MATEMATICKÉ LISTY GERBERTA Z REMEŠE

List 1[1]

Scholium ad Boethii *Arithmeticam Institutionem* l. II, c. 1[2] 31, 25

[Constantino suo Gerbertus scolasticus]

1. Hic locus, quem quidam invictum esse aestimant sic resolvi- 32, 13
tur. Pone superparticulares sesquiquartos, utputa XVI, XX, XXV. 33, 1
Si ergo vis scire, quomodo isti sesquiquarti primo resolvantur in sequitertios, deinde in sesqualteros, postremo ad tres aequales terminos, sic ordina: XVI, XX, XXV. Aufer ex medio minorem et
ipsum constitue primum, id est aufer XVI de XX et ipsos XVI 33, 5
pone primos, et remanent de XX—IIII: ipsos pone in secundo loco. De tertio vero termino, id est de XXV, aufer unum primum, id est XVI et duos secundos, id est duos quaternarios, qui sunt VIII,

---

[1] Text je tradičně řazen mezi dopisy, v nichž se Gerbert vyjadřuje k matematickým tématům. Editor Gerbertova matemetického díla Nikolaj M. Bubnov tyto listy, jejichž adresátem je povětšinou Konstantin z Fleury, datoval podle Gerbertova přídomku (*scolasticus*) do doby jeho učitelského působení v Remeši, tj. do let 972–982 (viz [Bub], s. 1–2), což převzdali i nejnovější překladatelé do francouzštiny a italštiny – viz [GeEC], s. 693; resp. [GeER], s. 193). Lze předpokládat, že Gerbert byl Konstantinovým spolužákem a dost možná i učitelem, následně pak spolupracovníkem a blízkým přítelem. Své texty a dopisy adresované Konstantinovi sepsal patrně v době, kdy Konstantin opustil Remeš a pobýval v domovském klášteře ve Fleury, z čehož lze vyvvozovat, že tento komentář k Boethiovu *Úvodu do aritmetiky* vznikl patrně na sklonku 70. let 10. století. Překladatelka Gerbertovy korespondence do angličtiny Harriet Pratt Lattin odhaduje jeho vznik do období mezi roky 978–980 (viz [GeEE], s. 39).

[2] Latinský text je převzat z [Bub], s. 31–35 (I, I, A, 6). Nadpis pochází od editora N. Bubnova; vzhledem k obsahu pojednání překládáme slovo *scholium* jako „komentář“.

[3] V dochovaných rukopisných variantách se tato vstupní korespondenční formule nedochovala. Přestože se mohlo jednat o Gerbertovu výkladovou glosu k Boethiově textu, která nebyla koncipována jako dopis, na základě podobného charakteru tohoto komentáře s Gerbertovými listy Konstantinovi z Fleury (zejména *List* 2 a *List* 3) předpokládal již Bubnov, že v původní verzi nechybělo doplněné oslovení adresáta (viz [Bub], s. 32), což přejala takřka všechna vydání Gerbertovy korespondence – viz [GeEE], s. 39; [GeEC], s. 692–693; resp. [GeER], s. 193.

[4] Gerbert má na mysli úryvek z úvodní kapitoly druhé knihy Boethiova *Úvodu do aritmetiky* – viz [BoAr] II, 1, s. 94: *Hoc autem trina rursus imperatione colligitur, ea que resoluendi ars datis quibuslibet tribus terminis inaequalibus quidem sed proportionaliter constitutis, id est ut eandem medius ad primum uim proportionis obtineat, quam qui est extremus ad medium, in qualibet inaequalitatis ratione – uel in multiplicibus, uel in superparticularibus, uel in superpartientibus, uel in his qui ex his procreantur multiplicibus superparticularibus,*

Komentář k Boethiovu *Úvodu do aritmetiky* II, 1

[Učitel Gerbert svému Konstantinovi][3]

1. Tuto, podle některých nepochopitelnou, pasáž[4] vyřešíme takto. Představ si superpartikulární čísla[5] v poměru 5 : 4,[6] např. posloupnost 16, 20, 25.[7] Chceš-li vědět, jak čísla v poměru 5 : 4 převést na čísla v poměru 4 : 3,[8] dále na čísla v poměru 3 : 2[9] a nakonec na tři stejná čísla,[10] uspořádej je takto: 16, 20, 25. Od prostředního odečti číslo menší, které umísti na první pozici, tj. od 20 odečti 16, a číslo 16 dej na první místo nové posloupnosti. Na druhé místo pak umísti výsledek odčítání, tedy 4. Od třetího členu, tj. 25, odečti první, tj. 16, a dvakrát druhý člen nové posloupnosti, tj. dvakrát 4, což je 8.

---

uel multiplicibus superpartientibus – eadem atque una ratione indubitata constabit. Propositis enim tribus, ut dictum est, terminis aequis proportionibus ordinatis ultimum semper medio detrahamus et ipsum quidem ultimum primum terminum collocemus, quod de medio relinquitur, secundum. De tertia uero propositorum terminorum summa auferemus unum primum et duos secundos – eos qui de medietate relicti sunt – et id quod ex tertia summa relinquitur, tertium terminum constituemus. K této problematice vzniklo na sklonku 10. století hned několik pojednání – viz [Bub], s. 297–299 nebo [AbC], s 86–87. Možnou příčinou obtížné pochopitelnosti Boethiova textu mohl být kontroverzní příklad, který *Úvod do aritmetiky* uvádí – srov. [BoAr], II, 1, s. 95–96; [Nik], II, 2, s. 74–75. Podrobněji viz kap. 2.4.2 úvodní studie této knihy a především *Komentář* k tomuto listu.

5 Superpartikulární poměr mezi čísly označuje jeden z klasifikačních druhů relativních vlastností čísel, tzn. těch vlastností, které nemá číslo samo o sobě, nýbrž ve vztahu k jiným číslům. Superpartikulární vztah, tj. vztah čísla s částí, je takový, kdy menší číslo je ve větším čísle obsaženo celé a větší číslo převyšuje číslo menší o určitou část menšího čísla. Podrobněji viz kap. 2.4.1 úvodní studie této knihy.

