i p(u)\right]_{u=u_0} = 0. \qquad (i=0,1,2;\ 0 \leqq \alpha \leqq s-1;\ \frac{d^0}{du^0} = 1). \tag{2}$$

Styk osnovy a svazku přímek.

210. Buď $\{p(u_0)\}$ přímka osnovy $R\{p(u)\}$. Když a jen když pro $u = u_0$ jest

$$S\frac{dp}{du}\frac{dp}{du} = 0, \tag{1}$$

existuje svazek přímek mající s $R\{p(u)\}$ dvojpřímkový styk v $\{p(u_0)\}$; pravíme pak, že $\{p(u_0)\}$ je torsální přímka osnovy $R\{p(u)\}$ a střed svazku jmenujeme bodem vratu osnovy $R\{p(u)\}$ v přímce $\{p(u_0)\}$. Nemá-li osnova $R\{p(u)\}$ torsálních přímek, pravíme, že je zborcená. Platí-li (1) identicky jsou-li tedy všecky přímky osnovy $R\{p(u)\}$ torsální, pravíme, že $R\{p(u)\}$ jest rozvinutelná osnova. Při rozvinutelné osnově píšeme zpravidla $\Gamma\{p(u)\}$ místo $R\{p(u)\}$. Když $p = (xy)$ a $x^{(i)}(u)$, $y^{(i)}(u)$ jsou třídy 1, rovnice (1) jest ekvivalentní s rovnicí,

$$\left(xy\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\right) = 0. \tag{2}$$

Ze **185** je zřejmé (v. **208**), že přímka $\{p(u_0)\}$ je torsální přímkou osnovy $R\{p\}$, když a jen když

$$\left\{p, \frac{dp}{du}\right\}^{\Gamma} \qquad (u = u_0) \tag{3}$$

je svazek přímek, tedy dle **121** (1), když a jen když pro $u = u_0$ jest

$$Spp = 0,\ Sp\frac{dp}{du} = 0,\ S\frac{dp}{du}\frac{dp}{du} = 0. \tag{4}$$

Prvá rovnice (4) je však správná pro všecka u, z čehož plyne derivováním, že totéž platí o druhé rovnici (4).

Snadno se vidí, že regulus je zborcená algebraická osnova. Uvažujme regulus R_2 obsažený v Adj. $\{q_0, q_1, q_2\}$; buď $\{p\}$ přímka z R_2. Kdyby $\{p\}$ byla torsální pro R_2, svazek přímek mající v $\{p\}$ dvojpřímkový styk s R_2 byl by obsažen v R_2, jak jest ihned patrno ze **187** (v. **209**); to je však nemožné, neboť R_2 dle **126** nemůže obsahovati svazek přímek.

211. Buď $\{p(u_0)\}$ torsální přímka osnovy $R\{p(u)\}$ třídy 2; když a jen když pro $u = u_0$ ar. komplex $\frac{d^2p}{du^2}$ jest lin. závislý na $p, \frac{dp}{du}$, existuje svazek přímek, mající s $R\{p(u)\}$ v $\{p(u_0)\}$ trojpřímkový styk. Je-li tomu tak pro všecka u, existuje pevný svazek přímek obsahující všecky přímky z $R\{p(u)\}$.

Vychází ihned ze **186** (v. **208**).

Kuželové osnovy.

212. Jsou-li všecky přímky osnovy $R\{p(u)\}$ incidentní s pevným bodem $\{x\}$, pravíme, že $R\{p(u)\}$ jest kuželová osnova o vrcholu $\{x\}$. Kuželová osnova o vrcholu $\{x\}$ jest rozvinutelná osnova a bod $\{x\}$ je bod vratu osnovy ve všech jejích přímkách.

Je-li identicky v u $(px) = 0_r$, kde x je pevný vlastní ar. bod, vychází derivováním, že jest identicky v u $\left(\frac{dp}{du} x\right) = 0_r$. Dle **112** je tedy identicky $S \frac{dp}{du} \frac{dp}{du} = 0$, načež teorém vychází z **210**.

Z duality plyne: Jsou-li všecky přímky osnovy $R\{p(u)\}$ incidentní s pevnou rovinou $\{\xi\}$, jest $R\{p(u)\}$ rozvinutelná osnova.

213. Buď $\Gamma\{p(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) rozvinutelná osnova třídy 3. Nechť pro žádné u z $\langle a+0, b-0\rangle$ neexistuje svazek přímek, mající s $\Gamma\{p(u)\}$ trojpřímkový styk v $\{p(u)\}$. Když a jen když existují funkce $a_0(u)$, $a_1(u)$, $a_2(u)$ spojité v $\langle a+0, b-0\rangle$ takové, že jest identicky

$$\frac{d^3p}{du^3} = a_0 p + a_1 \frac{dp}{du} + a_2 \frac{d^2p}{du^2}, \tag{1}$$

jest $\Gamma\{p(u)\}$ buď kuželová osnova nebo duální ke kuželové osnově.

Dle předpokladu a dle **211** jsou pro každé u ar. komplexy $p, \frac{dp}{du}, \frac{d^2p}{du^2}$ lin. nezávislé. Když $\Gamma\{p(u)\}$ je kuželová osnova o vrcholu $\{x\}$ — můžeme předpokládati, že x je pevný ar. bod — jest identicky v u $(px) = 0_r$ a tedy též $\left(\frac{dp}{du}x\right) = \left(\frac{d^2p}{du^2}x\right) = \left(\frac{d^3p}{du^3}x\right) = 0_r$. Je-li tedy S trs ar. přímek o středu $\{x\}$, náleží $p, \frac{dp}{du}, \frac{d^2p}{du^2}, \frac{d^3p}{du^3}$ do S. Ježto $p, \frac{dp}{du}, \frac{d^2p}{du^2}$ jsou lin. nezávislé, jest $S = \left\{p, \frac{dp}{du}, \frac{d^2p}{du^2}\right\}$, z čehož vychází, že lze určiti a_0, a_1, a_2 tak, že platí (1). Že a_0, a_1, a_2 jsou spojité funkce u, dokáže se stejně jako ve **186.**

Existují-li spojité funkce a_0, a_1, a_2 takové, že platí (1), existuje dle **65** lin. systém S ar. komplexů dimense 2, obsahující všecky přímky z Γ. Je-li S trs nebo pole ar. přímek, je teorém dokázán. Kdyby S nebyl ani trs ani pole, byly by dle **131** všecky přímky z Γ obsaženy buď v regulu — to však není možné, neboť ve **210** jsme si všimli, že žádná přímka osnovy obsažené v regulu není torsální — nebo ve dvou svazcích přímek. Ani tento druhý případ nemůže však nastati; buď totiž $\{p(u_0)\}$ taková přímka z Γ, jež náleží jen jednomu z obou svazků. Snadno se vidí, že dosti malé okolí W přímky $\{p(u_0)\}$ neobsahuje žádnou přímku druhého svazku. Průřez Γ s W byl by tedy obsažen ve svazku přímek; dle **211** byly by na př. pro $u = u_0$ ar. komplexy $p, \frac{dp}{du}, \frac{d^2p}{du^2}$ lin. závislé proti předpokladu.

Můžeme ostatně také počtem zjistiti, že S je trs nebo pole ar. přímek. Zřejmě je totiž pro každé u

$$S = \left\{p, \frac{dp}{du}, \frac{d^2p}{du^2}\right\};$$

dle **123** je tedy pouze třeba zjistiti, že každý ar. komplex z S je speciální, t. j. že

$$Spp = 0,\quad Sp\frac{dp}{du} = 0,\quad S\frac{dp}{du}\frac{dp}{du} = 0,\quad Sp\frac{d^2p}{du^2} = 0,\quad S\frac{dp}{du}\frac{d^2p}{du^2} = 0,\quad S\frac{d^2p}{du^2}\frac{d^2p}{du^2} = 0. \tag{2}$$

Ježto Γ je rozvinutelná osnova, prvé tři rovnice (2) jsou jistě splněny (v. **210** (4)). Ježto

$$Sp\frac{d^2p}{du^2} = \frac{d}{du}\left(Sp\frac{dp}{du}\right) - S\frac{dp}{du}\frac{dp}{du},$$

$$S\frac{dp}{du}\frac{d^2p}{du^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{du}S\frac{dp}{du}\frac{dp}{du},$$

platí též čtvrtá a pátá rovnice (2). Dle (1) jest

$$S\frac{dp}{du}\frac{d^3p}{du^3}=a_0 Sp\frac{dp}{du}+a_1 S\frac{dp}{du}\frac{dp}{du}+a_2 S\frac{dp}{du}\frac{d^2p}{du^2}=0.$$

Ježto

$$S\frac{d^2p}{du^2}\frac{d^2p}{du^2}=\frac{d}{du}\left(S\frac{dp}{du}\frac{d^2p}{du^2}\right)-S\frac{dp}{du}\frac{d^3p}{du^3},$$

platí též poslední rovnice (2).

214. Buď $\{z\}$ pevný bod. Buď $C\{x(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) křivka třídy r. Pro každé u z $\langle a, b\rangle$ buď $\left(x\frac{dx}{du}z\right)\neq 0_r$; jsou-li u_1, u_2 dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$, buď $(x(u_1), x(u_2), z)\neq 0_r$. Množství Γ spojnic bodu $\{z\}$ s body křivky $C\{x(u)\}$ jest kuželová osnova třídy r o vrcholu $\{z\}$. Pravíme, že Γ jest promítací kuželová osnova křivky $C\{x(u)\}$ o vrcholu $\{z\}$.

Běží pouze o to, že množství Γ_a ar. přímek $p(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), kde

$$p=(xz),$$

jest ar. osnova třídy r. Zřejmě souřadnice ar. přímky p jsou funkce třídy r v $\langle a, b\rangle$. Buď $|\lambda_1, \lambda_2|_b\neq 0_b$. Je-li

$$0_p=\lambda_1 p(u_1)+\lambda_2 p(u_2)=(\lambda_1 x(u_1)+\lambda_2 x(u_2), z),$$

jest patrně $(x(u_1), x(u_2), z)=0_r$. Podobně, když

$$0_p=\lambda_1 p+\lambda_2\frac{dp}{du}=\left(\lambda_1 x+\lambda_2\frac{dx}{du}, z\right),$$

jest $\left(x\frac{dx}{du}z\right)=0_r$. Tedy dle předpokladu a dle **206** Γ_a jest ar. osnova třídy r.

K právě dokázanému teorému učiňme ještě tyto poznámky:.

Když $C\{x(u)\}$ je rovinná křivka, jsou hořejší předpoklady o $C\{x(u)\}$ splněny, když rovina incidentní se všemi body z $C\{x\}$ není incidentní se $\{z\}$.

Když tečna křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ není incidentní se $\{z\}$, jsou hořejší předpoklady splněny, když místo $C\{x(u)\}$ uvažujeme průřez této křivky s dosti malým okolím W bodu $\{x(u_0)\}$.

Prvá poznámka je zřejmá. Abychom dokázali druhou poznámku, uvažme, že souřadnice ar. bodů $x, \frac{dx}{du}$ jsou spojité funkce u. Ježto pro $u=u_0$ jest $\left(x\frac{dx}{du}z\right)\neq 0_r$, existuje tedy $\varepsilon>0$ takové, že $\left(x(u_1), \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_2}, z\right)\neq 0_r$, kdykoli u_1, u_2 jsou v $\langle u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon\rangle$. Pak je však též

$$\big(x(u_1),\ x(u_1),\ z\big) \neq 0_r,$$

kdykoli u_1, u_2 jsou v $\langle u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon\rangle$ a na př. $u_1<u_2$. Neboť dle věty o střední hodnotě existuje u_3 v $\langle u_1+0, u_2-0\rangle$ — tedy v $\langle u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon\rangle$ takové, že

$$x(u_2)-x(u_1)=(u_2-u_1)\left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_3},$$

takže

$$\big(x(u_1),\ x(u_2),\ z\big)=(u_2-u_1)\left(x(u_1),\ \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=u_3},\ z\right).$$

215. B u ď $\Gamma\{p(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) k u ž e l o v á o s n o v a t ř í d y r o v r c h o l u $\{z\}$. B u ď $\{\xi\}$ p e v n á r o v i n a, n e i n c i d e n t n í s e $\{z\}$. M n o ž s t v í C p r ů s e č í k ů r o v i n y $\{\xi\}$ s p ř í m k a m i o s n o v y $\Gamma\{p(u)\}$ j e s t r o v i n n á k ř i v k a t ř í d y r. P r a v í m e, ž e C j e p r ů s e k o s n o v y $\Gamma\{p(u)\}$ s r o v i n o u $\{\xi\}$.

Běží pouze o to, že množství C_a ar. bodů $x(u)$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$), kde $x=(p\xi)$, jest ar. křivka třídy r. Zřejmě souřadnice ar. bodu x jsou funkce třídy r v $\langle a, b\rangle$. Je-li pro nějaká u_1, u_2 z $\langle a, b\rangle$

$$0_b=\lambda_1 x(u_1)+\lambda_2 x(u_2)=\big(\lambda_1 p(u_1)+\lambda_2 p(u_2),\ \xi\big),$$

jest dle **112** $\lambda_1 p(u_1)+\lambda_2 p(u_2)$ ar. přímka incidentní s ξ. Je-li $\lambda_1 p(u_1)+$ $+\lambda_2 p(u_2)\neq 0_p$, je pak zřejmě každý ar. bod incidentní s $\lambda_1 p(u_1)+\lambda_2 p(u_2)$ incidentní s ξ. Tedy z jest pak incidentní s ξ; to však odporuje předpokladu. Je tedy nutně $\lambda_1 p(u_1)+\lambda_2 p(u_2)=0_p$, takže $\lambda_1=\lambda_2=0$, ježto ar. komplexy $p(u_1)$, $p(u_2)$ jsou lin. nezávislé. Stejně vidíme, že kdykoli pro nějaké u z $\langle a, b\rangle$

$$\lambda_1 x(u)+\lambda_2\frac{dx}{du}=0_b,$$

jest $\lambda_1=\lambda_2=0$. Tedy C_a jest ar. křivka třídy r.

216. B u ď $\{z\}$ p e v n ý b o d; b u ď $\{\xi\}$ p e v n á r o v i n a; b u ď $Sz\xi\neq 0$. B u ď t e $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ d v ě r o v i n n é k ř i v k y t ř í d y r, j i c h ž v š e c k y b o d y j s o u i n c i d e n t n í s $\{\xi\}$. B u ď $\Gamma\{p(u)\}$ ($\Gamma\{q(v)\}$) p r o m í t a c í k u ž e l o v á o s n o v a k ř i v k y $C\{x(u)\}$ ($C\{y(v)\}$) o v r c h o l u $\{z\}$. K ř i v k y $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ m ě j t e s p o l e č n ý b o d $\{x_0\}=\{x(u_0)\}=$ $=\{y(v_0)\}$. O s n o v y $\Gamma\{p(u)\}$, $\Gamma\{q(v)\}$ m a j í v p ř í m c e $\{x_0 z\}$ s-p ř í m k o v ý ($1\leq s\leq r+1$) s t y k, k d y ž a j e n k d y ž k ř i v k y $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ m a j í v b o d ě $\{x_0\}$ s-b o d o v ý s t y k.

Můžeme předpokládati, že

$$p=(xz),\ q=(yz). \tag{1}$$

Mají-li $C\{x\}$ a $C\{y\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$, můžeme dle **178** předpokládati, že

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq s-1;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right) \tag{2}$$

Dle (1) je pak

$$\left(\frac{d^\alpha p}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha q}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1) \tag{3}$$

Tedy dle **178** a **208** mají $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ s-přímkový styk v $\{x_0 z\}$. Obráceně mějte $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ s-přímkový styk v $\{x z_0\}$. Máme ukázati, že $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$. Ježto věc je zřejmá pro $s = 1$, dokazujeme indukcí. Předpokládáme tedy již dokázáno, že $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají $(s-1)$-bodový styk v $\{x_0\}$. Dle **178** můžeme předpokládati, že platí rovnice (2) až snad na tu, v níž $\alpha = s-1$. Pak platí ty rovnice (3), v nichž $0 \leqq \alpha \leqq s-2$. Ježto $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ mají s-přímkový styk v $\{x_0 z\}$, existují dle **179** čísla a_0, b_0 taková, že

$$\left(\frac{d^\alpha q}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^\alpha p}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = a_0 \left(\frac{dp}{du}\right)_{u=u_0} + b_0 p(u_0).$$

Dle (1) je tedy $(zx') = 0_p$, kde

$$x' = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha} + a_0 \frac{dx}{du} + b_0 x\right)_{u=u_0}. \tag{4}$$

Ježto $(zx') = 0_p$, $z \neq 0_b$, jest $x' = \lambda z$. Dle (4) je však $Sx'\xi = 0$, tedy $\lambda S z \xi = 0$, takže $\lambda = 0$ a $x' = 0_b$. Tedy dle (4)

$$\left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = a_0 \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=u_0} + b_0 x(u_0),$$

takže $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají v $\{x_0\}$ s-bodový styk dle **179**.

217. Buď Γ promítací kuželová osnova křivky $C\{x(u)\}$ o vrcholu $\{z\}$. Buď $\{\xi\}$ pevná rovina neincidentní se $\{z\}$. Buď C^z průsek Γ s $\{\xi\}$. Pravíme, že křivka C^z je průmět křivky $C\{x(u)\}$ s bodu $\{z\}$ do roviny $\{\xi\}$.

Rozvinutelná osnova asociovaná ke křivce.

218. Buď $C\{x(u)\}$ poloregulární křivka třídy $r \geqq 2$. Množství tečen $\{p(u)\}$ křivky $C\{x(u)\}$ je rozvinutelná osnova $\Gamma\{p(u)\}$ třídy $r-1$; bod $\{x(u)\}$ je bod vratu osnovy $\Gamma\{p(u)\}$ v přímce

$\{p(u)\}$. Pravíme, že rozvinutelná osnova $\Gamma\{p(u)\}$ jest asociována ke křivce $C\{x(u)\}$ a píšeme

$$\Gamma\{p(u)\} = \text{Ass.}\, C\{x(u)\}.$$

Dle **195** (1) můžeme předpokládati, že

$$p = \left(x \frac{dx}{du}\right).$$

Odtud derivováním vychází

$$\frac{dp}{du} = \left(x \frac{d^2x}{du^2}\right).$$

Kdyby pro $u = u_0$ ar. komplexy p, $\frac{dp}{du}$ byly lin. závislé, byl by zřejmě pro $u = u_0$ ar. bod $\frac{d^2x}{du^2}$ lin. závislý na x, $\frac{dx}{du}$, tedy by bylo $\left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2}\right)_{u=u_0} = 0$. Z definice poloregulární křivky vychází nyní snadno, že $\Gamma\{p(u)\}$ je osnova třídy $r-1$. Zřejmě $\frac{dp}{du}$ jest ar. přímka pro každé u. Tedy Γ je rozvinutelná osnova.

219. Buď $\Gamma\ \{p(u)\}$ (u v $\langle a+0,\ b-0\rangle$) rozvinutelná osnova třídy $r \geqq 2$. Nechť pro žádné u z $\langle a, b\rangle$ neexistuje vlastní ar. bod incidentní s ar. komplexy p, $\frac{dp}{du}$, $\frac{d^2p}{du^2}$; nechť pro žádnou volbu dvou různých čísel u_1, u_2 neexistuje vlastní ar. bod incidentní s ar. komplexy $p(u_1)$, $p(u_2)$, $\left(\frac{dp}{du}\right)_{u=u_1}$, $\left(\frac{dp}{du}\right)_{u=u_2}$. Pak množství bodů vratu osnovy $\Gamma\{p(u)\}$ jest křivka $C\{x(u)\}$ třídy $r-1$.

Dle **210** pro každé u jest $\left\{p, \frac{dp}{du}\right\}$ svazek ar. přímek. Buď $\{x(u)\}$, $\{\xi(u)\}$ resp. střed a základní rovina tohoto svazku. Pro určitost předpokládejme, že

$$\sum_{i=0}^{3} [x^{(i)}]^2 = \sum_{i=0}^{3} [\xi^{(i)}]^2 = 1, \tag{1}$$

takže x a ξ jsou určeny až na znamení. Buď $q(u) = \frac{dp}{du}$. Lze určiti $\lambda = \lambda(u)$ tak, že platí rovnice **120** (1), (2). Ukažme, že znamení při $x(u)$ lze zvoliti tak, že $x^{(i)}(u)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) jsou funkce třídy $r-1$ v $\langle a, b\rangle$. Dle (1) stačí zřejmě ukázati, že poměry $x^{(0)} : x^{(1)} : x^{(2)} : x^{(3)}$ jsou funkce třídy r. Buď u_0 libovolné číslo z $\langle a, b\rangle$. Ukažme na př., že, když $x^{(0)}(u_0) \neq 0$, poměr $x^{(1)} : x^{(0)}$ má pro $u = u_0$ spojitou $(r-1)^{\text{ní}}$ derivaci. Je-li $\xi^{(2)}(u_0) \neq 0$,

vychází to z rovnice
$$\frac{x^{(1)}}{x^{(0)}}=\frac{p^{(03)}q^{(01)}-p^{(01)}q^{(03)}}{p^{(01)}q^{(31)}-p^{(31)}q^{(01)}},$$

jež plyne ze **120** (1); podobně, když $\xi^{(3)}\neq 0$. Je-li $\xi^{(2)}(u_0)=\xi^{(3)}(u_0)=0$, jest $\xi^{(1)}(u_0)\neq 0$, neboť jinak by z relace $Sx\xi=0$ plynulo buď $\xi^{(0)}(u_0)=0$, tedy $\xi=0_r$, což je nemožné, nebo $x^{(0)}(u_0)=0$, proti předpokladu. Dle **120** (1), (2) je tedy

$$\frac{x^{(1)}}{x^{(0)}}=\frac{-p^{(01)}q^{(23)}+p^{(23)}q^{(01)}+p^{(31)}q^{(02)}-p^{(02)}q^{(31)}-p^{(03)}q^{(12)}+p^{(12)}q^{(03)}}{p^{(02)}q^{(03)}-p^{(03)}q^{(02)}},$$

takže i v tomto případě má $\dfrac{x^{(1)}}{x^{(0)}}$ pro $u=u_0$ spojitou $(r-1)^{\text{ní}}$ derivaci.

220. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r\geqq 4$. Buď

(1) $$\Gamma\{p(u)\}=\text{Ass.}\,C\{x(u)\},\quad \mathfrak{C}\{\xi(u)\}=\text{Adj.}\,C\{x(u)\}.$$

Pak jest

(2) $$\Gamma\{p(u)\}=\text{Ass.}\,\mathfrak{C}\{\xi(u)\}.$$

Ježto $r\geqq 4$, jest $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ poloregulární dle **202**; tedy osnova Ass. $\mathfrak{C}\{\xi(u)\}$ je definována. Rovnice (2) vychází ihned ze **201** (2).

221. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ poloregulární křivky třídy $r\geqq 2$ o společném bodě $\{x(u_0)\}=\{y(v_0)\}$. Buď

$$\Gamma\{p(u)\}=\text{Ass.}\,C\{x(u)\},\quad \Gamma\{q(v)\}=\text{Ass.}\,C\{y(v)\}.$$

Mají-li křivky $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ s-bodový $(2\leqq s\leqq r+1)$ styk v $\{x(u_0)\}$, mají osnovy $\Gamma\{p(u)\}$, $\Gamma\{q(v)\}$ $(s-1)$-přímkový styk v $\{p(u_0)\}$.

Můžeme předpokládati, že

(1) $$p(u)=\left(x\frac{dx}{du}\right),\quad q(v)=\left(y\frac{dy}{dv}\right)$$

a (v. **178**)

(2) $$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}.\qquad \left(0\leqq\alpha\leqq s-1;\ \frac{d^0}{du^0}=\frac{d^0}{dv^0}=1\right)$$

Dle (1) a (2) jest

(3) $$\left(\frac{d^\alpha p}{du^\alpha}\right)_{u=u_0}=\left(\frac{d^\alpha q}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}.\qquad (0\leqq\alpha\leqq s-2)$$

Dle (3), **178** a **208** mají $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ $(s-1)$-přímkový styk v $\{p(u_0)\}$.

222. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ poloregulární třídy $r \geqq 2$ o společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$. Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha, \quad \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = y_\alpha. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq s-1;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Buď $2 \leqq s \leqq r$. Buď

$$y_0 = x_0,\ y_1 = x_1,\ \dots y_{s-1} = x_{s-1}, \tag{1}$$

takže $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$. Buď

$$\Gamma\{p(u)\} = \mathrm{Ass.}\, C\{x(u)\},\ \Gamma\{q(v)\} = \mathrm{Ass.}\, C\{y(v)\}.$$

Když a jen když

$$(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s) = 0, \tag{2}$$

mají osnovy $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ s-přímkový styk v $\{p(u_0)\}$. Buď $r \geqq s+1$; $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ nemohou míti $(s+1)$-přímkový styk v $\{p(u_0)\}$, když $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají právě s-bodový styk v $\{x_0\}$.

Buďte p, q dány opět výrazy **221** (1), takže platí rovnice **221** (3). Dle (1) a **221** (1) jest

$$\left(\frac{d^{s-1} q}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1} p}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0} = (x_0, y_s - x_s).$$

Dle **179** a **221** (3) mají tedy $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ s-přímkový styk v $\{p(u_0)\}$, když a jen když existují čísla λ_1, λ_2 taková, že

$$(x_0, y_s - x_s) = \lambda_1 (x_0 x_1) + \lambda_2 (x_0 x_2). \tag{3}$$

Uvážíme-li, že ar. body x_0, x_1, x_2 jsou lin. nezávislé dle definice poloregulární křivky, vidíme snadno, že rovnici (3) je vyhověno, když a jen když

$$y_s - x_s = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \tag{4}$$

což jest ekvivalentní s (2).

Předpokládejme nyní, že platí (4), tedy

$$\left(\frac{d^{s-1} q}{dv^{s-1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s-1} p}{du^{s-1}}\right)_{u=u_0} = \lambda_1 (x_0 x_1) + \lambda_2 (x_0 x_2) \tag{5}$$

a hledejme, zda je možno, aby $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ měly $(s+1)$-přímkový styk v $\{p(u_0)\}$. Buď nejprve $s \geqq 3$. Dle (5), **221** (3) a **179** pro $(s+1)$-přímkový styk osnov $\Gamma\{p\}$ a $\Gamma\{q\}$ v $\{p(u_0)\}$ je nutné a stačí, aby bylo lze určiti čísla μ a ν tak, aby bylo

$$\left(\frac{d^s q}{dv^s}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^s p}{du^s}\right)_{u=u_0} = \mu (x_0 x_1) + \nu (x_0 x_2) + (s+1) \lambda_2 [(x_0 x_3) + (x_1 x_2)]. \tag{6}$$

Dle (1) je však

$$(7)\qquad \left(\frac{d^s q}{dv^s}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^s p}{du^s}\right)_{u=u_0} = (x_0, y_{s+1} - x_{s+1}) + (s-1)(x_1, y_s - x_s).$$

Dle (6) jest

$$\left(x_0, \left(\frac{d^s q}{dv^s}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^s p}{du^s}\right)_{u=u_0}\right) = (s+1)\lambda_2 (x_0 x_1 x_2).$$

Dle (4) a (7) jest

$$\left(x_0, \left(\frac{d^s q}{dv^s}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^s p}{du^s}\right)_{u=u_0}\right) = (s-1)\lambda_2 (x_0 x_1 x_2).$$

Porovnáním obdržíme $\lambda_2 (x_0 x_1 x_2) = 0_r$; avšak $(x_0 x_1 x_2) \neq 0_r$, ježto $C\{x\}$ je poloregulární, tedy $\lambda_2 = 0$. Avšak když $\lambda_2 = 0$, plyne z (1), (4) a **179**, že $C\{x\}$ a $C\{y\}$ mají $(s+1)$-bodový styk v $\{x_0\}$. Buď nyní $s = 2$. Dle $\{5\}$ a **221** (3) jest

$$(8)\qquad q(v_0) = p(u_0),\ \left(\frac{dq}{dv}\right)_{v=v_0} = \lambda_1 p(u_0) + (\lambda_2 + 1)\left(\frac{dp}{du}\right)_{u=u_0} = \lambda_1 (x_0 x_1) + (\lambda_2 + 1)(x_0 x_2).$$

Jest $\lambda_2 + 1 \neq 0$, ježto ar. přímky $q(v_0)$ a $\left(\frac{dq}{dv}\right)_{v=v_0}$ jsou lin. nezávislé. Položme

$$(9)\qquad q_1(v_1) = \left(1 - \frac{\lambda_1 (v_1 - v_0)}{1+\lambda_2}\right) q\left[v_0 + \frac{v_1 - v_0}{1+\lambda_2}\right],$$

takže $\Gamma\{q(v)\} = \Gamma\{q_1(v_1)\}$. Dle (8) a (9) jest

$$(10)\qquad q_1(v_0) = p(u_0),\ \left(\frac{dq_1}{dv_1}\right)_{v_1=v_0} = \left(\frac{dp}{du}\right)_{u=u_0}.$$

Dle (10) a **179** mají $\Gamma\{q(v)\}$ a $\Gamma\{p(u)\}$ trojpřímkový styk v $\{p(u_0)\}$, když a jen když existují čísla μ_1 a ν_1 taková, že

$$\left(\frac{d^2 q_1}{dv_1^2}\right)_{v_1=v_0} - \left(\frac{d^2 p}{du^2}\right)_{u=u_0} = \mu_1 p(u_0) + \nu_1 \left(\frac{dp}{du}\right)_{u=u_0},$$

čili dle (8) a (9), když a jen když existují čísla μ, ν taková, že

$$\left(\frac{d^2 q}{dv^2}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^2 p}{du^2}\right)_{u=u_0} = \mu (x_0 x_1) + \nu (x_0 x_2).$$

Důkaz nyní pokračuje stejně jako v případě $s \geqq 3$.

