$$m\int_a^b g(x)\,dx - M\int_a^b g(x)\,dx = 0 \quad (ježto \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,dx = 0),$$

ale

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

KAPITOLA IV.

Integrace některých speciálních typů funkcí, zvláště funkcí racionálních.

1. Rozklad mnohočlenu v součin kořenových činitelů. V tomto odstavci připomenu některé známé věci z algebry; nebudu je všechny dokazovati, nýbrž budu předpokládati, že je z algebry znáte. Při tom je nutno, abychom se neomezovali jen na čísla reálná, nýbrž abychom připustili do svých úvah i čísla komplexní, t. j. obecně čísla tvaru $a + bi$ (a, b reálná čísla),[1]) kde i je známá imaginární jednotka; písmena i budu v *této* kapitole užívati jen v tomto významu. Předpokládám, že čtenář zná první počátky teorie komplexních čísel z algebry; podotýkám však, že o komplexních číslech budeme mluviti pouze v prvních dvou odstavcích této kapitoly, obsahujících algebraické úvahy. Jakmile však se v 3. odst. obrátíme opět k integraci, budeme se opět omezovati jen na čísla reálná (to je také nutno, neboť věty z diferenciálního a integrálního počtu, kterých užíváme, odvodili jsme pouze pro reálné funkce reálných proměnných.[2])

Výraz tvaru

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

---

[1]) Reálná čísla jsou ovšem speciálním případem čísel komplexních: komplexní číslo $a + bi$ (a, b reálná) je reálné tehdy a jen tehdy, je-li $b = 0$.

[2]) Bylo by ovšem možno zavésti do našich úvah též komplexní funkce a komplexní proměnnou; některé výpočty by se tímto způsobem podstatně zjednodušily. Kdo se o této věci chce poučiti, nechť si přečte str. 16—57 z 2. vydání Petrova „Počtu integrálního“. Také mnohé trigonometrické integrály, na př. integrály z cvič. 19 ke kap. III, lze jednodušeji počítati, zavedeme-li funkci e^x též pro *komplexní* x. Viz Petrovu knihu, str. 133.

kde n je celé číslo, $n \geqq 0$, nazýváme mnohočlenem čili polynomem. Při tom „koeficienty" $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mohou býti libovolná komplexní čísla; také proměnná x může nabývati komplexních hodnot. Na př. výrazy[3])

$$2x + 1,\ (\sqrt{3} + i)\, x^2 - \pi x + 2,\ x^2,\ x^3 - 1,\ x,\ 2,\ i,\ 0 \qquad (2)$$

jsou mnohočleny. Je-li x^m nejvyšší mocnina x, která je v mnohočlenu $P(x)$ násobena koeficientem různým od nuly, říkáme, že $P(x)$ je mnohočlenem m-tého stupně. Jinak řečeno: mnohočlen $Q(x)$ ve vzorci (1) je stupně n-tého tehdy a jen tehdy, je-li $a_0 \neq 0$. Na př. obecný tvar mnohočlenu 1. stupně je $ax + b$, kde $a \neq 0$; mnohočlen nultého stupně je konstanta různá od nuly. Tím je každému mnohočlenu přiřazeno určité celé nezáporné číslo jakožto jeho „stupeň" — s jedinou výjimkou: mnohočlenu 0 („nula") není podle této definice přiřazen žádný stupeň, neboť není zde žádný koeficient různý od nuly. Na př. mnohočleny v (2) mají po řadě tyto stupně: 1, 2, 2, 3, 1, 0, 0; poslední z nich nemá žádný stupeň. Je-li $Q(x)$ mnohočlen a je-li $Q(\alpha) = 0$, nazývá se číslo α (obecně komplexní) *kořenem* rovnice $Q(x) = 0$ nebo též kořenem mnohočlenu $Q(x)$. Je-li $Q(x)$ mnohočlen n-tého stupně, nazývá se rovnice $Q(x) = 0$ algebraickou rovnicí n-tého stupně. Z algebry je pak známa tato t. zv. „fundamentální věta algebry": Každá algebraická rovnice kladného stupně má aspoň jeden kořen. Znalost této věty předpokládám, dokazovati ji zde nebudu.