6 Termín *sesquiquarta* překladáme jako „poměr 5 : 4“, tj. pětičtvrtinový násobek, resp. vztah čísel, kdy větší číslo přesahuje menší číslo o čtvrtinu menšího čísla. V hudební terminologii se pro pojmenování seskvikvarty, tedy poměru 5 : 4, užívá označení velká tercie.

7 Srov. [BoAr] I, 32, s. 84; [Nik], I, 23, s. 69, ale rovněž [Bub], s. 298.

8 Termín *sesquitertia* překládáme jako „poměr 4 : 3“, tj. čtyřtřetinový násobek, resp. vztah čísel, kdy větší číslo přesahuje menší číslo o třetinu menšího čísla. V hudební terminologii se pro pojmenování seskvitercie, tedy poměru 4 : 3, užívá označení kvarta.

9 Termín *sesquialtera* (příp. *sesqualtera*) překládáme jako „poměr 3 : 2“, tj. půldruhanásobek, resp. vztah čísel, kdy větší číslo přesahuje menší číslo o polovinu menšího čísla. V hudební terminologii se pro pojmenování seskvialtery, tedy poměru 3 : 2, užívá označení kvinta.

10 Tj. na posloupnost tří čísel, mezi nimiž bude poměr 1 : 1, tzn. totožnost, rovnost.

et remanet I. Ipsum unum constitue terminum tertium, et erunt: XVI, IIII, I. Vides, quomodo sesquiquarti redacti sunt in quadruplos, unde venerunt. Sed ista resolutio non confuse neque inordinate debet fieri, id est non subito debent resolvi in sesquitertios, sed ordinatim, id est ipsos quadruplos — XVI, IIII, I converte et sic dispone: I, IIII, XVI. Aufer igitur minorem de medio, id est I de IIII, et ipsum I pone primum et ipsos III, qui relicti sunt de IIII, pone secundum. De tertio vero termino, id est de XVI, aufer unum primum et duos secundos, id est I et duos ternarios, et quod relinquitur de XVI, id est VIIII, pone tertium terminum et sic ordina: I, III, VIIII. Vides igitur, ut quadrupli redacti sint in triplos, eisdem ipsis quadruplis conversis, a quibus duxerant ipsi originem. His quidem triplis, id est I, III, VIIII, conversis et sic positis: VIIII, III, I, si, memor praeceptorum Boetii, feceris primum aequum primo, id est VIIII, — secundum aequum primo et secundo, id est duodecim, — tertium primo duobusque secundis et tertio, id est XVI, facta est resolutio superparticularis sesquiquarti primo in sesquitertium, ut Boetius docet, non confuse, sed ordinate, sicut a principio numeri fuerant procreati, subtiliter adhibitis praeceptis.

2. Si vis ergo scire, quemadmodum ipsi sesquiquarti in secundo loco revertantur ad sesqualteros, ipsos triplos conversos, id est VIIII, III, I, et hos transmuta et sic ordina: I, III, VIIII, et aufer minorem de medio, id est I de tribus, et ipsum pone primum terminum et, quod relinquitur de tribus, pone secundum terminum. De tertio vero, id est VIIII, aufer primum, id est I, et duos secundos, id est duos binarios, et quod relinquitur de VIIII, id est IIII, pone tertium terminum et sunt hi numeri dispositi: I, II, IIII. Vides igitur, quemadmodum tripli revertuntur in duplos unde procreabantur. His siquidem duplis conversis et sic dispositis:

[11] Gerbert zde aplikuje Boethiova pravidla [R1–3] (podrobněji viz kap. 2.4.2 úvodní studie této knihy), jež jsou citována v pozn. 4 k tomuto textu. Průběh jednotlivých výpočtů popisuje *Komentář* k Listu 1.

[12] V originále *redacti sunt*, což bychom doslovně mohli přeložit jako „navrácena zpět“. Superpartikulární čísla totiž obecně vycházejí z násobků, které vlastně představují jejich východisko. Tedy čísla v poměru 5 : 4 vycházejí ze čtyřnásobků, proto se jedná o „návrat ke kořenům“.

[13] Tj. poměr 4 : 1. Násobky jsou prvním klasifikačním typem relativních vlastností čísel a vyjadřují prvotní nestejnost. Násobný poměr mezi čísly je tehdy, když je menší číslo ve větším čísle obsaženo beze zbytku celé a více než jednou. Srov. [BoAr], I, 23, s. 56–59; [Nik], I, 18, s. 46–48; [AbC], s. 116–117, resp. kap. 2.4.1 úvodní studie této knihy

Výsledek odčítání, tedy 1, umísti na třetí pozici nové posloupnosti, čímž vznikne uspořádání: 16, 4, 1.[11]

Nyní vidíš, jak byla čísla v poměru 5 : 4 změněna[12] na čtyřnásobky,[13] z nichž tato čísla vycházejí.[14] Převod superpartikulárních čísel se totiž nemá provádět chaoticky a nesystematicky, tedy čísla v poměru 5 : 4 nemají být bezprostředně převáděna na čísla v poměru 4 : 3.[15] Naopak, je třeba postupovat systematicky: získané čtyřnásobky – 16, 4, 1 seřaď obráceně a uspořádej je takto: 1, 4, 16. Od prostředního odečti číslo menší, tj. od 4 odečti 1, tuto 1 polož na první místo nové posloupnosti, na druhé místo pak umísti výsledek odčítání, tedy číslo 3. Od třetího členu, tj. 16, odečti první a dvakrát druhý člen nové posloupnosti, tj. 1 a dvakrát 3. Výsledek, tj. 9, použij jako třetí člen nové posloupnosti, kterou uspořádej takto: 1, 3, 9.

Vidíš tedy, že byly čtyřnásobky změněny na trojnásobky; právě z nich totiž čtyřnásobky odvozují svůj vznik. Následně trojnásobky, tj. 1, 3, 9, uspořádáš obráceně: 9, 3, 1. Budeš-li mít na paměti Boethiovy zásady,[16] vytvoříš novou posloupnost tak, že položíš na první místo číslo odpovídající prvnímu členu, tj. 9; na druhé součet prvního a druhého členu, tj. 12, a na třetí součet prvního, dvojnásobku druhého a třetího členu, tj. 16.[17]

Takovýto postup při převodu superpartikulárního čísla v poměru 5 : 4 nejprve na číslo v poměru 4 : 3, za použití pečlivě propracovaných pravidel, o nichž píše Boethius, není chaotický, ale systematický a odpovídá postupnému vzniku čísel.