Styk průmětů křivek.

223. Buď $C\{x_1(u)\}$ průmět křivky $C\{x(u)\}$ s bodu $\{z\}$ do roviny $\{\xi\}$. Bod $\{x_1(u_0)\}$ jest inflexní bod křivky $C\{x_1(u)\}$, když a jen když bod $\{z\}$ jest incidentní s oskulační rovinou křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$, tedy zejména (v. **196**) tehdy, když bod $\{x(u_0)\}$ jest inflexní pro $C\{x(u)\}$.

Zřejmě můžeme předpokládati, že

$$x_1(u) = Sz\xi \,.\, x(u) - S\xi x(u) \,.\, z, \tag{1}$$

z čehož vychází snadno

$$\left(x_1 \frac{dx_1}{du} \frac{d^2x_1}{du^2} z\right) = Sz\xi \left(x \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} z\right). \tag{2}$$

Ježto $Sz\xi \neq 0$ (v. **217**), stačí ukázati, že $\left(x_1 \frac{dx_1}{du} \frac{d^2x_1}{du^2}\right) = 0_r$, když a jen když $\left(x_1 \frac{dx_1}{du} \frac{d^2x_1}{du^2} z\right) = 0$. Je zřejmé, že $\left(x_1 \frac{dx_1}{du} \frac{d^2x_1}{du^2} z\right) = 0$, když $\left(x_1 \frac{dx_1}{du} \frac{d^2x_1}{du^2}\right) = 0_r$. Je-li však $\left(x_1 \frac{dx_1}{du} \frac{d^2x_1}{du^2}\right) \neq 0_r$, je zřejmě $\left(x_1 \frac{dx_1}{du} \frac{d^2x_1}{du^2}\right) = \lambda\xi$, $\lambda \neq 0$, tedy $\left(x_1 \frac{dx_1}{du} \frac{d^2x_1}{du^2} z\right) = \lambda Sz\xi \neq 0$.

224. Buď $C\{x(u)\}$ regulární křivka třídy $r \geqq 2$. Buď $\{\xi\}$ oskulační rovina křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Buďte $C\{\overset{1}{x}(u)\}$, $C\{\overset{2}{x}(u)\}$ průměty křivky $C\{x(u)\}$ do $\{\xi\}$ se dvou různých bodů: $\{z_1\}$, $\{z_2\}$ do roviny $\{\xi\}$, takže $\{\overset{1}{x}(u_0)\} = \{\overset{2}{x}(u_0)\} = 0$. Křivky $C\{\overset{1}{x}(u_1)\}$, $C\{\overset{2}{x}(u_2)\}$ mají v $\{x(u_0)\}$ trojbodový styk. Buď $r \geqq 3$; když a jen když spojnice tečny křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ a bodu $\{z_1\}$ obsahuje bod $\{z_2\}$, mají $C\{\overset{1}{x}\}$ a $C\{\overset{2}{x}\}$ v $\{x(u_0)\}$ čtyřbodový styk. Buď $r \geqq 4$; když a jen když body $\{z_1\}$, $\{z_2\}$, $\{x(u_0)\}$ jsou lin. závislé, mají $C\{\overset{1}{x}\}$ a $C\{\overset{2}{x}\}$ v $\{x(u_0)\}$ pětibodový styk. Buď $r \geqq 5$; křivky $C\{\overset{1}{x}\}$ a $C\{\overset{2}{x}\}$ nemohou míti v $\{x(u_0)\}$ šestibodový styk.

Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha, \qquad \left(0 \leq \alpha \leq r;\ \frac{d^0}{du^0} = 1\right) \tag{1}$$

takže $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) \neq 0$ a $\xi = (x_0\, x_1\, x_2)$. Ježto $Sz_i\xi \neq 0$ $(i = 1, 2)$, můžeme položiti

$$(2)\qquad z_i = \overset{i}{\lambda}_0 x_0 + \overset{i}{\lambda}_1 x_1 + \overset{i}{\lambda}_2 x_2 + x_3, \qquad (i = 1, 2)$$

takže můžeme zvoliti (v. **223** (1))

$$(3)\qquad \overset{i}{x}(u) = (x_0 x_1 x_2 x_3)\, x - (x_0 x_1 x_2 x)\, z_i. \qquad (i = 1, 2)$$

Z (1) a (3) vychází

$$(4)\qquad \left(\frac{d^\alpha \overset{1}{x}}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = \left(\frac{d^\alpha \overset{2}{x}}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = (x_0 x_1 x_2 x_3)\, x_\alpha. \qquad (\alpha = 0, 1, 2)$$

Dle (4) mají $C\{\overset{1}{x}\}$ a $C\{\overset{2}{x}\}$ trojbodový styk v $\{x_0\}$. Dle (4) a **179** mají křivky $C\{\overset{1}{x}\}$ a $C\{\overset{2}{x}\}$ v bodě $\{x_0\}$: 1^0 čtyřbodový styk, když a jen když existují čísla a_0, b_0 taková, že

$$(5)\qquad \left(\frac{d^3 (\overset{2}{x} - \overset{1}{x})}{du^3}\right)_{u=u_0} = (x_0 x_1 x_2 x_3)\,(a_0 x_1 + b_0 x_0);$$

2^0 pětibodový styk, když a jen když mimo to existují čísla a_1, b_1 taková, že

$$(6)\qquad \left(\frac{d^4 (\overset{2}{x} - \overset{1}{x})}{du^4}\right)_{u=u_0} = (x_0 x_1 x_2 x_3)\,[4a_0 x_2 + (a_1 + 4b_0)\, x_1 + b_1 x_0];$$

3^0 šestibodový styk, když a jen když mimo to existují čísla a_2, b_2 taková, že

$$(7)\qquad \left(\frac{d^5 (\overset{2}{x} - \overset{1}{x})}{du^5}\right)_{u=u_0} = 10a_0 \left(\frac{d^3 \overset{1}{x}}{du^3}\right)_{u=u_0} + (x_0 x_1 x_2 x_3)\,[5(a_1 + 2b_0)\, x_2 + (a_2 + 5b_1)\, x_1 + b_2 x_0].$$

Dle (1), (2) a (3) je však

$$\left(\frac{d^3 (\overset{2}{x} - \overset{1}{x})}{du^3}\right)_{u=u_0} = -(x_0 x_1 x_2 x_3)\,[(\overset{2}{\lambda}_0 - \overset{1}{\lambda}_0)\, x_0 + (\overset{2}{\lambda}_1 - \overset{1}{\lambda}_1)\, x_1 + (\overset{2}{\lambda}_2 - \overset{1}{\lambda}_2)\, x_2].$$

Porovnáním s (5) vidíme, že čtyřbodový styk nastane — v souhlase s theorémem — když a jen když $\overset{1}{\lambda}_2 = \overset{2}{\lambda}_2$, a že pak

$$(8)\qquad a_0 = -(\overset{2}{\lambda}_1 - \overset{1}{\lambda}_1), \quad b_0 = -(\overset{2}{\lambda}_0 - \overset{1}{\lambda}_0).$$

Když $\overset{1}{\lambda}_2 = \overset{2}{\lambda}_2$, vychází z (1), (2) a (3)

$$\left(\frac{d^4 (\overset{2}{x} - \overset{1}{x})}{du^4}\right)_{u=u_0} = -(x_0 x_1 x_2 x_4)\,[(\overset{2}{\lambda}_0 - \overset{1}{\lambda}_0)\, x_0 + (\overset{2}{\lambda}_1 - \overset{1}{\lambda}_1)\, x_1].$$

Porovnáním s (6) vidíme, že pětibodový styk nastane — v souhlase s theorémem — když a jen když $\overset{1}{\lambda}_2 = \overset{2}{\lambda}_2$, $\overset{1}{\lambda}_1 = \overset{2}{\lambda}_1$, a že pak

(9) $$a_0 = 0, \quad a_1 + 4b_0 = 0.$$

Když $\overset{1}{\lambda}_2 = \overset{2}{\lambda}_2$, $\overset{1}{\lambda}_1 = \overset{2}{\lambda}_1$, vychází z (2) a (3)

(10) $$\left(\frac{d^5(\overset{2}{x} - \overset{1}{x})}{du^5}\right)_{u=u_0} = -(x_0\, x_1\, x_2\, x_3)\,(\overset{2}{\lambda}_0 - \overset{1}{\lambda}_0)\, x_0.$$

Kdyby nastal šestibodový styk, bylo by lze dle (7) a (9) určiti a_2, b_2 tak, aby

$$\left(\frac{d^5(\overset{2}{x} - \overset{1}{x})}{du^5}\right)_{u=u_0} = (x_0\, x_1\, x_2\, x_3)\,[-10b_0\, x_2 + (a_2 + 5b_1)\, x_1 + b_2 x_0].$$

Dle (10) bylo by pak, ježto $(x_0\, x_1\, x_3) \neq 0$,: $b_0 = 0$, t. j. dle (8) bylo by $\overset{1}{\lambda}_i = \overset{2}{\lambda}_i$ $(i = 0, 1, 2)$, tedy $\overset{1}{z} = \overset{2}{z}$; to je nemožné, když body $\{z_1\}$, $\{z_2\}$ jsou různé.

225. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě křivky třídy r, mající ve společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$ právě s-bodový $(1 \leqq s \leqq r)$ styk. Buď $\{z\}$ pevný bod; buď $\{\xi\}$ pevná rovina; buď $Sz\xi \neq 0$. Buďte $C\{x'(u)\}$, $C\{y'(v)\}$ průměty křivek $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ s bodu $\{z\}$ do roviny $\{\xi\}$. $C\{x'(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ mají v $\{x'(u_0)\}$ s-bodový styk. Existuje rovina $\{\zeta\}$, jež je tečnou rovinou v $\{x(u_0)\}$ i pro křivku $C\{x(u)\}$ i pro křivku $C\{y(v)\}$, a jež má tuto vlastnost: Když a jen když bod $\{z\}$ jest incidentní se $\{\zeta\}$, mají křivky $C\{x'(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ $(s+1)$-bodový styk v $\{x'(u_0)\}$. Pravíme, že $\{\zeta\}$ jest rovina $(s+1)$-bodového styku křivek $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$.

Buď

$$x_\alpha = \left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0}, \quad y_\alpha = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Je-li

(1) $$x_\alpha = y_\alpha, \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

jest

(2) $$\{\zeta\} = \mathrm{Adj.}\,\{x_0, x_1, y_s - x_s\}.$$

Dle **178** můžeme předpokládati, že platí (1). Jako ve **223**, buď

(3) $$\begin{aligned} x'(u) &= x(u)\, Sz\xi - zSx(u)\,\xi, \\ y'(v) &= y(v)\, Sz\xi - zSy(v)\,\xi. \end{aligned}$$

Z (1) a (3) plyne, že

$$(4)\qquad \left(\frac{d^\alpha y'}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = \left(\frac{d^\alpha x'}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha Sz\xi - zSx_\alpha\xi. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

Dle **178** mají tedy vždy $C\{x'\}$ a $C\{y'\}$ s-bodový styk v $\{x'(u_0)\}$. Dle (4) a **179** mají $C\{x'\}$ a $C\{y'\}$ $(s+1)$-bodový styk v $\{x'(u_0)\}$, když a jen když existují čísla a_0, b_0 taková, že

$$(5)\qquad \left(\frac{d^s y'}{dv^s}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^s x'}{du^s}\right)_{u=u_0} = (a_0 x_1 + b_0 x_0)\, Sz\xi - zS(a_0 x_1 + b_0 x_0)\,\xi.$$

Dle (3) je však

$$\left(\frac{d^s y'}{dv^s}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^s x'}{du^s}\right)_{u=u_0} = (y_s - x_s)\, Sz\xi - zS(y_s - x_s)\,\xi.$$

Je tedy pro $(s+1)$-bodový styk křivek $C\{x'\}$ a $C\{y'\}$ v bodě $\{x'(u_0)\}$ nutná a postačující existence čísel a_0, b_0 takových, že

$$(6)\qquad (y_s - x_s - a_0 x_1 - b_0 x_0)\, Sz\xi = zS(y_s - x_s - a_0 x_1 - b_0 x_0)\,\xi.$$

Ježto $Sz\xi \neq 0$, jest ar. bod na levo v (6) vlastní; neboť jinak by měly dle (1) a dle **179** $C\{x\}$ a $C\{y\}$ proti předpokladu $(s+1)$-bodový styk v $\{x_0\}$. Je tedy napravo koeficient při $z \neq 0$, takže

$$(7)\qquad \{z\} = \{y_s - x_s - a_0 x_1 - b_0 x_0\},$$

což zřejmě praví, že $\{z\}$ jest incidentní s rovinou (2). Naopak, když $\{z\}$ je incidentní s (ζ), lze vyhověti rovnici (7), zřejmě ekvivalentní s (6); neboť jinak by bylo $(x_0\, x_1\, z) = 0$, a nemohli bychom mluviti o průmětu křivky $C\{x\}$ s bodu $\{z\}$ (v. **214** a **217**). Platí-li (7), můžeme zřejmě bez újmy obecnosti předpokládati, že

$$(8)\qquad z = y_s - x_s - a_0 x_1 - b_0 x_0.$$

226. Buď $\{x_0\} = \{x(u_0)\}$ bod křivky $C\{x(u)\}$ třídy r. Buď $C^\alpha = C[\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r \dots \overset{k}{P}_r]$ algebraická křivka, jež obsahuje $\{x_0\}$ jako nesingulární bod a má v $\{x_0\}$ právě s-bodový $(1 \leqq s \leqq r)$ styk s $C\{x(u)\}$. Buď P_r rovinová forma o těchto třech vlastnostech: 1° P_r jest lin. závislá na $\overset{1}{P}_r, \overset{2}{P}_r \dots \overset{k}{P}_r$ vzhledem k $\{x_0\}$; 2° P_r a $C\{x(u)\}$ mají v $\{x_0\}$ $(s+1)$-bodový styk; 3° existuje aspoň jeden ar. bod X, jehož polára $[P_r;\, X]$ vzhledem k P_r není incidentní s $\{x_0\}$. Pak množství ar. bodů z, jichž poláry $[P_r;\, z]$ vzhledem k P_r jsou incidentní s $\{x_0\}$, jest pole ar. bodů adjungované k rovině $(s+1)$-bodového styku křivky $C\{x(u)\}$ a algebraické křivky C^a v bodě $\{x_0\}$.

Buď $C\{y(v)\}$ křivka, jež splyne s C^a v okolí bodu $\{x_0\} = \{y(v_0)\}$. Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha, \quad \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = y_\alpha. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq r)$$

Ježto $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$, můžeme předpokládati, že

$$x_\alpha = y_\alpha. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1) \tag{1}$$

Dle **225** máme ukázati, že

$$S[P_r; z]\, x_0 = 0, \tag{2}$$

když a jen když z náleží do $\{x_0, x_1, y_s - x_s\}$. Množství S ar. bodů splňujících (2) je zřejmě lin. systém. Dle třetí vlastnosti nadrovinové formy P_r dimense S jest $\leqq 2$. Dle **175** a dle druhé vlastnosti formy P_r ar. body x_0 a x_1 náležejí do S. Zbývá tedy pouze ukázati, že také $y_s - x_s$ náleží do S, t. j. že

$$S[P_r; y_s - x_s]\, x_0 = 0. \tag{3}$$

Dle prvé vlastnosti formy P_r jest identicky

$$SP_r y(v) = 0,$$

zejména tedy

$$\left[\frac{d^s}{dv^s} SP_r y(v)\right]_{v=v_0} = 0. \tag{4}$$

Dle druhé vlastnosti formy P_r je však

$$\left[\frac{d^s}{du^s} SP_r x(u)\right]_{u=u_0} = 0; \tag{5}$$

mimo to jest dle (1)

$$\left[\frac{d^s}{dv^s} SP_r y(v)\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^s}{du^s} SP_r x(u)\right]_{u=u_0} = S[P_r; y_s - x_s]\, x_0. \tag{6}$$

Ze (4), (5) a (6) následuje (3).

227. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě křivky třídy $r \geqq 3$ mající ve společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$ právě s-bodový $(2 \leqq s \leqq r-1)$ styk. Buď $\{z\}$ pevný bod; buď $\{\xi\}$ pevná rovina; buď $Sz\xi \neq 0$. Buďte $C\{x'(u)\}$, $C\{y'(v)\}$ průměty křivek $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$, s bodu $\{z\}$ do roviny $\{\xi\}$. Rovina $(s+1)$-bodového styku křivek $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ nebuď oskulační rovinou křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Existuje řada bodová S, jež obsahuje $\{x(u_0)\}$ a má tuto vlastnost: Když a jen když $\{z\}$ náleží do S, mají křivky $C\{x'(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ $(s+2)$-bodový styk v $\{x'(u_0)\}$. Přímka soumístná s S nazývá se přímkou $(s+2)$-bodového styku křivek $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Buď

$$x_\alpha = \left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0}, \quad y_\alpha = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Je-li

(1) $$x_\alpha = y_\alpha, \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq s-1;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

jest

(2) $$S = \{x_0, (x_0, x_1, y_s - x_s, y_{s+1} - x_{s+1})\, x_1 + (s+1)(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s)(y_s - x_s)\}.$$

Užijme předpokladů a označení z **225**. Aby $C\{x'(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ měly v $\{x(u_0)\}$ $(s+2)$-bodový styk, musí míti v tomto bodě $(s+1)$-bodový styk; dle **225** (8) můžeme tedy předpokládati, že

(3) $$z = y_s - x_s - a_0 x_1 - b_0 x_0.$$

Platí pak rovnice **225** (4) a (5), takže dle **179** $C\{x'(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ mají v $\{x'(u_0)\}$ $(s+2)$-bodový styk, když a jen když existují čísla a_1, b_1 taková, že

(4) $$\left(\frac{d^{s+1} y}{dv^{s+1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s+1} x}{du^{s+1}}\right)_{u=u_0} =$$

$$= [(s+1)(a_0 x_2 + b_0 x_1) + a_1 x_1 + b_1 x_0]\, Sz\xi - zS\,[(s+1)(a_0 x_2 + b_0 x_1) + a_1 x_1 + b_1 x_0]\,\xi.$$

Dle **225** (3) je však

$$\left(\frac{d^{s+1} y'}{dv^{s+1}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s+1} x'}{du^{s+1}}\right)_{u=u_0} = (y_{s+1} - x_{s+1})\, Sz\xi - zS\,(y_{s+1} - x_{s+1})\,\xi.$$

Srovnáním obdržíme podmínku

(5) $$XSz\xi - zSX\xi = 0,$$

kde

(6) $$X = y_{s+1} - x_{s+1} - (s+1)(a_0 x_2 + b_0 x_1) - a_1 x_1 - b_1 x_0.$$

Rovnice (5) je splněna, když a jen když $\{X\} = \{z\}$; zřejmě je však při vhodné volbě čísel a_1, b_1 $\{X\} = \{z\}$, když a jen když

$$(x_0, x_1, z, X) = 0,$$

což se dá psáti dle (3) a (6)

(7) $$\left(x_0, x_1, y_s - x_s, y_{s+1} - x_{s+1} - (s+1)\, a_0 x_2\right) = 0.$$

Ježto dle předpokladu rovina $(s+1)$-bodového styku křivek $C\{x\}$

a $C\{y\}$ v $\{x(u_0)\}$ není oskulační rovinou pro $C\{x\}$ v $\{x(u_0)\}$, jest dle **225** $(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s) \neq 0$. Ze (7) obdržíme tedy

$$a_0 = -\frac{1}{(s+1)} \frac{(x_0, x_1, y_s - x_s, y_{s+1} - x_{s+1})}{(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s)}. \tag{8}$$

Ze (3) a (8) vychází, že $C\{x'\}$ a $C\{y'\}$ mají v $\{x'(u_0)\}$ $(s+2)$-bodový styk, když a jen když $\{z\}$ náleží do řady bodové S, určené ve (2), čímž teorém je dokázán.

Ježto ar. body $x_0, x_1, x_2, y_s - x_s$ jsou lin. nezávislé, můžeme položiti

$$y_{s+1} - x_{s+1} = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 (y_s - x_s). \tag{9}$$

Z (9) se snadno nalezne, že

$$\lambda_1 = \frac{(x_0, x_2, y_s - x_s, y_{s+1} - x_{s+1})}{(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s)}, \quad \lambda_3 = \frac{(x_0, x_1, x_2, y_{s+1} - x_{s+1})}{(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s)}. \tag{10}$$

Mají-li průměty $(s+2)$-bodový styk, existuje λ takové, že $X = \lambda z$, jak jsme výše viděli. Dle (3) a (6) je tedy

$$y_{s+1} - x_{s+1} = \lambda (y_s - x_s - a_0 x_1 - b_0 x_0) + (s+1)(a_0 x_2 + b_0 x_1) + a_1 x_1 + b_1 x_0.$$

Porovnáním s (9) vychází

$$\lambda_1 = -a_0 \lambda + (s+1) b_0 + a_1, \quad \lambda_3 = \lambda.$$

Jest tedy a_1 určeno rovnicí

$$(s+1) b_0 + a_1 = \lambda_1 + a_0 \lambda_3, \tag{11}$$

při čemž hodnoty $a_0, \lambda_1, \lambda_3$, jsou udány v (8) a (10).

228. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě křivky třídy $r \geqq 3$ mající ve společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$ právě s-bodový $(1 \leqq s \leqq r-1)$ styk. Buď $\{z\}$ pevný bod; buď $\{\xi\}$ pevná rovina; buď $Sz\xi \neq 0$. Buďte $C\{x'(u)\}$, $C\{y'(v)\}$ průměty křivek $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ s bodu $\{z\}$ do roviny $\{\xi\}$. Rovina $\{\zeta\}$ $(s+1)$-bodového styku křivek $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ buď oskulační rovinou křivky $C\{x(u)\}$ v tomto bodě. Je-li $\{z\}$ incidentní s $\{\zeta\}$, mají křivky $C\{x'(u)\}$, $C\{y'(v)\}$ buď 1° právě $(s+1)$-bodový, nebo 2° $(s+2)$-bodový styk. Který z obou případů nastane, nezávisí na tom, jak zvolíme z v Adj. $\{\zeta\}$. Buď

$$\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} = x_\alpha, \quad \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} = y_\alpha. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Je-li

(1) $$x_\alpha = y_\alpha, \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

nastane případ 2°, když a jen když

(2) $$(x_0, x_1, y_s - x_s, y_{s+1} - x_{s+1}) = 0.$$

Postupujíce jako ve **227** obdržíme opět pro $(s+2)$-bodový styk průmětů rovnici **227** (7), jež v našem případě redukuje se na (2).

229. Buďte $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ dvě křivky třídy $r \geqq 5$, mající ve společném bodě $\{x(u_0)\} = \{y(v_0)\}$ právě s-bodový $(3 \leqq s \leqq r-2)$ styk. Buď $\{z\}$ pevný bod; buď $\{\xi\}$ pevná rovina; buď $Sz\xi \neq 0$. Buďte $C\{x'(u)\}$, $C\{y'(v)\}$ průměty křivek $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ s bodu $\{z\}$ do roviny $\{\xi\}$. Rovina $(s+1)$-bodového styku křivek $C\{x(u)\}$, $C\{y(v)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ nebuď oskulační rovinou křivky $C\{x(u)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Existuje jeden a jen jeden bod $\{z_0\}$ takový, že $C\{(x'(u)\}$ a $C\{y'(v)\}$ mají $(s+3)$-bodový styk v $\{x'(u_0)\}$. Tento bod $\{z_0\}$ nazývá se bod $(s+3)$-bodového styku křivek $C\{x(u)\}$ a $C\{y(v)\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$. Buď

$$x_\alpha = \left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0}, \quad y_\alpha = \left(\frac{d^\alpha y}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0}. \qquad \left(0 \leqq \alpha \leqq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Je-li

(1) $$x_\alpha = y_\alpha, \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

jest $\{z_0\}$ bod $(s+3)$-bodového styku křivek $C\{x\}$ a $C\{y\}$ v $\{x(u_0)\}$, když

$$z_0 = (x_0, x_1, x_2, y_s - x_s)^2 (y_s - x_s) + \frac{1}{s+1}(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s)(x_0, x_1, y_s - x_s, y_{s+1} - x_{s+1})\, x_1 +$$
$$+ \left\{\frac{1}{(s+1)^2}(x_0, x_1, y_s - x_s, y_{s+1} - x_{s+1})\,[2\,(x_0, x_1, x_2, y_{s+1} - x_{s+1}) + (s+1)(x_0, x_1, x_3, y_s - x_s)] - \right.$$

(2) $$- \frac{2}{s+1}(x_0, x_1, x_2, y_s - x_s)\,[(x_0, x_2, y_s - x_s, y_{s+1} - x_{s+1}) +$$
$$\left. + \frac{1}{s+2}(x_0, x_1, y_s - x_s, y_{s+2} - x_{s+2})]\right\} x_0.$$

Podržme předpoklady a označení z **225** a **227**. Zejména tedy nechť platí rovnice **225** (4), (5) a **227** (4), takže dle **179** mají $C\{x'\}$ a $C\{y'\}$ $(s+3)$-bodový styk v $\{x'(u_0)\}$, když a jen když

$$\left(\frac{d^{s+2} y'}{dv^{s+2}}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^{s+2} x'}{du^{s+2}}\right)_{u=u_0} =$$
$$= \left[\binom{s+2}{2}(a_0 x_3 + b_0 x_2) + (s+2)(a_1 x_2 + b_1 x_1) + a_2 x_1 + b_2 x_0\right] Sz\xi -$$
$$- zS\left[\binom{s+2}{2}(a_0 x_3 + b_0 x_2) + (s+2)(a_1 x_2 + b_1 x_1) + a_2 x_1 + b_2 x_0\right]\xi.$$

Dle **225** (3) je však

$$\left(\frac{d^{s+2}y}{dv^{s+2}}\right)_{v=v_0}-\left(\frac{d^{s+2}x}{du^{s+2}}\right)_{u=u_0}=(y_{s+2}-x_{s+2})\,Sz\xi-zS(y_{s+2}-x_{s+2})\,\xi.$$

Srovnáním obdržíme podmínku

$$YSz\xi-zSY\xi=0, \tag{3}$$

kde

$$Y=y_{s+2}-x_{s+2}-\binom{s+2}{2}(a_0x_3+b_0x_2)-(s+2)(a_1x_2+b_1x_1)-(a_2x_1+b_2x_0). \tag{4}$$

Rovnice (3) je splněna, když a jen když $\{Y\}=\{z\}$; zřejmě je však při vhodné volbě čísel a_2, b_2 $\{Y\}=\{z\}$, když a jen když

$$(x_0,x_1,z,Y)=0,$$

což se dá psáti dle (4) a **227** (3)

$$\left(x_0,\,x_1,\,y_s-x_s,\,y_{s+2}-x_{s+2}-\binom{s+2}{2}a_0x_3-(s+2)\left(a_1+\frac{s+1}{2}b_0\right)x_2\right)=0. \tag{5}$$

Ježto ar. body x_0, x_1, x_2, y_s-x_s jsou lin. nezávislé, můžeme psáti

$$\begin{aligned} x_3&=c_0x_0+c_1x_1+c_2x_2+c_3(y_s-x_s),\\ y_{s+2}-x_{s+2}&=\mu_0x_0+\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3(y_s-x_s); \end{aligned} \tag{6}$$

snadno se nalezne, že

$$c_2=\frac{(x_0,x_1,x_3,y_s-x_s)}{(x_0,x_1,x_2,y_s-x_s)},\quad \mu_2=-\frac{(x_0,x_1,y_s-x_s,y_{s+2}-x_{s+2})}{(x_0,x_1,x_2,y_s-x_s)}. \tag{7}$$

Dosadíme-li z (6) do (5), obdržíme

$$\mu_2-\binom{s+2}{2}a_0c_2-(s+2)\left(a_1+\frac{s+1}{2}b_0\right)=0. \tag{8}$$

To jest podmínka pro $(s+3)$-bodový styk průmětů; ovšem a_0, a_1 nejsou libovolné, nýbrž jsou určeny rovnicemi **227** (8) a (11). Eliminujíce a_1 z (8) a **227** (11), obdržíme snadno

$$b_0=a_0c_2+\frac{2}{s+1}(\lambda_1+a_0\lambda_3)-\frac{2}{(s+1)(s+2)}\mu_2. \tag{9}$$

Bod $(s+3)$-bodového styku křivek $C\{x\}$ a $C\{y\}$ v bodě $\{x(u_0)\}$ je tedy $\{y_s-x_s-a_0x_1-b_0x_0\}$, kde a_0, b_0 jsou určeny rovnicemi (9) a **227** (8) Dosadíme-li do (9) za c_2, μ_2; λ_1, λ_3 ze (7) a **227** (10), obdržíme konečně (2).

Oblasti a obory.

230. Buď m opět libovolné. Množství M ar. bodů nazývá se ohraničené, existuje-li kladné číslo A takové, že $|x^{(i)}| < A$ pro každý ar. bod x z M.

Množství M ar. bodů nazývá se otevřené, obsahuje-li aspoň jeden ar. bod a lze-li ke každému ar. bodu x z M udati okolí V_x obsažené v M. Zřejmě otevřené množství ar. bodů obsahuje nekonečně mnoho ar. bodů.

Pravíme, že množství M ar. bodů lze rozložiti ve dvě množství M_1 a M_2, když: 1^0 jak M_1, tak M_2 obsahuje aspoň jeden ar. bod, 2^0 M_1 a M_2 jsou obsaženy v M, 3^0 M_1 a M_2 nemají společných ar. bodů, 4^0 každý ar. bod z M náleží buď do M_1 nebo do M_2.

Množství ar. bodů nazývá se oblast, když: 1^0 jest ohraničené, 2^0 jest otevřené, 3^0 nedá se rozložiti ve dvě otevřená množství. Oblasti označujeme obvykle O, O_1, O' atd.