Budiž nyní α_1 nějaký kořen algebraické rovnice n-tého stupně $Q(x) = 0$, kde $Q(x)$ má tvar (1) $(a_0 \neq 0)$. Potom je $Q(\alpha_1) = 0$ a tedy pro každé komplexní x platí

$$Q(x) = Q(x) - Q(\alpha_1) = a_0\,(x^n - \alpha_1^n) + a_1\,(x^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \\ + \ldots + a_{n-1}\,(x - \alpha_1). \qquad (3)$$

Ježto pro každé celé $k > 1$ je $x^k - \alpha_1^k = (x - \alpha_1)\,(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha_1 + x^{k-3}\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_1^{k-1})$, můžeme v rovnici (3) vpravo vytknouti $x - \alpha_1$, načež v závorce zbude jistý mnohočlen $Q_1(x)$ právě stupně $n - 1$, při čemž koeficient u x^{n-1} je roven číslu a_0 (t. j. je stejný jako koeficient při x^n v mnohočlenu $Q(x)$). Máme tedy tento výsledek: Je-li α_1 kořenem mnohočlenu n-tého stupně $Q(x)$, jest identicky (t. j. pro všechna komplexní x)

$$Q(x) = (x - \alpha_1)\, Q_1(x),$$

[3]) Členy s koeficienty nulovými obyčejně vynecháváme.

kde $Q_1(x)$ je mnohočlen stupně $n-1$, jenž má nejvyšší koeficient stejný jako $Q(x)$ (t. j. jestliže $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, je $Q_1(x) = a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$). Je-li $n-1 > 0$ (t. j. je-li $n > 1$), má mnohočlen $Q_1(x)$ opět aspoň jeden kořen α_2 a podle předešlého výsledku platí opět identita $Q_1(x) = (x - \alpha_2)\,Q_2(x)$ a tedy

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\,Q_2(x),$$

kde $Q_2(x)$ je mnohočlen stupně $n-2$, jehož nejvyšší koeficient (t. j. koeficient u x^{n-2}) je opět a_0. Takto pokračujíce, dostaneme po n krocích konečně identitu $Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots\ldots(x - \alpha_n)\,Q_n(x)$, kde $Q_n(x)$ je mnohočlen nultého stupně s nejvyšším koeficientem a_0, t. j. $Q_n(x) = a_0$. Máme tedy tento výsledek: Každý mnohočlen $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ($n > 0$, $a_0 \neq 0$) lze rozložiti v součin

$$Q(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n); \tag{4}$$

při tom jsou $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ konstanty (obecně komplexní) a rovnice (4) platí identicky pro všechna x. Z algebry je známo, že rozklad (4) je možno provésti jen jediným způsobem, t. j. že čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou — až na pořádek — jednoznačně určena. Je zřejmo, že rovnice $Q(x) = 0$ je splněna tehdy a jen tehdy, je-li x rovno některému z čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou tedy právě všechny kořeny rovnice $Q(x) = 0$ a tedy algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n různých kořenů.[4]) Mnohočleny prvního stupně $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2, \ldots, x - \alpha_n$ nazývají se *kořenovými činiteli* mnohočlenu $Q(x)$ a rovnici (4) říkáme „rozklad mnohočlenu $Q(x)$ v kořenové činitele". Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nemusí býti navzájem různá; je-li na př. právě r z čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rovno číslu α_1, říkáme, že kořen α_1 (a též příslušný kořenový činitel $x - \alpha_1$) je r-násobný. Počítáme-li každý kořen tolikráte, kolik činí jeho násobnost, můžeme říci, že algebraická rovnice n-tého stupně má vždy právě n kořenů. Kořenům jednonásobným říkáme obyčejně „jednoduché"; ostatním kořenům říkáme „mnohonásobné". Má-li mnohočlen $Q(x)$ právě m kořenů různých $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, z nichž první je r_1-násobný, druhý r_2-násobný atd., lze rovnici (4) psáti ve tvaru

---

[4]) Tato věta platí i pro $n = 0$; neboť rovnice nultého stupně, t. j. rovnice $a = 0$ (kde $a \neq 0$) není splněna pro žádné x, t. j. nemá žádný kořen.

$$Q(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_m)^{r_m}. \qquad (5)$$

(Jest ovšem $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$.)