2. Avšak chceš-li vědět, jak se získaná čísla v poměru 4 : 3 následně převádějí na čísla v poměru 3 : 2, pak obráceně uspořádanou posloupnost trojnásobků, tj. 9, 3, 1, změň a seřaď takto: 1, 3, 9. Od prostředního odečti číslo menší, tedy od 3 odečti 1, a tuto 1 použij jako první člen nové posloupnosti; jako druhý pak použij výsledek odčítání. Od třetího členu, tj. 9, odečti první, tj. 1, a dvakrát druhý člen nové posloupnosti, tj. dvakrát 2. Výsledek, tedy 4, umísti jako třetí člen nové posloupnosti, která je nyní uspořádána takto: 1, 2, 4.

---

14 Srov. [BoAr], I, 32, s. 80–81, 84; [Nik] I, 23, 9, s. 67.

15 Podobně [AbC], s. 86; dost možná se jedná o reakci na [Bub], s. 298. Na výklad viz *Komentář* k tomuto textu.

16 Nikoli citovaná pravidla [R1–3], s jejichž pomocí se posloupnosti převádějí na původnější a dřívější řady čísel, nýbrž regule [P1–3] z poslední kapitoly úvodní knihy *Úvodu do aritmetiky*, v níž Boethius popisuje vznik nestejných poměrů z dřívějších posloupností, primárně pak ze stejnosti a totožnosti (tj. z poměru 1 : 1) – [BoAr], I, 32, s. 81: „*Praecepta autem tria haec sunt, ut primum numerum primo facias parem, secundum uero primo et secundo, tertium primo, secundis duobus et tertio.*“; srov. také kap. 2.4.2 úvodní studie této knihy.

17 Gerbertův příklad aplikace pravidel [P1–3] podrobněji popisuje *Komentář* k tomuto *Listu*.

IIII, II, I, si feceris, ut praedictum est, primum aequum primo, id est IIII, et secundum primo et secundo, id est VI, — tertium primo duobusque secundis et tertio, id est VIIII, et sunt IIII, VI, VIIII. Facta est resolutio sesquiquarti in sesqualterum, non in primo loco, sed in secundo, ut Boetius docet, nec confuse, sed ordinate.

3. Si adhuc vis scire, quomodo ad tres aequales terminos ad ultimum revertantur sesquiquarti, ipsos duplos conversos, scilicet: IIII, II, I, transvolve et sic ordina: I, II, IIII. Aufer igitur minorem de medio, id est I de duobus, et ipsum I pone primum terminum et, quod relinquitur, pone secundum, id est I. De tertio termino, id est de IIII, aufer unum, id est I, et duos secundos, id est duas unitates, et relinquitur tibi una unitas, et sit I, I, I. Vides igitur, quemadmodum tota quantitas sesquiquarti redacta est ad tres aequales terminos, id est unitates: I, I, I, non confuse, sed ordinatim, sicut fuerat a principio procreata. Haec est igitur vera natura numerorum.

[18] Jelikož se jedná o převod na dřívější nestejnost, je nutno využít pravidla [R1–3]; podrobněji viz *Komentář* k tomuto textu.

[19] Gerbert zde představuje vznik poměru 3 : 2 z dvojnásobku (resp. z poloviny), tzn. vznik pozdější nestejnosti z dřívější, nutně proto užívá pravidla [P1–3]; celý postup viz *Komentář* k *Listu* 1.

Vidíš tedy, jak se trojnásobky převádějí zpět na dvojnásobky, z nichž vzešly.[18] Tyto dvojnásobky pak uspořádej obráceně: 4, 2, 1. Budeš-li postupovat, jak bylo řečeno výše, a položíš na první místo číslo odpovídající prvnímu členu, tj. 4, na druhé součet prvního a druhého členu, tj. 6, a na třetí dáš součet prvního, dvojnásobku druhého a třetího členu, tj. 9, vznikne nová posloupnost 4, 6, 9.

Takovýto postup při převodu čísel v poměru 4 : 3 na čísla v poměru 3 : 2,[19] který však není prováděn hned v prvním, ale až v druhém kroku,[20] není podle Boethia chaotický, nýbrž systematický.

3. Chceš-li navíc vědět, jakým způsobem se čísla v poměru 5 : 4 na závěr převádějí na tři stejná čísla, pak obráceně uspořádanou posloupnost dvojnásobků, tedy 4, 2, 1, převrať a seřaď takto: 1, 2, 4. Od prostředního odečti menší číslo, tj. od 2 odečti 1, a tuto 1 umísti jako první člen nové posloupnosti; jako druhý pak použij výsledek odčítání, tj. 1. Od třetího členu, tj. 4, odečti první, tj. 1, a dvakrát druhý člen nové posloupnosti, tj. dvakrát 1, a zůstane ti jedna 1, takže vznikne posloupnost 1, 1, 1.[21]

Vidíš, jak byla veškerá kvantita vyjádřená čísly v poměru 5 : 4 změněna na tři stejná čísla, tj. jednotky: 1, 1, 1, a to nikoli chaoticky, nýbrž systematicky a takovým způsobem, jakým vznikla. Právě taková je totiž skutečná povaha čísel.

---

[20] Tedy až poté, co byla čísla v poměru 5 : 4 převedena na čísla v poměru 4 : 3, což je podle Gerberta první krok, kterému se věnuje v první části tohoto textu. Ve druhé části je probírán převod čísel v poměru 4 : 3 na čísla v poměru 3 : 2, což představuje druhý krok Gerbertova návodu. Přehledněji viz tab. 44.

[21] Vzhledem k tomu, že nyní je převáděna pozdější posloupnost na dřívější, je nutno aplikovat pravidla [R1–3]; blíže viz *Komentář*.