231. Okolí ar. bodu jest oblast.

Buď V okolí ar. bodu x určené číslem ε. Zřejmě V jest ohraničené otevřené množství. Předpokládejme, že by bylo lze rozložiti V ve dvě otevřená množství V_1, V_2. Nechť x náleží na př. do V_1. Ježto V_1 jest otevřené množství, okolí ar. bodu x určené číslem η jest obsaženo ve V_1, když η je dosti malé; buď η_0 horní hranice množství takových η; zřejmě jest $0 < \eta_0 < \varepsilon$. Buď $\varepsilon > \omega_1 > \omega_2 > \ldots \omega_n > \ldots$ a $\omega_n \to \eta_0$. Ježto $\omega_n > \eta_0$, obsahuje okolí ar. bodu x určené číslem ω_n aspoň jeden ar. bod z V_2; buď y_n takový ar. bod. Můžeme předpokládati, že posloupnosti $y_1^{(i)}, y_2^{(i)} \ldots y_n^{(i)} \ldots (i = 0, 1 \ldots m)$ mají limity — jinak bychom vybrali částečnou posloupnost. Buď tedy $y_n^{(i)} \to z^{(i)}$. Ar. bod z náleží do V a jest patrně

$$|z^{(i)} - x^{(i)}| \leqq \eta_0. \qquad (i = 0, 1 \ldots m) \tag{1}$$

Z definice η_0 a z (1) vychází ihned, že v každém okolí ar. bodu z jsou ar. body z V_1; nenáleží tedy z do V_2, neboť V_2 jest otevřené množství. Na druhé straně kterékoli okolí ar. bodu z obsahuje y_n, je-li n dosti veliké; nenáleží tedy z ani do V_1. To je spor, neboť z náleží do V.

232. Buď O ohraničené otevřené množství. O jest oblast, když a jen když ke každému páru x, y ar. bodů z O lze udati konečný počet ar. bodů $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ z O tak, že, klademe-li $x_0 = x$, $x_n = y$, existuje pro $\alpha = 0, 1 \ldots n-1$ okolí V_α ar. bodu x_α obsažené v O a obsahující $x_{\alpha+1}$.

Ukažme nejprve, že podmínka jest nutná: že totiž, není-li splněna, lze rozložiti O ve dvě otevřená množství O_1 a O_2. Buď x, y takový pár ar. bodů z O, pro nějž podmínka splněna není. Buď O_1 (O_2) množství takových ar. bodů z z O, že podmínka jest (není) splněna pro pár x, z. O_1 (O_2) obsahuje aspoň jeden ar. bod, totiž $x(y)$. Zřejmě O_1 a O_2 jsou otevřená množství. Tedy O není oblast.

Ukažme za druhé, že podmínka stačí. Kdyby tomu tak nebylo, bylo by lze — i když podmínka je splněna pro každý pár x, y ar. bodů z O — rozložiti O ve dvě otevřená množství O_1 a O_2. Zvolme x v O_1, y v O_2, určeme dle podmínky ar. body $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ a položme $x_0 = x$, $x_n = y$. Zřejmě existuje takový index α, že x_α náleží do O_1 a $x_{\alpha+1}$ do O_2. Buď V_α okolí ar. bodu x_α obsažené v O a obsahující $x_{\alpha+1}$. Buď $V'(V'')$ průřez množství V_α a $O_1(O_2)$. Zřejmě $V'(V'')$ obsahuje aspoň jeden ar. bod, totiž $x_\alpha(x_{\alpha+1})$; zřejmě V' a V'' jsou otevřená množství. Lze tedy V rozložiti ve dvě otevřená množství V' a V''. To je však nemožné dle **231.**

233. Buď O oblast. Ar. bod x nazývá se okrajový ar. bod oblasti O, když: 1° x nenáleží do O, 2° každé okolí ar. bodu x obsahuje ar. body z O. Množství všech okrajových ar. bodů oblasti O nazývá se okraj oblasti O. Okraj oblasti O obsahuje nekonečně mnoho ar. bodů. Množství těch ar. bodů, jež náležejí buď do oblasti O nebo do okraje oblasti O, nazývá se obor určený oblastí O; označení $[O]$.

Že okraj oblasti O obsahuje nekonečně mnoho ar. bodů, dokáže se velmi snadno. Buď y ar. bod z O, buď $\varepsilon > 0$ číslo určující okolí ar. bodu y obsažené v O. Pak ar. bod

(1) $$|y^{(0)} + \varepsilon', y^{(1)} + \varepsilon'', y^{(2)} \dots y^{(m)}|_b$$

náleží do O, kdykoli ε' a ε'' jsou v $\langle -\varepsilon + 0, \varepsilon - 0 \rangle$. Zvolme ε' jakkoli v $\langle -\varepsilon + 0, \varepsilon - 0 \rangle$; buď $\varphi(\varepsilon')$ horní hranice množství takových ε'', že ar. bod (1) náleží do O. Zřejmě

$$|y^{(0)} + \varepsilon', y^{(1)} + \varphi(\varepsilon'), y^{(2)} \dots y^{(m)}|_b$$

jest okrajový ar. bod oblasti O.

Funkce třídy r.

234. Buď O oblast. Buď $\varphi(u_0, u_1 \dots u_m)$ funkce definovaná, kdykoli ar. bod $|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ náleží do O. Pravíme, že φ je třídy 0 v O, je-li spojitá v každém ar. bodě z O. Pravíme, že φ je třídy $r \geq 1$ (třídy ∞) v O, má-li v každém ar. bodě z O všecky parciální derivace řádu $\leq r$ (všecky parciální derivace) a jsou-li tyto parciální derivace třídy 0 v O.

Připomeňme si, že při $r \geq 2$ platí věta o záměnnosti pořádku derivování, ježto derivace, jichž existenci předpokládáme, jsou spojité. Zřejmě každá derivace řádu s $(1 \leq s \leq r)$ funkce třídy r v O jest funkce třídy $r - s$ v O.

235. Buď $[O]$ obor určený oblastí O. Buď $\varphi(u_0, u_1 \dots u_m)$ funkce definovaná, kdykoli ar. bod $|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ náleží do $[O]$. Pravíme, že φ je třídy 0 v $[O]$, je-li spojitá v každém ar. bodě z $[O]$. Pravíme, že φ je třídy $r \geq 1$ (třídy ∞) v $[O]$, když: 1^0 φ je třídy r (třídy ∞) v O, 2^0 ke každému okrajovému ar. bodu x oblasti O lze určiti okolí V a funkci $\psi(u_0, u_1 \dots u_m)$ třídy r (třídy ∞) ve V tak, že $\varphi(u_0, u_1 \dots u_m) = \psi(u_0, u_1 \dots u_m)$, kdykoli ar. bod $|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ náleží do průřezu množství $[O]$ a V. Za derivaci

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial u_0^{\alpha_0} \partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}} \qquad (\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq r)$$

funkce φ v ar. bodě x považujeme pak příslušnou derivaci

$$\frac{\partial^\alpha \psi}{\partial u_0^{\alpha_0} \partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}}$$

v tomto ar. bodě.

Snadno se vidí, že k definici derivací funkce φ v okrajovém ar. bodě x jsme oprávněni, že totiž, má-li funkce $\bar{\psi}(u_0, u_1 \dots u_m)$, vzhledem k ar. bodu x touž vlastnost jako $\psi(u_0, u_1 \dots u_m)$, jest pro $u_0 = x^{(0)}$, $u_1 = x^{(1)}, \dots u_m = x^{(m)}$

$$(1) \qquad \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial u_0^{\alpha_0} \partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^\alpha \bar{\psi}}{\partial u_0^{\alpha_0} \partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}}.$$

Obě strany rovnice (1) jsou totiž funkce třídy 0 ve V*), ježto ψ a $\bar{\psi}$ jsou třídy r ve V; mimo to, když ar. bod $|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ jest v průřezu množství O a V, platí (1), neboť obě strany jsou pak zřejmě rovny

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial u_0^{\alpha_0} \partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_m^{\alpha_m}}.$$

Ježto však x je okrajový ar. bod oblasti O, existují posloupnosti $\overset{1}{u}_0, \overset{2}{u}_0 \dots$; $\overset{1}{u}_1, \overset{2}{u}_1 \dots$; $\overset{1}{u}_m, \overset{2}{u}_m \dots$ takové, že 1^0 ar. bod $|\overset{n}{u}_0, \overset{n}{u}_1 \dots \overset{n}{u}_m|_b$ $(n = 1, 2 \dots)$ náleží do průřezu V s O, takže (1) platí pro $u_0 = \overset{n}{u}_0$, $u_1 = \overset{n}{u}_1, \dots u_m = \overset{n}{u}_m$,

*) Zřejmě můžeme předpokládati, že ψ a $\bar{\psi}$ jsou definovány v témž okolí V ar. bodu. x.

2^0 $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{n}{u_i} = x^{(i)}$ $(i=0, 1 \ldots m)$. Ježto ψ a $\overline{\psi}$ jsou třídy 0 ve V, vidíme přechodem k limitě, že (1) platí též v ar. bodě x. Týž úsudek ukazuje, že rovnost

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial u_0^{\alpha_0} \partial u_1^{\alpha_1} \ldots \partial u_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial u_0^{\alpha_0} \partial u_1^{\alpha_1} \ldots \partial u_m^{\alpha_m}}$$

platí netoliko v ar. bodě x, nýbrž v každém ar. bodě z průřezu oboru $[O]$ s okolím V. Odtud snadno vidíme, že 1^0 když $r > 1$, věta o záměnnosti pořádku derivování platí pro funkci φ v každém ar. bodě oboru $[O]$, 2^0 každá derivace řádu s $(1 \leq s \leq r)$ funkce třídy r v $[O]$ jest funkce třídy $r - s$ v $[O]$.

236. Je-li $x = |u_0, u_1 \ldots u_m|_b$ proměnný ar. bod, omezený eventuelně na oblast O nebo na obor $[O]$, je často výhodné uvažovati posloupnost libovolně proměnných ar. bodů, jež označujeme zpravidla

$$dx = |\, du_0,\ du_1, \ldots du_m|_b,$$
$$d^2x = |d^2u_0,\ d^2u_1, \ldots d^2u_m|_b,$$
$$d^3x = |d^3u_0,\ d^3u_1, \ldots d^3u_m|_b,$$

a jmenujeme prvý, druhý, třetí ... diferenciál ar. bodu x. Při tom je třeba zdůrazniti, že proměnné

$$du_0,\ du_1, \ldots du_m;\ d^2u_0,\ d^2u_1 \ldots d^2u_m;\ d^3u_0,\ d^3u_1 \ldots d^3u_m;\ \ldots\ldots$$

jsou nezávislé navzájem a nezávislé na proměnných $u_0, u_1 \ldots u_m$; dále, že mohou nabývati zcela libovolných hodnot, i když proměnné $u_0, u_1 \ldots u_m$ jsou omezeny na oblast O nebo na obor $[O]$.

Buď nyní $\varphi(u_0, u_1 \ldots u_m)$ funkce třídy $r \geq 1$ v oblasti O (v oboru $[O]$). Prvý, druhý, ... r-tý diferenciál funkce φ — jež označujeme zpravidla $d\varphi, d^2\varphi, \ldots d^r\varphi$ — definujeme pak takto: Prvý diferenciál $d\varphi$ definujeme přímo formulí

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u_0} du_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_m} du_m. \tag{1}$$

Z (1) vycházejí ihned pravidla

$$d(\varphi_1 + \varphi_2) = d\varphi_1 + d\varphi_2,\ d(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_2 d\varphi_1 + \varphi_1 d\varphi_2,\ d(\varphi^n) = n\varphi^{n-1} d\varphi, \tag{2}$$

z nichž lze snadno utvořiti pravidlo pro sestrojení diferenciálu funkce, vytvořené sčítáním, násobením a umocňováním z funkcí, jichž diferenciály jsou dány. Nyní definujeme pro $1 \leq s < r$ $(s+1)^{\text{tý}}$ diferenciál $d^{s+1}\varphi$ funkce φ indukcí takto; s-tý diferenciál $d^s\varphi$ je vytvořen sčítáním, násobením a umocňováním z derivací funkce φ a z $du_0, du_1 \ldots du_m$; $d^2u_0, d^2u_1 \ldots d^2u_m$; $\ldots$; $d^s u_0, d^s u_1 \ldots d^s u_m$; $(s+1)^{\text{tý}}$ diferenciál obdržíme dle pravidel (2) jako $d(d^{\iota}\varphi)$, při čemž klademe

$$d(d^{\alpha}u_i) = d^{\alpha+1}u_i. \qquad (\alpha = 1, 2, 3 \ldots; \; i = 0, 1 \ldots m)$$

Tak obdržíme na př. pro $r \geqq 2$

$$(3) \qquad d^2\varphi = \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} d^2u_i + \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_k} du_i du_k;$$

pro $r \geqq 3$

$$(4) \quad d^3\varphi = \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} d^3u_i + 3 \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_k} du_i d^2u_k + \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \frac{\partial^3\varphi}{\partial u_i \partial u_k \partial u_l} du_i du_k du_l.$$

Jsou-li $f_0(t), f_1(t) \ldots f_m(t)$ funkce třídy r proměnné t v intervalu $\langle a, b \rangle$, takové, že pro každé t z $\langle a, b \rangle$ ar. bod $|f_0(t), f_1(t), \ldots f_m(t)|_b$ náleží do oblasti O (oboru $[O]$), a dosadíme-li do funkce $\varphi(u_0, u_1 \ldots u_m)$ třídy r v O (v $[O]$) za $u_0, u_1 \ldots u_m$ resp. $f_0(t), f_1(t) \ldots f_m(t)$, přejde φ ve $\Phi(t)$, kde

$$\Phi(t) = \varphi\,[f_0(t), f_1(t), \ldots f_m(t)].$$

Z diferenciálního počtu je pak známo, že $\frac{d^{\alpha}\Phi}{dt^{\alpha}}$ $(\alpha = 1, 2 \ldots r)$ vznikne z $d^{\alpha}\varphi$ jednoduše tak, že dosadíme za $u_i, du_i, d^2u_i \ldots d^r u_i$ $(i = 0, 1 \ldots m)$ resp. $f_i(t), \frac{df_i}{dt}, \frac{d^2f_i}{dt^2} \ldots \frac{d^rf_i}{dt^r}$.

Korespondence třídy r.

237. Buďte $\varphi_0(u_0, u_1 \ldots u_m), \varphi_1(u_0, u_1 \ldots u_m), \ldots \varphi_m(u_0, u_1 \ldots u_m)$ funkce třídy $r \geqq 1$ v oboru $[O]$ určeném oblastí O. Buď

$$(1) \qquad \begin{aligned} &|\varphi_0(\overset{1}{u}_0, \overset{1}{u}_1, \ldots \overset{1}{u}_m), \varphi_1(\overset{1}{u}_0, \overset{1}{u}_1, \ldots \overset{1}{u}_m), \ldots \varphi_m(\overset{1}{u}_0, \overset{1}{u}_1, \ldots \overset{1}{u}_m)|_b \neq \\ \neq\, &|\varphi_0(\overset{2}{u}_0, \overset{2}{u}_1, \ldots \overset{2}{u}_m), \varphi_1(\overset{2}{u}_0, \overset{2}{u}_1, \ldots \overset{2}{u}_m), \ldots \varphi_m(\overset{2}{u}_0, \overset{2}{u}_1, \ldots \overset{2}{u}_m)|_b, \end{aligned}$$

kdykoli $|\overset{1}{u}_0, \overset{1}{u}_1, \ldots \overset{1}{u}_m|_b$, $|\overset{2}{u}_0, \overset{2}{u}_1, \ldots \overset{2}{u}_m|_b$ jsou dva různé ar. body oboru $[O]$. Buď

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_0} & \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_0}{\partial u_m} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_0} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_0} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

v každém ar. bodě z $[O]$. Korespondence $\mathfrak{K}$, v níž

$$|u_0, u_1 \dots u_m|_b \sim |\varphi_0(u_0, u_1 \dots u_m), \varphi_1(u_0, u_1 \dots u_m), \dots \varphi_m(u_0, u_1 \dots u_m)|_b$$

nazývá se korespondence určená funkcemi $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_m$ ($|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ v $[O]$). Pravíme, že $\mathfrak{K}$ jest korespondence třídy r. Buď v $\mathfrak{K}: O \sim O'$, $[O] \sim [O']$; pak O' jest oblast a $[O']$ jest obor určený oblastí O.

Buď $|\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m|_b$ ar. bod z $[O]$. Buď

$$\begin{aligned} \overset{0}{v}_0 &= \varphi_0(\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m), \\ \overset{0}{v}_1 &= \varphi_1(\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m), \\ &\dots\dots\dots \\ \overset{0}{v}_m &= \varphi_m(\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m). \end{aligned}$$

Uvažujme rovnice

$$\begin{aligned} v_0 &= \varphi_0(u_0, u_1 \dots u_m) \\ v_1 &= \varphi_1(u_0, u_1 \dots u_m) \\ &\dots\dots\dots \\ v_m &= \varphi_m(u_0, u_1 \dots u_m) \end{aligned} \tag{3}$$

Ze (2) vychází dle známé věty o funkcích implicitních: Ke každému dosti malému okolí V' ar. bodu $|\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1 \dots \overset{0}{v}_m|_b$ existuje okolí V ar. bodu $|\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m|$ takové, že, kdykoli ar. bod $|v_0, v_1 \dots v_m|_b$ náleží do V', existuje jeden a jen jeden ar. bod $|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ náležející do V a takový, že platí (3); mimo to, když číslo určující okolí V' konverguje k nule, konverguje k nule také číslo určující okolí V. Odtud snadno vidíme, že O' jest oblast; vskutku, náleží-li $|\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1 \dots \overset{0}{v}_m|_b$ do O', a zvolíme-li okolí V' tak malé, aby V bylo obsaženo v O, jest V' obsaženo v O'. Snadno se také vidí, že $[O']$ jest obor určený oblastí O'. Buď H okraj oblasti O, a buď $H \sim H'$ v $\mathfrak{K}$, takže $[O] = O + H$, $[O'] = O' + H'$. Je třeba pouze ukázati, že okraj oblasti O' jest H'. Buď nejprve $|\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m|_b$ ar. bod z H a $|\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m|_b \sim |\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1 \dots \overset{0}{v}_m|_b$ v $\mathfrak{K}$. Z (1) vychází ihned, že ar. bod $|\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1 \dots \overset{0}{v}_m|_b$ nenáleží do O'; dle výše připomenuté vlastnosti rovnic (3) existují však v jeho dosti malém okolí ar. body z O'; jest tedy $|\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1 \dots \overset{0}{v}_m|_b$ okrajový ar. bod pro O'. Buď za druhé $|\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1 \dots \overset{0}{v}_m|$ okrajový ar. bod pro O', takže lze určiti posloupnost $|\overset{1}{v}_0, \overset{1}{v}_1 \dots \overset{1}{v}_m|_b, |\overset{2}{v}_0, \overset{2}{v}_1 \dots \overset{2}{v}_m|_b, \dots$ tak, že 1° ar. bod $|\overset{n}{v}_0, \overset{n}{v}_1 \dots \overset{n}{v}_m|_b$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) náleží do O', 2° $\lim\limits_{n \to \infty} \overset{n}{v}_i = \overset{0}{v}_i$

$(i = 0, 1 \dots m)$. Buď v $\mathfrak{K}$

$$|\overset{n}{u}_0, \overset{n}{u}_1 \dots \overset{n}{u}_m|_b \sim |\overset{n}{v}_0, \overset{n}{v}_1 \dots \overset{n}{v}_m|_b, \qquad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

takže ar. bod $|\overset{n}{u}_0, \overset{n}{u}_1 \dots \overset{n}{u}_m|_b$ náleží do O. Můžeme předpokládati, že existují limity $\lim\limits_{n \to \infty} \overset{n}{u}_i = \overset{0}{u}_i$; jinak by stačilo vybrati vhodnou částečnou posloupnost. Ježto funkce $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_m$ jsou spojité, jest v $\mathfrak{K}$ $|\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m|_b \sim$ $\sim |\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1 \dots \overset{0}{v}_m|_b$. Je pouze třeba ukázati, že ar. bod $|\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m|_b$ náleží do H. Ježto však zřejmě v každém okolí tohoto ar. bodu jsou ar. body z O, totiž ar. body $|\overset{n}{u}_0, \overset{n}{u}_1 \dots \overset{n}{u}_m|_b$ pro dosti veliké n, je třeba pouze ukázati, že $|\overset{0}{u}_0, \overset{0}{u}_1 \dots \overset{0}{u}_m|_b$ nenáleží do O, což je zřejmé, neboť jinak by $|\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1 \dots \overset{0}{v}_m|_b$ náležel do O'.

Pro stručnost pravíme, že funkce $\varphi_0(u_0, u_1 \dots u_m)$, $\varphi_1(u_0, u_1 \dots u_m), \dots, \varphi_m(u_0, u_1 \dots u_m)$ ($|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ v $[O]$) určují korespondenci třídy r, splňují-li tyto funkce oba požadavky výše uvedené (vyjádřené nerovnostmi (1), (2)).

238. Nechť funkce $\varphi_0(u_0, u_1 \dots u_m)$, $\varphi_1(u_0, u_1 \dots u_m) \dots \varphi_m(u_0, u_1 \dots u_m)$ ($|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ v $[O]$) určují korespondenci $\mathfrak{K}$ třídy $r \geqq 1$. Buď $|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ libovolně zvolený ar. bod z $[O]$. Kolineace ar. bodů, v níž libovolnému ar. bodu $|du_0, du_1 \dots du_m|_b$ jest přiřazen ar. bod $|d\varphi_0, d\varphi_1 \dots d\varphi_m|_b$, nazývá se diferenciál korespondence $\mathfrak{K}$ v ar. bodě $|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ a označuje se $d\mathfrak{K}$.

Zřejmě jest v $d\mathfrak{K}$

$$|1, 0 \dots 0|_b \sim \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_0}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_0}, \dots \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_0}\right|_b,$$

$$|0, 1 \dots 0|_b \sim \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_1}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}, \dots \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right|_b,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$|0, 0 \dots 1|_b \sim \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial u_m}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_m}, \dots \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_m}\right|_b.$$

Dle **237** (2) jest $d\mathfrak{K}$ vskutku kolineace.

Když $r \geqq 2$, můžeme definovati jako druhý diferenciál $d^2\mathfrak{K}$ korespondence $\mathfrak{K}$ v ar. bodě $|u_0, u_1 \dots u_m|_b$ korespondenci, v níž libovolnému $(2m + 1)$ rozměrnému ar. bodu $|du_0, du_1 \dots du_m, d^2u_0, d^2u_1 \dots d^2u_m|$ jest přiřazen ar. bod $|d\varphi_0, d\varphi_1 \dots d\varphi_m, d^2\varphi_0, d^2\varphi_1 \dots d^2\varphi_m|_b$; stejně lze definovati $d^3\mathfrak{K}, \dots d^r\mathfrak{K}$. Tyto korespondence nejsou však již kolineace.

V dalším užijeme definic a vět **230** až **238** pouze v případě $m = 1$; místo u_0, u_1 píšeme zpravidla u, v.

Aritmetické plochy.

239. Ve **239** až **305** předpokládáme $m=3$. Souřadnice ar. bodu $x=x(u,v)$ buďte funkce třídy $r\geqq 1$ (může býti $r=\infty$) v oboru $[O]$ určeném oblastí O; ar. body $x(u_1, v_1)$, $x(u_2, v_2)$ buďte lin. nezávislé, kdykoli $|u_1, v_1|_b$ a $|u_2, v_2|_b$ jsou v $[O]$ a jsou různé; ar. body x, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ buďte lin. nezávislé pro každý ar. bod $|u, v|_b$ z $[O]$: pak pravíme, že množství ar. bodů $x(u,v)$ ($|u, v|_b$ v O) jest ar. plocha třídy r. Ar. plochu značíme obvykle $M_a x(u,v)$; určitěji $M_a\, x(u,v)$ ($|u,v|_b$ v O); stručněji $M_a x$. Pravíme, že proměnný jednorozměrný ar. bod $|u, v|_b$ jest parametr ar. plochy $M_a x(u,v)$.

Je-li $M_a x(u,v)$ ($|u,v|_b$ v O) ar. plocha třídy 1; je-li $\varrho=\varrho(u,v)$ funkce třídy 0 v $[O]$; je-li $\varrho(u,v)\neq 0$ všude v $[O]$: pravíme, že množství ar. bodů ϱx($|u, v|_b$ v O) jest ar. plocha třídy 0.

Je zřejmé, že ar. plocha třídy r jest ar. plochou třídy s, kdykoli $s<r$. Také se snadno vidí, že kolineace ar. bodů přiřazuje ar. ploše třídy r ar. plochu třídy r.

Množství ar. rovin duální k ar. ploše třídy r nazývá se duální ar. plocha třídy r; označení $\mathfrak{M}_a \xi(u,v)$.

240. Buď $M_a\, x(u,v)$ ($|u,v|_b$ v O) ar. plocha třídy $r\geqq 1$. Proměnný jednorozměrný ar. bod $|u_1, v_1|_b$ jest parametr ar. plochy $M_a x$, když a jen když $u_1=\varphi(u,v)$, $v_1=\psi(u,v)$ ($|u,v|_b$ v $[O]$), kde funkce φ, ψ definují korespondenci třídy r.

Snadno se vidí, že podmínky stačí. Předpokládejme tedy, že proměnný jednorozměrný ar. bod $|u_1, v_1|_b$ je parametr pro $M_a x$, že tedy existuje oblast O_1 a ar. plocha $M_a\, x_1(u_1, v_1)$ ($|u_1\, v_1|_b$ v O_1) rovná ar. ploše $M_a\, x(u,v)$ ($|u,v|_b$ v O). Ježto souřadnice ar. bodu $x(u,v)$ jsou spojité v oboru $[O]$ a podobně pro $x_1(u_1, v_1)$, jest množství ar. bodů $x_1(u_1, v_1)$ ($|u_1, v_1|_b$ v $[O_1]$) rovno množství ar. bodů $x(u,v)$ ($|u,v|_b$ v $[O]$). Ježto $x(u,v)\neq x(u',v')$, kdykoli $|u,v|_b\neq|u',v'|_b$ ($|u,v|_b$, $|u', v'|_b$ v $[O]$) a podobně pro $x_1(u_1, v_1)$, existuje jeden a jen jeden pár funkcí $u_1=\varphi(u,v)$, $v_1=\psi(u,v)$ ($|u,v|_b$ v $[O]$) takových, že

$$x_1[\varphi(u,v),\ \psi(u,v)]=x(u,v). \tag{1}$$

Jest ukázati, že 1° funkce $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ jsou třídy r v $[O]$, 2°

$$|\varphi(u,v),\ \psi(u,v)|_b\neq|\varphi(u',v'),\ \psi(u',v')|_b,$$

když $|u, v|_b$, $|u', v'|_b$ náležejí do $[O]$ a jsou různé, 3° $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\neq 0$ všude v $[O]$.

Vlastnost 2^0 plyne ihned, všimneme-li si, že korespondence definovaná rovnicemi $u_1 = \varphi$, $v_1 = \psi$ jest jednojednoznačná. Abychom ukázali, že platí 1^0 a 3^0 v ar. bodě $|u_0, v_0|_b$ z $[O]$, položme $u'_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $v'_0 = \psi(u_0, v_0)$. Ježto $M_a\, x_1(u_1, v_1)$ jest ar. plocha, jest pro $|u_1, v_1|_b = |u'_0, v'_0|_b$: $\left(x_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial v_1}\right) \neq 0_r$, tedy též $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial v_1}\right) \neq 0_p$. Můžeme tedy předpokládati, že pro $|u_1, v_1|_b = |u'_0, v'_0|_b$ jest

$$\Delta = \frac{\partial x_1^{(0)}}{\partial u_1} \frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial v_1} - \frac{\partial x_1^{(0)}}{\partial v_1} \frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial u_1} \neq 0.$$

Avšak Δ je funkcionální determinant vzhledem k u_1, v_1 rovnic

$$x_1^{(0)}(u_1, v_1) = x^{(0)}(u, v),$$
$$x_1^{(1)}(u_1, v_1) = x^{(1)}(u, v),$$

z nichž tedy lze v dosti malém okolí ar. bodu $|u_0, v_0|$ vypočísti $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ jako funkce třídy r; vlastnost 1^0 je tím dokázána. Z (1) pak plyne pro $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$

$$\left(x_1, \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial v_1}\frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial v_1}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \left(x \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

čili

$$\left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = \left(x \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right);$$

odtud vychází vlastnost 3^0, ježto $\left(x \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0_r$.

241. Buď $M_a\, x(u, v)$ ($|u, v|_b$ v O) ar. plocha třídy $r \geq 1$. Buď $\varrho = \varrho(u, v)$ funkce definovaná všude v O. Množství ar. bodů $\varrho(u, v)\, x(u, v)$ ($|u, v|_b$ v O) jest ar. plocha třídy r, když a jen když definici funkce $\varrho(u, v)$ lze rozšířiti na obor $[O]$ tak, že 1^0 $\varrho(u, v)$ je funkce třídy r v $[O]$, 2^0 $\varrho(u, v) \neq 0$ všude v $[O]$.

Důkaz je zřejmý. Rozšíření definice funkce $\varrho(u, v)$ dá se provésti jen jedním způsobem (v. **159**).

Plochy.

242. Buď $M_a\, x(u, v)$ ($|u, v|_b$ v O) ar. plocha třídy $r \geq 1$ (může býti $r = \infty$). Množství bodů $\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) nazývá se plocha třídy r. Plochu značíme obvykle $M\{x(u, v)\}$, určitěji $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O), stručněji $M\{x\}$. Pravíme, že proměnný jednorozměrný ar. bod $|u, v|_b$ jest parametr plochy $M\{x(u, v)\}$.