Poznámka. Z faktu, že algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n různých kořenů, plyne několik důsledků:

A. Má-li mnohočlen $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ aspoň $n + 1$ různých kořenů, jsou všechny koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ rovny nule (a tedy rovnice $Q(x) = 0$ platí identicky). Neboť jinak by rovnice $Q(x) = 0$ byla algebraickou rovnicí jistého stupně $m \leqq n$ a tedy by měla nejvýše m (a tedy jistě méně než $n + 1$) různých kořenů. Z věty A plyne okamžitě

B. Je-li nějaký mnohočlen $Q(x)$ roven nule pro nekonečně mnoho různých hodnot x, jsou všechny jeho koeficienty rovny nule (a tedy je identicky $Q(x) = 0$).

C. Jsou-li $P(x)$, $Q(x)$ dva mnohočleny a je-li rovnice $P(x) = Q(x)$ platna pro nekonečně mnoho hodnot x, je každý koeficient mnohočlenu $P(x)$ roven „stejnolehlému" koeficientu mnohočlenu $Q(x)$ (t. j. koeficientu při téže mocnině x) a tedy rovnice $P(x) = Q(x)$ platí identicky. Důkaz plyne okamžitě z B, píšeme-li rovnici $P(x) = Q(x)$ ve tvaru $P(x) - Q(x) = 0$.

* * *

Mnohočlen $Q(x)$ budeme nazývati *reálným*, jsou-li jeho koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ čísla reálná; v následujícím budeme se zabývati výhradně reálnými mnohočleny. Je vám známo, že kořeny reálného mnohočlenu nemusí býti vždy reálné (vzpomeňte si na kořeny rovnic 2. stupně, na př. na rovnici $x^2 + 1 = 0$); platí však toto: má-li reálný mnohočlen $Q(x)$ komplexní s-násobný kořen $\gamma + \delta i$ ($\delta \neq 0$; γ, δ reálná), je též číslo „komplexně sdružené" $\gamma - \delta i$ kořenem, a to rovněž s-násobným kořenem, mnohočlenu $Q(x)$. Příslušní kořenoví činitelé v rozkladu (5) jsou $(x - (\gamma + \delta i))^s (x - (\gamma - \delta i))^s$; tento součin je možno psáti v reálném tvaru, neboť $(x - (\gamma + \delta i))(x - (\gamma - \delta i)) = (x - \gamma)^2 + \delta^2 = x^2 + px + q$, kde $p = -2\gamma$, $q = \gamma^2 + \delta^2$ jsou reálná čísla; při tom je $\frac{1}{4}p^2 - q = \gamma^2 - (\gamma^2 + \delta^2) = -\delta^2 < 0$; čísla $\gamma \pm \delta i$ jsou právě oba kořeny mnohočlenu $x^2 + px + q$. Provedeme-li tuto změnu v rozkladu (5), obdržíme tento výsledek:

Věta 65. *Budiž $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ reálný mnohočlen n-tého stupně, jenž má k různých reálných kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ a 2l různých kořenů komplexních (ne reálných) $\gamma_1 + \delta_1 i, \gamma_1 - \delta_1 i, \gamma_2 + \delta_2 i, \gamma_2 - \delta_2 i, \dots, \gamma_l + \delta_l i, \gamma_l - \delta_l i$ ($\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0, \dots, \delta_l \neq 0$; $\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2, \dots, \gamma_l, \delta_l$ jsou reálná čísla). Nechť* *obecně kořen x_t je r_t-násobný a kořeny $\gamma_t + \delta_t i$, $\gamma_t - \delta_t i$ nechť jsou s_t-násobné. Potom je identicky*

$$Q(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \times \\ \times (x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \dots (x^2 + p_l x + q_l)^{s_l} . \tag{6}$$