Komentář

Gerbertův text má poměrně přehlednou strukturu, což je umocněno dělením pojednání na tři paragrafy. V první části [I] Gerbert popisuje pomocí několika kroků převod poměru 5 : 4 na poměr 4 : 3 (1, 3–31; 32, 13–34, 9);[1] druhá část [II] představuje způsob převedení poměru 4 : 3 na poměr 3 : 2 (1, 32–47; 34, 10–35, 5); v posledním oddíle [III] ukazuje postup při změně poměru 3 : 2 na totožnost, tj. poměr 1 : 1 (1, 48–58; 35, 6–16). Celý převod, včetně všech mezikroků, je souhrnně zanesen do tab. 44. Gerbert se v tomto traktátu hned čtyřikrát vymezuje vůči jinému (matematicky možnému, ovšem metafyzicky nesprávnému) postupu při převádění zmíněných proporcí.

1, 1 (32, 13):

Z konce 10. století je známo hned několik komentářů a glos k úvodní kapitole druhé knihy Boethiova *Úvodu do aritmetiky*. Vedle přeloženého Gerbertova pojednání je to především text zvaný *De superparticularibus*, za jehož autora je považován Notker z Lutychu,[2] a čtyři paragrafy třetí části komentáře Abbona z Fleury[3] k dílu *Calculus* od Viktorina z Akvitánie.[4]

Už Boethius v *Úvodu do aritmetiky* píše, že problematika vzájemných převodů mezi poměry, jež určují posloupnost čísel, je tím, co je z aritmetiky tou nejhlubší (*profundissima*) naukou.[5] Anonymní autor textu *De arithmetica Boetii* z konce 10. století nazývá toto umění nejtajemnějším a nejdůmyslnějším (*obscurissima et subtilissima*).[6]

---

[1] Všechny odkazy a následně komentáře k pasážím z Gerbertových dopisů (pojednání) odkazují vždy na číslo listu a číslo řádku v této knize, uváděné u latinských textů na levé straně *in margine*; resp. na paginaci latinských edic, z nichž je originální znění Gerbertových textů přejato, zde uváděnou u latinských originálů na pravé straně *in margine*.

[2] Notker z Lutychu (kol. 940–1008), nejprve mnich a student kláštera svatého Havla, poté člen ottonského císařského dvora, následně – s pomocí Otty I. – biskup v Lutychu (972) a od roku 980 kníže a biskup v jedné osobě. Podle dobových zpráv se soustředění světské a církevní moci do jedněch rukou ukázalo být velmi výhodným, z čehož profitovalo celé město, včetně tamní školy. V 90. letech patřil Notker mezi blízké přátelé Otty III. a stýkal se i se svatým Vojtěchem – někdy je považován za autora (příp. někdo z jeho žáků či spolupracovníků) nejstarší svatovojtěšské legendy *Vita prior*, tedy *Vita antiquior* (*Locus est…*), která byla připisována také Gerbertovi z Remeše nebo Radimovi-Gaudentiovi, nejčastěji však aventinskému opatovi Janu Canapariovi. Blíže viz zejména [Ku], [Ans] nebo [DKL]; na svatovojtěškou legendu pak např. [Fd] nebo [Ne], s. 53.

[3] Abbo z Fleury (kol. 940–1004), mnich, převor a od roku 988 opat kláštera svatého Benedikta ve Fleury, který studoval také v Paříži a v Remeši (patrně v době, kdy tam působil i Gerbert) a vedl rovněž klášterní školu v anglickém Ramsey. Blíže viz např. [Aim], [AbE], [AbA], [Dc], [Ri3], [En], [Mo] ad.

[4] K uvedeným by mohl být dodán ještě anonymní komentář k *Úvodu do aritmetiky*, včetně typizovaného a podnětného úvodu (*accessus*), který se však zde řešené pasáži věnuje jen velice stručně. Edice nabízí [Cai], s. 126–149 a [Ev2], s. 23.

[5] [BoAr], I, 32, s. 80.

[6] [Cai], s. 140.

Pochopení tohoto „nejobtížnějšího“ učení o přechodech mezi tříčlennými číslenými řadami je komplikováno tím, že Boethiův text v sobě při jistém čtení zahrnuje vnitřní rozpor. V poslední kapitole první knihy *Úvodu do aritmetiky* totiž uvádí, že veškerá rozdílnost pochází z totožnosti podle jasných pravidel, tzn. stejnost je počátkem, který rodí násobné poměry. Jako první takto vznikají dvojnásobky, z nich pak trojnásobky i poměry 3 : 2, tzn. první ze superpartikulárních poměrů. Z trojnásobků následně vycházejí jak čtyřnásobky, tak poměr 4 : 3, kdežto z poměru 3 : 2 vycházejí jednak poměr 5 : 3, tedy superparcientní poměr, a zároveň poměr 5 : 2, tj. první z násobných superpartikulárních poměrů. Násobné superparcientní poměry mají svůj původ v číslech superparcietních – tzn. z poměru 5 : 3 se vyvíjí poměr 8 : 3.[7] V případě návratu od pozdějšího k dřívějšímu by se mělo postupovat reverzním způsobem.

Naproti tomu v první kapitole druhé knihy téhož spisu Boethius píše, že superpartikulární čísla lze převést na totožnost tak, že se pozdější superpartikulární čísla (např. posloupnost daná poměrem 4 : 3) transformuje do bezprostředně předcházejícího superpartikulárního poměru (tj. 3 :2) a tento na tři stejná čísla (tedy poměr 1 : 1). Podobně je tomu v případě násobků (čtyřnásobky se převádějí na trojnásobky, ty zase na dvojnásobky a nakonec je získána totožnost).[8] Tuto pasáž lze chápat tak, že při návratu k primární rovnosti není zapotřebí ctít proces vzniku pozdějších odlišností, neboť kupř. v případě superpartikulárních čísel platí, že vznikly z násobků, nikoli bezprostředně z totožnosti.

Z toho pak plyne, že jsou-li následovány postupy z kapitoly II, 1 *Úvodu do aritmetiky*, pak nelze plně dostát tvrzením z kapitoly předcházející (I, 32) a naopak.