Je-li $|u_1, v_1|_b \neq |u_2, v_2|_b$ ($|u_1, v_1|_b$ a $|u_2, v_2|_b$ v $[O]$), jsou body $\{x(u_1, v_1)\}$ $\{x(u_2, v_2)\}$ různé. Vskutku dle **239** ar. body $x(u_1, v_1)$, $x(u_2, v_2)$

jsou lin. nezávislé. Plocha třídy r je také plochou třídy s, když $1 \leqq s < r$. Kolineace ar. bodů přiřazuje ploše třídy r plochu třídy r.

Množství rovin duální ku ploše třídy r nazývá se duální plocha třídy r; označení $\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\}$.

243. Buď $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) plocha třídy r. Proměnný jednorozměrný ar. bod $|u_1, v_1|_b$ jest parametr plochy $M\{x\}$, když a jen když $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ ($|u, v|_b$ v $[O]$), kde funkce φ, ψ definují korespondenci třídy r.

Vychází ihned ze **240.**

244. Povšimněme si, že dle **242** pravíme, že $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) jest plocha třídy r, jen když $M_a\, x(u, v)$ ($|u, v|_b$ v O) jest ar. plocha třídy r. Je-li však $\varrho(u, v)$ funkce jakkoli definovaná v O, jen když $\varrho(u, v) \neq 0$ všude v O, jest $\{\varrho(u, v)\; x(u, v)\} = \{x(u, v)\}$ všude v O. Není-li opak výslovně uveden, vždy, kdykoli řekneme, že $M\{x(u, v)\}$ jest plocha třídy r, míníme, že z každého bodu $\{x(u, v)\}$ byl vybrán ar. bod $x(u, v)$ tak, že $M_a\, x(u, v)$ jest ar. plocha třídy r. Pak jest $M\{x(u, v)\} = M\{\varrho(u, v)\, x(u, v)\}$ jen, když $\varrho(u, v)$ splňuje podmínky udané v **241** (v. **162**).

245. Buď $\{x_0\}$ bod plochy $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O), tedy $x_0 = x(u_0, v_0)$. Buď y ar. bod takový, že $\left(x \dfrac{\partial x}{\partial u} \dfrac{\partial x}{\partial v}\, y\right)_{u = u_0,\; v = v_0} \neq 0$. Existuje okolí W bodu $\{x_0\}$ takové, že každá řada bodová, obsahující bod $\{y\}$ a body z W, obsahuje jeden a jen jeden bod náležející do $M\{x\}$ i do W.

Položme

$$x_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u = u_0,\; v = v_0}, \quad x_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{u = u_0,\; v = v_0}.$$

Ježto $(x_0\, x_1\, x_2\, y) \neq 0$, můžeme položiti

$$x(u, v) = \lambda_0(u, v)\, x_0 + \lambda_1(u, v)\, x_1 + \lambda_2(u, v)\, x_2 + \mu(u, v)\, y. \tag{1}$$

Zřejmě jest

$$\lambda_0(u_0, v_0) = 1, \quad \lambda_1(u_0, v_0) = \lambda_2(u_0, v_0) = \mu(u_0, v_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial u}\right)_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = 1, \quad \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial u}\right)_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial u}\right)_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = 0,\\ &\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial v}\right)_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = 1, \quad \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial v}\right)_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial v}\right)_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Ukažme nejprve: Ke každému okolí V jednorozměrného ar. bodu $|u_0, v_0|_b$ existuje okolí W bodu $\{x_0\}$ takové, že bod $\{x(u, v)\}$ plochy $M\{x\}$ náleží do W jen, když $|u, v|_b$ náleží do V. Předpokládejme, že by tomu tak nebylo, že by tedy existovalo okolí V ar. bodu $|u_0, v_0|_b$ takové, že, ať jakkoli zvolíme okolí W bodu $\{x_0\}$, vždy lze určiti $|u, v|_b$ tak, že bod $\{x(u, v)\}$ plochy $M\{x\}$ náleží do W, ač $|u, v|_b$ nenáleží do V. Zvolme nyní posloupnost $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ kladných čísel konvergující k nule a buď W_n okolí bodu $\{x_0\}$ určené ar. bodem x_0 a číslem $\varepsilon_n (n = 1, 2 \ldots)$. Buď $\delta > 0$ číslo určující okolí V ar. bodu $|u_0, v_0|_b$. Dle předpokladu lze — pro $n = 1, 2, 3 \ldots$ — určiti $|u_n, v_n|_b$ a číslo λ_n tak, že 1°

$$(3) \qquad |\lambda_n x^{(i)}(u_n, v_n) - x^{(i)}(u_0, v_0)| < \varepsilon_n, \qquad (i = 0, 1 \ldots m)$$

2° aspoň jedno z čísel

$$(4) \qquad |u_n - u_0|, \quad |v_n - v_0|$$

jest $> \delta$. Můžeme předpokládati, že existují limity

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} u_n = u', \quad \lim_{n \to \infty} v_n = v';$$

jinak by stačilo vybrati částečnou posloupnost. Ježto aspoň jedno z čísel (4) jest $> \delta$, ať n je jakkoli veliké, jest $|u', v'|_b \neq |u_0, v_0|_b$. Ježto ar. body $|u_n, v_n|_b$ náležejí do O, ar. bod $|u', v'|_b$ náleží do $[O]$. Ježto souřadnice ar. bodu $x(u, v)$ jsou spojité v $[O]$, jest dle (5)

$$(6) \qquad \lim_{n \to \infty} x^{(i)}(u_n, v_n) = x^{(i)}(u', v'). \qquad (i = 0, 1 \ldots m)$$

Ježto $\varepsilon_n \to 0$, plyne ze (3), že

$$(7) \qquad \lim_{n \to \infty} \lambda_n x^{(i)}(u_n, v_n) = x^{(i)}(u_0, v_0). \qquad (i = 0, 1 \ldots m)$$

Ježto $x(u', v') \neq 0_b$, vychází ze (6) a (7), že existuje limita $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$ a že

$$x(u_0, v_0) = \lambda x(u', v').$$

Ar. body $x(u_0, v_0)$ a $x(u', v')$ jsou tedy lin. závislé. To však odporuje definici plochy, neboť $|u_0, v_0|_b \neq |u', v'|_b$.

Uvažujme nyní rovnice

$$(8) \qquad \begin{aligned} \lambda_1(u, v) - \alpha \lambda_0(u, v) &= 0, \\ \lambda_2(u, v) - \beta \lambda_0(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

Ze (2) vychází, že pro $\alpha = \beta = 0$ jest těmto rovnicím vyhověno, když $u = u_0$, $v = v_0$, a mimo to, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ funkcionální determinant rovnic (8) vzhledem k u, v rovná se 1, je tedy různý od 0. Dle věty o funkcích implicitních lze tedy ke každému dosti malému okolí V ar. bodu $|u_0, v_0|_b$ udati $\eta_V > 0$ tak, že kdykoli $|\alpha| < \eta_V$, $|\beta| < \eta_V$, existuje jeden a jen jeden ar. bod $|u, v|_b$ z V takový, že platí (8). Zvolme tedy dosti malé V — zejména též tak malé, aby bylo obsaženo v O a aby bylo $\lambda_0(u, v) \neq 0$ všude ve V — a určeme okolí W bodu $\{x_0\}$ tak, že bod $\{x(u, v)\}$ plochy $M\{x\}$ může náležeti do W jen, když $|u_0, v_0|_b$ náleží do V. Zřejmě, když těmto podmínkám vyhovuje okolí W' určené ar. bodem x_0 a číslem ε', vyhovuje jim též okolí W určené ar. bodem x_0 a číslem $\varepsilon < \varepsilon'$. Odtud snadno vychází, že můžeme předpokládati, že 1° bod

$$\{x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma y\}$$

může náležeti do W, jen když $|\alpha| < \eta_V$, $|\beta| < \eta_V$, 2° že W neobsahuje žádný bod z $\{x_1, x_2, y\}^M$. Okolí W vyhovující těmto podmínkám má pak vlastnost teoremem požadovanou. Ježto řada bodová tvaru $\{\alpha x_1 + \beta x_2, y\}^G$ nemůže obsahovati žádný bod z W, buď

$$\{x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2, y\}^G$$

řada bodová obsahující bod $\{y\}$ a aspoň jeden bod z W, takže $|\alpha| < \eta_V$, $|\beta| < \eta_V$. Snadno vidíme, že lze jedním a jen jedním způsobem určiti γ tak, aby bod

$$\{x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma y\}$$

náležel ploše $M\{x\}$. Vskutku, dle (1) je k tomu nutné a stačí, aby bylo

$$\gamma = \frac{\mu(u, v)}{\lambda_0(u, v)},$$

při čemž $|u, v|_b$ jest určiti z rovnic (8), což lze jen jedním způsobem.

246. Buď $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) plocha. Buď M' plocha různá od $M\{x(u, v)\}$, jejíž každý bod náleží do $M\{x(u, v)\}$. Buď O_1 množství takových $|u, v|_b$ z O, že bod $\{x(u, v)\}$ nenáleží do M'. Pak O_1 není otevřené množství.

Buď O_2 množství takových $|u, v|_b$ z O, že bod $\{x(u, v)\}$ náleží do M'. Pak lze O rozložiti v O_1 a O_2. Stačí tedy ukázati, že O_2 jest otevřené množství, abychom obdrželi teorém; vskutku oblast O nelze rozložiti ve dvě otevřená množství (v. **230**).

Buď $\{x(u_0, v_0)\} = \{x_0\}$ bod plochy M'. Ve **245** jsme viděli, že existuje bod $\{y\}$ a okolí W bodu $\{x_0\}$ takové, že každá řada bodová, obsahující $\{y\}$ a aspoň jeden bod z W obsahuje jeden a jen jeden bod náležející do $M\{x\}$ i do W. Stejně se vidí, že existuje bod $\{y'\}$ a okolí W' bodu $\{x_0\}$ takové, že každá řada bodová, obsahující $\{y'\}$ a aspoň jeden bod z W obsahuje jeden a jen jeden bod náležející do M' i do W'. Snadno se vidí, že můžeme předpokládati $y = y'$, $W = W'$. Zřejmě však potom všecky body náležející do W i do $M\{x\}$ náležejí do M'. Mimo to zřejmě,

když V je dosti malé okolí ar. bodu $|u_0, v_0|_b$, bod $\{x(u, v)\}$ plochy $M\{x\}$ náleží do W — a tedy dle toho, co právě bylo řečeno, i do M' —, kdykoli $|u, v|_b$ náleží do V. **Množství** O_2 obsahuje V. Tedy O_2 jest otevřené množství.

247. Buď $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) plocha třídy r. Buď $\{x(u_0, v_0)\}$ bod plochy $M\{x\}$. Buď W okolí bodu $\{x(u_0, v_0)\}$; buď H množství takových $|u, v|_b$ z O, že bod $\{x(u, v)\}$ jest obsažen ve W. Buď M^W množství bodů $\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v H). Množství M^W nazývá se průřez plochy $M\{x\}$ s okolím W.

M^W jest plocha — a to plocha třídy r — když a jen když H jest oblast; to nastane jistě, je-li okolí W dosti malé.

Nejprve je zřejmé, že množství H jest vždy otevřené; vskutku, obsahuje-li H ar. bod $|u_1, v_1|_b$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že H obsahuje okolí ar. bodu $|u_1, v_1|_b$ určené číslem ε. Důkaz vychází snadno z definice W a ze spojitosti funkcí $x^{(i)}(u, v)$. Ježto H vždy obsahuje $|u_0, v_0|_b$, obsahuje tedy H vždy jisté okolí ar. bodu $|u_0, v_0|_b$.

Že jest M^W plocha třídy r, když H jest oblast, je zřejmé.

Předpokládejme nyní, že M^W je plocha a že H není oblast. Buď H_0 množství obsažené v H a takto určené: Ar. bod $|u, v|_b$ z H náleží do H_0, když a jen když lze určiti konečný počet ar. bodů $|u_1, v_1|_b$, $|u_2, v_2|_b, \ldots |u_{n-1}, v_{n-1}|_b$ tak, že, klademe-li $u = u_n$, $v = v_n$, existuje pro $\alpha = 0, 1 \ldots n-1$ okolí V_α ar. bodu $|u_\alpha, v_\alpha|_b$ obsažené v H a obsahující $|u_{\alpha+1}, v_{\alpha+1}|_b$. Není $H = H_0$, neboť z **232** snadno se vidí, že H_0 jest oblast. Buď H_1 množství těch ar. bodů z H, jež nejsou obsaženy v H_0. Je zřejmé, že H_1 jest otevřené množství. To však je dle **246** nemožné, neboť dle předpokladu množství bodů $\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v H) je plocha a — ježto H_0 jest oblast — také množství bodů $\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v H_0) je plocha.

Zbývá ukázati, že H jest oblast, je-li okolí W dosti malé. Připomeňme si nejprve, že — jak jsme při důkazu ve **245** viděli — ke každému okolí V ar. bodu $|u_0, v_0|_b$ existuje okolí W bodu $\{x(u_0, v_0)\}$ takové, že množství H příslušné okolí W jest obsaženo ve V. Zvolme V tak, že jest obsaženo v O, a buď W tak malé, že H jest obsaženo ve V; buď α číslo určující okolí V. Buď $0 \leq \varphi < \pi$; buď C^φ množství bodů $\{y_\varphi(t)\}$, kde

$$y_\varphi(t) = x(u_0 + t\cos\varphi,\ v_0 + t\sin\varphi)$$

a t probíhá 1° interval $\langle -\frac{\alpha}{|\cos\varphi|} + 0, \frac{\alpha}{|\cos\varphi|} - 0\rangle$, když φ jest v $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$ nebo ve $\langle \frac{3\pi}{4} + 0, \pi - 0\rangle$, 2° interval $\langle -\frac{\alpha}{|\sin\varphi|} + 0, \frac{\alpha}{|\sin\varphi|} - 0\rangle$, když φ jest v $\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\rangle$. Zřejmě C^φ jest křivka a každý bod z M^W náleží jedné z křivek C^{φ}. Ve **164** jsme viděli, že existuje číslo $e_{\varphi} > 0$ takové, že množství takových t, pro něž $\{y_{\varphi}(t)\}$ náleží do okolí W bodu $\{x(u_0, v_0)\}$ určeného ar. bodem $x(u_0, v_0)$ a číslem ε jest interval, kdykoli $\varepsilon < e_{\varphi}$. Snadným rozborem citovaného důkazu se ukáže, že můžeme klásti $e_{\varphi} = e$, kde $e > 0$ je číslo nezávislé na φ. Číslo e má pak zřejmě tuto vlastnost: Je-li W okolí bodu $\{x(u_0, v_0)\}$ určené ar. bodem $x(u_0, v_0)$ a číslem $\varepsilon < e$, existují ke každému φ $(0 \leq \varphi < \pi)$ čísla $t'_{\varphi} > 0, t''_{\varphi} > 0$ taková, že množství H příslušné k W skládá se z ar. bodů

$$(1) \qquad |u_0 + t\cos\varphi,\ v_0 + t\sin\varphi|_b. \qquad (0 \leq \varphi < \pi;\ -t'_{\varphi} < t < t''_{\varphi})$$

Je třeba pouze ještě ukázati, že množství H ar. bodů (1) jest oblast. Zřejmě toto množství jest otevřené a ohraničené; stačí tedy ukázati, že nelze je rozložiti ve dvě otevřená množství H' a H''. Předpokládejme, že $|u_0, v_0|_b$ náleží na př. do H'; dospějeme ke sporu tím, že zjistíme, že každý ar. bod z H náleží do H'. Zvolme jakkoli φ $(0 \leq \varphi < \pi)$ a označme h_{φ} množství těch t, že ar. bod (1) při daném φ náleží do H'. Běží o to, zjistiti, že $h_{\varphi} = \langle -t'_{\varphi} + 0,\ t''_{\varphi} + 0\rangle$. Množství h_{φ} obsahuje jistě aspoň jedno číslo, totiž $t = 0$. Buď A_{φ} (B_{φ}) dolní (horní) hranice množství h_{φ}; je-li $A_{\varphi} = -t'_{\varphi}$, $B_{\varphi} = t''_{\varphi}$, je zřejmě $h_{\varphi} = \langle -t'_{\varphi} + 0,\ t''_{\varphi} - 0\rangle$, jak chceme dokázati. Předpokládejme tedy, že na př. $0 \leq B_{\varphi} < t''_{\varphi}$. Ar. bod

$$(2) \qquad |u_0 + B_{\varphi}\cos\varphi,\ v_0 + B_{\varphi}\sin\varphi|_b$$

nemůže náležeti do H'; neboť — ježto H' jest otevřené množství — existovalo by kladné η menší než $t''_{\varphi} - B_{\varphi}$ takové, že ar. bod (1) náleží do H', když $t = B_{\varphi} + \eta$, proti definici čísla B_{φ}. Ar. bod (2) nemůže však náležeti ani do H''; neboť — ježto H'' jest otevřené množství — existovalo by kladné η menší než $B_{\varphi} + t'_{\varphi}$ takové, že ar. bod (1) náleží do H'', když $t = B_{\varphi} - \eta$. To však je spor, neboť ar. bod (2) náleží do H, ježto $0 \leq B_{\varphi} < t''_{\varphi}$.

248. Buďte $M\{x(u, v)\}$, $M\{y(u', v')\}$ dvě plochy o společném bodě $\{x(u_0, v_0)\} = \{y(u_0', v'_0)\}$. Existuje-li okolí W bodu $\{x(u_0, v_0)\}$ takové, že průřez plochy $M\{x\}$ s W rovná se průřezu plochy $M\{y\}$ s W, pravíme, že plochy $M\{x\}$, $M\{y\}$ splynou v okolí bodu $\{x(u_0, v_0)\}$.

Dle **247** splynou plochy $M\{x\}$, $M\{y\}$ v okolí bodu $\{x(u_0, v_0)\}$, když a jen když existují oblasti O, O' obsahující $|u_0, v_0|_b$ a takové, že

$$M\{x(u, v)\}\ (|u, v|_b \text{ v } O) = M\{y(u', v')\}\ (|u', v'|_b \text{ v } O').$$

Algebraické plochy.

249. Množství bodů $\overline{M}$ nazývá se zobecněná plocha třídy $r \geq 1$, lze-li ke každému bodu $\{x\}$ z $\overline{M}$ — až snad na jisté body, jež pak nazýváme singulární, a jež, existují-li, jsou buď v konečném počtu nebo tvoří zobecněnou křivku — udati okolí W_x a plochu třídy r M_x tak, že průřez $\overline{M}$ s W_x, t. j. množství všech bodů obsažených i v $\overline{M}$ i ve W_x, rovná se průřezu plochy M_x s W_x. Pravíme pak, že $\overline{M}$ a M_x splynou v okolí bodu $\{x\}$.

Zřejmě každá plocha je také zobecněnou plochou.

Každá definice (každý teorém) o bodu $\{x\}$ plochy M_x, v níž (v němž) lze plochu M_x nahraditi kteroukoli jinou plochou, jež splyne (v. **248**) s M_x v okolí bodu $\{x\}$, dá se bezprostředně převésti s M_x na $\overline{M}$. Vyslovíme takovou definici (teorém) pouze o ploše, i když jí (ho) v dalším textu užijeme na zobecněnou plochu (v. **166**).

Někdy je výhodné, považovati za singulární i některé z těch bodů zobecněné plochy $\overline{M}$, jež nejsou singulární dle této definice.

250. Buď P_r rovinová forma. Buď M^a množství všech bodů incidentních s P_r. Pro stručnost pravíme, že bod $\{x\}$ má vlastnost α, když polára $[P_r; y]$ každého ar. bodu y vzhledem ku P_r jest incidentní s $\{x\}$. Každý bod o vlastnosti α náleží do M^a. Předpokládejme, že buď žádný bod nemá vlastnost α, nebo že takových bodů jest konečný počet, nebo že tvoří algebraickou křivku; mimo to předpokládejme, že M^a obsahuje aspoň jeden bod, jenž nemá vlastnost α: pak pravíme, že M^a jest algebraická plocha; označení $M^a = M[P_r]$. Body o vlastnosti α nazývají se singulární body algebraické plochy M^a. Algebraická plocha je zobecněná plocha třídy ∞; body singulární dle definice ve **249** jsou singulární i dle této definice.

Že každý bod o vlastnosti α náleží do M^a, plyne z **50.**

Buď $\{x_0\}$ nesingulární bod algebraické plochy $M^a = M[P_r]$. Je třeba ukázati existenci takového okolí W bodu $\{x_0\}$, že průřez M^W množství M^a s okolím W jest plocha. Ježto $\{x_0\}$ není singulární bod pro M^a, existuje ar. bod x_3 takový, že $S[P_r;\ x_3]\, x_0 \neq 0$. Ar. body x_0, x_3 jsou lin. nezávislé, neboť dle **50** jest $S[P_r;\ x_0]\, x_0 = 0$; lze tedy určiti ar. body x_1, x_2 tak, že $(x_0 x_1 x_2 x_3) \neq 0$. Ježto výraz $(x x_1 x_2 x_3)$ je spojitá funkce souřadnic ar. bodu x, můžeme o okolí W předpokládati, že pro každý bod $\{x\}$ z W jest $(x x_1 x_2 x_3) \neq 0$, načež můžeme bez újmy obecnosti předpokládati, že

$$x = x_0 + u x_1 + v x_2 + w x_3. \tag{1}$$

Ukažme nyní, že 1° ke každému dosti malému číslu $\delta > 0$ lze udati číslo $\delta_1 > 0$ takové, že, kdykoli $|u, v|_b$ náleží do okolí V_δ ar. bodu $|0, 0|_b$ určeného číslem δ, lze určiti jedním a jen jedním způsobem $w = f(u, v)$

tak, že ar. bod x určený rovnicí (1) jest incidentní s P_r a $|w| < \delta_1$, 2° takto určená funkce $f(u, v)$ je třídy ∞ v oboru $[V\delta]$. Dle známé věty o funkcích implicitních je k tomu cíli pouze třeba zjistiti, že pro $u = v = w = 0$ jest

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial w} SP_r(x_0 + ux_1 + vx_2 + wx_3) \neq 0.$$

Dle **62** (2) je však levá strana ve (2) rovna $n\ S[P_r;\ x_3]\ (x_0 + ux_1 + vx_2 + wx_3)$, kde n je stupeň formy P_r, a tedy pro $u = v = w = 0$ je rovna $n\ S[P_r;\ x_3]\, x_0 \neq 0$. Klademe-li

$$y = x_0 + ux_1 + vx_2 + f(u, v)\, x_3,$$

můžeme zřejmě určiti kladné $\delta_2 \leqq \delta$ tak malé, že množství bodů $M\{y(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ ve $V\delta_2$) jest plocha třídy ∞, je-li $V\delta_2$ okolí ar. bodu $|0, 0|_b$ určené číslem δ_2. Dále je patrné, že průřez M^a s W je roven průřezu plochy $M\{y(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ ve $V\delta_2$) s W, když W je tak malé, že bod $\{x\}$ — kde ar. bod x jest tvaru (1) — náleží do W jen, když $|u| < \delta_2$, $|v| < \delta_2$, $|w| < \delta_1$. Že lze W voliti tak malé, aby těmto požadavkům bylo vyhověno. se snadno nahlédne.

251. Pole bodové $\{x_0, x_1, x_2\}^M$ jest algebraická plocha bez singulárních bodů; jest $\{x_0, x_1, x_2\}^M = M[(x_0 x_1 x_2)]$.

Vychází ihned ze **250**. Ostatně je zřejmé, že $\{x_0, x_1, x_2\}^M$ splyne na př. v okolí bodu $\{x_0\}$ s plochou $M\{x_0 + ux_1 + vx_2\}$.

Obecná kvadrika $M[P_r]$ jest algebraická plocha bez singulárních bodů. Kvadrika hodnosti 3 o vrcholu $\{x\}$ jest algebraická plocha o singulárním bodě $\{x\}$.

Vychází snadno z **54, 60** a **250.**

Křivky na ploše.

252. Buďte $\varphi(t)$, $\psi(t)$ dvě funkce třídy $r \geqq 1$ (může býti $r = \infty$) v $\langle a, b\rangle$; ar. body $|\varphi(t_1), \psi(t_1)|_b$, $|\varphi(t_2), \psi(t_2)|_b$ buďte různé, kdykoli t_1 a t_2 jsou dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$; buď $\left|\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right|_b \neq 0_b$ pro všecka t z $\langle a, b\rangle$: pak pravíme, že množství jednorozměrných ar. bodů $|\varphi(t), \psi(t)|_b$ (t v $\langle a + 0, b - 0\rangle$) je čára třídy r.

253. Buď $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) plocha třídy r. Buď G množství jednorozměrných ar. bodů obsažené v oblasti O. Množství C bodů $\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v G) plochy $M\{x\}$ je křivka třídy r' ($1 \leqq r' \leqq r$), když a jen když G je čára třídy r'.

Snadno se vidí, že C je křivka třídy r', když G je čára třídy r'.

Obráceně předpokládejme, že C je křivka třídy r'. Buď t parametr křivky C, tedy $C = C\{y(t)\}$ (t v $\langle a+0,\ b-0\rangle$). Ježto C je množství bodů $\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v G), existují 1° funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ definované v $\langle a+0,\ b-0\rangle$ a takové, že ke každému ar. bodu z G existuje jedno a jen jedno číslo t z $\langle a+0,\ b-0\rangle$ takové, že $|u, v|_b = |\varphi(t), \psi(t)|_b$, 2° funkce $\varrho(t)$ rovněž definovaná v $\langle a+0,\ b-0\rangle$, všude různá od nuly a taková, že pro všecka t z $\langle a+0,\ b-0\rangle$ jest

$$x^{(i)}[\varphi(t), \psi(t)] = \rho(t)\, y^{(i)}(t). \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

Snadno se nahlédne, že existují limity

$$\lim_{t \to a} \varphi(t), \ \lim_{t \to a} \psi(t), \ \lim_{t \to b} \varphi(t), \ \lim_{t \to b} \psi(t),$$
$$\lim_{t \to a} \rho(t), \ \lim_{t \to b} \rho(t),$$

z nichž poslední dvě jsou od nuly různé. Lze tedy definici funkcí $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varrho(t)$ rozšířiti na $\langle a, b\rangle$ tak, že jsou spojité pro $t = a$ i pro $t = b$ a že platí (1) pro $t = a$ i pro $t = b$.

Povšimněme si, že funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varrho(t)$ jsou jednoznačně určeny rovnicemi (1). Buď nyní t_0 libovolné číslo z $\langle a, b\rangle$; buď $\varphi(t_0) = u_0$, $\psi(t_0) = v_0$, $\varrho(t_0) = \varrho_0 \neq 0$. Ježto $\xi = \left(x \dfrac{\partial x}{\partial u} \dfrac{\partial x}{\partial v}\right)_{\substack{u = u_0 \\ v = v_0}} \neq 0$, dle definice plochy, buď na př. $\xi^{(0)} \neq 0$. Funkcionální determinant těch rovnic (1), v nichž $i = 1, 2, 3$ vzhledem k φ, ψ, ϱ rovná se

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{(1)}}{\partial u}, & \dfrac{\partial x^{(1)}}{\partial v}, & -y^{(1)} \\ \dfrac{\partial x^{(2)}}{\partial u}, & \dfrac{\partial x^{(2)}}{\partial v}, & -y^{(2)} \\ \dfrac{\partial x^{(3)}}{\partial u}, & \dfrac{\partial x^{(3)}}{\partial v}, & -y^{(3)} \end{vmatrix}_{u = \varphi,\ v = \psi},$$

což pro $\varphi = u_0$, $\psi = v_0$, $\varrho = \varrho_0$ dle (1) rovná se $-\dfrac{1}{\varrho_0}\xi^{(0)} \neq 0$. Dle věty o funkcích implicitních mají tedy funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varrho(t)$ pro $t = t_0$ a pro t dosti blízká k t_0 a obsažená v $\langle a+0,\ b-0\rangle$ spojité derivace až po řád r'. Ježto t_0 bylo libovolné číslo z $\langle a, b\rangle$, jsou funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varrho(t)$ třídy r' v $\langle a, b\rangle$. Z (1) a z definice plochy je patrné, že $|\varphi(t_1), \psi(t_1)|_b \neq |\varphi(t_2), \psi(t_2)|_b$, jsou-li t_1, t_2 dvě různá čísla z $\langle a, b\rangle$. Zbývá ukázati, že $\left|\dfrac{d\varphi}{dt}, \dfrac{d\psi}{dt}\right|_b \neq 0_l$ pro všecka t z $\langle a, b\rangle$. Kdyby však pro nějaké t z $\langle a, b\rangle$ tomu tak nebylo, obdrželi bychom pro toto t derivováním z (1)

$$\frac{d\rho}{dt} y(t) + \rho(t) \frac{dy}{dt} = 0_b,$$

což je nemožné, neboť $\varrho \neq 0$ a ar. body $y, \frac{dy}{dt}$ jsou lin. nezávislé dle definice křivky. Je tedy G vskutku čára třídy r'.