Při tom reálný mnohočlen $x^2 + p_t x + q_t$ má kořeny $\gamma_t + \delta_t i$, $\gamma_t - \delta_t i$;[5] *platí pak nerovnost $\frac{1}{4} p_t^2 - q_t < 0$.*

Poznamenejme, že žádné dva z mnohočlenů

$$(x - \alpha_1)^{r_1}, \dots, (x - \alpha_k)^{r_k}, (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}, \dots, (x^2 + p_l x + q_l)^{s_l}$$

nemají společných kořenů; t. j. je-li nějaké číslo kořenem některého z těchto mnohočlenů, nemůže býti již kořenem žádného jiného.

Ve zvláštních případech může ovšem býti $k = 0$ (nemá-li $Q(x)$ reálných kořenů) nebo $l = 0$ (jsou-li všechny kořeny reálné).

Poznámka. Vzorec (6) nám dává rozklad reálného mnohočlenu v součin *reálných* mnohočlenů 1. a 2. stupně; naproti tomu vzorec (5) dával rozklad sice jednodušší, totiž rozklad v součin mnohočlenů 1. stupně, za to však tyto mnohočleny nemusí býti reálné (ani tehdy, když $Q(x)$ je reálný mnohočlen). Učiňme ještě tuto poznámku, kterou za chvíli budeme potřebovati. Má-li reálný mnohočlen $Q(x)$ nějaký reálný kořen, na př. α_1, jest identicky $Q(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x)$, kde $Q_1(x)$ je opět *reálný* mnohočlen, jehož stupeň je o jednotku nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$. Neboť, provedeme-li rozklad (6), můžeme za $Q_1(x)$ položiti prostě součin všech reálných činitelů vpravo, s výjimkou jednoho činitele $x - \alpha_1$. Obdobně: nechť reálný mnohočlen $Q(x)$ má nějaký komplexní (nikoliv reálný) kořen, na př. $\gamma_1 + \delta_1 i$ (γ_1, δ_1 reálná, $\delta_1 \neq 0$); potom má $Q(x)$ též kořen $\gamma_1 - \delta_1 i$; budiž $x^2 + p_1 x + q_1$ onen mnohočlen, jenž má kořeny $\gamma_1 + \delta_1 i$, $\gamma_1 - \delta_1 i$ (viz předešlou poznámku pod čarou). Potom je identicky $Q(x) = (x^2 + p_1 x + q_1) Q_1(x)$, kde $Q_1(x)$ je opět *reálný* mnohočlen, jehož stupeň je o 2 nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$. Neboť, provedeme-li rozklad (6), můžeme za $Q_1(x)$ položiti prostě součin všech reálných činitelů vpravo, s výjimkou jednoho činitele $x^2 + p_1 x + q_1$.

---

[5]) Poznamenejme, že kořeny $\gamma_t + \delta_t i$, $\gamma_t - \delta_t i$ určují jednoznačně koeficienty p_t, q_t mnohočlenu $x^2 + p_t x + q_t$; neboť podle rozkladu (4) je identicky (kořenoví činitelé jsou právě dva) $x^2 + p_t x + q_t = (x - (\gamma_t + \delta_t i))(x - (\gamma_t - \delta_t i)) = x^2 - 2\gamma_t x + \gamma_t^2 + \delta_t^2$, takže podle věty C na str. 112 je nutně $p_t = -2\gamma_t$, $q_t = \gamma_t^2 + \delta_t^2$.