1, 2–13 (32, 14–33, 9):

Zde začíná celý postup, podle svého přecházení a následných návratů mezi jednotlivými posloupnosti později nazvaný *saltus Gerberti*, v němž Gerbert představuje, jak se z číselného poměru 5 : 4 rekonstruuje původní totožnost a jednota. V první fázi (kroku) ukazuje převedení tříčlenné posloupnosti uspořádané podle poměru 5 : 4 [Ge-I] na superpartikulární poměr bezprostředně předcházející, tj. tříčlennou posloupnost čísel, kterou bude určovat poměr 4 : 3. Tento krok má však několik mezistupňů.

V této pasáži je popsán návod pro převedení číselné řady uspořádané v poměru 5 : 4 na poměr čtvrtinový (1 : 4) [Ge-Ia],[9] k čemuž Gerbert využívá

[7] [BoAr], I, 32, s. 81–87. Výklad srov. kap. 2.4.2 úvodní studie této knihy, zejména pak tab. 17 a 18.

[8] [BoAr], II, 1, s. 94–96.

[9] Gerbert ve svém textu nerozlišuje mezi dvěma nadřazenými druhy odlišných relativních vlastností čísel, proto ztotožňuje případy, kdy se větší číslo srovnává s menším, a situace, kdy se menší číslo srovnává s větším. Fakticky to znamená, že nerozlišuje mezi posloupnostmi danými násobnými poměry a těmi, jež určují dělitelé. V tomto případě je proto pro něj čtvrtinový poměr pouze obráceným poměrem čtyřnásobným.

pravidla [R1–3], jak o nich referovali Boethius i Níkomachos.[10] Celý Gerbertem provedený výpočet lze schematicky znázornit takto (tab. 35):

pravidlo	**posloupnost v poměru 5 : 4**	**výpočet**	**posloupnost v poměru 1 : 4**
[R1]: $a_1 = a$	16 (= a)	$a_1 = 16$	16 (= a_1)
[R2]: $b_1 = b - a$	20 (= b)	$b_1 = 20 - 16$	4 (= b_1)
[R3]: $c_1 = c - (2b_1 + a)$	25 (= c)	$c_1 = 25 - (8 + 16)$	1 (= c_1)

Tab. 35 – *Saltus Gerberti*, krok Ge-Ia, převod poměru 5 : 4 na poměr 1 : 4

1, 14–15 (33, 11):

Velmi podobně se ve stejném kontextu vyjadřuje Abbo z Fleury ve svém komentáři k Viktorinově matematickému dílu *Calculus*.[11] Z toho lze usuzovat, že v poslední třetině či čtvrtině 10. století se v tehdejších středověkých školách rozšířil odlišný způsob převádění poměrných posloupností mezi sebou. Zastáncem tohoto druhého (podle Gerbertových a Abbonových slov „konfuzního") postupu mohl být Notker z Lutychu, vůči jehož podobě převodů poměrů Gerbert i Abbo vystupují.

Abbonův postup se v zásadě velmi podobá tomu Gerbertovu, avšak je stručnější a je jasněji napojen na zmíněný proces vzniku nestejných poměrů z prvotní totožnosti podle *Úvodu do aritmetiky* I, 32. Abbonův komentář nejprve cituje problematický Boethiův výrok o vzájemných převodech superpartikulárních poměrů a ihned ho vykládá: Boethius podle něj měl na mysli, že mezi poměry 5 : 4 a 4 : 3 neexistuje žádný jiný superpartikulární poměr, nikoli že by tyto poměry měly být převedeny bezprostředně bez jakéhokoli prostředníka. Superpartikulární poměry totiž vznikají z násobků, a proto musí být vždy převáděny na násobky.[12] Je nutno ctít Boethiova pravidla [R1–3][13] a ve shodě s obráceným pořadím vzniku nestejných číselných posloupností přicházet k původní stejnosti – tzn. od superparcientních násobků k superparcientním poměrům, od těchto k poměrům superpartikulárním a přes násobky ke stejnosti.[14]

Následně Abbo uvádí dvě tabulky, které ukazují způsob, jak vznikly jednotlivé nestejnosti a jak se lze – obráceným postupem – navrátit k dokonalé, prvotní jednotě[15] – souhrnně viz tab. 36.

---

10 [BoAr], II, 1, s. 94; [Nik], II, 2, s. 74–75; srov. také kap. 2.4.2 úvodní studie této knihy.

11 [AbC], s. 86.

12 [AbC], s. 87; srov. také s. 89.

13 [AbC], s. 86.

14 [AbC], s. 87.

15 [AbC], s. 88.

<table>
<tr><td>1.</td><td colspan="2">rovnost</td><td>1 : 1</td><td colspan="2">2 – 2 – 2</td></tr>
<tr><td>2.</td><td rowspan="3">násobky</td><td>dvojnásobek</td><td>2 : 1</td><td colspan="2">2 – 4 – 8</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>trojnásobek</td><td>3 : 1</td><td colspan="2">2 – 6 – 18</td></tr>
<tr><td>3a.</td><td>čtyřnásobek</td><td>4 : 1</td><td></td><td>2 – 8 – 32</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.</td><td rowspan="2">superpartikulární poměry</td><td>čtyřtřetinový násobek</td><td>4 : 3</td><td>18 – 24 – 32</td><td></td></tr>
<tr><td>pětičtvrtinový násobek</td><td>5 : 4</td><td></td><td>32 – 40 – 50</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5.</td><td rowspan="2">superparcientní poměry</td><td>sedmičtvrtinový násobek</td><td>7 : 4</td><td>32 – 56 – 98</td><td></td></tr>
<tr><td>devítipětinový násobek</td><td>9 : 5</td><td></td><td>50 – 90 – 162</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6.</td><td rowspan="2">superpartikulární násobky</td><td>násobek dvou a jedné třetiny</td><td>7 : 3</td><td>18 – 42 – 98</td><td></td></tr>
<tr><td>násobek dvou a jedné čtvrtiny</td><td>9 : 4</td><td></td><td>32 – 72 – 162</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7.</td><td rowspan="2">superparcientní násobky</td><td>násobek dvou a tří čtvrtin</td><td>11 : 4</td><td>32 – 88 – 242</td><td></td></tr>
<tr><td>násobek dvou a čtyř pětin</td><td>14 : 5</td><td></td><td>50 – 140 – 392</td></tr>
</table>

Tab. 36 – Zrod nestejností podle Abbona z Fleury (v obráceném sledu návrat k původní jednotě)

1, 15–16 (33, 12):

Notker z Lutychu, kterého zde budeme považovat za reprezentanta dobově odlišného přístupu k převodu poměrů, se přiklonil k jinému čtení Boethiova aritmetického textu a preferoval důležitost tvrzení z *Úvodu do aritmetiky* II, 1. V souladu s touto pasáží se pokusil ukázat, že superpartikulární poměry lze převádět bezprostředně mezi sebou navzájem, teprve v předposledním kroku stačí, když je základní a první superpartikulární poměr (tj. 3 : 2) převeden na dvojnásobek, odkud už je možno přejít přímo ke stejnosti.

