List 3: Komentář k Boethiovu Úvodu do hudby l. II, c. 21

In: Marek Otisk (author); Richard Psík (author); Gerbert of Reims (other): Matematické listy Gerberta z Remeše. (Czech). Praha: Centrum Vivarium FF OU, 2014. pp. 110–116.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402410

List 3[1]

Scholium ad Boethii *Musicae Institutionis* l. II, c. 21[2] 30, 4

Constantino suo Gerbertus scolasticus 30, 18

Capitulo XXI secundi libri musicae institutionis sic positum
est a Boetio: *Ab omni superparticulari, si continuam ei superpar-* 30, 20
ticularem quis auferat proportionem, quae est scilicet minor, id,
quod relinquitur, minus est ejus medietate, quae detracta est, pro-
portionis: ut in sesqualtera vel sesquitertia. Quoniam sesqualtera 30, 25
major est, sesquitertiam de sesqualtera detrahamus. Relinquitur
sesquioctava proportio, quae duplicata non efficit integram ses-
quitertiam proportionem, sed ea distantia minor est, quae in se-
mitonio repperitur. Quod si duplicata sesquioctava comparatio 31, 1
non est integra sesquitertia, simplex sesquioctava non est sesqui-
tertiae proportionis plena medietas. Sit propositus unus et idem
numerus, ad quem aptetur sesqualtera ac sesquitertia proportio:
hic sit VI, ad quem VIIII sesqualter est, VIII vero sesquitertius. 31, 5
Qui disponantur hoc modo: VI, VIII, VIIII. Et quoniam hae duae
proportiones continuae superparticulares sunt in tribus terminis
constitutae: VI, VIII, VIIII, auferamus primum terminum, ad
quem VIII est sesquitertius, — VIIII sesqualter. Remanet VIII 31, 10
et VIIII, qui sesquioctavi sunt. Sed sesquioctava porportio non
est medietas minoris proportionis, id est sesquitertiae, quoni-
am duplicata non efficit eam, sed minor est. Duplicemus igitur
sesquioctavam proportionem et sint tres numeri ita dispositi, qui
a proportione VIII et VIIII non recedant, fiantque octies octo et 31, 15
VIII VIIII et VIIII VIIII, id est; LXIIII, LXXII, LXXXI. Dico quo-
niam primus ad secundum et secundus ad tertium sesquioctavam
custodiunt habitudinem, sed tertius ad primum minus est, quam
sesquitertius, non est ergo sesquioctavus medietas sesquitertii.
Et in omnibus superparticularibus continuis hoc in commune 31,20
speculandum est, quoniam, si minor a majore subtrahitur, id,

---

[1] Datace tohoto dopisu je totožná s *Listem* 2 – viz pozn. 1 k *Listu* 2. Srov. [GeEE], s. 43; [GeEC], s. 689; resp. [GeER], s. 192.

[2] Latinský text je převzat z [Bub], s. 30–31 (I, I, A, 5). Název byl doplněn editorem textu N. Bubnovem.

[3] Termín *sesquioctava proportio* překládáme jako „poměr 9 : 8“, tj. devítiosminový násobek, resp. vztah čísel, kdy větší číslo přesahuje menší číslo o osminu menšího čísla. V hudební terminologii se pro označení seskvioktávy, tedy poměru 9 : 8, užívá pojmenování velká sekunda, příp. velký celý tón.

Komentář k Boethiovu *Úvodu do hudby* II, 21

Učitel Gerbert svému Konstantinovi

V 21. kapitole druhé knihy Úvodu do hudby Boethius tvrdí: *Pokud od jakéhokoli superpartikulárního poměru odečteme bezprostředně následující superpartikulární poměr, který je přirozeně menší, výsledek je menší než polovina odčítaného poměru, jako například u poměrů 3 : 2 a 4 : 3. Protože poměr 3 : 2 je větší, odečteme od něj poměr 4 : 3. Výsledkem je poměr 9 : 8,*[3] *jehož zdvojnásobením však nevzniká přesně poměr 4 : 3, ale poměr menší o interval, který odpovídá půltónu.*[4] *Jestliže dvojnásobný poměr 9 : 8 neodpovídá přesně poměru 4 : 3, pak jeden poměr 9 : 8 není celou polovinou poměru 4 : 3.*[5]