2. Rozklad reálné racionální funkce v součet částečných zlomků. Racionální funkce $R(x)$ proměnné x je taková funkce, kterou lze psáti jako podíl dvou mnohočlenů $P(x)$, $Q(x)$:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{7}$$

(Mnohočlen je ovšem také racionální funkcí, neboť lze psáti $P(x) = P(x) : 1$ a jednička je mnohočlen (nultého stupně). Racionální funkce (7) je ovšem definována pro všechna komplexní x, vyjma pro ty hodnoty x, pro něž je $Q(x) = 0$.) Lze-li mnohočleny $P(x)$, $Q(x)$ voliti tak, že jsou reálné, nazýváme funkci (7) *reálnou* racionální funkcí. Budeme se výhradně zabývati reálnými racionálními funkcemi.[6]) Naším úkolem v tomto odstavci bude, převésti výraz $P(x) : Q(x)$ na součet několika výrazů jednodušších[7]); při tom ovšem budeme předpokládati, že stupeň mnohočlenu $Q(x)$ je kladné číslo: kdyby totiž $Q(x)$ byl mnohočlen nultého stupně, t. j. konstanta, byl by výraz $R(x)$ mnohočlenem, tedy funkcí velmi jednoduchou, kterou dovedeme integrovati.

Budiž tedy dána racionální funkce $S(x) : Q(x)$, kde $S(x)$ je reálný mnohočlen stupně m, $Q(x)$ reálný mnohočlen stupně n $(n > 0)$. Je-li $m \geqq n$, lze provésti dělení, čímž dostaneme

$$S(x) = P_1(x)\, Q(x) + P(x),$$

kde mnohočlen $P_1(x)$ je „podíl", mnohočlen $P(x)$ je „zbytek"; tento zbytek je buď nula nebo mnohočlen stupně *nižšího* než n. Dělíme-li poslední rovnici (platnou pro všechna x) mnohočlenem $Q(x)$, dostaneme vztah

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

který platí pro všechna x, pro něž $Q(x) \neq 0$. Je-li tedy předložena reálná racionální funkce $S(x) : Q(x)$, je buď čitatel nižšího stupně než jmenovatel nebo se dá daná racionální funkce dělením převésti na součet reálného mnohočlenu a reálné racionální funkce, v níž čitatel je nižšího stupně než jmenovatel (po případě dokonce tento čitatel může býti nula). Můžeme se tedy v dalším omeziti na takové reálné racionální funkce (7), v nichž čitatel má nižší stupeň než jmenovatel.

---

[6]) *Koeficienty* mnohočlenů $P(x)$, $Q(x)$ budou tedy reálná čísla; ovšem *proměnná* x může nabývati — v tomto odstavci — jakýchkoliv komplexních hodnot.

[7]) To je tedy ryze algebraická úloha, která s integrálním počtem nemá nic společného; integrovati začneme až zase v odst. 3.

Příklad 1. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = x + 3 + \dfrac{3x - 4}{x^2 - x + 1}$.

Dělením totiž dostaneme:

$$(x^3 + 2x^2 + x - 1) : (x^2 - x + 1) = x + 3 + \frac{3x - 4}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{array}{rrrr}
x^3 & - x^2 & + x & \\
- & + & - & \\
\hline
 & 3x^2 & & - 1 \\
 & 3x^2 & - 3x & + 3 \\
 & - & + & - \\
\hline
 & & 3x & - 4 \ldots \text{zbytek}
\end{array}$$

Hlavním výsledkem tohoto odstavce bude věta 68; věty 66, 67 jsou přípravou k větě 68.

Věta 66. *Budiž α reálné číslo; budiž r celé kladné číslo; budiž $Q_1(x)$ reálný mnohočlen, jenž nemá kořen α (t. j. $Q_1(\alpha) \neq 0$); budiž $P(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x - \alpha)^r Q_1(x)$. Potom existuje reálné číslo A tak, že pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x - \alpha)^r Q_1(x)$, platí vztah*

$$\frac{P(x)}{(x - \alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x - \alpha)^r} + \frac{P_1(x)}{(x - \alpha)^{r-1} Q_1(x)}, \tag{8}$$

kde $P_1(x)$ je buďto nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x - \alpha)^{r-1} Q_1(x)$.