Notker si však byl vědom, že redukce superpartikulárních poměrů mezi sebou, tedy bez převodu každého z nich na násobky, se dostává do rozporu s Boethiem tolik vyzdvihovanými třemi pravidly pro přechody mezi jednotlivými poměry (tj. pravidla [R1–3]). Zřejmě právě proto uvedl svůj stručný text upozorněním, že Boethius nezamýšlel své regule [R1–3] jako jediný možný způsob převodů tří nestejných hodnot uspořádaných v určitém poměru na prvotní rovnost, nýbrž to byl pouze pomocný nástroj, který není zapotřebí bezvýhradně aplikovat ve všech případech. Určitě to pak podle Notkera není vhodné při hledání cesty od tří číselných hodnot poměrné posloupnosti 5 : 4 ke třem stejným položkám.[16]

[16] [Bub], s. 297.

1, 16–17 (33, 13–14):

Obrácením posloupnosti 16 – 4 – 1 na posloupnost 1 – 4 – 16 [Ge-Ib] provádí Gerbert faktickou změnu čtvrtinového poměru (1 : 4) na poměr čtyřnásobný (4 : 1), tzn. transformaci posloupnosti, v níž se menší čísla porovnávala s většími, na posloupnost, v níž se větší čísla porovnávají s menšími. Jak již bylo uvedeno, Gerbert v tomto textu oba hlavní druhy nerovnosti při relativních vlastnostech čísel explicitně nerozlišuje.

1, 17–22 (33, 14–19):

Dalším mezistupněm [Ge-Ic] při převodu poměru 5 : 4 na poměr 4 : 3, kterou zde Gerbert představuje, je redukce čtyřnásobku (4 : 1) na trojnásobný poměr (3 : 1). Ve shodě s bodem [Ge-Ia] využívá k tomutu úkonu Boethiova pravidla [R1–3]. Vlastní výpočet je zahrnut do tab. 37.

pravidlo	**posloupnost v poměru 4 : 1**	**výpočet**	**posloupnost v poměru 3 : 1**
[R1]: $a_1 = a$	1 (= a)	$a_1 = 1$	1 (= a_1)
[R2]: $b_1 = b - a$	4 (= b)	$b_1 = 4 - 1$	3 (= b_1)
[R3]: $c_1 = c - (2b_1 + a)$	16 (= c)	$c_1 = 16 - (6 + 1)$	9 (= c_1)

Tab. 37 – *Saltus Gerberti*, krok Ge-Ic, převod poměru 4 : 1 na poměr 3 : 1

1, 24–25 (34, 2–3):

Podobně jako v kroku [Ge-Ib] i nyní [Ge-Id] Gerbert pouhým převrácením řady čísel 1 – 3 – 9 na 9 – 3 – 1 převádí trojnásobek (3 : 1) na třetinový poměr (1 : 3).

1, 26–28 (34, 4–6):

Čísla seřazená podle trojnásobného poměru jsou příčinou vzniku poměru 4 : 3. Proto nelze nyní aplikovat redukční pravidla [R1–3], nýbrž je třeba postupovat v souladu se vznikem jednotlivých poměrů, jak je Boethius popsal v *Úvodu do aritmetiky* I, 32. K rekonstrukci vzniku následných poměrů slouží pravidla [P1–3], která Gerbert užívá v tomto kroku [Ge-Ie], když konstruuje posloupnost čísel v poměru 4 : 3 v její příčinné vazbě k poměru 3 : 1, tzn. k jeho reverzní podobě (1 : 3). Výpočet zachycuje tab. 38.

pravidlo	***posloupnost v poměru 1 : 3***	***výpočet***	***posloupnost v poměru 4 : 3***
[P1]: $a_1 = a$	9 (= a)	$a_1 = 9$	9 (= a_1)
[P2]: $b_1 = a + b$	3 (= b)	$b_1 = 9 + 3$	12 (= b_1)
[P3]: $c_1 = a + 2b + c$	1 (= c)	$c_1 = 9 + (6 + 1)$	16 (= c_1)

Tab. 38 – *Saltus Gerberti*, krok Ge-Ie, převod poměru 1 : 3 na poměr 4 : 3

1, 28–31 (34, 7–9):

Gerbert se dovolává řádného postupu podle Boethiových zásad, podobně jako to činil Abbo z Fleury. Opětovně se negativně vymezuje vůči chaotickému bezprostřednímu převodu poměru 5 : 4 na poměr 4 : 3. Notker totiž ve svém textu *De superparticularibus* navrhuje odlišná pravidla, v případě převodu poměru 5 : 4 na poměr 4 : 3 [No-Ia] doporučuje tyto regule:[17]

[N1 = R1] $a_1 = a$;

[N2] $b_1 = b - \frac{1}{2}a$;

[N3] $c_1 = c - a$.

