

Matematické listy Gerberta z Remeše

List 2: Komentář k Boethiovu Úvodu do hudby I. II, c. 10; I. IV, c.2

In: Marek Otisk (author); Richard Psík (author); Gerbert of Reims (other): Matematické listy Gerberta z Remeše. (Czech). Praha: Centrum Vivarium FF OU, 2014. pp. 106–109.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402409>

Terms of use:

- © Otisk, Marek
- © Psík, Richard
- © Matfyzpress

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

List 2¹Scholium ad Boethii *Musicae Institutionis* I. II, c. 10; I. IV, c. 2² 28, 18

Constantino suo Gerbertus scolasticus 29, 4

Quae in decimo capitulo secundi libri musicae institutionis ratio 29, 5
 superparticularium breviter facta est, eadem latius et per exempla
 tractatur in secundo capitulo libri quarti. Nos quoque ipsa verba
 5 ponemus et de eisdem ita protinus dicemus: *si superparticularis*
proportio binario multiplicetur id, quod fit, neque superparticulare 29, 10
esse, neque multiplex. Binario dicitur multiplicari proportio, quan-
 do eadem duplicatur, ut qualis est prima, talis sit et secunda, id est
 10 quemadmodum habet se primus terminus ad secundum, sic secun-
 dus se habeat ad tertium. Sit superparticularis proportio: quater-
 narius ad senarium. Haec quoniam una est, binario multiplicetur. 29, 15
 Bis enim unum duo sunt. Oportet ergo, ut sunt IIII ad sex, sic esse
 sex ad alium quemlibet numerum; hic sit novem. Dico, quoniam no-
 15 venarius ad quaternarium nec multiplex est nec superparticularis.
Quod si id, quod ex tali multiplicatione nascetur, neque multiplex 29, 20
est, neque superparticulare, tunc illud, quod binario multiplicatum
est, vel superparticularis vel alterius generis, non vero multiplicis.
 Quod ex priore multiplicatione natum est, duplex sesquiquartus
 20 est, ut sunt IX ad IIII, id est neque multiplex, neque superparti-
 cularis, sed multiplex superparticularis. Et quod binario multipli-
 catum est, multiplicis generis non est, sed vel superparticularis,
 vel alterius. At hic neque multiplicis, neque alterius, sed definite 30, 1
 superparticularis. Est enim multiplicata proportio sesquialtera.

¹ Tento dopis patří mezi Gerbertovy učitelské remešské listy, vznikl zřejmě mezi roky 972–982, pravděpodobně na sklonku 70. či na počátku 80. let 10. století. Stejně jako u předchozího textu i v tomto případě H. P. Lattin odhaduje roky 978–980 (viz [GeEE], s. 41), A. P. Segonds a P. Rossi uvádějí dobu sepsání před rokem 982 (viz [GeEC], s. 687; resp. [GeER], s. 191).

² Latinský text je převzat z [Bub], s. 28–30 (I, I, A, 4). Název dopisu i tentokrát pochází od editora textu N. Bubnova.

³ Konstantin, mnich a učitel kláštera ve Fleury, byl Gerbertovým přítelem, žákem a spolupracovníkem v Remeši. Z jejich vzájemné korespondence se dochovalo několik listů, v nichž kupř. Gerbert opakovně Konstantina zve do Remeše a žádá jej o konkrétní knihu ([GeEW], 86, s. 114; resp. 142, s. 168–169), Konstantin hovoří o problémech s volbou opata ve Fleury ([GeEW], 143, s. 169–170) či Gerbert protestuje proti římské cestě opata Abbona z Fleury ([GeEW], 191, s. 229–230). Gerbert navíc v dopise mnichu Bernardovi do Aurillacu doporučuje Konstantina jako velkého znalce hudby ([GeEW], 92, s. 121–122).

⁴ Boethius se ve druhé knize *Úvodu do hudby* věnuje superpartikulárním poměrům také v dalších capitolech – viz [BoMu] II, 4–5, s. 229–231; II, 7–11, s. 234–241.