Poznámka. Všimněte si smyslu rovnice (8): zlomek na levé straně je rozložen na součet dvou zlomků: první z nich je zcela jednoduchý; druhý je podobný jako zlomek vlevo, ale je o něco jednodušší: schází v něm jeden činitel $x - \alpha$.

Důkaz. Slovy „přípustné hodnoty x" budu označovati všechny komplexní hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x - \alpha)^r Q_1(x)$. Je-li A libovolné reálné číslo, platí pro všechna přípustná x rovnice

$$\frac{P(x)}{(x - \alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x - \alpha)^r} + \frac{P(x) - A\,Q_1(x)}{(x - \alpha)^r Q_1(x)} \tag{9}$$

(abyste nahlédli správnost tohoto vztahu, stačí, uvedete-li pravou stranu na společného jmenovatele). Zvolme A tak, aby bylo $P(\alpha) - A\,Q_1(\alpha) = 0$, t. j. zvolme $A = P(\alpha) : Q_1(\alpha)$ (to lze, ježto $Q_1(\alpha) \neq 0$). Potom $P(x) - A\,Q_1(x)$ je buďto nula a důkaz je hotov: nebo je $P(x) - A\,Q_1(x)$ reálný mnohočlen stupně nižšího než je stupeň mnohočlenu $(x-\alpha)^r Q_1(x)$, jenž má kořen α. Podle poznámky k větě 65 platí identicky $P(x) - A\,Q_1(x) = (x-\alpha) \times \times P_1(x)$, kde $P_1(x)$ je reálný mnohočlen stupně o jednotku nižšího nežli $P(x) - A\,Q_1(x)$, tedy stupně *nižšího* nežli $(x-\alpha)^{r-1} Q_1(x)$. Dosazením do (9) dostaneme vztah, platný pro všechna přípustná x:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{(x-\alpha)\,P_1(x)}{(x-\alpha)^r Q_1(x)} .$$

Krátíme-li poslední zlomek výrazem $x-\alpha$ (což je pro všechna přípustná x dovoleno, ježto pro tyto hodnoty x je $x-\alpha \neq 0$), dostáváme rovnici (8), platnou pro všechna přípustná x, t. j. pro všechna x, pro něž je $(x-\alpha)^r Q_1(x) \neq 0$.

Věta 67. *Budiž $x^2 + px + q$ reálný mnohočlen a nechť je $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. Mnohočlen $x^2 + px + q$ nemá tedy reálných kořenů; označme jeho kořeny $\gamma + \delta i$, $\gamma - \delta i$ ($\delta \neq 0$, γ, δ reálná). Budiž s celé kladné číslo; budiž $Q_1(x)$ reálný mnohočlen, jenž nemá kořen $\gamma + \delta i$ (a tedy ani $\gamma - \delta i$) a budiž $P(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$. Potom existují reálná čísla M, N tak, že pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$, platí vztah*

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^s Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1} Q_1(x)} , \tag{10}$$

kde $P_1(x)$ je buďto nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x^2 + px + q)^{s-1} Q_1(x)$.[8])

Důkaz je obdobný jako u věty 66, jen poněkud složitější. Slovy „přípustné hodnoty x" označíme zde všechny komplexní hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s Q_1(x)$. Jsou-li M, N libovolná reálná čísla, platí pro všechna přípustná x rovnice

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^s Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{P(x) - (Mx+N)\,Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^s Q_1(x)} \tag{11}$$

(správnost tohoto vztahu opět okamžitě nahlédnete, uvedete-li pravou stranu na společného jmenovatele). Snažme se zvoliti

[8]) Smysl této věty je obdobný jako smysl věty 66: ve jmenovateli druhého zlomku vpravo schází jeden činitel $x^2 + px + q$.

reálná čísla M, N tak, aby čitatel posledního zlomku se rovnal nule pro $x = \gamma + \delta i$; t. j. tak, aby bylo

$$P(\gamma + \delta i) - (M\gamma + M\delta i + N)\, Q_1(\gamma + \delta i) = 0. \qquad (12)$$