Podle těchto pravidel lze získat poměr 3 : 4. Následně stačí získanou posloupnost seřadit obráceně a výsledkem bude posloupnost 4 : 3 [No-Ib]. Výpočet přechodu k poměru 3 : 4 zachycuje tab. 39.

pravidlo	**posloupnost v poměru 5 : 4**	**výpočet**	**posloupnost v poměru 3 : 4**
[N1]: $a_1 = a$	16 (= a)	$a_1 = 16$	16 (= a_1)
[N2]: $b_1 = b - \frac{1}{2}a$	20 (= b)	$b_1 = 20 - 8$	12 (= b_1)
[N3]: $c_1 = c - a$	25 (= c)	$c_1 = 25 - 16$	9 (= c_1)

Tab. 39 – Notkerův převod poměru 5 : 4 na poměr 3 : 4, krok No-Ia

Uvedený Notkerův postup je principiálně bezproblémový a znatelně jednodušší než Gerbertovy mnohé mezikroky, ovšem na rozdíl od remešského učitele se lutyšský biskup nedrží Boetiových zásad a především nectí proces postupného vzniku číselných posloupností – snad i proto je označen za chaotický a zmatený.

1, 32–34 (34, 10–12):

Zde začíná druhý krok tzv. *saltus Gerberti* [Ge-II]. Nejprve je nutno vrátit se k třetinovému poměru (1 : 3), který již Gerbert získal v [Ge-Id], a transformovat ho v trojnásobky (3 : 1), tzn. obrátit výsledek postupu [Ge-Ic] a takto třetiny změnit v trojnásobky [Ge-IIa].

1, 35–41 (34, 13–19):

Trojnásobky jsou zde (mezikrok [Ge-IIb]) podle redukčních Boethiových pravidel [R1–3] převedeny na dvojnásobky. Postup je totožný s předchozími případy – výpočet viz tab. 40.

17 [Bub], s. 298.

pravidlo	**posloupnost v poměru 3 : 1**	**výpočet**	**posloupnost v poměru 2 : 1**
[R1]: $a_1 = a$	1 (= a)	$a_1 = 1$	1 (= a_1)
[R2]: $b_1 = b - a$	3 (= b)	$b_1 = 3 - 1$	2 (= b_1)
[R3]: $c_1 = c - (2b_1 + a)$	9 (= c)	$c_1 = 9 - (4 + 1)$	4 (= c_1)

Tab. 40 – *Saltus Gerberti*, krok Ge-IIb, převod poměru 3 : 1 na poměr 2 : 1

1, 41–42 (34, 19–20):

Krokem [Ge-IIc] Gerbert transformuje tříčlennou posloupnost čísel danou dvojnásobným poměrem (2 : 1) v posloupnost, kterou vymezuje poměr 1 : 2, tj. polovina. I zde stačí pouze seřadit jednotlivé členy posloupnosti do obráceného sledu.

1, 42–45 (35, 1–3):

Následujícím postupem [Ge-IId] se Gerbert vrací k pravidlům [P1–3], takže rekonstruuje cestu, jak vznikly půldruhanásobky (poměr 3 : 2) z dvojnásobků, resp. z polovičních poměrů (1 : 2). Výpočet je následující (tab. 41):

pravidlo	**posloupnost v poměru 1 : 2**	**výpočet**	**posloupnost v poměru 3 : 2**
[P1]: $a_1 = a$	4 (= a)	$a_1 = 4$	4 (= a_1)
[P2]: $b_1 = a + b$	2 (= b)	$b_1 = 4 + 2$	6 (= b_1)
[P3]: $c_1 = a + 2b + c$	1 (= c)	$c_1 = 4 + (4 + 1)$	9 (= c_1)

Tab. 41 – *Saltus Gerberti*, krok Ge-IId, převod poměru 1 : 2 na poměr 3 : 2

1, 45–47 (35, 4–5):

Tímto krokem Gerbert dokončil „řádný“ převod poměru 5 : 4 na poměr 3 : 2 s tím, že zde byl zopakován postup, jakým byl získán poměr 4 : 3, který je jedním z nezbytných mezičlánků při hledání posloupností daných určenými poměry. Znovu zde není opomenuta zmínka, že prezentovaná metoda se liší od „konfúzních“ postupů. Notker totiž považuje poměr 4 : 3 za jediný mezičlánek mezi poměry 5 : 4 a 3 : 2, ovšem k tomu, aby z řady tří čísel, jejichž hodnoty jsou vymezeny poměrem 4 : 3, přešel k posloupnosti určené poměrem 3 : 2 nemůže použít stejná pravidla [N1–3] jako při převodu poměru 5 : 4 na poměr 4 : 3. Formuluje proto jiné postupy [No-IIa], které platí pro přechod mezi poměry 4 : 3 a 2 : 3,[18] což lze přepsat jako pravidla:

[18] [Bub], s. 298.

[O1 = R1] $a_1 = a$;

[O2] $b_1 = b - \frac{1}{2}b$; (resp. $b_1 = \frac{1}{2}b$);

[O3] $c_1 = c - b$.

Jednotlivé výpočty podle Notkerova postupu shrnuje tab. 42.

pravidlo	**posloupnost v poměru 4 : 3**	**výpočet**	**posloupnost v poměru 2 : 3**
[O1]: $a_1 = a$	9 (= a)	$a_1 = 9$	9 (= a_1)
[O2]: $b_1 = b - \frac{1}{2}b$	12 (= b)	$b_1 = 12 - 6$	6 (= b_1)
[O3]: $c_1 = c - b$	16 (= c)	$c_1 = 16 - 12$	4 (= c_1)

Tab. 42 – Notkerův převod poměru 4 : 3 na poměr 2 : 3, krok No-IIa

Získaná posloupnost pak po obrácení [No-IIb] poskytne potřebný poměr 3 : 2. Tento postup mohl Gerbert chápat jako nesystematický také proto (vedle zmíněného nenásledování vlastní povahy čísel a Boethiových doporučení), že je nutno pro každý převod mezi poměry tvořit nová, speciální pravidla.

1, 48–50 (35, 6–8):

Reverze posloupnosti [Ge-IIIa] Gerbertovi umožňuje změnu číselné posloupnosti v poměru 1 : 2 na posloupnost, v níž jsou čísla uspořádána v poměru 2 : 1.