Představme si pouze jedno číslo, k němuž můžeme přidat další v poměru 3 : 2 a v poměru 4 : 3: v našem případě číslo 6, k němuž je číslo 9 v poměru 3 : 2 a číslo 8 v poměru 4 : 3. Tato čísla uspořádáme takto: 6, 8, 9. Protože tyto dva po sobě následující superpartikulární poměry tvoří tři čísla, totiž 6, 8, 9, odebereme první číslo, k němuž je číslo 8 v poměru 4 : 3 a číslo 9 v poměru 3 : 2. Zůstanou čísla 8 a 9, která jsou v poměru 9 : 8.[6]

Ale poměr 9 : 8 neodpovídá polovině menšího poměru, tj. poměru 4 : 3; výsledek dvojnásobku poměru 9 : 8 totiž není roven poměru 4 : 3, ale je menší. Zdvojnásobme tedy poměr 9 : 8 a dostaneme tři čísla uspořádaná tak, že se nebudou odchylovat od poměru mezi osmičkou a devítkou: tedy 8 krát 8, 8 krát 9 a 9 krát 9, tj. 64, 72 a 81.

První číslo k druhému a druhé číslo k třetímu zachovávají poměr 9 : 8, kdežto poměr třetího čísla k prvnímu je menší než poměr 4 : 3. A proto tvrdím, že poměr 9 : 8 není polovinou poměru 4 : 3.[7]

Toto pravidlo lze obecně dokázat pro všechny po sobě následující superpartikulární poměry, protože odečítáme-li menší od většího, výsledek

---

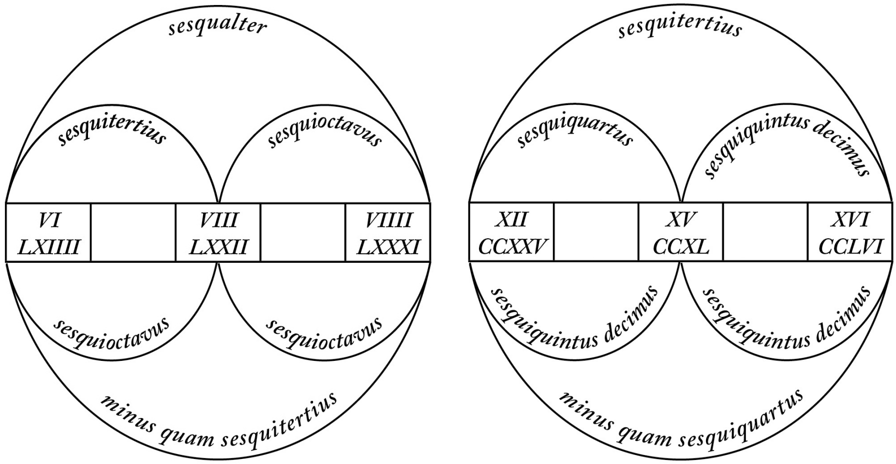
[4] Jedná se o tzv. malý půltón pythagorejského ladění (*limma*), který je vymezen číselným poměrem 256 : 243. Na určení jeho velikosti viz *Komentář* k *Listu* 3.

[5] [BoMu], II, 21, s. 254. Na výklad tohoto citátu viz *Komentář* k tomuto dopisu.

[6] Gerbert užívá příkladu (stejně jako Boethius) odečítání poměru 4 : 3 od poměru 3 : 2, pouze volí nejnižší čísla, která reprezentují dané intervaly. Schematické znázornění uvedeného odčítání viz *Komentář*.