Čísla $P(\gamma + \delta i)$, $Q_1(\gamma + \delta i)$ jsou obecně komplexní, pišme třeba $P(\gamma + \delta i) = A + Bi$, $Q_1(\gamma + \delta i) = C + Di$ (A, B, C, D reálná). Rovnice (12) vypadá tedy takto:

$$A + Bi - (M\gamma + M\delta i + N)\,(C + Di) = 0:$$

tato rovnice platí, jsou-li reálná čísla M, N zvolena tak, aby reálná i imaginární část levé strany se rovnala nule, t. j. platí-li rovnice

$$M\gamma C + NC - M\delta D = A,$$
$$M\delta C + M\gamma D + ND = B.$$

To jsou dvě rovnice pro dvě neznámé M, N, jež mají jisté řešení — a to reálné řešení —, je-li determinant soustavy různý od nuly[9]): tento determinant jest

$$\begin{vmatrix} \gamma C - \delta D, & C \\ \delta C + \gamma D, & D \end{vmatrix} = -\,\delta\,(C^2 + D^2). \qquad (13)$$

Při tom je $\delta \neq 0$ a $Q_1(\gamma + \delta i) = C + Di \neq 0$, takže aspoň jedno z reálných čísel C, D je různé od nuly a tedy $C^2 + D^2 > 0$. Tedy determinant (13) vskutku je různý od nuly a můžeme tedy nalézti reálná čísla M, N tak, aby platila rovnice (12). Zvolme M, N tímto způsobem. Potom je buďto $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ nula a důkaz je hotov; nebo je $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)$.[10]) Podle rovnice (12) má reálný mnohočlen $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$ kořen $\gamma + \delta i$ a tedy též kořen $\gamma - \delta i$; podle poznámky k větě 65 je tedy identicky

$$P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x) = (x^2 + px + q)\, P_1(x),$$

kde $P_1(x)$ je reálný mnohočlen stupně o 2 nižšího než $P(x) - (Mx + N)\, Q_1(x)$, tedy stupně *nižšího* než $(x^2 + px + q)^{s-1} \times Q_1(x)$. Dosazením do (11) dostaneme vztah, platný pro všechna přípustná x:

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{(x^2 + px + q)\, P_1(x)}{(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)}.$$

[9]) Viz Bydžovský, Základy teorie determinantů a matic a jich užití (Praha 1930), str. 2—3; pro n rovnic viz str. 33—35; obecnou teorii soustavy lineárních rovnic viz na str. 60—74.

[10]) Všimněte si, že mnohočlen $Q_1(x)$ má stupeň aspoň o 2 nižší než mnohočlen $(x^2 + px + q)^s\, Q_1(x)$.

Pro všechna přípustná x je však $x^2 + px + q \neq 0$, takže můžeme poslední zlomek tímto výrazem krátit; tím dostáváme vztah (10), platný pro všechna přípustná x, t. j. pro všechna x, pro něž je $(x^2 + px + q)^s Q_1(x) \neq 0$.

Věta 68. *Budiž $Q(x)$ reálný mnohočlen, pro nějž platí identicky rovnice*

$$Q(x) = a_0(x-\alpha)^r (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots; \quad (14)$$