254. Buď $C\{y(t)\}$ (t v $\langle a+0, b-0\rangle$) křivka třídy r' na ploše*) $M\{x(u,v)\}$ třídy r ($1 \leq r' \leq r$), takže existují funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ třídy r' v $\langle a, b\rangle$ takové, že $\{x[\varphi(t), \psi(t)]\} = \{y(t)\}$. Buď $\{y(t_0)\} = \{x(u_0, v_0)\}$ bod křivky $C\{y(t)\}$. Je-li

$$(1) \qquad \begin{aligned} du &= \frac{d\varphi}{dt}, \; d^2u = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \; \dots d^{r'}u = \frac{d^{r'}\varphi}{dt^{r'}}, \\ dv &= \frac{d\psi}{dt}, \; d^2v = \frac{d^2\psi}{dt^2}, \; \dots d^{r'}v = \frac{d^{r'}\psi}{dt^{r'}}, \end{aligned} \qquad (t = t_0)$$

pravíme, že diferenciály $du, d^2u, \dots d^{r'}u, dv, d^2v, \dots d^{r'}v$ patří ke křivce $C\{y(t)\}$ a k bodu $\{y(t_0)\}$. Je-li $\varphi(u,v)$ funkce třídy r', pravíme, že $d\varphi, d^2\varphi, \dots d^{r'}\varphi$ ($u = u_0$, $v = v_0$) patří ke křivce $C\{y(t)\}$ a k bodu $\{y(t_0)\}$, jsou-li tyto diferenciály utvořeny z hodnot (1) dle pravidla ve **236.** Jest vždy

$$(2) \qquad |du, dv|_b \neq 0_b.$$

Ve **253** jsme viděli, že

$$y(t) = \rho(t)\, x[\varphi(t), \psi(t)],$$

(kde $\varrho(t)$ je funkce třídy r' v $\langle a, b\rangle$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že $\varrho(t) = 1$; tak budeme zpravidla činiti, kdykoli budeme uvažovati křivku na ploše. Zřejmě je pak

$$(3) \qquad dx = \frac{dy}{dt}, \; d^2x = \frac{d^2y}{dt^2}, \; \dots d^{r'}x = \frac{d^{r'}y}{dt^{r'}}, \qquad (t = t_0)$$

když diferenciály nalevo ve (3) jsou utvořeny z hodnot (1).

Diferenciály patřící ke křivce $C\{y(t)\}$ a k bodu $\{y(t_0)\}$ nejsou ovšem křivkou $C\{y(t)\}$ a bodem $\{y(t_0)\}$ úplně určeny; jsou určeny teprve, když zvolíme parametr t křivky $C\{y(t)\}$. Ze **161** vychází na př., že 1° jsou-li $du, dv, d^2u, d^2v \dots$ diferenciály patřící ke křivce $C\{y(t)\}$ a bodu $\{y(t_0)\}$, totéž platí o diferenciálech**)

$$(4) \qquad \begin{aligned} \delta u &= a\,du, \; \delta^2 u = a^2 d^2u + b\,du, \; \delta^3 u = a^3 d^3 u + 3ab\,d^2u + c\,du, \\ dv &= a\,dv, \; \delta^2 v = a^2 d^2 v + b\,dv, \; \delta^3 v = a^3 d^3 v + 3ab\,d^2 v + c\,dv, \end{aligned} \quad \dots$$

---

*) Místo „křivka obsažená v ploše" říkáme krátce „křivka na ploše".

**) Často jest dosazovati za diferenciály postupně dvě různé soustavy hodnot. Pak užíváme zpravidla v jednom případě znaku d, ve druhém znaku δ. Znamená pak tedy $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{d\varphi}{dv} dv$, $\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\delta v$ atd.

kde $a, b, c \ldots$ jsou libovolná čísla, z nichž $a \neq 0$; 2^0 naopak, když i du, $dv \ldots$ i δu, $\delta v \ldots$ jsou diferenciály patřící ke křivce $C\{y(t)\}$ a k bodu $\{y(t_0)\}$, existují čísla $a, b, c \ldots (a \neq 0)$ taková, že platí (4).

Že platí (2), plyne ze **253**. Mimo to plyne snadno ze **253**, že, zvolíme-li si jakkoli hodnoty

$$du,\ d^2u \ldots d^{r'}u;\ dv\, d^2v \ldots d^{r'}v, \tag{5}$$

jen když platí (2), existuje vždy křivka C na ploše $M\{x\}$, obsahující bod $\{x(u_0, v_0)\}$ a taková, že diferenciály (5) patří ke křivce C a k bodu $\{x(u_0, v_0)\}$. Vskutku, klademe-li

$$\varphi(t) = u_0 + (u - u_0)\, du + \frac{(u-u_0)^2}{2!} d^2u + \ldots + \frac{(u-u_0)^{r'}}{r'!} d^{r'}u,$$

$$\psi(t) = v_0 + (v - v_0)\, dv + \frac{(v-v_0)^2}{2!} d^2v + \ldots + \frac{(v-v_0)^{r'}}{r'!} d^{r'}v,$$

vychází snadno ze **253**, že, když $\varepsilon > 0$ je dosti malé, množství bodů $\{x[\varphi(t), \psi(t)]\}$ (t v $\langle -\varepsilon + 0, \varepsilon - 0\rangle$) je křivka třídy r.

255. Buďte C a C' dvě křivky třídy r' na ploše $M\{x(u, v)\}$ třídy r $(1 \leqq r' \leqq r)$. Obě křivky C a C' obsahujte bod $\{x(u_0, v_0)\}$. Buďte $(2 \leqq s \leqq r' + 1)$

$$du, d^2u, \ldots d^{s-1}u;\ dv, d^2v, \ldots d^{s-1}v \tag{1}$$

diferenciály patřící ke křivce C a k bodu $\{x(u_0, v_0)\}$. Křivky C a C' mají s-bodový styk v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$, když a jen když diferenciály (1) patří také ke křivce C' a k bodu $\{x(u_0, v_0)\}$.

Že podmínka stačí, vychází ihned ze **178** a **254** (3). Že podmínka je nutná v případě $s = 2$, vychází ihned ze **185** a **268**. Pro $s > 2$ dokážeme nutnost podmínky indukcí: budeme předpokládati, že křivky C a C' mají s-bodový $(s > 2)$ styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, že diferenciály (1) patří ke křivce C a k bodu $\{x(u_0, v_0)\}$ a že diferenciály

$$\delta u = du,\ \delta^2 u = d^2u, \ldots \delta^{s-2}u = d^{s-2}u,\ \delta^{s-1}u;\ \delta v = dv,\ \delta^2 v = d^2v,$$
$$\ldots \delta^{s-2}v = d^{s-2}v,\ \delta^{s-1}v$$

patří ke křivce C' a k bodu $\{x(u_0, v_0)\}$. Buď $C = C\{y(t)\}$, $C' = C\{z(\tau)\}$, kde $\{y(t_0)\} = \{z(\tau_0)\} = \{x(u_0, v_0)\}$ a

$$y(t) = x[\varphi(t), \psi(t)],$$
$$z(\tau) = x[\Phi(\tau), \Psi(\tau)].$$

Dle **254** (3) můžeme předpokládati, že

$$d^\alpha x = \left(\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}\right)_{t=t_0},\ \delta^\alpha x = \left(\frac{d^\alpha z}{d\tau^\alpha}\right)_{\tau=\tau_0}. \qquad (1 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

Ježto $\delta^\alpha x = d^\alpha x \ (1 \leqq \alpha \leqq s-2)$, jest

$$\left(\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{d^\alpha z}{d\tau^\alpha}\right)_{\tau=\tau_0}. \qquad (1 \leqq \alpha \leqq s-2) \tag{2}$$

Ježto C a C' mají s-bodový styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, vychází ze (2) a ze **179**, že existují čísla a_0, b_0 taková, že

$$\delta^{s-1}x - d^{s-1}x = a_0 dx + b_0 x.$$

Ježto však $\delta^\alpha u = d^\alpha u$, $\delta^\alpha v = d^\alpha v$ $(1 \leqq \alpha \leqq s-2)$, jest patrně

$$\delta^{s-1}x - d^{s-1}x = \frac{\partial x}{\partial u}(\delta^{s-1}u - d^{s-1}u) + \frac{\partial x}{\partial v}(\delta^{s-1}v - d^{s-1}v).$$

Jest tedy pro $|u, v|_b = |u_0, v_0|_b$

$$b_0 x + (\delta^{s-1}u - d^{s-1}u - a_0 du)\frac{\partial x}{\partial u} + (\delta^{s-1}v - d^{s-1}v - a_0 dv)\frac{\partial x}{\partial v} = 0_b.$$

Ježto ar. body x, $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ jsou lin. nezávislé, jest

$$b_0 = 0, \quad \delta^{s-1}u = d^{s-1}u + a_0 du, \quad \delta^{s-1}v = d^{s-1}v + a_0 dv.$$

Klademe-li

$$\tau = \tau' - \frac{a_0}{(s-1)!}(\tau' - \tau_0)^{s-1},$$

bude patrně

$$\left[\frac{d^\alpha z(\tau)}{d\tau'^\alpha}\right]_{\tau'=\tau_0} = \left(\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}\right)_{t=t_0}, \qquad (1 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

z čehož vychází ihned, že diferenciály (1) patří ke křivce C' a k bodu $\{z(\tau_0)\}$.

Styk rovinové formy s plochou.

256. Buď P_r rovinová forma; buď $M = M\{x(u, v)\}$ plocha třídy $r \geqq 1$; buď $\{x(u_0, v_0)\}$ bod plochy M. Pravíme, že P_r a M mají jednobodový styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, když P_r jest incidentní s $\{x(u_0, v_0)\}$. Pravíme, že P_r a M mají s-bodový $(2 \leqq s \leqq r+1)$ styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, když

$$\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}(SP_r x(u, v))\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = 0. \qquad \left(0 \leqq \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-1;\ \frac{\partial^0}{\partial u^0} = \frac{\partial^0}{\partial v^0} = 1\right) \tag{1}$$

Pravíme, že P_r a M mají právě s-bodový $(1 \leqq s \leqq r)$ styk v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$, když v tomto bodě mají styk s-bodový, ne však styk $(s+1)$-bodový.

Že jsme k této definici oprávněni, je patrné ze **257** a **174**. Z definice vychází ihned, že z s-bodového styku P_r a M v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$ plyne s-bodový styk v tomto bodě pro P_r a kteroukoli plochu, jež splyne s M v okolí bodu $\{x(u_0, v_0)\}$. Platí věta: Buďte P_r a Q_r rovinové formy; buď $M = M\{x(u, v)\}$ plocha třídy r; buď $\{x(u_0, v_0)\}$ bod plochy M. Mají-li P_r a M s-bodový styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, mají-li dále Q_r a M s'-bodový styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, a je-li $s + s' \leqq r + 1$, má rovinová forma $P_r \cdot Q_r$ $(s + s')$-bodový styk s M v $\{x(u_0, v_0)\}$. Důkaz podobně jako ve **174**; plyne ostatně též ze **257**.

257. Buď P_r rovinová forma; buď $M = M\{x(u, v)\}$ plocha třídy $r \geqq 1$; buď $\{x(u_0, v_0)\}$ bod plochy M. P_r a M mají s-bodový $(1 \leqq s \leqq r + 1)$ styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, když a jen když P_r a kterákoli křivka C třídy $s - 1$ (třídy 1 pro $s = 1$) na ploše M obsahující $\{x(u_0, v_0)\}$ mají s-bodový styk v $\{x(u_0, v_0)\}$.

Že podmínka je nutná, vychází ihned ze **174**, **253** a **256**. Že podmínka stačí, je zřejmé pro $s = 1$ a může se tedy dokazovati indukcí vzhledem k s. Předpokládejme tedy, že jsou splněny ty rovnice **256** (1), v nichž $\alpha \leqq s - 2 \leqq 0$, a že — ať C jest jakákoli křivka třídy $s - 1$ na ploše M obsahující $\{x(u_0, v_0)\}$ — P_r a C mají s-bodový styk v $\{x(u_0, v_0)\}$. Máme dokázati, že platí i ty rovnice **256** (1), v nichž $\alpha = s - 1$. Buďte

$$du,\ d^2u, \dots d^{s-1}u;\ dv,\ d^2v, \dots d^{s-1}v$$

diferenciály patřící ke křivce C a k bodu $\{x(u_0, v_0)\}$. Dle **174** a **254** (3) jest pak

$$\left[d^{s-1} SP_r x(u, v)\right]_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že jsou splněny ty rovnice **256** (1), v nichž $\alpha < s - 1$, je však

$$d^{s-1} SP_r x(u, v) = \sum_{\nu=0}^{s-1} \left[\frac{\partial^{s-1}}{\partial u^\nu \partial v^{s-\nu-1}} SP_r x(u, v)\right] du^\nu dv^{s-\nu-1}. \tag{1}$$

Vhodnou volbou křivky C můžeme však — v. poznámku ve **254** na konci — docíliti toho, že du a dv mají jakékoli hodnoty mimo $du = dv = 0$. Je tedy pravá strana v (1) rovna nule, ať jakkoli zvolíme du, dv, t. j. jsou splněny i ty rovnice **256** (1), v nichž $\alpha = s - 1$.

258. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha třídy $r \geqq 1$ obsahující bod $\{x(u_0, v_0)\}$. Zvolme s tak, že $2 \leqq s \leqq r + 1$. Buď T množství ar. bodů y té vlastnosti, že, kdykoli rovinová forma P_r má s-bodový styk s plochou $M\{x(u, v)\}$ v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$, polára $[P_r; y]$ ar. bodu y vzhledem ku P_r jest incidentní s $\{x(u_0, v_0)\}$. Pak jest $T = \left\{x(u_0, v_0), \left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]_{u=u_0,\ v=v_0}, \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]_{u=u_0,\ v=v_0}\right\}$.

Pro stručnost položme

$$x_0 = x,\ x_1 = \frac{\partial x}{\partial u},\ x_2 = \frac{\partial x}{\partial v}. \qquad (u = u_0,\ v = v_0)$$

Z **15** vychází ihned, že T jest lineární systém. Mají-li P_r a $M\{x(u,v)\}$ s-bodový styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, jest, ježto $s \geqq 2$ (v. **50** a **62** (2))

$$S[P_r;\ x_0]\, x_0 = 0,\ S[P_r;\ x_1]\, x_0 = 0,\ S[P_r;\ x_2]\, x_0 = 0.$$

tedy x_0, x_1, x_2 náleží do T. Ježto T jest lin. systém, zbývá ukázati, že, když $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) \neq 0$, existuje rovinová forma P_r, mající s $M\{x\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$ a taková, že $S[P_r;\ x_3]\, x_0 \neq 0$. Buď ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2, x_3. Ukažme, že žádané vlastnosti má rovinová forma stupně $s - 1$

$$(1)\quad P_r = \xi_0^{s-2}\xi_3 + \Sigma\, c_{\alpha_1,\,\alpha_2}\, \xi_0^{s-\alpha_1-\alpha_2-1}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2} \qquad (0 \leqq \alpha_1,\ 0 \leqq \alpha_2,\ 2 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-1)$$

(pro $s = 2 : P_r = \xi_3$), zvolíme-li vhodně koeficienty $c_{\alpha_1,\,\alpha_2}$. Buď

$$x(u,v) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

takže λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 jsou funkce třídy r ar. bodu $\{u, v\}$, a pro $u = u_0$, $v = v_0$ jest

$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

$$(2)\quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial u} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial u} = \frac{\partial \lambda_3}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial v} = 1,\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial v} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} = \frac{\partial \lambda_3}{\partial v} = 0.$$

Zřejmě jest

$$\varphi_s(u,v) = SP_r\, x(u,v) = \lambda_0^{s-2}\lambda_3 + \Sigma\, c_{\alpha_1,\,\alpha_2}\lambda_0^{s-\alpha_1-\alpha_2-1}\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}$$
$$(0 \leqq \alpha_1;\ 0 \leqq \alpha_2;\ 2 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-1)$$

Dle (2) jest $\varphi_2(u_0, v_0) = 0$, $\left[\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right]_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = \left[\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}\right]_{\substack{u = u_0\\ v = v_0}} = 0$. Můžeme tedy dokazovati indukcí vzhledem k s, t. j. předpokládati, že jsme již určili $c_{\alpha_1,\,\alpha_2}$ $(0 \leqq \alpha_1;\ 0 \leqq \alpha_2;\ 2 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-2)$ tak, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ funkce

$$\varphi_{s-1}(u,v) = \lambda_0^{s-3}\lambda_3 + \Sigma\, c_{\alpha_1,\,\alpha_2}\lambda_0^{s-\alpha_1-\alpha_2-2}\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2} \qquad (0 \leqq \alpha_1;\ 0 \leqq \alpha_2;\ 2 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-2)$$

vymizí i se všemi svými derivacemi řádu $\leqq s-2$, načež stačí ukázati, že lze určiti $c_{\alpha,\,s-\alpha-1}$ $(0 \leqq \alpha \leqq s-1)$ tak, že pro $u = u_0$, $v = v_0$ funkce

$$\varphi_s(u,v) = \lambda_0 \varphi_{s-1}(u,v) + \Sigma\, c_{\alpha,\,s-\alpha-1}\lambda_1^{\alpha}\lambda_2^{s-\alpha-1} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

vymizí i se všemi svými derivacemi řádu $\leqq s-1$. Dle (2) a dle předpokládané vlastnosti funkce $\varphi_{s-1}(u, v)$ je však patrně

$$\left[\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\varphi_s(u,v)\right]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}=0, \qquad (0\leqq\alpha_1;\ 0\leqq\alpha_2;\ 2\leqq\alpha_1+\alpha_2\leqq s-2)$$

$$\left[\frac{\partial^{s-1}}{\partial u^{\alpha}\partial v^{s-\alpha-1}}\varphi_s(u,v)\right]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}=\left[\frac{\partial^{s-1}}{\partial u^{\alpha}\partial v^{s-\alpha-1}}\varphi_{s-1}(u,v)\right]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}+$$

$$+\alpha!(s-\alpha-1)!\,c_{\alpha,\,s-\alpha-1}, \quad (0\leqq\alpha\leqq s-1)$$

takže lze čísla $c_{\alpha,\,s-\alpha-1}$ $(0\leqq\alpha\leqq s-1)$ žádaným způsobem určiti. Dle (1) a **48** (6) jest

$$[P_r;\, x_3]=\frac{1}{s-1}\,\xi_0^{\,s-2},$$

takže

$$S[P_r;\ x_3]\,x_0=\frac{1}{s-1}\neq 0,$$

jak bylo žádáno.

259. Buď $M\{x(u,v)\}$ $(|u,v|_b$ v $O)$ plocha třídy r. Buď $\overset{u,v}{P_r}=\Sigma A_{ikl}\ldots\xi^i\eta^k\zeta^l\ldots$ rovinová forma závislá na $|u, v|_b$ tak, že koeficienty $A_{ikl}\ldots$ i souřadnice ar. rovin $\xi,\eta,\zeta\ldots$ jsou funkce třídy s $(1\leqq s\leqq r+1)$ v oblasti O. Když a jen když pro každý ar. bod $|u,v|_b$ z O jest

$$(1)\quad S\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\overset{u,v}{P_r}\right)x(u,v)=0, \qquad \left(\alpha_1\geqq 0;\ \alpha_2\geqq 0;\ \alpha_1+\alpha_2\leqq s-1;\ \frac{\partial^0}{\partial u^0}=\frac{\partial^0}{\partial v^0}=1\right)$$

mají — ať jakkoli zvolíme $|u,v|_b$ v O — $\overset{u,v}{P_r}$ a $M\{x(u,v)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x(u, v)\}$.

Důkaz je stejný jako ve **182.**

260. Buď $M\{x(u,v)\}$ $(|u, v|_b$ v $O)$ plocha třídy r. Buď $\overset{u,v}{P_r}=\Sigma A_{ikl}\ldots\ \xi^i\eta^k\zeta^l\ldots$ rovinová forma, závislá na $|u,v|_b$ tak, že koeficienty $A_{ikl}\ldots$ i souřadnice ar. rovin $\xi,\eta,\zeta\ldots$ jsou funkce třídy s $(2\leqq s\leqq r+1)$ v oblasti O. Tehdy a jen tehdy mají, ať jakkoli zvolíme $|u,v|_b$ v O, $\overset{u,v}{P_r}$ a $M\{x(u, v)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x(u,v)\}$, když pro každý ar. bod $|u,v|_b$ z O 1° $\overset{u,v}{P_r}$ jest incidentní s $x(u, v)$, 2° $M\{x(u,v)\}$ má v bodě $\{x(u,v)\}$ $(s-1)$-bodový styk i s $\frac{\partial}{\partial u}\overset{u,v}{P_r}$ i s $\frac{\partial}{\partial v}\overset{u,v}{P_r}$.

Důkaz je stejný jako ve **183.**

261. Buď $M\{x(u,v)\}$ ($|u,v|_b$ v O) plocha třídy r. Buď $\overset{u,a}{P_r} = \Sigma A_{ikl}\ldots\,\xi^i\eta^k\zeta^l\ldots$ rovinová forma závislá na $|u,v|_b$ tak, že koeficienty $A_{ikl}\ldots$ i souřadnice ar. rovin $\xi,\eta,\zeta\ldots$ jsou funkce třídy s ($1 \leqq s \leqq r$) v oblasti O. Ať jakkoli zvolíme $|u,v|_b$ v O, mějte $\overset{u,v}{P_r}$ a $M\{x(u,v)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x(u,v)\}$. Buď $|u_0,v_0|_b$ ar. bod z O. $\overset{u_0,v_0}{P_r}$ a $M\{x(u,v)\}$ mají v $\{x(u_0,v_0)\}$ $(s+1)$-bodový styk, když a jen když $M\{x(u,v)\}$ má v bodě $\{x(u_0,v_0)\}$ s-bodový styk i s $\left[\frac{\partial}{\partial u}\overset{u,v}{P_r}\right]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}$ i s $\left[\frac{\partial}{\partial v}\overset{u,v}{P_r}\right]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}$.

Důkaz je stejný jako ve **184.**

Styk křivky s plochou.

262. Buď $M\{x(u,v)\}$ plocha třídy r; buď $C\{y(t)\}$ křivka třídy r. Buď $\{x_0\} = \{x(u_0,v_0)\} = \{y(t_0)\}$ bod náležející i ploše $M\{x\}$ i křivce $C\{y\}$. Pravíme, že $M\{x\}$ a $C\{y\}$ mají s-bodový ($1 \leqq s \leqq r+1$) styk v bodě $\{x_0\}$, když každá rovinová forma, která má v $\{x_0\}$ s-bodový styk s $M\{x\}$, má v $\{x_0\}$ s-bodový styk s $C\{y\}$. Pravíme, že $M\{x\}$ a $C\{y\}$ mají právě s-bodový ($1 \leqq s \leqq r$) styk v bodě $\{x_0\}$, když mají v tomto ar. bodě styk s-bodový, ne však styk $(s+1)$-bodový.

Je zřejmé, že jednobodový styk plochy s křivkou nastane v každém společném bodě. Je zřejmé, že s-bodový styk zůstane zachován, když plochu $M\{x\}$ (křivku $C\{y\}$) nahradíme jinou plochou (křivkou), jež s ní splyne v okolí bodu $\{x_0\}$.

263. Plocha $M\{x(u,v)\}$ a křivka $C\{y(t)\}$ mějte s-bodový styk v bodě $\{x_0\}$. Buď K kolineace ar. bodů; buď v K: $x(u,v) \backsim x'(u,v)$, $y(t) \backsim y'(t)$, $x_0 \backsim x'_0$. Plocha $M\{x'(u,v)\}$ a křivka $C\{y'(t)\}$ mají s-bodový styk v bodě $\{x'_0\}$.

Buď P_r rovinová forma, která má s $M\{x(u,v)\}$ (s $C\{y(t)\}$) s-bodový styk v $\{x_0\}$. Buď $P_r \backsim P'_r$ v Ass. K. Pak P'_r má s $M\{x'(u,v)\}$ (s $C\{y'(t)\}$) s-bodový styk v $\{x_0\}$ dle **47.**

264. Buď $M\{x(u,v)\}$ plocha třídy r; buďte $C\{y(t)\}$, $C\{z(\tau)\}$ křivky třídy r. Buď $\{x_0\}$ bod obsažený i v $M\{x\}$ i v $C\{y\}$ i v $C\{z\}$. $M\{x\}$ a $C\{y\}$ mějte s-bodový ($1 \leqq s \leqq r+1$) styk v $\{x_0\}$; $C\{y\}$ a $C\{z\}$ mějte s-bodový styk v $\{x_0\}$: pak $M\{x\}$ a $C\{z\}$ mají s-bodový styk v $\{x_0\}$.

Vychází ihned ze **174** a **262.**

265. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha třídy r; buď $C\{y(t)\}$ křivka třídy r. Buď $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\} = \{y(t_0)\}$ bod náležející i ploše $M\{x\}$ i křivce $C\{y\}$. Plocha $M\{x\}$ a křivka $C\{y\}$ mají v $\{x_0\}$ s-bodový $(1 \leqq s \leqq r+1)$ styk, když a jen když na ploše $M\{x\}$ existuje křivka $C\{z(\tau)\}$, mající v bodě $\{x_0\}$ s-bodový styk s $C\{y(t)\}$.

Že podmínka stačí, vychází ihned ze **257.** Předpokládejme tedy, že $M\{x\}$ a $C\{y\}$ mají v $\{x_0\}$ s-bodový styk. Když $\sigma = 1$, je zřejmé, že na ploše $M\{x\}$ lze udati křivku $C\{z_\sigma\}$, mající v bodě $\{x_0\}$ σ-bodový styk s $C\{y\}$. Běží o to, že tomu tak jest i pro $\sigma = s$, což můžeme dokazovati indukcí vzhledem k σ. Předpokládejme tedy, že pro určité σ $(1 \leqq \sigma < s)$ byla již křivka $C\{z_\sigma\}$ určena. Označme: písmenem d diferenciály příslušné ke křivce $C\{z_\sigma\}$ a k bodu $\{x_0\}$; písmenem δ diferenciály příslušné k hledané křivce $C\{z_{\sigma+1}\}$ a k bodu $\{x_0\}$. Dle **178** a **254** můžeme předpokládati, že

$$x_0 = x(u_0, v_0) = y(t_0), \quad d^\alpha x = \left(\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}\right)_{t=t_0}. \qquad (1 \leqq \alpha \leqq \sigma - 1) \tag{1}$$

Předpokládejme, že $C\{z_{\sigma+1}\}$ je tak volena, že

$$\delta^\alpha u = d^\alpha u, \quad \delta^\alpha v = d^\alpha v, \qquad (1 \leqq \alpha \leqq \sigma - 1)$$

takže

$$\delta^\alpha x = d^\alpha x. \qquad (1 \leqq \alpha \leqq \sigma - 1) \tag{2}$$

Pak jest patrně

$$\delta^\sigma x - d^\sigma x = \left[(\delta^\sigma u - d^\sigma u)\frac{\partial x}{\partial u} + (\delta^\sigma v - d^\sigma v)\frac{\partial x}{\partial v}\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}},$$

čili

$$\delta^\sigma x = d^\sigma x + \left(\alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}. \tag{3}$$

Dle poznámky na konci **254** můžeme křivku $C\{z_{\sigma+1}\}$ zvoliti tak, že čísla α, β mají libovolně předepsané hodnoty. Běží o to, určiti α, β tak, aby $C\{y\}$ a $C\{z_{\sigma+1}\}$ měly v $\{x_0\}$ $(\sigma+1)$-bodový styk. Dle (1), (2), **179** a **254** (3) je k tomu nutné a stačí, aby existovala čísla a_0, b_0 taková, že

$$\left(\frac{d^\sigma y}{dt^\sigma}\right)_{t=t_0} - \delta^\sigma x = a_0\, dx + b_0 x_0 = a_0\, du \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} + a_0\, dv \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} + b_0 x_0. \tag{4}$$

Buď nyní P_r rovinová forma mající v $\{x_0\}$ s-bodový styk s $M\{x\}$, tedy též s $C\{y\}$ a s $C\{z_\sigma\}$. Pak jest, ježto $\sigma < s$

$$\left[\frac{d^\sigma}{dt^\sigma} SP_r y(t)\right]_{t=t_0} = 0, \quad d^\sigma\big(SP_r x(u, v)\big) = 0.$$

Odečtením obdržíme dle (1)

$$(5) \qquad S\left[P_r; \left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_{t=t_0} - d^3x\right] x_0 = 0.$$

Rovnice (5) platí pro každou rovinovou formu mající v $\{x_0\}$ s-bodový styk s $M\{x\}$; dle **258** existují tedy čísla A, B, C taková, že

$$(6) \qquad \left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_{t=t_0} = d^3x + \left[A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} + Cx\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}.$$

Ze (3) a (6) vychází, že stačí zvoliti libovolně a_0 a položiti

$$\alpha = a_0 du + A, \ \beta = a_0 dv + B,$$

načež rovnice (4) budou splněny, když $b_0 = C$.

266. Buď $C\{y(t)\}$ křivka třídy r obsahující bod $\{x_0\}$ $(x_0 = y(t_0))$. Buď $M^a = M[P_r]$ algebraická plocha, jež rovněž obsahuje $\{x_0\}$; nebuď však $\{x_0\}$ singulární pro M^a. Křivka $C\{y(t)\}$ a algebraická plocha $M[P_r]$ mají v bodě $\{x_0\}$ s-bodový $(1 \leqq s \leqq r+1)$ styk, když a jen když $C\{y(t)\}$ a rovinová forma P_r mají v bodě $\{x_0\}$ s-bodový styk.

Že podmínka je nutná, ukáže se jako ve **180**. Předpokládejme tedy, že $C\{x(u)\}$ a P_r mají v $\{x_0\}$ s-bodový styk. Dle **265** je třeba ukázati, že na $M[P_r]$ existuje křivka, mající s $C\{y\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$. Tento důkaz je však stejný jako důkaz existence křivky $C\{z(\tau)\}$ ve **265**, pouze místo **258** užijeme **270**.

267. Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy r obsahující bod $\{x_0\}$. Buď $\{x_0\}$ singulární bod algebraické plochy $M[P_r]$. Pravíme, že $C\{x(u)\}$ a $M[P_r]$ mají s-bodový $(1 \leqq s \leqq r+1)$ styk v bodě $\{x_0\}$, když $C\{x(u)\}$ a P_r mají s-bodový styk v $\{x_0\}$.