Komentář k Boethiovu *Úvodu do hudby* II, 10 a IV, 2

Učitel Gerbert svému Konstantinovi³

Superpartikulární poměry, o nichž stručně pojednává desátá kapitola druhé knihy *Úvodu do hudby*,⁴ jsou podrobněji i s příklady probrány ve druhé kapitole čtvrté knihy.⁵ I my uvedeme nejprve [Boethiovo] tvrzení, které posléze také rozvedeme. *Zdvojnásobíme-li superpartikulární poměr, nevznikne ani superpartikulární poměr, ani násobek.*⁶ O dvojnásobném poměru mluvíme tehdy, když je zdvojen tak, že první poměr je stejný jako druhý, tzn. že vztah mezi prvním a druhým číslem je stejný jako mezi druhým a třetím.⁷

Představme si superpartikulární poměr mezi čtyřkou a šestkou. Protože je tento poměr jeden, můžeme ho zdvojnásobit. Dvakrát jedna jsou totiž dvě.⁸ Je však nutné, aby stejný vztah, jaký platí mezi čtyřkou a šestkou, platil i mezi šestkou a nějakým jiným číslem, v tomto případě devítkou.⁹ Tvrdím, že devítka ke čtyřce není ani v násobném, ani v superpartikulárním poměru.¹⁰ *Pakliže výsledek takového násobení není ani v násobném, ani v superpartikulárním poměru, pak prvotní poměr, který byl zdvojnásoben, je buď poměrem superpartikulárním nebo jiným,*¹¹ nikoli však poměrem násobným.¹²

Výsledkem předchozího násobení je násobek dvou a jedné čtvrtiny, tedy poměr 9 : 4, což není ani násobný, ani superpartikulární, nýbrž násobný superpartikulární poměr. A protože původní poměr, který jsme zdvojnásobili,¹³ není násobek, je to buď superpartikulární nebo jiný poměr. Avšak v tomto případě to není ani násobný ani jiný, nýbrž určitý superpartikulární poměr. Je to totiž vynásobený poměr 3 : 2.

⁵ [BoMu], IV, 2, s. 302–308.

⁶ [BoMu], II, 10, s. 240. Rozbor citátu viz *Komentář* k tomuto *Listu*.

⁷ Gerbert uvádí cestu k nalezení dvojnásobku určitého poměru – tedy nutnost vytvoření tříčlenné posloupnosti, kde poměr mezi prvním a druhým, resp. druhým a třetím, číslem bude totožný.

⁸ Při dvojnásobení poměru je nutno onen jeden poměr, který je dvojnásoben, vynásobit dvěma, tzn. vzniknou dva poměry. Pokud bychom poměr trojnásobili, vznikly by tři poměry, neboť $3 \cdot 1 = 3$, atp.

⁹ V případě dvojnásobení poměru 3 : 2 s první číselnou hodnotou 4 vzniká tříčlenná posloupnost 4 – 6 – 9.

¹⁰ Podrobněji viz obr. 28 v *Komentáři* k tomuto listu.

¹¹ Tzn. další druhy relativních vlastností čísel – vedle násobků a superpartikulárních čísel může jít o čísla superparciantní a o superpartikulární či superparciantní násobky. Blíže viz kap. 2.4.1 úvodní studie této knihy.

¹² [BoMu], II, 10, s. 240. Podrobnější rozvedení této pasáže viz *Komentář* k tomuto *Listu*.

¹³ Tedy poměr šestky ke čtyřce, které jsou v superpartikulárním poměru 3 : 2.

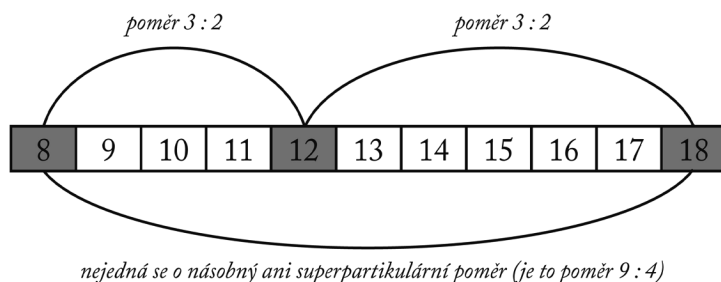
Komentář

Tento dopis se věnuje násobení poměrů a klasifikaci výsledných součinů podle tradičního dělení relativních vlastností čísel. Gerbert nejprve uvádí odkazy na pasáže z Boethiova *Úvodu do hudby*, kde se píše o superpartikulárních poměrech (2, 3–5; 29, 5–7), načež z tohoto díla cituje (2, 6–8; 29, 8–10), dále vysvětluje postup při dvojnásobení poměrů (2, 8–11; 29, 10–14) a uvádí konkrétní příklad (2, 11–15; 29, 14–19). Poté podruhé cituje z *Úvodu do hudby* (2, 16–18; 29, 19–22) a částečně v dikci Boethiových slov objasňuje klasifikační typ výsledného součinu (2, 20–24; 29, 22–30, 2).