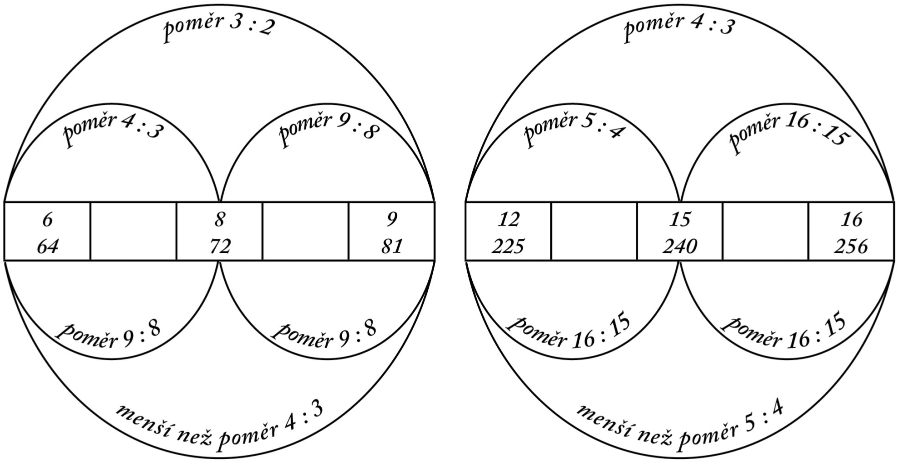
[7] Názorně to dokládá k dopisu připojené schéma.

quod relinquitur, minus est medietate subtractae proportionis, quoniam duplicatum non ei coaequatur, quod monstrat praesens descriptio.



[Fig. 29 a, b]

je vždy menší než polovina odčítaného poměru; dvojnásobek výsledku totiž neodpovídá zcela odečítanému poměru, jak ukazuje následující schéma (obr. 29).



[Obr. 29 c, d]

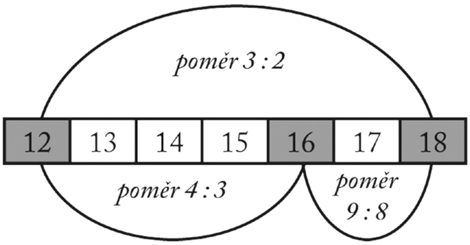
Komentář

Celý Gerbertův *List* 3 má poměrně jasnou strukturu. Nejprve ocituje část textu z Boethiova *Úvodu do hudby* (3, 4–13; 30, 20–31, 3), následně uvede konkrétní příklad, na němž demonstruje tezi z uvedeného výroku (3, 13–28; 31, 3–19) a poté podá obecné shrnutí celé problematiky (3, 29–33; 31, 19– 23), k čemuž ještě doplní dva nákresy pro snadnější pochopení tématu.

3, 4–13 (30, 20–31, 3):

Citovaná pasáž z Boethiova spisu objasňuje některé aritmetické operace se superpartikulárními číselnými vztahy, tj. s intervaly, které jsou vymezeny superpartikulárními poměry. Boethius říká, že je-li od jakéhokoli superpartikulárního poměru odečítán jiný superpartikulární poměr, který v pořadí superpartikulárních poměrů bezprostředně navazuje na menšence, pak výsledný rozdíl bude menší než polovina menšitele.

V případě, že menšencem bude superpartikulární poměr 3 : 2 (např. čísla 12 a 18) a menšitelem bezprostředně navazující superpartikulární poměr 4 : 3 (např. čísla 12 a 16), pak lze tuto operaci, jejímž výsledkem bude superpartikulární poměr 9 : 8 (zde čísla 16 a 18), schematicky znázornit takto (obr. 30):



Obr. 30 – Odčítání poměru 4 : 3 od poměru 3 : 2, kdy výsledkem je poměr 9 : 8

Uvedený výsledek pochopitelně koresponduje s aritmetickými pravidly pro operace s poměry, tzn. rozdíl poměrů je vyjádřen jako podíl zlomků, tj.:

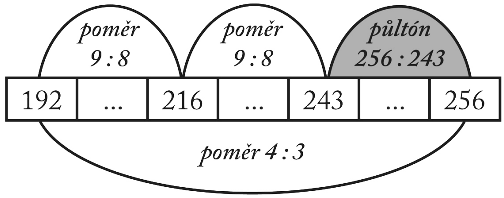
$$(3 : 2) - (4 : 3) = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} = 9 : 8.$$

3, 10–11 (30, 29):

Tzv. malý půltón pythagorejského ladění (*limma*) vyjadřuje interval, který je dán číselným poměrem 256 : 243. Vypočítat velikost tohoto půltónu lze podle Boethiova příkladu jako rozdíl mezi poměrem 4 : 3 a dvojnásobkem poměru 9 : 8, tj.:

$$(4 : 3) - 2 \cdot (9 : 8) = \frac{4}{3} : \left(\frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 8}\right) = \frac{4}{3} : \frac{81}{64} = \frac{4}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{256}{243}.$$

Rozsah půltónu lze získat také tak, že od intervalu mezi čísly 192 a 256, který je určen superpartikulárním poměrem 4 : 3, odečteme interval daný dvojnásobkem superpartikulárního poměru 9 : 8, tzn. interval, který reprezentuje posloupnost tří čísel 192 – 216 – 243. Názorněji viz obr. 31.

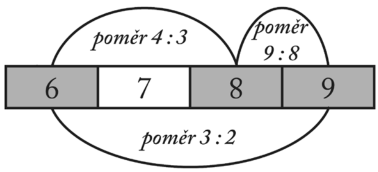


Obr. 31 – Půltón jako rozdíl poměru 4 : 3 a dvojnásobku poměru 9 : 8

O půltónu této hodnoty (*limma*) píše ve svém *Úvodu do hudby* také Boethius.[6]

3, 13–20 (31, 3–10):

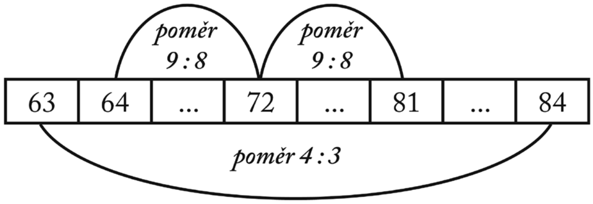
Gerbert volí příklad s nejnižší trojicí čísel, kterou lze sestavit do požadovaných poměrů 3 : 2 a 4 : 3. Je zřejmé, že pokud od intervalu vymezeného poměrem 3 : 2 odečteme interval daný poměrem 4 : 3, dostaneme interval určený poměrem 9 : 8, jak už bylo zmíněno. Tento Gerbertovů příklad zachycuje obr. 32.



Obr. 32 – Gerbertův příklad rozdílu mezi poměry 3 : 2 a 4 : 3

3, 20–28 (31, 10–19):

Výsledek uvedeného odčítání, tj. poměr 9 : 8, je menší než polovina menšitele (poměru 4 : 3), protože dvojnásobek rozdílu je menší než menšitel, jak názorně ukazuje toto schéma (obr. 33):



Obr. 33 – Gerbertův příklad dokladu, že poměr 9 : 8 je menší než polovina poměru 4 : 3

[8] [BoMu], II, 28, s. 256–261.

3, 24–25 (31, 14–16):

V této pasáži Gerbert ukazuje velmi snadné nalezení tříčlenné posloupnosti s nejnižšími číselnými hodnotami podle jakéhokoli poměru. Má-li vzniknout posloupnost $a - b - c$ podle poměru $x : y$, pak platí, že:

[C1] $a = y^2$;
[C2] $b = x \cdot y$;
[C3] $c = x^2$.

Tedy např. pro poměr 9 : 4 platí, že tříčlenná posloupnost s nejnižšími číselnými hodnotami bude 16 – 36 – 81, neboť:

$a = y^2 = 4^2 = 16$;
$b = x \cdot y = 4 \cdot 9 = 36$;
$c = x^2 = 9^2 = 81$.

Analogicky získáme posloupnost např. pro poměr 5 : 1, tj. 1 – 5 – 25 atd.