Buď $\{x_0\}$ singulární bod algebraické plochy $M[P_r]$. Buď $C\{x(u)\}$ křivka třídy r obsahující $\{x_0\}$. Pak $C\{x(u)\}$ a $M[P_r]$ mají dvojbodový styk v $\{x_0\}$. Je-li $2 \leqq s \leqq r+1$, mají-li $C\{x(u)\}$ a $M[P_r]$ s-bodový styk v $\{x_0\}$, a je-li $C\{y(v)\}$ křivka třídy r mající s $C\{x(u)\}$ $(s-1)$-bodový styk v $\{x_0\}$, mají také $C\{y(v)\}$ a $M[P_r]$ s-bodový styk v $\{x_0\}$.

Důkaz je stejný jako ve **181**.

Tečny plochy.

268. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha obsahující bod $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\}$. Buď C křivka na ploše $M\{x\}$ obsahující $\{x_0\}$. Buďte du, dv, dx

diferenciály patřící ke křivce C a k bodu $\{x_0\}$. Tečna křivky C v bodě $\{x_0\}$ jest $\{p\}$, kde

$$p = \left(x, \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) = (x dx). \qquad (|u, v|_b = |u_0, v_0|_b) \tag{1}$$

Pravíme, že $\{p\}$ je tečna plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$. Přímka $\{q\}$ je tečnou plochy $M\{x\}$ v $\{x_0\}$, když a jen když řada bodová soumístná s $\{q\}$ má v $\{x_0\}$ dvojbodový styk s $M\{x\}$.

Vychází ihned ze **185**, **195** a **265**.

269. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha obsahující bod $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\}$. Množství tečen plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$ je svazek přímek $\{x_0; \xi_0\}^r$, kde

$$\xi_0 = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}. \tag{1}$$

Pravíme, že $\{\xi_0\}$ je tečná rovina plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$.

270. Buď $\{x_0\}$ nesingulární bod algebraické plochy $M[P_r]$. Ar. bod y jest incidentní s tečnou rovinou algebraické plochy $M[P_r]$ v bodě $\{x_0\}$, když a jen když jeho polára $[P_r; y]$ vzhledem ku P_r jest incidentní s $\{x_0\}$.

Vychází ihned z **250** a **258**.

271. Tečna $\{xdx\}$ plochy $M\{x(u, v)\}$ třídy 2 v bodě $\{x(u_0, v_0)\} = \{x_0\}$ má s $M\{x\}$ trojbodový styk v $\{x_0\}$, když a jen když bod $\{|du, dv|_b\}$ je kořenem (v. **74**) formy

$$\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2\right) = 0. \qquad (|u, v|_b = |u_0, v_0|_b) \tag{1}$$

Taková tečna nazývá se asymptotická tečna plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$.

Dle **186** a **265** jest přímka $\{xdx\}$ asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$, když a jen když jest inflexní tečnou v $\{x_0\}$ nějaké křivky na $M\{x\}$, tedy dle **254**, když lze určiti d^2u a d^2v tak, aby bylo

$$\eta = (x_0, dx, d^2x) = 0_r.$$

Avšak, klademe-li pro $u = u_0$, $v = v_0$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_2, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = x_{11}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = x_{12}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = x_{22},$$

jest

$$\eta = (x_0, x_1 du + x_2 dv, x_1 d^2u + x_2 d^2v + z),$$

kde

$$z = x_{11} du^2 + 2 x_{12} du dv + x_{22} dv^2.$$

Předpokládejme nejprve, že platí (1). Pak jest

$$z = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

a tedy

$$\eta = [x_0, x_1 du + x_2 dv, x_1 (d^2 u + \lambda_1) + x_2 (d^2 v + \lambda_2)],$$

takže stačí zvoliti $d^2 u = -\lambda_1$, $d^2 u = -\lambda_2$, aby bylo $\eta = 0_r$. Buď naopak $\eta = 0_r$. Pak

$$z + x_1 d^2 u + x_2 d^2 v = \lambda x + \mu (x_1 du + x_2 dv),$$

tedy

$$z = \lambda x + (\mu du - d^2 u) x_1 + (\mu dv - d^2 v) x_2$$

a rovnice (1) je splněna.

272. Jsou-li tři tečny plochy $M\{x(u, v)\}$ třídy 2 v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$ asymptotické, jest každá tečna plochy $M\{x\}$ v $\{x(u_0, v_0)\}$ asymptotickou. Pravíme pak, že tečná rovina plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$ je stacionární.

Vychází ihned ze **271**. Tečná rovina plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$ je stacionární, když a jen když pro $|u, v|_b = |u_0, v_0|_b$ jest

$$(1) \qquad \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) = 0.$$

273. Když a jen když každá tečná rovina plochy $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) třídy 2 je stacionární, jest $M\{x(u, v)\}$ obsažena v pevném poli bodovém.

Když každý bod plochy $M\{x(u, v)\}$ jest obsažen v poli ar. bodů Adj. $\{\xi\}$, je zřejmě

$$S\xi x = S\xi \frac{\partial x}{\partial u} = S\xi \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0,$$

tedy, ježto $\left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0_r$, všecky rovnice **272** (1) jsou splněny pro každý ar. bod $|u, v|_b$ z O. Buďte naopak splněny všecky rovnice **272** (1) pro každý ar. bod $|u, v|_b$ z O. Položme

$$\xi = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Ježto $\xi \neq 0_r$, vidíme z **272** (1) snadno, že lze určiti $\lambda = \lambda(u, v)$, $\mu = \mu(u, v)$ jako spojité funkce v O tak, že pro každý ar. bod $|u, v|_b$ z O jest

$$(1) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \lambda \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \mu \xi.$$

Jest ukázati, že rovina $\{\xi\}$ je pevná. Dle **232** stačí ukázati, že, když $|u_0, v_0|_b$ jest jakkoli zvolený ar. bod z O a když V jest okolí ar. bodu

$|u_0, v_0|_b$, rovina $\{\xi\}$ je pevná, pokud $|u, v|_b$ zůstává ve V. Dle prvé (druhé) rovnice (1) a dle **65** nemění se však rovina $\{\xi\}$, když měníme u (v).

274. Není-li tečná rovina plochy $M\{x(u,v)\}$ třídy 2 v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$ stacionární, existují buď 1° dvě, nebo 2° jedna, nebo 3° neexistuje žádná asymptotická tečna plochy $M\{x(u,v)\}$ v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$. Pravíme pak, že $\{x(u_0, v_0)\}$ jest 1° hyperbolický, 2° parabolický, 3° eliptický bod plochy $M\{x(u,v)\}$. Je-li tečná rovina plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$ stacionární, pravíme též, že $\{x(u_0, v_0)\}$ jest parabolický bod plochy $M\{x\}$. Klademe-li

(1) $$b_{11} = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right), \quad b_{12} = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right), \quad b_{22} = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right),$$

(2) $$B(u, v) = b_{12}^2 - b_{11} b_{22},$$

jest 1° $B(u_0, v_0) > 0$, 2° $B(u_0, v_0) = 0$, 3° $B(u_0, v_0) < 0$.

Zřejmé dle **271**.

275. Buď $M\{x(u,v)\}$ plocha třídy $r \geqq 2$ obsahující bod $\{x(u_0, v_0)\}$. Tečná rovina plochy $M\{x\}$ v tomto bodě nebuď stacionární. Buď

$$x = x_0, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = x_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_2. \qquad (|u, v|_b = |u_0, v_0|_b)$$

Buď

$$p = (x_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \quad q = (x_0, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2). \qquad (|\alpha_1, \alpha_2|_b \neq 0_b, \ |\beta_1, \beta_2|_b \neq 0_b)$$

Tečny $\{p\}$ a $\{q\}$ plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$ nazývají se konjugované, když

(1) $$\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_{\substack{u = u_0 \\ v = v_0}} = 0.$$

Množství párů konjugovaných tečen plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$ jest involuce. Tato involuce jest 1° hyperbolická, 2° parabolická, 3° eliptická, když $\{x_0\}$ jest 1° hyperbolický, 2° parabolický, 3° eliptický bod plochy $M\{x\}$. Tečna $\{p\}$ je dvojnou přímkou involuce konjugovaných tečen plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$, když a jen když jest asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v tomto bodě.

Důkaz je zřejmý. Je však třeba ukázati, že jsme k definici konjugovaných tečen oprávněni, t. j. že pár konjugovaných tečen přejde v pár konjugovaných tečen, když zavedeme místo $|u, v|_b$ nový parametr $|u', v'|_b = |\varphi(u,v), \psi(u, v)|_b$, kde funkce φ, ψ definují korespondenci $\mathfrak{K}$ třídy r.

Involuce J konjugovaných tečen je zřejmě určena (v. **80**) kvadratickou formou v du, dv:

$$\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, d^2x\right).$$

Je-li však $x(u,v) = x'(u',v')$ a $d \sim d'$ v $d\mathfrak{K}$ (v. **238**), vidíme snadno, že

$$(2) \qquad \left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, d^2x\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\left(x', \frac{\partial x'}{\partial u'}, \frac{\partial x'}{\partial v'}, d'^2x'\right).$$

Odtud vychází žádané dle **80**.

276. Buď $M\{x(u,v)\}$ plocha třídy $r \geqq 2$. Buď $C\{x[\varphi(t), \psi(t)]\}$, $(t\,\mathrm{v}\langle a+0, b-0\rangle)$ křivka třídy r' $(1 \leqq r' \leqq r)$ na ploše $M\{x\}$. Buď $a < t_0 < b$, $\varphi(t_0) = u_0$, $\psi(t_0) = v_0$, takže $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\}$ jest bod křivky C. Je-li $\{x_0\}$ parabolický bod plochy $M\{x\}$, nechť není tečna křivky C v bodě $\{x_0\}$ asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$. Existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že množství tečných rovin plochy $M\{x\}$ v bodech křivky $C\{x[\varphi(t), \psi(t)]\}$ $(t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon)$ jest duální křivka $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\{\xi[\varphi(t), \psi(t)]\}$ $(t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon)$, při čemž

$$(1) \qquad \xi(u,v) = \left(x\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Pravíme, že duální křivka $\mathfrak{C}$ jest konjugována ke křivce C vzhledem ku ploše $M\{x\}$ a píšeme

$$\mathfrak{C} = \text{Konj.}\, C.$$

Tečnou duální křivky*) Konj. C v rovině $\{\xi(u_0, v_0)\}$ jest tečna plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$ konjugovaná k tečně křivky C v bodě $\{x_0\}$.

Označme d diferenciály patřící ke křivce C, tedy $du = \frac{d\varphi}{dt}$, $dv = \frac{d\psi}{dt}$. Běží pouze o to, zjistiti, že $(\xi d\xi) \neq 0$, a že $\{\xi d\xi\}$ je konjugovaná tečna ke $(x dx)$. Definujeme b_{11}, b_{12}, b_{22} jako ve **274**. Dle (1) jest

$$(2) \qquad d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial u}du + \frac{\partial \xi}{\partial v}dv = \left[-\left(x\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + \left(x\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)\right]du + \\ + \left[-\left(x\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) + \left(x\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)\right],$$

takže dle **109** (1) a **274** (1) jest

$$(3) \qquad (\xi d\xi) = \left[x, (b_{12}du + b_{22}dv)\frac{\partial x}{\partial u} - (b_{11}du + b_{12}dv)\frac{\partial x}{\partial v}\right].$$

---

*) Pro $m = 3$ k výrazu „tečna křivky C v bodě $\{x\}$“ je duální výraz „tečna duální křivky $\mathfrak{C}$ v rovině $\{\xi\}$.“

Je tedy $(\xi d\xi) = 0_p$ jen, když

$$b_{11}du + b_{12}dv = b_{12}du + b_{22}dv = 0,$$

t. j. když $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = 0$, $b_{11}du^2 + 2b_{12}du\,dv + b_{22}dv^2 = 0$, což jsme vyloučili. Že $\{\xi d\xi\}$ je konjugovaná tečna k $\{xdx\}$, plyne ihned ze (3), **274** (1) a **275** (1).

277. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha třídy $r \geqq 2$. Buď $C = C\{x[\varphi(t), \psi(t)]\}$ křivka třídy r' $(1 \leqq r' \leqq r)$ na ploše $M\{x\}$. Buď $R = R\{p(t)\}$ osnova třídy $r'' \geqq 2$ taková, že pro každé t přímka $\{p(t)\}$ je tečnou plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x[\varphi(t), \psi(t)]\}$ křivky C. Osnova R je rozvinutelná, když a jen když pro každé t přímka $\{p(t)\}$ je buď tečnou křivky C v příslušném bodě $\{x\}$, nebo tečnou plochy $M\{x\}$ konjugovanou k tečně křivky C v $\{x\}$.

Označme d diferenciály patřící ke křivce C. Buď

$$p = (xy), \quad y = \beta_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial x}{\partial v}. \tag{1}$$

Osnova R je dle **210** (2) rozvinutelná, když a jen když

$$(xy\,dx\,dy) = S\,(xy\,dx)\,dy = 0.$$

Dle (1) je však

$$(xy\,dx) = \left(x, \beta_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial x}{\partial v}, du \frac{\partial x}{\partial u} + dv \frac{\partial x}{\partial v}\right) = (\beta_1 dv - \beta_2 du)\left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$dy = \beta_1 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv\right) + \beta_2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv\right) + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d\beta_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d\beta_2}{dt}.$$

Definujeme-li b_{11}, b_{12}, b_{22} jako ve **274**, je tedy

$$(xy\,dx\,dy) = (\beta_1 dv - \beta_2 du)\,[\beta_1 du\, b_{11} + (\beta_1 dv + \beta_2 du)\, b_{12} + \beta_2 dv\, b_{22}].$$

Když napravo vymizí prvý faktor, přímky

$$\left\{\left(x, \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)\right\}, \left\{\left(x, \beta_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial x}{\partial v}\right)\right\} \tag{2}$$

jsou rovné; vymizí-li druhý faktor, jsou přímky (2) konjugované tečny plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x\}$.

278. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha třídy $r \geqq 2$. Buď C křivka třídy r' $(2 \leqq r' \leqq r)$ na ploše $M\{x\}$ obsahující bod $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\}$. Tečná rovina plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$ jest oskulační rovinou křivky C v bodě $\{x_0\}$, když a jen když tečna křivky C v $\{x_0\}$ jest asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$.

Buďte d diferenciály patřící k C. Buď

$$\xi = \left(x \; \frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Dle **196** rovina $\{\xi\}$ jest oskulační rovinou křivky C v bodě $\{x\}$, když a jen když

$$S\xi x = 0, \; S\xi dx = 0, \; S\xi d^2 x = 0.$$

Prvé dvě rovnice zřejmě vždy jsou splněny; třetí praví dle **271** (1), že tečna $\{xdx\}$ je asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x\}$.

279. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha třídy $r \geqq 2$. Křivka C třídy $r' \geqq 2$ na ploše $M\{x\}$ nazývá se asymptotickou křivkou plochy $M\{x\}$, když v každém jejím bodě $\{x\}$ její tečna jest asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v $\{x\}$, nebo když v každém jejím bodě $\{x\}$ tečná rovina plochy $M\{x\}$ jest její oskulační rovinou.

Obě definice jsou ekvivalentní dle **278.** Z kterékoli z nich plyne, že, když všecky body křivky C náležejí pevné řadě bodové, C jest asymptotickou křivkou.

280. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha třídy 3; buď $\{x_0\}$ hyperbolický bod plochy $M\{x\}$. V podstatě dvě křivky na ploše $M\{x\}$ obsahují $\{x_0\}$ a jsou asymptotické pro $M\{x\}$.

Slovy „v podstatě" rozumíme: 1^0 existují dvě takové křivky, jež nesplynou v okolí bodu $\{x_0\}$; 2^0 každá jiná křivka mající touž vlastnost splyne s jednou z nich v okolí bodu $\{x_0\}$.

Buď $x_0 = x(u_0, v_0)$. Definujme b_{11}, b_{12}, b_{22} jako ve **274** a pro určitost předpokládejme, že $b_{22}(u_0, v_0) \neq 0$. Pro asymptotickou křivku C jest dle **271** a **279** nutné a stačí, aby v každém bodě křivky C platilo

$$b_{11}\, du^2 + 2b_{12}\, du\, dv + b_{22}\, dv^2 = 0, \tag{1}$$

když diferenciály d patří k C. Ježto $b_{22}(u_0, v_0) \neq 0$, jest v $\{x_0\}: du \neq 0$. Odtud plyne snadno, že, omezíme-li se na dosti malé okolí bodu $\{x_0\}$, u jest parametr křivky C. Buď tedy $C = C\{x(u, \varphi(u))\}$. Rovnice (1) rozpadá se ve dvě:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{-b_{12} + \sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}}{b_{22}}, \quad \frac{d\varphi}{du} = \frac{-b_{12} - \sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}}{b_{22}}.$$

Teorém nyní vychází snadno ze **64.**

281. Buď $R\{p(u)\}$ (u v $\langle a+0, b-0\rangle$) osnova třídy r. Množství M_p bodů incidentních vždy s jednou přímkou osnovy $R\{p(u)\}$ nazývá se přímková plocha; označení $M_p =$

$=MR\{p(u)\}$. Buď $p(u)=(y(u), z(u))$. Bod $\{x_0\}=\{z(u_0)+v_0 y(u_0)\}$ nebuď incidentní s $\{p(u)\}$ pro žádné u různé od u_0. Bod $\{x_0\}$ nebuď bod vratu osnovy $R\{p(u)\}$ v přímce $\{p(u_0)\}$. Buď V dosti malé okolí ar. bodu $|u_0, v_0|_b$. Přímková plocha $MR\{p(u)\}$ splyne v okolí bodu $\{x_0\}$ s plochou $M=M\{z(u)+vy(u)\}$. Je-li osnova $R\{p(u)\}$ 1° kuželová, 2° rozvinutelná, 3° zborcená pravíme, že M jest 1° kužel, 2° rozvinutelná plocha, 3° zborcená plocha. Každý bod rozvinutelné (zborcené) plochy jest parabolický (hyperbolický).

Snadný důkaz ponechávám čtenáři.

282. Buď $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) plocha třídy $r \geq 4$, jejíž každý bod jest parabolický. Tečná rovina plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x(u_0, v_0)\}$ nebuď stacionární. Existuje okolí V ar. bodu $|u_0, v_0|_b$ takové, že $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ ve V) jest rozvinutelná plocha.

Definujme b_{11}, b_{12}, b_{22} jako ve **274.** Buď na př. $b_{11} \neq 0$ v ar. bodě $|u_0, v_0|_b$ a tedy též v jistém okolí V_1 tohoto ar. bodu obsaženém v O. Ježto všecky body plochy $M\{x\}$ jsou parabolické, jest pro $|u, v|_b$ ve V_1 a pro všecka du, dv

$$b_{11}\,du^2 + 2b_{12}\,du\,dv + b_{22}\,dv^2 = \frac{1}{b_{11}}(b_{11}\,du + b_{12}\,dv). \tag{1}$$

Dle **64** existuje okolí V_2 ar. bodu $|u_0, v_0|_b$ a funkce $\varphi(t, v)$ třídy $r-2$ ve V_2 taková, že 1° všude ve V_2 jest

$$\frac{\partial\varphi(t,v)}{\partial v} = -\frac{b_{12}(t,v)}{b_{11}(t,v)}, \tag{2}$$

2° pro $v=v_0$ jest $\varphi(t, v)=t$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=1$. Je-li tedy $\psi(t, v)=v$, jest pro $|t, v|_b=|u_0, v_b|_b$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = 1.$$

Odtud snadno vychází, že, omezíme-li ar. bod $|u, v|_b$ na jisté okolí V ar. bodu $|u_0, v_0|_b$ obsažené ve V_2, můžeme zavésti za nový parametr plochy $M\{x\}$ ar. bod $|u_1, v_1|_b$ dle rovnic $u=\varphi(u_1, v_1)$, $v=v_1$, tedy položiti $x(u, v)=y(u_1, v_1)$. Z (1) a (2) vychází snadno, že při konstantním u_1 křivka $C\{y(u_1, v_1)\}$ jest asymptotická křivka plochy $M\{x\}=M\{y\}$. Abychom nekomplikovali označení, předpokládejme, že $u_1=u$, $v_1=v$. Pak je zřejmě

$$b_{22}=\left(x\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)=0,$$

$$b_{12}=\left(x\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)=0,$$

takže existují funkce a_i, $b_i\,(i=0,\,1,\,2)$ takové, že

(3)
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=a_0 x+a_1\frac{\partial x}{\partial u}+a_2\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=b_0 x+b_1\frac{\partial x}{\partial u}+b_2\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Můžeme předpokládati, že okolí V bylo zvoleno tak malé, že žádná tečná rovina plochy $M\{x\}$ není stacionární. Pak jest všude ve V

$$b_{11}=\left(x\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)\neq 0$$

a můžeme tedy ke každému ar. bodu y určiti jedním a jen jedním způsobem λ_0, λ_1, λ_2, μ tak, že jest

$$y=\lambda_0 x+\lambda_1\frac{\partial x}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial x}{\partial v}+\mu\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}.$$

Pro krátkost položme $\mu=f(y)$. Zřejmě jest

$$f(x)=f\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)=f\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0,\; f\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)=1,$$
$$f(\nu y)=\nu f(y),\; f(y_1+y_2)=f(y_1)+f(y_2).$$

Derivujeme-li prvou rovnici (3) dle v, nalezneme snadno

$$f\left(\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}\right)=0.$$

Derivujeme-li však druhou rovnici (3) dle u, obdržíme

$$f\left(\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}\right)=b_1.$$

Je tedy $b_1=0$, t. j.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=b_0 x+b_2\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Zvolíme-li tedy jakkoli u, křivka $C\{x(u,\,v)\}$ (u pevné) má všecky body inflexní a je tedy dle **186** obsažena v řadě bodové soumístné s přímkou $\{p(u)\}$, kde

$$p(u)=\left(x\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{v=v_0}.$$

Zbývá ukázati, že $\Gamma\{p(u)\}$ jest rozvinutelná osnova. Avšak

$$\frac{dp}{du}=\left[\left(x\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]_{v=v_0}.$$

Oba sčítance jsou zřejmě (v. (3)) incidentní s $\xi_0=\left(x\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{v=v_0}\neq 0_r$, takže též $\left(\frac{dp}{du}\,\xi_0\right)=0_b$, tedy $S\frac{dp}{du}\frac{dp}{du}=0$ dle **112.**

Styk křivek na ploše.

283. Buď $\{x_0\}=\{x(u_0, v_0)\}$ bod plochy $M\{x(u, v)\}$ třídy $r\geqq 2$. Buďte C, C' dvě křivky třídy $\geqq 2$ na ploše $M\{x\}$, obsahující $\{x_0\}$. Tečna křivky C v $\{x_0\}$ nebuď asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v $\{x_0\}$. Křivky C a C' mají trojbodový styk v $\{x_0\}$, když a jen když mají v $\{x_0\}$ společnou oskulační rovinu.

Označme d (δ) diferenciály patřící ke křivce $C(C')$ a k bodu $\{x_0\}$. Definujme b_{11}, b_{12}, b_{22} jako ve **274.** Že podmínka v teorému je nutná, je zřejmé. Předpokládejme tedy, že křivky C a C' mají v $\{x_0\}$ společnou oskulační rovinu. Dle **271** $\{x_0\}$ není inflexní bod křivky C, tedy dle **196** oskulační rovinou křivky C v $\{x_0\}$ jest $\{(x_0\,dx d^2x)\}$, jež je různá od tečné roviny plochy $M\{x\}$ v $\{x_0\}$ dle **278.** Tečnou křivky C v $\{x_0\}$ je patrně průsečnice roviny $\{(x_0\,dx d^2x)\}$ s touto tečnou rovinou, a táž přímka je zřejmě tečnou křivky C' v $\{x_0\}$. Dle **185** mají tedy C a C' dvojbodový styk v $\{x_0\}$, takže dle **255** můžeme předpokládati, že

$$du=\delta u,\ dv=\delta v. \tag{1}$$

Dle **179** je třeba ukázati existenci čísel a, b takových, že

$$\delta^2x-d^2x=ax_0+b\,dx,$$

čili ukázati, že

$$(x_0\,dx\,\delta^2x)=(x_0\,dx\,d^2x).$$

Dle předpokladu však zřejmě existuje číslo ϱ takové, že

$$(x_0\,dx\,\delta^2x)=\varrho\,(x_0\,dx\,d^2x), \tag{2}$$

takže je třeba pouze nahlédnouti, že $\varrho=1$. Ježto $|du, dv|_b\neq 0_b$ (v. **254**), předpokládejme na př., že $du\neq 0$. Jest patrně pro $|u, v|_b=|u_0, v_0|_b$

$$\left(x\,dx, d^2x, \frac{\partial x}{\partial v}\right)=-du\,(b_{11}du^2+2b_{12}du\,dv+b_{22}dv^2)$$

a stejně, když místo d píšeme δ. Ježto

$$\left(x\,dx\,d^2x\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)=S(x\,dx\,d^2x)\,\frac{\partial x}{\partial v},$$

je tedy dle (1) a (2)

$$(3) \qquad (\rho - 1)\, du\,(b_{11} du^2 + 2b_{12} du\, dv + b_{22} dv^2) = 0.$$

Ježto $du \neq 0$, jest $\rho = 1$, jak bylo dokázati; neboť třetí faktor nalevo ve (3) jest $\neq 0$ dle **271**.

284. Buď $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\}$ bod plochy $M\{x(u, v)\}$ třídy $r \geqq 1$. Buďte C, C' dvě křivky třídy $r' \leqq r$ na ploše $M\{x\}$ obsahující bod $\{x_0\}$. Křivky C, C' mějte v $\{x_0\}$ právě s-bodový $(1 \leqq s \leqq r')$ styk. Tečná rovina plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$ jest rovinou $(s+1)$ bodového styku křivek C, C' v bodě x_0.

Buď pro $|u, v|_b = |u_0, v_0|_b$

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u},\; x_2 = \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Označme d (δ) diferenciály patřící ke křivce $C(C')$ a k bodu $\{x_0\}$. Dle **255** můžeme předpokládati, že

$$\delta^a u = d^a u,\; \delta^a v = d^a v. \qquad (1 \leqq \alpha \leqq s-1)$$

Buď

$$(2) \qquad \zeta = (x_0, x_1 du + x_2 dv, \delta^s x - d^s x).$$

Dle **225** máme ukázati, že $\{\zeta\} = \{x_0 x_1 x_2\}$. Dle (1) je však

$$\delta^s x - d^s x = x_1 (\delta^s u - d^s u) + x_2 (\delta^s v - d^s v).$$

Tedy dle (2)

$$\zeta = [du(\delta^s v - d^s v) - dv(\delta^s u - d^s u)]\,(x_0 x_1 x_2).$$

285. Buď $\{x_0\}$ bod plochy $M\{x(u, v)\}$ třídy $r \geqq 2$. Buďte C, C' dvě poloregulární křivky třídy r' $(2 \leqq r' \leqq r)$ na ploše $M\{x\}$ obsahující bod $\{x_0\}$. Křivky C, C' mějte v $\{x_0\}$ právě s-bodový $(2 \leqq s \leqq r')$ styk. Buď $\{p\}$ tečna křivky C v bodě $\{x_0\}$. Osnovy Ass. C, Ass. C' mají v přímce $\{p\}$ s-přímkový styk, když a jen když $\{p\}$ jest asymptotická tečna plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$.

Vychází ihned ze **222** (2), **225** (2), **278** a **284**.

286. Buď $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\}$ bod plochy $M\{x(u, v)\}$ třídy $r \geqq 3$. Buďte C, C' dvě křivky třídy r' $(3 \leqq r' \leqq r)$ na ploše $M\{x\}$ obsahující bod $\{x_0\}$. Tečna $\{p\}$ křivky C v $\{x_0\}$ nebuď asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v $\{x_0\}$. Buď $\{q\}$ tečna plochy $M\{x\}$ v $\{x_0\}$ konjugovaná k $\{p\}$. Křivky C, C' mějte v $\{x_0\}$ právě s-bodový $(2 \leqq s \leqq r'-1)$ styk. Přímka $\{q\}$ jest přímkou $(s+2)$-bodového styku křivek C, C' v bodě $\{x_0\}$.

Buď pro $|u, v|_b = |u_0, v_0|_b$

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u},\; x_2 = \frac{\partial x}{\partial v},\; x_{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\; x_{12} = \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v},\; x_{22} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Označme $d\,(\delta)$ diferenciály patřící ke křivce $C\,(C')$ a k bodu $\{x_0\}$. Dle **255** můžeme předpokládati, že

$$d^\alpha u = \delta^\alpha u, \; d^\alpha v = \delta^\alpha v. \qquad (1 \leq \alpha \leq s-1) \tag{1}$$

Buď

$$b_{11} = (x_0 x_1 x_2 x_{11}), \; b_{12} = (x_0 x_1 x_2 x_{12}), \; b_{22} = (x_0 x_1 x_2 x_{22}), \tag{2}$$

takže dle **275** jest

$$q = [x_0, (b_{11} du + b_{12} dv) x_2 - (b_{12} du + b_{22} dv) x_1]. \tag{3}$$

Buď

$$\begin{aligned} y = (x_0, dx, \delta^s x - d^s x, \delta^{s+1} x - d^{s+1} x)\, dx + \\ + (s+1)(x_0, dx, d^2 x, \delta^s x - d^s x)\,(\delta^s x - d^s x). \end{aligned} \tag{4}$$

Dle **227** (2) máme ukázati, že $(qy) = 0_r$. Dle (1) je však

$$\begin{aligned} \delta^s x - d^s x &= (\delta^s u - d^s u)\, x_1 + (\delta^s v - d^s v)\, x_2, \\ \delta^{s+1} x - d^{s+1} x &= (\delta^{s+1} u - d^{s+1} u)\, x_1 + (\delta^{s+1} v - d^{s+1} v)\, x_2 + \\ &+ (s+1)\,[(\delta^s u - d^s u)(x_{11} du + x_{12} dv) + (\delta^s v - d^s v)(x_{12} du + x_{22} dv)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Dle (2) a (4) je tedy

$$\begin{aligned} y = (s+1)\,\Delta\,[(\delta^s u - d^s u)(b_{11} du + b_{12} dv) + (\delta^s v - d^s v)(b_{12} du + b_{22} dv)] \times \\ (x_1 du + x_2 dv) - (b_{11} du^2 + 2 b_{12} du\, dv + b_{22} dv^2)\,[(\delta^s u - d^s u)\, x_1 + (\delta^s v - d^s v)\, x_2] = \\ = -(s+1)\,\Delta^2\,[(b_{11} du + b_{12} dv)\, x_2 - (b_{12} du + b_{22} dv)\, x_1]; \end{aligned} \tag{6}$$

při tom jsme položili

$$\Delta = du\,(\delta^s v - d^s v) - dv\,(\delta^s u - d^s u).$$

Ze (6) a (3) je patrné, že $(q\,y) = 0_r$.