2, 6–8 (29, 8–10):

Citovaný Boethiův výrok není příliš problematický – máme-li jakákoli dvě čísla, mezi nimiž je superpartikulární poměr (tzn. interval vymezený tímto poměrem), pak dojde-li ke zdvojnásobení tohoto intervalu, musí vzniknout posloupnost tří číselných hodnot, kde mezi prvním a druhým číslem, stejně jako mezi druhým a třetím číslem, bude daný superpartikulární poměr. Zdvojnásobení superpartikulárního poměru totiž znamená, že vzniknou dva za sebou jdoucí intervaly vymezené stejným superpartikulárním poměrem.

Mezi prvním a třetím číslem takto vzniklé posloupnosti však není násobný ani superpartikulární poměr. Např. dvojnásobíme-li superpartikulární poměr 3 : 2 a posloupnost začíná číslem 8, má druhé číslo posloupnosti hodnotu 12 (tj. jeden superpartikulární poměr 3 : 2 mezi čísly 8 a 12) a třetí číslo má hodnotu 18 (tj. druhý superpartikulární poměr 3 : 2 mezi čísly 12 a 18). Zatímco mezi prvním a druhým číslem (8 a 12), stejně jako mezi druhým a třetím číslem (12 a 18) je zachován poměr 3 : 2, tak mezi prvním a třetím číslem vznikl poměr 9 : 4, což není násobný ani superpartikulární poměr. Názorněji lze celou věc objasnit tímto schématem (obr. 27):

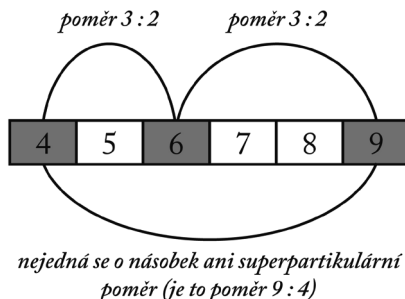


Obr. 27 – Součin dvou superpartikulárních poměrů

Výsledný poměr takového násobení odpovídá dané mocnině zlomku, který vyjadřuje násobný poměr. V tomto případě, protože byl dvojnásoben poměr 3 : 2, půjde o druhou mocninu zlomku $\frac{3}{2}$, tedy $\frac{3^2}{2^2} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$.

2, 11–15 (29, 14–19):

Gerbert zde jinými slovy a na konkrétním příkladě opakuje věcné tvrzení citovaného Boethiova výroku. Schématicky lze předvedenou úvahu zachytit takto (obr. 28):



Obr. 28 – Nalezení třetího členu posloupnosti dané dvěma poměry 3 : 2

2, 16–18 (29, 19–22):

Klasifikační druh výsledku násobení (tedy součin) v případě násobení poměrů není automaticky násobkem, nýbrž je zároveň určen tím, co bylo násobeno (ve starší terminologii násobencem). Jinými slovy: druh nerovnosti součinu je odvozen také od druhu nerovnosti násobence.

Pokud budeme kupř. trojnásobit (násobitel) dvojnásobek (násobenec), pak vznikne posloupnost čtyř čísel, které budou mezi sebou mít poměr 3 : 1 – např. posloupnost 2 – 6 – 18 – 54. Jelikož byl násobencem násobný poměr, bude i součin násobným poměrem (v tomto případě sedmadvacetinásobkem, tj. poměrem 27 : 1), což odpovídá třetí mocnině (jelikož násobitelem byl trojnásobek) zlomku $\frac{3}{1}$, jak ukazuje tento výpočet:

$$\frac{3^3}{1^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{27}{1}.$$

Když je násobencem superparciantní poměr, bude součin násobným superparciantním číslem – kupř. dvojnásobek poměru 5 : 3 je základem pro posloupnost tří čísel (např. 9 – 15 – 25), takže součin je dán poměrem 25 : 9, jelikož:

$$\frac{5^2}{3^2} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{25}{9},$$

tedy větší číslo v sobě zahrnuje menší číslo dvakrát a ještě $\frac{7}{9}$ menšího čísla.

V případě superpartikulárního poměru (násobenec) pak platí, že součin je násobným superpartikulárním číslem, jak ukazují obr. 27 a 28.