1, 50–54 (35, 8–13):

Posledním krokem [Ge-IIIb] se Gerbert pomocí pravidel [R1–3] dostává od poměru 2 : 1 k rovnosti. Výpočty zachycuje tab. 43.

pravidlo	**posloupnost v poměru 3 : 1**	**výpočet**	**posloupnost v poměru 1 : 1**
[R1]: $a_1 = a$	1 (= a)	$a_1 = 1$	1 (= a_1)
[R2]: $b_1 = b - a$	2 (= b)	$b_1 = 2 - 1$	1 (= b_1)
[R3]: $c_1 = c - (2b_1 + a)$	4 (= c)	$c_1 = 4 - (2 + 1)$	1 (= c_1)

Tab. 43 – *Saltus Gerberti*, krok Ge-IIIb, převod poměru 2 : 1 na poměr 1 : 1

Celý postup, tzv. *Saltus Gerberti*, jímž se od tříčlenné řady čísel seřazené podle poměru 5 : 4 dochází k rovnosti, tj. ke třem stejným hodnotám, tzn. poměru 1 : 1 souhrnně ukazuje tab. 44.

1.	pětičtvrtinový násobek	poměr 5 : 4	16 – 20 – 25		[Ge-I]	
				aplikace pravidel [R1–3]	[Ge-Ia]	↓
2.	čtvrtina	poměr 1 : 4	16 – 4 – 1			
				reverze posloupnosti	[Ge-Ib]	↓
3.	čtyřnásobek	poměr 4 : 1	1 – 4 – 16			
				aplikace pravidel [R1–3]	[Ge-Ic]	↓
4.	trojnásobek	poměr 3 : 1	1 – 3 – 9			
				reverze posloupnosti	[Ge-Id]	↓
5.	třetina	poměr 1 : 3	9 – 3 – 1			
				aplikace pravidel [P1–3]	[Ge-Ie]	↓
6.	čtyřtřetinový násobek	poměr 4 : 3	9 – 12 – 16			
				aplikace pravidel [R1–3]; tj. návrat k výsledku kroku [Id]	[Ge-II]	↓
7.	třetina	poměr 1 : 3	9 – 3 – 1			
				reverze posloupnosti, tj. návrat k výsledku kroku [Ic]	[Ge-IIa]	↓
8.	trojnásobek	poměr 3 : 1	1 – 3 – 9			
				aplikace pravidel [R1–3]	[Ge-IIb]	↓
9.	dvojnásobek	poměr 2 : 1	1 – 2 – 4			
				reverze posloupnosti	[Ge-IIc]	↓
10.	polovina	poměr 1 : 2	4 – 2 – 1			
				aplikace pravidel [P1–3]	[Ge-IId]	↓
11.	půldruha-násobek	poměr 3 : 2	4 – 6 – 9			
				aplikace pravidel [R1–3]; tj. návrat k výsledku kroku [IIc]	[Ge-III]	↓
12.	polovina	poměr 1 : 2	4 – 2 – 1			
				reverze posloupnosti; tj. návrat k výsledku kroku [IIb]	[Ge-IIIa]	↓
13.	dvojnásobek	poměr 2 : 1	1 – 2 – 4			
				aplikace pravidel [R1–3]	[Ge-IIIb]	↓
14.	rovnost	poměr 1 : 1	1 – 1 – 1			

Tab. 44 – *Saltus Gerberti*

1, 56–58 (35, 15–16):

Ani na závěr svého textu Gerbert neopomíná negativně označit Notkerův postup, přestože cesta od půldruhanásobku k rovnosti je u obou autorů stejná [No-IIIa–c]. Zatímco Notkerova metoda je znatelně jednodušší a přímočarejší (viz tab. 45), Gerbertova zase – podle jeho vlastních slov – více koresponduje se skutečnou povahou číslených poměrů.

Notkerův text *De superparticularibus* na rozdíl od Gerbertova pojednání nekončí představením převodu superpartikulárních poměrů na rovnost, ale věnuje se také převodům dalších druhů z klasifikace nestejných relativních vlastností čísel. S formulací vždy nových pravidel převodů popisuje transformaci superparcientních čísel na superpartikulární čísla (a poté na násobek a rovnost), totéž předvádí u superpartikulárních násobků a na konec ukazuje přechod od superparcientních násobků přes superparcientní poměry

1.	pětičtvrtinový násobek	poměr 5 : 4	16 – 20 – 25		[No-I]	
				aplikace pravidel [N1–3]	[No-Ia]	↓
2.	tříčtvrtinový násobek	poměr 3 : 4	16 – 12 – 9			
				reverze posloupnosti	[No-Ib]	↓
3.	čtyřtřetinový násobek	poměr 4 : 3	9 – 12 – 16			
				aplikace pravidel [O1–3]	[No-IIa]	↓
4.	dvoutřetinový násobek	poměr 2 : 3	9 – 6 – 4			
				reverze posloupnosti	[No-IIb]	↓
5.	půldruhanásobek	poměr 3 : 2	4 – 6 – 9			
				aplikace pravidel [R1–3]	[No-IIIa]	↓
6.	polovina	poměr 1 : 2	4 – 2 – 1			
				reverze posloupností	[No-IIIb]	↓
7.	dvojnásobek	poměr 2 : 1	1 – 2 – 4			
				aplikace pravidel [R1–3]	[No-IIIc]	↓
8.	rovnost	poměr 1 : 1	1 – 1 – 1			

Tab. 45 – Notkerův postup převodu pětičtvrtinového násobku na rovnost

(a následně superpartikulární čísla a násobek) k rovnosti.[19] Notker probral všechny typy nestejnosti či nerovnosti a znázornil cestu od různých poměrů k jejich kořeni, tj. totožnosti.

Gerbert (a Abbo) řeší důsledky plynoucí z *Úvodu do aritmetiky* II, 1 tak, že preferuje sledovat vznik nestejností (podle *Úvodu do aritmetiky* I, 32), který je nutno při návratu k zárodečné jednotě a stejnosti otočit a postupovat při tom podle regulí [R1–3]. Notkerův návod k realizaci přechodů je sice možný a funkční, ovšem vykazuje rysy zmatenosti (mnohá pravidla, tzn. pro každý převod zvlášť, *contra* dvojí Boethiovy regule), zejména však nekoresponduje s přirozeností čísel a není v souladu se vznikem poměrných posloupností.

[19] [Bub], s. 298–299.