Styk ploch.

287. Buďte $M\{x(u, v)\}$, $M\{y(u', v')\}$ plochy třídy r. Buď $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\} = \{y(u_0', v_0')\}$ bod náležející oběma těmto plochám. Pravíme, že $M\{x(u, v)\}$ a $M\{y(u', v')\}$ mají s-bodový $(1 \leq s \leq r+1)$ styk v bodě $\{x_0\}$, když každá rovinová forma, která má v $\{x_0\}$ s-bodový styk s $M\{x(u, v)\}$, má v $\{x_0\}$ s-bodový styk s $M\{y(u', v')\}$. Pravíme, že $M\{x(u, v)\}$ a $M\{y(u', v')\}$ mají právě s-bodový $(1 \leq s \leq r)$ styk v bodě $\{x_0\}$, když mají v tomto bodě s-bodový styk, ne však $(s+1)$-bodový styk.

V této definici plochy $M\{x(u, v)\}$, $M\{y(u', v')\}$ chovají se nesymetricky; že však ve skutečnosti lze je vyměniti, plyne ze **291**. Je zřejmé, že styk zůstane zachován, když kteroukoli z obou ploch nahradíme jinou plochou, jež s ní splyne v okolí bodu $\{x_0\}$. Také je zřejmé, že jednobodový styk nastane v každém společném bodě.

288. Buďte $M\{x(u,v)\}$, $M\{y(u',v')\}$ plochy třídy r, obsahující bod $\{x_0\}$ a mající v tomto bodě s-bodový ($1 \leq s \leq r+1$) styk. Buď K kolineace ar. bodů; buď v K: $x(u,v) \sim X(u,v)$, $y(u',v') \sim Y(u',v')$, $x_0 \sim X_0$. Plochy $M\{X(u,v)\}$, $M\{Y(u',v')\}$ mají v bodě $\{X_0\}$ s-bodový styk.

Důkaz je stejný jako ve **177**.

289. Buďte $M\{x(u,v)\}$, $M\{y(u',v')\}$ plochy třídy r obsahující bod $\{x_0\}$. Buď $1 \leq s \leq r+1$. Když a jen když každá křivka třídy $s-1$ (třídy 1 pro $s=1$) na ploše $M\{y(u',v')\}$ obsahující $\{x_0\}$ má v tomto bodě s-bodový styk s $M\{x(u,v)\}$, mají plochy $M\{x(u,v)\}$ a $M\{y(u',v')\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$.

Vychází snadno ze **257**.

290. Buďte $M\{x(u,v)\}$, $M\{y(u',v')\}$ plochy třídy r obsahující bod $\{x_0\}$. Buď $1 \leq s \leq r+1$. Když a jen když ke každé křivce třídy $s-1$ (třídy 1 pro $s=1$) na ploše $M\{y(u',v')\}$ obsahující $\{x_0\}$ lze udati na ploše $M\{x(u,v)\}$ křivku, mající s onou s-bodový styk v $\{x_0\}$, mají $M\{x(u,v)\}$ a $M\{y(u',v')\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$.

Vychází ihned ze **265** a **289.**

291. Buď $M\{x(u,v)\}$ plocha třídy r obsahující bod $\{x_0\} = \{x(u_0,v_0)\}$. Plocha $M\{z(\dot{u},\dot{v})\}$ třídy r má s $M\{x(u,v)\}$ v bodě $\{x_0\}$ s-bodový ($1 \leq s \leq r+1$) styk, když a jen když obsahuje $\{x_0\} = \{z(\dot{u}_0,\dot{v}_0)\}$ a v okolí tohoto bodu splyne s plochou $M\{y(u',v')\}$, při čemž

$$(1)\quad \left[\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} y}{\partial u'^{\alpha_1} \partial v'^{\alpha_2}}\right]_{\substack{u'=\dot{u}_0 \\ v'=\dot{v}_0}} = \left[\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} x}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2}}\right]_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}. \quad \left(\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1+\alpha_2 \leq s-1;\ \frac{\partial^0}{\partial u^0} = \frac{\partial^0}{\partial v^0} = 1\right)$$

Že vyslovená podmínka stačí pro s-bodový styk ploch $M\{x(u,v)\}$ a $M\{z(\dot{u},\dot{v})\}$, je zřejmé. Předpokládejme tedy naopak, že plochy $M\{x(u,v)\}$ a $M\{z(\dot{u},\dot{v})\}$ mají v bodě $\{x_0\}$ s-bodový styk. Je zřejmé, že lze pak splniti tu rovnici (1), v níž $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Můžeme tedy rovnice (1) dokazovati indukcí vzhledem k $\alpha_1 + \alpha_2$, t. j. předpokládati, že jsme již pro jisté $\beta\,(0 \leq \beta < s-1)$ určili plochu $M\{y_1(u_1,v_1)\}$, která splyne s $M\{z(\dot{u},\dot{v})\}$ v okolí bodu $\{x_0\}$ a je taková, že

$$(2)\qquad \left[\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} y_1}{\partial u_1^{\alpha_1} \partial v_1^{\alpha_2}}\right]_{\substack{u_1=\dot{u}_0 \\ v_1=\dot{v}_0}} = \left[\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} x}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2}}\right]_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}, \qquad (0 \leq \alpha_1+\alpha_2 \leq \beta)$$

načež je pouze třeba ukázati, že lze nalézti okolí V ar. bodu $|\dot{u}_0, \dot{v}_0|_b$ a funkce $\varrho(u', v')$, $\varphi(u', v')$, $\psi(u', v')$ třídy r ve $[V]$ tak, že 1° $\varrho(u', v') \neq 0$ všude ve $[V]$, 2° funkce $\varphi(u', v')$, $\psi(u', v')$ ($|u', v'|_b$ ve $[V]$) definují korespondenci třídy r a $\varphi(\dot{u}_0, \dot{v}_0) = \dot{u}_0$, $\psi(\dot{u}_0, \dot{v}_0) = \dot{v}_0$, 3° klademe-li

$$y(u', v') = \rho(u', v')\, y_1[\varphi(u', v'), \psi(u', v')],$$

jsou splněny ty rovnice (1), v nichž $0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq \beta + 1$.

Buď nyní P_r rovinová forma, mající s $M\{x(u, v)\}$ a tedy dle předpokladu také s $M\{y_1(u_1, v_1)\}$ s-bodový styk v bodě $\{x_0\}$. Je tedy zejména

$$(3)\quad \left[\frac{\partial^{\beta+1}}{\partial u_1^{\alpha}\partial v_1^{\beta+1-\alpha}} SP_r y_1(u_1, v_1)\right]_{\substack{u_1=\dot{u}_0\\ v_1=\dot{v}_0}} = 0, \quad \left[\frac{\partial^{\beta+1}}{\partial u^{\alpha}\partial v^{\beta+1-\alpha}} SP_r x(u, v)\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = 0.$$
$$(0 \leqq \alpha \leqq \beta + 1)$$

Snadno se vidí (v. **62**), že

$$\frac{\partial^{\beta+1}}{\partial u^{\alpha}\partial v^{\beta+1-\alpha}} SP_r x(u, v) = nS\left[P_r; \frac{\partial^{\beta+1} x}{\partial u^{\alpha}\partial v^{\beta+1-\alpha}}\right] x(u, v) + \ldots,$$

kde vynechané členy obsahují pouze ar. bod $x(u, v)$ a jeho derivace řádu $\leqq \beta$ a n je stupeň formy P_r; podobně pro $y_1(u_1, v_1)$. Dle (2) a (3) je tedy

$$(4)\quad S\left[P_r; \left(\frac{\partial^{\beta+1} y_1}{\partial u_1^{\alpha}\partial v_1^{\beta+1-\alpha}}\right)_{\substack{u_1=\dot{u}_0\\ v_1=\dot{v}_0}} - \left(\frac{\partial^{\beta+1} x}{\partial u^{\alpha}\partial v^{\beta+1-\alpha}}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}\right] x_0 = 0. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \beta + 1)$$

Rovnice (4) platí, ať jakkoli zvolíme rovinovou formu P_r, jen když má s $M\{x(u, v)\}$ s-bodový styk v $\{x_0\}$. Dle **258** existují tedy čísla $\overset{\alpha}{\lambda}_0$, $\overset{\alpha}{\lambda}_1$, $\overset{\alpha}{\lambda}_2$ $(0 \leqq \alpha \leqq \beta + 1)$ taková, že

$$(5)\quad \left[\frac{\partial^{\beta+1} y_1}{\partial u_1^{\alpha}\partial v_1^{\beta+1-\alpha}}\right]_{\substack{u_1=\dot{u}_0\\ v_1=\dot{v}_0}} = \left[\frac{\partial^{\beta+1} x}{\partial u^{\alpha}\partial v^{\beta+1-\alpha}}\right]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} + \overset{\alpha}{\lambda}_0 x_0 + \left(\overset{\alpha}{\lambda}_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \overset{\alpha}{\lambda}_2 \frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}.$$
$$(0 \leqq \alpha \leqq \beta + 1)$$

Zřejmě $1 + \overset{0}{\lambda}_2 + \overset{1}{\lambda}_1 + \overset{0}{\lambda}_2 \overset{1}{\lambda}_1 - \overset{0}{\lambda}_1 \overset{1}{\lambda}_2 \neq 0$, když $\beta = 0$, neboť jinak by dle (5) ar. body

$$y_1(\dot{u}_0, \dot{v}_0) = x_0, \quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right)_{\substack{u_1=\dot{u}_0\\ v_1=\dot{v}_0}}, \quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial v_1}\right)_{\substack{u_1=\dot{u}_0\\ v_1=\dot{v}_0}}$$

byly lin. závislé.

Zvolme nyní, když $\beta = 0$,

$$\rho(u', v') = 1 + \frac{(\overset{0}{\lambda}_0 \overset{1}{\lambda}_2 - \overset{1}{\lambda}_0 \overset{0}{\lambda}_2 - \overset{1}{\lambda}_0)(u' - \dot{u}_0) + (\overset{0}{\lambda}_1 \overset{1}{\lambda}_0 - \overset{0}{\lambda}_0 \overset{1}{\lambda}_1 - \overset{0}{\lambda}_0)(v' - \dot{v}_0)}{1 + \overset{0}{\lambda}_2 + \overset{1}{\lambda}_1 + \overset{0}{\lambda}_2 \overset{1}{\lambda}_1 - \overset{0}{\lambda}_1 \overset{1}{\lambda}_2},$$

$$\varphi(u', v') = \dot{u}_0 + \frac{(1+\overset{0}{\lambda}_2)(u' - \dot{u}_0) - \overset{0}{\lambda}_1 (v' - \dot{v}_0)}{1 + \overset{0}{\lambda}_2 + \overset{1}{\lambda}_1 + \overset{0}{\lambda}_2\overset{1}{\lambda}_1 - \overset{0}{\lambda}_1\overset{1}{\lambda}_2},$$

$$\psi(u', v') = \dot{v}_0 + \frac{-\overset{1}{\lambda}_2 (u' - \dot{u}_0) + (1+\overset{1}{\lambda}_1)(v' - \dot{v}_0)}{1 + \overset{0}{\lambda}_2 + \overset{1}{\lambda}_1 + \overset{0}{\lambda}_2\overset{1}{\lambda}_1 - \overset{0}{\lambda}_1\overset{1}{\lambda}_2};$$

když $\beta > 1$, zvolme

$$\rho(u', v') = 1 - \sum_{\alpha=0}^{\beta+1} \frac{\overset{\alpha}{\lambda}_0}{\alpha!\,(\beta+1-\alpha)!} (u' - \dot{u}_0)^\alpha (v' - \dot{v}_0)^{\beta+1-\alpha},$$

$$\varphi(u', v') = u' - \sum_{\alpha=0}^{\beta+1} \frac{\overset{\alpha}{\lambda}_1}{\alpha!\,(\beta+1-\alpha)!} (u' - \dot{u}_0)^\alpha (v' - \dot{v}_0)^{\beta+1-\alpha},$$

$$\psi(u', v') = v' - \sum_{\alpha=0}^{\beta+1} \frac{\overset{\alpha}{\lambda}_2}{\alpha!\,(\beta+1-\alpha)!} (u' - \dot{u}_0)^\alpha (v' - \dot{v}_0)^{\beta+1-\alpha}.$$

Ježto $\varrho(\dot{u}_0, \dot{v}_0) = 1, \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\frac{\partial\psi}{\partial v'} - \frac{\partial\varphi}{\partial v'}\frac{\partial\psi}{\partial u'}\right]_{\substack{u' = \dot{u}_0 \\ v' = \dot{v}_0}} = 1 \left(= \frac{1}{1 + \overset{0}{\lambda}_2 + \overset{1}{\lambda}_1 + \overset{0}{\lambda}_2\overset{1}{\lambda}_1 - \overset{0}{\lambda}_1\overset{1}{\lambda}_2} \neq\right.$ $\neq 0$ pro $\beta = 0$), lze určiti okolí V ar. bodu $|\dot{u}_0, \dot{v}_0|_b$ tak, že 1° $\varrho(u', v') \neq 0$ všude ve $[V]$, 2° funkce $\varphi(u', v')$, $\psi(u', v')$ ($|u', v'|_b$ ve $[V]$) definují korespondenci třídy r. Z rovnic (2) a (5) pak se snadno zjistí, že, klademe-li

$$y(u', v') = \rho(u', v')\, y_1[\varphi(u', v'), \psi(u', v')],$$

jsou splněny ty rovnice (1), v nichž $0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq \beta + 1$, jak bylo ukázati.

292. Buď $s \geqq 1$, $1 \leqq s' \leqq s$, $s + s' \leqq r + 1$. Buďte $M\{x(u, v)\}$, $M\{y(u', v')\}$ dvě plochy třídy r o společném bodě $\{x(u_0, v_0)\} = \{y(u'_0, v'_0)\}$. Buď

$$\left[\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} x}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right]_{\substack{u = u_0 \\ v = v_0}} = x_{\alpha_1\alpha_2}, \quad \left[\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} y}{\partial u'^{\alpha_1}\partial v'^{\alpha_2}}\right]_{\substack{u' = u'_0 \\ v' = v'_0}} = y_{\alpha_1\alpha_2}.$$

$$\left(\alpha_1 \geqq 0,\ \alpha_2 \geqq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 \leqq r;\ \frac{\partial^0}{\partial u^0} = \frac{\partial^0}{\partial v^0} = 1\right)$$

Buď

$$x_{\alpha_1\alpha_2} = y_{\alpha_1\alpha_2}, \qquad (0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s - 1) \tag{1}$$

takže $M\{x(u, v)\}$ a $M\{y(u', v')\}$ mají s-bodový styk v $\{x_{00}\}$. Plochy $M\{x(u, v)\}$ a $M\{y(u', v')\}$ mají $(s + s')$-bodový styk v $\{x_{00}\}$, když a jen když existují čísla $a_{\mu_1\mu_2}$, $b_{\mu_1\mu_2}$, $c_{\mu_1\mu_2}$ ($\mu_1 \geqq 0$, $\mu_2 \geqq 0$, $s \leqq \mu_1 + \mu_2 \leqq s + s' - 1$) taková, že pro $s \leqq \lambda_1 + \lambda_2 \leqq s + s' - 1$ jest

$$y_{\lambda_1\lambda_2} - x_{\lambda_1\lambda_2} =$$

$$(2) \quad = \sum_{\nu_1\nu_2} \binom{\lambda_1}{\nu_1}\binom{\lambda_2}{\nu_2} [a_{\lambda_1-\nu_1,\lambda_2-\nu_2} x_{\nu_1+1,\nu_2} + b_{\lambda_1-\nu_1,\lambda_2-\nu_2} x_{\nu_1,\nu_2+1} + c_{\lambda_1-\nu_1,\lambda_2-\nu_2} x_{\nu_1\nu_2}].$$

$$(0 \leq \nu_1 \leq \lambda_1,\ 0 \leq \nu_2 \leq \lambda_2,\ \nu_1 + \nu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 - s)$$

Dle **291** mají $M\{x(u, v)\}$ a $M\{y(u', v')\}$ $(s + s')$-bodový styk v $\{x_{00}\}$, když a jen když lze udati okolí V ar. bodu $|u_0, v_0|_b$ a funkce $\varrho(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ třídy r ve $[V]$ tak, že 1° $\varrho(u, v) \neq 0$ všude ve $[V]$, 2° funkce $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ ($|u, v|_b$ ve $[V]$) definují korespondenci třídy r ve $[V]$ a $\varphi(u_0, v_0) = u_0$, $\psi(u_0, v_0) = v_0$, 3° klademe-li

$$\bar{x}(u, v) = \varrho(u, v)\, x[\varphi(u, v), \psi(u, v)],$$

jest

$$(3) \quad \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\bar{x}}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = y_{\alpha_1\alpha_2}. \qquad (0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s + s' - 1)$$

Snadno vidíme, připomeneme-li si, že ar. body x_{00}, x_{01}, x_{10} jsou lin. nezávislé, že ty rovnice (3), v nichž $0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s - 1$, jsou splněny, když a jen když pro $|u, v|_b = |u_0, v_0|_b$ jest

$$\varrho = 1, \quad \frac{\partial\varrho}{\partial u} = \frac{\partial\varrho}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v} = 1,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\psi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\varrho}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\psi}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}} = 0. \qquad (2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s - 1)$$

Můžeme tedy předpokládati, že

$$(4) \quad \varrho(u, v) = 1 + \sum_{\nu_1\nu_2} \frac{c_{\nu_1\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}(u - u_0)^{\nu_1}(v - v_0)^{\nu_2} + f_0(u, v),$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi(u, v) &= u + \sum_{\nu_1\nu_2} \frac{a_{\nu_1\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}(u - u_0)^{\nu_1}(v - v_0)^{\nu_2} + f_1(u, v), \\ \psi(u, v) &= v + \sum_{\nu_1\nu_2} \frac{b_{\nu_1\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}(u - u_0)^{\nu_1}(v - v_0)^{\nu_2} + f_2(u, v). \end{aligned}$$

Ve (4) a (5) indexy ν_1, ν_2 probíhají dvojice čísel celých, pro něž $\nu_1 \geq 0$, $\nu_2 \geq 0$, $s \leq \nu_1 + \nu_2 \leq s + s' - 1$; $f_0(u, v)$, $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$ a podobně v dalším se vyskytující $f_{\alpha_1,\alpha_2}(u, v)$ jsou funkce třídy r ve $[V]$ takové, že

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} f_i}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = 0. \qquad (\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq s + s' - 1;\ i = 0, 1, 2)$$

Jest patrně

$$(6) \quad x(u, v) = \sum_{\alpha_1\alpha_2} \frac{(u - u_0)^{\alpha_1}(v - v_0)^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!} x_{\alpha_1\alpha_2} + X_0(u, v), \qquad (0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s + s' - 1)$$

při čemž souřadnice ar. bodu $X_0(u, v)$ a v dalším se vyskytujících $X_1(u, v)$, $X_2(u, v)$ jsou funkce třídy r ve $[V]$ takové, že

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} X_i(u, v)}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = 0_b. \qquad (0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s + s' - 1;\ i = 0, 1, 2)$$

Z (5) vychází, když $1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s'$, $s' + 1 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq s + s' - 1$,

$$[\varphi(u, v) - u_0]^{\alpha_1} [\psi(u, v) - v_0]^{\alpha_2} = (u - u_0)^{\alpha_1} (v - v_0)^{\alpha_2} +$$
$$+ \alpha_1 \sum_{\nu_1 \nu_2} \frac{a_{\nu_1 \nu_2}}{\nu_1! \, \nu_2!} (u - u_0)^{\nu_1 + \alpha_1 - 1} (v - v_0)^{\nu_2 + \alpha_2} +$$
$$+ \alpha_2 \sum_{\nu_1 \nu_2} \frac{b_{\nu_1 \nu_2}}{\nu_1! \, \nu_2!} (u - u_0)^{\nu_1 + \alpha_1} (v - v_0)^{\nu_2 + \alpha_2 - 1} + f_{\alpha_1, \alpha_2}(u, v),$$
$$(s \leq \nu_1 + \nu_2 \leq s + s' - \alpha_1 - \alpha_2)$$
$$[\varphi(u, v) - u_0]^{\gamma_1} [\psi(u, v) - v_0]^{\gamma_2} = (u - u_0)^{\gamma_1} (v - v_0)^{\gamma_2} + f_{\gamma_1 \gamma_2}(u, v),$$

takže dle (6) jest

$$x[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = x_{00} + \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{x_{\alpha_1, \alpha_2}}{\alpha_1! \, \alpha_2!} [(u - u_0)^{\alpha_1} (v - v_0)^{\alpha_2} +$$
$$+ \alpha_1 \sum_{\nu_1 \nu_2} \frac{a_{\nu_1, \nu_2}}{\nu_1! \, \nu_2!} (u - u_0)^{\nu_1 + \alpha_1 - 1} (v - v_0)^{\nu_2 + \alpha_2} +$$
$$+ \alpha_2 \sum_{\nu_1 \nu_2} \frac{b_{\nu_1 \nu_2}}{\nu_1! \, \nu_2!} (u - u_0)^{\nu_1 + \alpha_1} (v - v_0)^{\nu_1 + \alpha_2 - 1} + f_{\alpha_1 \alpha_2}(u, v)] +$$
$$+ \sum_{\gamma_1 \gamma_2} \frac{x_{\gamma_1 \gamma_2}}{\gamma_1! \, \gamma_2!} [(u - u_0)^{\gamma_1} (v - v_0)^{\gamma_2} + f_{\gamma_1 \gamma_2}(u, v)] + X_0(u, v),$$
$$(1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s';\ s \leq \nu_1 + \nu_2 \leq s + s' - \alpha_1 - \alpha_2;\ s' + 1 \leq \gamma_1 + \gamma_2 \leq s + s' - 1)$$

což se dá snadným počtem upraviti na tvar

$$x[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{(u - u_0)^{\alpha_1} (v - v_0)^{\alpha_2}}{\alpha_1! \, \alpha_2!} x_{\alpha_1 \alpha_2} +$$
$$+ \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{(u - u_0)^{\lambda_1} (v - v_0)^{\lambda_2}}{\lambda_1! \, \lambda_2!} [x_{\lambda_1 \lambda_2} + \sum_{\nu_1 \nu_2} \binom{\lambda_1}{\nu_1} \binom{\lambda_2}{\nu_2} (a_{\lambda_1 - \nu_1, \lambda_2 - \nu_2} x_{\nu_1 + 1, \nu_2} +$$
$$+ b_{\lambda_1 - \nu_1, \lambda_2 - \nu_2} x_{\nu_1, \nu_2 + 1})] + X_1(u, v).$$
$$(0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s - 1;\ s \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq s + s' - 1;\ 0 \leq \nu_1 \leq \lambda_1;\ 0 \leq \nu_2 \leq \lambda_2;\ \nu_1 + \nu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 - s)$$

Odtud a ze (4) máme, ježto $\bar{x}(u, v) = \varrho(u, v)\ x[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$,

$$\bar{x}(u, v) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{(u - u_0)^{\alpha_1} (v - v_0)^{\alpha_2}}{\alpha_1! \, \alpha_2!} x_{\alpha_1, \alpha_2} + \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{(u - u_0)^{\lambda_1} (v - v_0)^{\lambda_2}}{\lambda_1! \, \lambda_2!} \Big[x_{\lambda_1 \lambda_2} +$$
$$+ \sum_{\nu_1 \nu_2} \binom{\lambda_1}{\nu_1} \binom{\lambda_2}{\nu_2} \Big(a_{\lambda_1 - \nu_1, \lambda_2 - \nu_2} x_{\nu_1 + 1, \nu_2} + b_{\lambda_1 - \nu_1, \lambda_2 - \nu_2} x_{\nu_1, \nu_2 + 1} +$$
$$+ c_{\lambda_1 - \nu_1, \lambda_2 - \nu_2} x_{\nu_1 \nu_2} \Big) \Big] + X_2(u, v).$$
$$(0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq s - 1;\ s \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq s + s' - 1;\ 0 \leq \nu_1 \leq \lambda_1;\ 0 \leq \nu_2 \leq \lambda_2;\ \nu_1 + \nu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 - s)$$

Je tedy

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\bar{x}}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = x_{\alpha_1\alpha_2}, \qquad (0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-1)$$

$$\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2}\bar{x}}{\partial u^{\lambda_1}\partial v^{\lambda_2}}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = x_{\lambda_1\lambda_2} + \sum_{\nu_1\nu_2}\binom{\lambda_1}{\nu_1}\binom{\lambda_2}{\nu_2}\Big[a_{\lambda_1-\nu_1,\lambda_2-\nu_2}\,x_{\nu_1+1,\nu_2} +$$

$$+ b_{\lambda_1-\nu_1,\lambda_2-\nu_2}\,x_{\nu_1,\nu_2+1} + c_{\lambda_1-\nu_1,\lambda_2-\nu_2}\,x_{\nu_1\nu_2}\Big].$$

$$(s \leqq \lambda_1 + \lambda_2 \leqq s + s' - 1;\ 0 \leqq \nu_1 \leqq \lambda_1;\ 0 \leqq \nu_2 \leqq \lambda_2;\ \nu_1 + \nu_2 \leqq \lambda_1 + \lambda_2 - s)$$

Tím jsou podmínky (3) převedeny na (2).

293. Buď $M\{x(u, v)\}$ plocha třídy r obsahující bod $\{x_0\}$. Buď $M^a = M[P_r]$ algebraická plocha, jež rovněž obsahuje $\{x_0\}$; nebuď však $\{x_0\}$ singulární pro M^a. Plocha $M\{x(u, v)\}$ a algebraická plocha M^a mají v bodě $\{x_0\}$ s-bodový ($1 \leqq s \leqq r+1$) styk, když a jen když rovinová forma P_r a plocha $M\{x(u, v)\}$ mají v bodě $\{x_0\}$ s-bodový styk.

Vychází ihned ze **266** a **289**.

294. Buď $M\{x(u, v)\}$, $M\{y(u', v')\}$ dvě plochy třídy r o společném bodě $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\} = \{y(u_0', v_0')\}$. Buď

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}x}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = x_{\alpha_1\alpha_2}, \quad \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}y}{\partial u'^{\alpha_1}\partial v'^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u'=u'_0\\ v'=v'_0}} = y_{\alpha_1\alpha_2}.$$

$$\left(\alpha_1 \geqq 0;\ \alpha_2 \geqq 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 \leqq r;\ \frac{\partial^0}{\partial u^0} = \frac{\partial^0}{\partial v^0} = 1\right)$$

Plochy $M\{x\}$ a $M\{y\}$ mějte v $\{x_0\}$ právě s-bodový ($2 \leqq s \leqq r$) styk. Dle **291** můžeme předpokládati, že

$$x_{\alpha_1\alpha_2} = y_{\alpha_1\alpha_2}. \qquad (0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-1) \tag{1}$$

Forma s-ho stupně v du, dv

$$f(du, dv) = c\left[x_{00}, x_{01}, x_{10}, \sum_{\alpha=0}^{s}\binom{s}{\alpha}(y_{\alpha,s-\alpha} - x_{\alpha,s-\alpha})\,du^\alpha dv^{s-\alpha}\right], \tag{2}$$

kde c je libovolné číslo $\neq 0$, není identicky rovna nule; nazývá se forma $(s+1)$-bodového styku ploch $M\{x\}$ a $M\{y\}$ v bodě $\{x_0\}$. Buď $\{(x_{00}, x_{10}\,du + x_{01}\,dv)\}$ tečna plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$. Když bod $\{|du, dv|_b\}$ je μ-násobným ($\mu \geqq 1$) kořenem formy $f(du, dv)$, pravíme, že $\{(x_{00}, x_{10}\,du + x_{01}\,dv)\}$ je μ-násobná*) přímka $(s+1)$-bodového styku ploch $M\{x\}$, $M\{y\}$ v bodě $\{x_0\}$.

---

*) Místo jednonásobná říkáme jednoduchá.

Buď C křivka třídy s na ploše $M\{x\}$, obsahující bod $\{x_0\}$. Když a jen když tečna křivky C v $\{x_0\}$ je přímkou $(s+1)$-bodového styku ploch $M\{x\}$ a $M\{y\}$ v $\{x_0\}$, existuje na ploše $M\{y\}$ křivka C', mající s C $(s+1)$-bodový styk v $\{x_0\}$.

Snadno se vidí, že definice μ-násobné přímky $(s+1)$-bodového styku ploch $M\{x\}$ a $M\{y\}$ v $\{x_0\}$ je nezávislá na volbě parametru (v. **238** a **243**). Buď C libovolná křivka třídy s na ploše $M\{x\}$ obsahující bod $\{x_0\}$. Buďte d diferenciály patřící ke křivce C a k bodu $\{x_0\}$. Dle **265** je třeba nalézti podmínku, kdy C a $M\{y\}$ mají $(s+1)$-bodový styk v $\{x_0\}$. Buď C' křivka třídy s na ploše $M\{y\}$ obsahující $\{x_0\}$; buďte δ diferenciály patřící ke křivce C' a k bodu $\{x_0\}$. Dle poznámky na konci **254** můžeme C' zvoliti tak, že

$$(3)\qquad \begin{aligned} du &= \delta u', \ d^2u = \delta^2 u', \ \dots \ d^s u = \delta^s u', \\ dv &= \delta v', \ d^2v = \delta^2 v', \ \dots \ d^s v = \delta^s v'. \end{aligned}$$

Aby C měla $(s+1)$-bodový styk s $M\{y\}$ v $\{x_0\}$, je nutné a stačí, aby měla v $\{x_0\}$ $(s+1)$-bodový styk s každou rovinovou formou P_r, která má v $\{x_0\}$ $(s+1)$-bodový styk s $M\{y\}$. Buď P_r taková forma; pak má býti

$$(4)\qquad [d^\alpha SP_r\, x(u,v)]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} = 0. \qquad (0 \leq \alpha \leq s)$$

Dle **257** je však

$$(5)\qquad [\delta^\alpha SP_r\, y(u',v')]_{\substack{u'=u'_0\\ v'=v'_0}} = 0. \qquad (0 \leq \alpha \leq s)$$

Z (1), (3) a (5) vidíme snadno, že ty rovnice (4), v nichž $\alpha < s$, jsou vždy splněny — což jsme ovšem mohli předvídati — a že ta rovnice (4), v níž $\alpha = s$, jest ekvivalentní s rovnicí

$$(6)\qquad S\left[P_r;\ \sum_{\alpha=0}^{s} \binom{s}{\alpha} (y_{\alpha, s-\alpha} - x_{\alpha, s-\alpha})\, du^\alpha dv^{s-\alpha}\right] x_0 = 0.$$

Aby rovnice (6) platila, ať jakkoli zvolíme rovinovou formu P_r, mající v $\{x_0\}$ $(s+1)$-bodový styk s $M\{y\}$, je nutné a stačí — v. **258** — aby existovala čísla a_0, a_1, a_2 taková, že

$$\sum_{\alpha=0}^{s} \binom{s}{\alpha} (y_{\alpha, s-\alpha} - x_{\alpha, s-\alpha})\, du^\alpha dv^{s-\alpha} = a_0 y_{00} + a_1 y_{10} + a_2 y_{01}.$$

To je však zřejmě ekvivalentní s rovnicí $f(du, dv) = 0$.

295. Buď $M\{x(u,v)\}$ plocha třídy r obsahující bod $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\}$. Buď $M[P_r]$ algebraická plocha obsahující $\{x_0\}$ jako nesingulární bod. $M\{x\}$ a $M[P_r]$ mějte právě s-bodový $(1 \leq s \leq r)$ styk v $\{x_0\}$. Pak

$$(1)\qquad [d^s SP_r\, x(u,v)]_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$$

jest forma $(s+1)$-bodového styku plochy $M\{x(u,v)\}$ a algebraické plochy $M[P_r]$ v bodě $\{x_0\}$.

Buď $M\{y(u',v')\}$ plocha, která splyne s $M[P_r]$ v okolí bodu $\{x_0\} = \{y(u'_0, v'_0)\}$. Buď

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}x}{\partial u^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u=u_0\\v=v_0}} = x_{\alpha_1\alpha_2}, \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}y}{\partial u'^{\alpha_1}\partial v'^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u'=u'_0\\v'=v'_0}} = y_{\alpha_1\alpha_2}. \qquad (0 \leqq \alpha_1+\alpha_2 \leqq r)$$

Můžeme předpokládati, že

$$x_{\alpha_1\alpha_2} = y_{\alpha_1\alpha_2}. \qquad (0 \leqq \alpha_1+\alpha_2 \leqq s-1) \tag{2}$$

Označme δ diferenciály proměnných u', v' a jejich funkcí. Ježto jest identicky $SP_r y(u',v') = 0$, jest též

$$[\delta^s SP_r y(u',v')]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}} = 0. \tag{3}$$

Dosaďme v levé straně identity (3)

$$\delta u' = du,\ \delta^2 u' = d^2 u, \ldots \delta^s u' = d^s u$$
$$\delta v' = dv,\ \delta^2 v' = d^2 v, \ldots \delta^s v' = d^s v$$

a odečtěme od výrazu (1). Vzhledem ke (2) obdržíme identitu

$$[d^s SP_r x(u,v)]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}} = S\left[P_r; \sum_{\alpha=0}^{s}(x_{\alpha, s-\alpha} - y_{\alpha, s-\alpha})\, du^\alpha dv^{s-\alpha}\right] x_{00}. \tag{4}$$

Buď y pevný ar. bod takový, že $(x_{00}, x_{10}, x_{01}, y) = 1$. Buď

$$\sum_{\alpha=0}^{s}\binom{s}{\alpha}(x_{\alpha, s-\alpha} - y_{\alpha, s-\alpha})\, du^\alpha dv^{s-\alpha} = \lambda_0 x_{00} + \lambda_1 x_{10} + \lambda_2 x_{01} + \mu y, \tag{5}$$

z čehož snadno vidíme, že

$$\mu = \left[x_{00}, x_{10}, x_{01}, \sum_{\alpha=0}^{s}\binom{s}{\alpha}(x_{\alpha, s-\alpha} - y_{\alpha, s-\alpha})\, du^\alpha dv^{s-\alpha}\right]. \tag{6}$$

Dle **270** jest

$$S[P_r;\ x_{00}]\, x_{00} = S[P_r; x_{10}]\, x_{00} = S[P_r; x_{01}]\, x_{00} = 0,\ S[P_r; y]\, x_{00} \neq 0,$$

takže dle (4), (5) a (6)

$$[d^s SP_r\ x(u,v)]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}} = c\left[x_{00}, x_{10}, x_{01}, \sum_{\alpha=0}^{s}\binom{s}{\alpha}(x_{\alpha, s-\alpha} - y_{\alpha, s-\alpha})\, du^\alpha dv^{s-\alpha}\right],$$

kde

$$c = S[P_r; y]\, x_{00}.$$

296. Buďte $M\{x(u,v)\}$, $M\{y(u',v')\}$ dvě plochy třídy r mající ve společném bodě $\{x_0\}$ právě s-bodový $(2 \leqq s \leqq r-1)$ styk. Přímka $\{p\}$ buď jednoduchou přímkou $(s+1)$-bodového styku ploch $M\{x\}$ a $M\{y\}$ v bodě $\{x_0\}$. Pak existují na $M\{x\}$ křivky třídy $(s+1)$, které mají v $\{x_0\}$ tečnu $\{p\}$ a mají v $\{x_0\}$ $(s+2)$-bodový styk s $M\{y\}$. Je-li C jedna z nich, jsou tyto křivky charakterisovány tím, že mají v $\{x_0\}$ trojbodový styk s C.

Dříve než přistoupíme k důkazu tohoto teorému poznamenejme, že, není-li $\{p\}$ asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v bodě $\{x_0\}$, lze místo slov: „Pak existují“ atd. říci jednodušeji: Existuje jedna a jen jedna rovina $\{\eta\}$ té vlastnosti, že křivka třídy $s+1$ na ploše $M\{x\}$, obsahující bod $\{x_0\}$ a mající zde tečnu $\{p\}$, má v $\{x_0\}$ s plochou $M\{y\}$ $(s+2)$-bodový styk, když a jen když její oskulační rovina v $\{x_0\}$ jest $\{\eta\}$. To plyne ze **283.**

Užijme předpokladů a označení ze **294.** Buď C křivka třídy $s+1$ na ploše $M\{x\}$, obsahující $\{x_0\}$, mající zde tečnu $\{p\}$ a mající v $\{x_0\}$ $(s+2)$-bodový styk s $M\{y\}$. Označme d diferenciály patřící ke křivce C a k bodu $\{x_0\}$. Buď C' křivka třídy $s+1$ na ploše $M\{y\}$, obsahující $\{x_0\}$; označme δ diferenciály patřící ke křivce C' a k bodu $\{x_0\}$. Buď P_r rovinová forma mající v $\{x_0\}$ $(s+2)$-bodový styk s $M\{y\}$, tedy též s C. Pak jest

$$[\delta^{\alpha}\, SP_r y(u', v')]_{\substack{u'=u'_0\\ v'=v'_0}} = 0. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s+1) \tag{1}$$

Volme křivku C' tak, že

$$\begin{aligned} du &= \delta u', d^2u = \delta^2 u', \ldots, d^{s+1}u = \delta^{s+1}u', \\ dv &= \delta v', d^2 v = \delta^2 v', \ldots, d^{s+1} v = \delta^{s+1} v. \end{aligned} \tag{2}$$

Má-li C v $\{x_0\}$ $(s+2)$-bodový styk s $M\{y\}$, má týž styk s P_r, takže

$$[d^{\alpha}\, SP_r x(u, v)]_{\substack{u'=u'_0\\ v'=v'_0}} = 0. \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s+1) \tag{3}$$

Od každé rovnice (3) odečtěme příslušnou identitu (1). Pro $0 \leqq \alpha \leqq s-1$ obdržíme dle **294** (1) identitu, pro $\alpha = s$ obdržíme rovnici

$$S\left[P_r; \sum_{\alpha=0}^{s} \binom{s}{\alpha} (x_{\alpha, s-\alpha} - y_{\alpha, s-\alpha})\, du^{\alpha} dv^{s-\alpha}\right] x_{00} = 0, \tag{4}$$

pro $\alpha = s+1$ obdržíme dle **294** (1)

$$\begin{aligned} &S\Bigg[P_r; \sum_{\alpha=0}^{s+1} \binom{s+1}{\alpha} (x_{\alpha, s+1-\alpha} - y_{\alpha, s+1-\alpha})\, du^{\alpha} du^{s+1-\alpha} + \\ &+ \frac{s^2(s+1)}{2} \Bigg\{ d^2u \sum_{\alpha=0}^{s-1} \binom{s-1}{\alpha} (x_{\alpha+1, s-1-\alpha} - y_{\alpha+1, s-1-\alpha})\, du^{\alpha} dv^{s-1-\alpha} + \\ &+ d^2v \sum_{\alpha=0}^{s-1} \binom{s-1}{\alpha} (x_{\alpha, s-\alpha} - y_{\alpha, s-\alpha})\, du^{\alpha} dv^{s-1-\alpha} \Bigg\}\Bigg] x_{00} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Víme, že rovnice (4) jest ekvivalentní s rovnicí

$$\left[x_{00}, x_{10}, x_{01}, \sum_{\alpha=0}^{s} \binom{s}{\alpha} (x_{\alpha, s-\alpha} - y_{\alpha, s-\alpha}) du^{\alpha} dv^{s-\alpha}\right] = 0,$$

jež je splněna, když tečnou křivky C v $\{x_0\}$ jest $\{p\}$. Podobně rovnice (5) jest ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{aligned}&\left[x_{00}, x_{10}, x_{01}, \sum_{\alpha=0}^{s+1} \binom{s+1}{\alpha} (x_{\alpha, s+1-\alpha} - y_{\alpha, s+1-\alpha}) du^{\alpha} dv^{s+1-\alpha} + \right.\\ (6)\quad &+ \frac{s^2(s+1)}{2}\left\{d^2u \sum_{\alpha=0}^{s-1} \binom{s-1}{\alpha} (x_{\alpha+1, s-1-\alpha} - y_{\alpha+1, s-1-\alpha}) du^{\alpha} dv^{s-1-\alpha} + \right.\\ &\left.\left. + d^2v \sum_{\alpha=0}^{s-1} \binom{s-1}{\alpha} (x_{\alpha, s-\alpha} - y_{\alpha, s-\alpha}) du^{\alpha} dv^{s-1-\alpha}\right\}\right] = 0.\end{aligned}$$

Zřejmě běží pouze o to, určiti — jsou dány diferenciály du, dv — druhé diferenciály d^2u, d^2v tak, aby byla splněna rovnice (5). Koeficienty při d^2u, d^2v nejsou však současně rovny nule, jak vychází snadno z předpokladu, že $\{p\}$ jest jednoduchá přímka $(s+1)$-bodového styku ploch $M\{x\}$ a $M\{y\}$ v bodě $\{x_0\}$. Lze tedy rovnici (6) vyhověti; snadno vidíme, že, je-li jí vyhověno hodnotami d^2u, d^2v, jest jí vyhověno také hodnotami δ^2u, δ^2v, když a jen když existuje číslo b takové, že

$$\delta^2 u = d^2 u + b du, \delta^2 v = d^2 v + b dv.$$

Teorém nyní vychází snadno ze **254** (4) a **255**.

297. Buďte $M\{x(u, v)\}$, $M\{y(u', v')\}$ dvě plochy třídy r, mající ve společném bodě $\{x_0\}$ právě s-bodový $(2 \leq s \leq r-1)$ styk. Přímka $\{p\}$ buď μ-násobnou $(\mu \geq 2)$ přímkou $(s+1)$-bodového styku ploch $M\{x\}$ a $M\{y\}$ v bodě $\{x_0\}$. Když jedna z křivek třídy $s+1$ na ploše $M\{x\}$, obsahujících $\{x_0\}$ a majících zde tečnu $\{p\}$, má v $\{x_0\}$ $(s+2)$-bodový (právě $(s+1)$-bodový) styk s $M\{y\}$, má každá z těchto křivek stejný styk.

Důkaz je stejný jako ve **296**, s tím pouze rozdílem, že za předpokladu nyní učiněného v rovnici **296** (6) jsou rovny nule koeficienty při d^2u a při d^2v.

298. Buď C křivka třídy 2. Buďte $M\{x(u, v)\}$, $M\{y(u', v')\}$ dvě plochy třídy 2, obsahující křivku C. Buď $\{x_0\} = \{x(u_0, v_0)\} = \{y(u'_0, v'_0)\}$ bod křivky C; plochy $M\{x\}$ a $M\{y\}$ mějte v $\{x_0\}$ dvojbodový styk. Tečna křivky C v $\{x_0\}$ nebuď asymptotickou tečnou plochy $M\{x\}$ v $\{x_0\}$. Plochy $M\{x\}$ a $M\{y\}$ mají v $\{x_0\}$ trojbodový styk, když a jen když mají v $\{x_0\}$ touž involuci konjugovaných tečen.

Že podmínka je nutná, vychází ihned ze **291**. Předpokládejme, že by $M\{x\}$ a $M\{y\}$ měly sice v $\{x_0\}$ touž involuci konjugovaných tečen, že však by měly v $\{x_0\}$ právě dvojbodový styk. Buď

$$x_0 = x,\ x_1 = \frac{\partial x}{\partial u},\ x_2 = \frac{\partial x}{\partial v},\ x_{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\ x_{12} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},\ x_{22} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \qquad (|u, v|_b = |u_0, v_0|_b)$$

$$x_0 = y,\ y_1 = \frac{\partial y}{\partial u'},\ y_2 = \frac{\partial y}{\partial v'},\ y_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial u'^2},\ y_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial u' \partial v'},\ y_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial v'^2}. \qquad (|u', v'|_b = |u'_0, v'_0|_b)$$

Můžeme předpokládati, že $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$. Ježto $M\{x\}$ a $M\{y\}$ mají v $\{x_0\}$ touž involuci konjugovaných tečen, existuje číslo λ takové, že

$$(1) \quad (x_0 x_1 x_2 y_{11}) = \lambda (x_0 x_1 x_2 x_{11}),\ (x_0 x_1 x_2 y_{12}) = \lambda (x_0 x_1 x_2 x_{12}),\ (x_0 x_1 x_2 y_{22}) = \lambda (x_0 x_1 x_2 x_{22}).$$

Z (1) vychází ihned, že

$$(2) \qquad (x_0, x_1, x_2, x_{11} du^2 + 2x_{12} du\, dv + x_{22} dv^2)$$

je forma trojbodového styku ploch $M\{x\}$ a $M\{y\}$ v $\{x_0\}$. Tečna $\{p\}$ křivky C v $\{x_0\}$ je však zřejmě přímkou trojbodového styku obou ploch v $\{x_0\}$. Dle (2) je tedy $\{p\}$ asymptotická tečna plochy $M\{x\}$ v $\{x_0\}$ proti předpokladu.

Regulární plochy.

299. Buď $M_a\ x(u, v)$ ($|u, v|_b$ v O) ar. plocha třídy $r \geqq 2$; buď $\xi(u, v) = \left(x \dfrac{\partial x}{\partial u} \dfrac{\partial x}{\partial v}\right)$. Pravíme, že $M_a x$ jest regulární ar. plocha když: 1° jsou-li $|u_1, v_1|_b$ a $|u_2, v_2|_b$ dva různé ar. body z oboru $[O]$, ar. roviny $\xi(u_1, v_1)$, $\xi(u_2, v_2)$ jsou lin. nezávislé; 2° pro každý ar. bod $|u, v|_b$ z $[O]$ jest

$$(1) \qquad \left(S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 - S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \cdot S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \neq 0.$$

Plocha $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|$ v O) třídy $r \geqq 2$ nazývá se regulární, když ar. plocha $M_a x(u, v)$($|u, v|_b$) v O) jest regulární. Regulární plocha nemá parabolických bodů; tečné roviny regulární plochy ve dvou různých bodech jsou různé.

Že jsme k těmto definicím oprávněni, je zřejmé. Výrok o parabolických bodech vychází ze **274** a výrok o tečných rovinách je zřejmý.

300. Buď $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) regulární plocha třídy $r \geqq 2$. Množství tečných rovin $\{\xi(u, v)\}$ plochy $M\{x\}$ je duální plocha $\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\}$ třídy $r - 1$. Pravíme, že duální plocha $\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) jest adjungována ku ploše $M\{x(u, v)\}$

($|u, v|_b$ v O) a píšeme

$$\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\} = \text{Adj.}\, M\{x(u, v)\}.$$

Dle **269** můžeme předpokládati, že

(1) $$\xi(u, v) = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Odtud plyne

(2) $$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) - \left(x \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right),$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) - \left(x \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right);$$

takže dle **109** (1)

(3) $$\left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \left(x \frac{\partial x}{\partial u}\right) - S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \left(x \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

a tedy dle (2) a **110** (1)

(4) $$\left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = \left[\left(S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 - S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} . S\xi \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right] x \neq 0_b.$$

301. Buď $M\{x(u, v)\}$ regulární plocha třídy $r \geqq 2$. Buď

(1) $$\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\} = \text{Adj.}\, M\{x(u, v)\}.$$

Když $\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\}$ jest regulární duální plocha, jest

(2) $$M\{x(u, v)\} = \text{Adj.}\, \mathfrak{M}\{\xi(u, v)\}.$$

Vychází ihned ze **300** (4).

302. Buď $M\{x(u, v)\}$ ($|u, v|_b$ v O) regulární plocha třídy $r \geqq 2$. Buď

$$\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\} = \text{Adj.}\, M\{x(u, v)\}.$$

$\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\}$ jest regulární duální plocha, kdykoli je třídy 2; zejména tedy, kdykoli $r \geqq 3$.

Snadno se nahlédne, že stačí ukázati, že pro každý ar. bod $|u, v_b|$ z $[O]$ jest identicky v du, dv:

$$S\xi d^2x = Sx d^2\xi,$$

což plyne z identit

$$0 = d(S\xi dx) = S\xi d^2x + Sdx d\xi,$$
$$0 = d(Sx d\xi) = Sx d^2\xi + Sdx d\xi.$$

303. Buďte $M\{x(u, v)\}$, $M\{y(u', v')\}$ regulární plochy třídy $r \geqq 2$ o společném bodě $\{x(u_0, v_0)\} = \{y(u'_0, v'_0)\}$. Buď

$$\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\} = \text{Adj.}\, M\{x(u, v)\},$$
$$\mathfrak{M}\{\eta(u', v')\} = \text{Adj.}\, M\{y(u', v')\}.$$

Mají-li plochy $M\{x\}$, $M\{y\}$ s-bodový ($2 \leq s \leq r$) styk v $\{x(u_0, v_0)\}$, mají $\mathfrak{M}\{\xi\}$, $\mathfrak{M}\{\eta\}$ s-rovinový styk v $\{\xi(u_0, v_0)\}$.

Buď

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} x}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = x_{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} y}{\partial u'^{\alpha_1} \partial v'^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u'=u'_0 \\ v'=v'_0}} = y_{\alpha_1 \alpha_2}. \qquad (0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq r)$$

Dle **291** můžeme předpokládati, že

$$x_{\alpha_1 \alpha_2} = y_{\alpha_1 \alpha_2}. \qquad (0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-1) \tag{1}$$

Dle **269** můžeme předpokládati, že

$$\xi(u, v) = \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad \eta(u, v) = \left(y \frac{\partial y}{\partial u'} \frac{\partial y}{\partial v'}\right).$$

Z (1) vychází ihned, že

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} \xi}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} \eta}{\partial u'^{\alpha_1} \partial v'^{\alpha_2}}\right)_{\substack{u'=u'_0 \\ v'=v'_0}} \qquad (0 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 \leqq s-2) \tag{2}$$

a že

$$\left(\frac{\partial^{s-1} \eta}{\partial u'^{\alpha} \partial v'^{s-1-\alpha}}\right)_{\substack{u'=u'_0 \\ v'=v'_0}} - \left(\frac{\partial^{s-1} \xi}{\partial u^{\alpha} \partial v^{s-1-\alpha}}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = \qquad (0 \leqq \alpha \leqq s-1) \tag{3}$$

$$= (x_{00}, x_{10}, y_{\alpha, s-\alpha} - x_{\alpha, s-\alpha}) - (x_{00}, x_{01}, y_{\alpha+1, s-1-\alpha} - x_{\alpha+1, s-1-\alpha}).$$

Dle **300** (4) jest

$$\mathrm{Adj.}\{x_{00}\} = \left\{\xi(u_0, v_0), \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}, \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}\right\}.$$

Zřejmě však ar. rovina napravo ve (3) náleží do Adj. $\{x_{00}\}$. Existují tedy čísla a, b, c taková, že

$$\left(\frac{\partial^{s-1} \eta}{\partial u'^{\alpha} \partial v'^{s-1-\alpha}}\right)_{\substack{u'=u'_0 \\ v'=v'_0}} - \left(\frac{\partial^{s-1} \xi}{\partial u^{\alpha} \partial v^{s-1-\alpha}}\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} = \left(a \frac{\partial \xi}{\partial u} + b \frac{\partial \xi}{\partial v} + c\,\xi\right)_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}. \tag{4}$$

Ze (2) a (4) vychází dle **292**, že $\mathfrak{M}\{\xi(u, v)\}$ a $\mathfrak{M}\{\eta(u', v')\}$ mají s-rovinový styk ve $\{\xi(u, v_0)\}$.

Styk osnov.

304. Buď $R\{(x(u), y(u))\}$ osnova třídy r, obsahující přímku $\{p_0\}$, kde $p_0 = (x(u_0), y(u_0))$. Osnova $R\{q(v)\}$ má s $R\{(x(u), y(u))\}$ v přímce $\{p_0\}$ s-přímkový ($1 \leq s \leq r+1$) styk, když a jen když obsahuje $\{p_0\}$ a v okolí této přímky splyne s osnovou

$R\{(x'(v), y'(v))\}$, při čemž

$$\left[\frac{d^\alpha x'(v)}{dv^\alpha}\right]_{v=v_0} = \left[\frac{d^\alpha x(u)}{du^\alpha}\right]_{u=u_0}, \quad \left[\frac{d^\alpha y'(v)}{dv^\alpha}\right]_{v=v_0} = \left[\frac{d^\alpha y(u)}{du^\alpha}\right]_{u=u_0}. \tag{1}$$

$$\left(\alpha = 0, 1 \ldots s-1; \; \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)$$

Je zřejmé, že tyto podmínky stačí. Že jsou nutné, je zřejmé, když $s = 1$. Můžeme tedy jejich nutnost dokazovati indukcí vzhledem k s. Budeme tedy předpokládati, že 1° osnovy $R\{xy\}$, $R\{q\}$ mají s-přímkový $(1 < s \leqq r+1)$ styk v $\{p_0\}$, 2° že jest $q(v) = (x_1(v), y_1(v))$ a

$$\left[\frac{d^\alpha x_1(v)}{dv^\alpha}\right]_{v=v_0} = \left[\frac{d^\alpha x(u)}{du^\alpha}\right]_{u=u_0}, \quad \left[\frac{d^\alpha y_1(v)}{dv^\alpha}\right]_{v=v_0} = \left[\frac{d^\alpha y(u)}{du^\alpha}\right]_{u=u_0}. \tag{2}$$

$$(0 \leq \alpha \leq s-2)$$

Dle důkazu ve **178** a dle **208** můžeme předpokládati, že

$$\left[\frac{d^{s-1}}{dv^{s-1}}(x_1 y_1)\right]_{v=v_0} = \left[\frac{d^{s-1}}{du^{s-1}}(xy)\right]_{u=u_0}. \tag{3}$$

Ze (2) a (3) vychází snadno, že

$$\left[\left(x_1, \frac{d^{s-1}y_1}{dv^{s-1}}\right) - \left(y_1, \frac{d^{s-1}x_1}{dv^{s-1}}\right)\right]_{v=v_0} = \left[\left(x, \frac{d^{s-1}y}{dv^{s-1}}\right) - \left(y, \frac{d^{s-1}x}{du^{s-1}}\right)\right]_{u=u_0},$$

čili

$$x(u_0), \left[\frac{d^{s-1}y_1}{dv^{s-1}}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^{s-1}y}{du^{s-1}}\right]_{u=u_0}\Bigg) = \left(y(u_0), \left[\frac{d^{s-1}x_1}{dv^{s-1}}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^{s-1}x}{du^{s-1}}\right]_{u=u_0}\right).$$

Odtud vychází ihned, že

$$\left(x(u_0), y(u_0), \left[\frac{d^{s-1}y_1}{dv^{s-1}}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^{s-1}y}{du^{s-1}}\right]_{u=u_0}\right) = 0_r,$$

$$\left(x(u_0), y(u_0), \left[\frac{d^{s-1}x_1}{dv^{s-1}}\right]_{v=v_0} - \left[\frac{d^{s-1}x}{du^{s-1}}\right]_{u=u_0}\right) = 0_r,$$

takže existují čísla λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 taková, že

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^{s-1}x_1}{dv^{s-1}}\right]_{v=v_0} &= \left[\frac{d^{s-1}x}{du^{s-1}}\right]_{u=u_0} + \lambda_1 x(u_0) + \lambda_2 y(u_0), \\ \left[\frac{d^{s-1}y_1}{dv^{s-1}}\right]_{v=v_0} &= \left[\frac{d^{s-1}y}{du^{s-1}}\right]_{u=u_0} + \mu_1 x(u_0) + \mu_2 y(u_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Položme nyní

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x'(v) &= \left[1 - \frac{\lambda_1}{(s-1)!}(v-v_0)^{s-1}\right] x_1(v) - \frac{\lambda_2}{(s-1)!}(v-v_0)^{s-1} y_1(v),\\
y'(v) &= -\frac{\mu_1}{(s-1)!}(v-v_0)^{s-1} x_1(v) + \left[1 - \frac{\mu_2}{(s-1)!}(v-v_0)^{s-1}\right] y_1(v).
\end{aligned}
$$

Ze (2), (3), (4) a (5) vycházejí snadno žádané rovnice (1).

305. Buďte $R\{p(u)\}$, $R\{p'(v)\}$ osnovy třídy r. Buď

$$p(u) = \big(x(u),\ y(u)\big),\quad p'(v) = \big(x'(v),\ y'(v)\big),$$

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{d^\alpha x}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} &= x_\alpha, & \left(\frac{d^\alpha y}{du^\alpha}\right)_{u=u_0} &= y_\alpha,\\
\left(\frac{d^\alpha x'}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} &= x'_\alpha, & \left(\frac{d^\alpha y'}{dv^\alpha}\right)_{v=v_0} &= y'_\alpha.
\end{aligned}
\qquad \left(0 \leq \alpha \leq r;\ \frac{d^0}{du^0} = \frac{d^0}{dv^0} = 1\right)
$$

Buď $1 \leq s \leq r$. Buď

$$(2)\qquad x'_\alpha = x_\alpha,\quad y'_\alpha = y_\alpha, \qquad (0 \leq \alpha \leq s-1)$$

takže osnovy $R\{p\}$ a $R\{q\}$ mají s-přímkový styk v přímce $\{p(u_0)\}$. Když a jen když existují čísla $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ taková, že

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
x'_s &= x_s + \alpha x_1 + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0,\\
y'_s &= y_s + \alpha y_1 + \gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0,
\end{aligned}
$$

mají osnovy $R\{p\}$ a $R\{q\}$ $(s+1)$-přímkový styk v přímce $\{p(u_0)\}$.

Dle **179** a **208** máme pouze ukázati: Když a jen když existují čísla α, β_1, β_2, γ_1, γ_2 taková, že platí (3), existují čísla a, b taková, že platí

$$(4)\qquad \left(\frac{d^s q}{dv^s}\right)_{v=v_0} - \left(\frac{d^s p}{du^s}\right)_{u=u_0} = \left[a\frac{dp}{du} + bp\right]_{u=u_0}.$$

Dle (1) a (2) lze rovnice (4) uvésti na tvar

$$(5)\qquad (x'_s - x_s,\ y_0) + (x_0,\ y'_s - y_s) = a(x_0 y_1) + a(x_1 y_0) + b(x_0 y_0).$$

Jest ihned patrné, že ze (3) plyne (5), klademe-li

$$a = \alpha,\quad b = \beta_1 + \gamma_2.$$

Předpokládejme tedy, že platí (5). Obdržíme snadno

$$
\begin{aligned}
(x'_s - x_s,\ x_0,\ y_0) &= a(x_0,\ y_0,\ x_1),\\
(y'_s - y_s,\ x_0,\ y_0) &= a(x_0,\ y_0,\ y_1)
\end{aligned}
$$

čili

$$(x'_s - x_s - ax_1,\ x_0,\ y_0) = (y'_s - y_s - ay_1,\ x_0,\ y_0) = 0_r.$$

Ježto $(x_0 y_0) \neq 0_p$, existují tedy čísla β_1, β_2, γ_1, γ_2 taková, že platí (3), položíme-li $\alpha = a$.