při tom $a_0, \alpha, \alpha', \ldots, p, q, p', q', \ldots$ jsou reálná čísla, $a_0 \neq 0$; dále je $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$, $\frac{1}{4}p'^2 - q' < 0, \ldots$; čísla $r, r', \ldots, s, s', \ldots$ jsou celá kladná. Konečně nechť žádné dva z mnohočlenů $x - \alpha$, $x - \alpha', \ldots, x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q', \ldots$ nemají společných kořenů.[11] *Budiž dále $P(x)$ reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$. Potom existují reálná čísla $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_2, A_1, A'_{r'}, A'_{r'-1}, \ldots, A'_2, A'_1, \ldots, M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_2, N_2, M_1, N_1, M'_{s'}, N'_{s'}, M'_{s'-1}, N'_{s'-1}, \ldots, M'_2, N'_2, M'_1, N'_1, \ldots$ tak, že pro všechna x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $Q(x)$, platí rovnice*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \\ & + \frac{A'_{r'}}{(x-\alpha')^{r'}} + \frac{A'_{r'-1}}{(x-\alpha')^{r'-1}} + \ldots + \frac{A'_2}{(x-\alpha')^2} + \frac{A'_1}{x-\alpha'} + \\ & + \ldots + \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M_{s-1}x + N_{s-1}}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \\ & + \ldots + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \\ & + \frac{M'_{s'} x + N'_{s'}}{(x^2+p'x+q')^{s'}} + \frac{M'_{s'-1}x + N'_{s'-1}}{(x^2+p'x+q')^{s'-1}} + \\ & + \ldots + \frac{M'_2 x + N'_2}{(x^2+p'x+q')^2} + \frac{M'_1 x + N'_1}{x^2+p'x+q'} + \ldots . \end{aligned} \quad (15)$$

---

[11]) Rovnice (14) je tedy prostě rozklad mnohočlenu $Q(x)$ podle vzorce (6); jenom pro pohodlí jsme trochu změnili označení: reálné kořeny mnohočlenu $Q(x)$ jsou α (r-násobný), α' (r'-násobný), ..., komplexní (ne reálné) kořeny mnohočlenu $Q(x)$ jsou: dva kořeny mnohočlenu $x^2 + px + q$ (s-násobné), dva kořeny mnohočlenu $x^2 + p'x + q'$ (s'-násobné) atd. Činitelé $x - \alpha$, $x - \alpha', \ldots$ ovšem mohou scházeti (nemá-li $Q(x)$ reálných kořenů); rovněž činitelé $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q', \ldots$ mohou scházeti (jsou-li všechny kořeny reálné).

Prosím čtenáře, aby se nelekal zdánlivě složitých vzorců, které

Poznámka. Rovnice (15) dává rozklad zlomku $\frac{P(x)}{Q(x)}$ v součet t. zv. *částečných* (nebo *parciálních*) *zlomků.*

Důkaz. Slovy „přípustné hodnoty x" budu označovati ony hodnoty x, jež nejsou kořeny mnohočlenu $Q(x)$. Pišme $Q(x) = (x - \alpha)^r\, Q_1(x)$, kde $Q_1(x)$ je součin všech ostatních činitelů (kromě $(x - \alpha)^r$) na pravé straně rovnice (14). Ježto $Q_1(\alpha) \neq 0$, existuje podle věty 66 reálné číslo A_r tak, že pro všechna přípustná x je[12])

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - \alpha)^r\, Q_1(x)} = \frac{A_r}{(x - \alpha)^r} + \frac{P_1(x)}{(x - \alpha)^{r-1}\, Q_1(x)},$$

kde reálný mnohočlen $P_1(x)$ je buďto nula[13]) nebo má nižší stupeň než mnohočlen $(x - \alpha)^{r-1}\, Q_1(x)$. Je-li $r - 1 > 0$, postupujeme podobně dále a opětovným použitím věty 66 dostaneme rovnice

$$\frac{P_1(x)}{(x - \alpha)^{r-1}\, Q_1(x)} = \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{P_2(x)}{(x - \alpha)^{r-2}\, Q_1(x)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{P_{r-2}(x)}{(x - \alpha)^2\, Q_1(x)} = \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \frac{P_{r-1}(x)}{(x - \alpha)\, Q_1(x)},$$

$$\frac{P_{r-1}(x)}{(x - \alpha)\, Q_1(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{P_r(x)}{Q_1(x)};$$

při tom $A_{r-1}, A_{r-2}, \ldots, A_1$ jsou reálná čísla; v každém zlomku na konci každého řádku je v čitateli buďto nula nebo reálný mnohočlen, jenž má stupeň nižší nežli jmenovatel. Celkem tedy obdržíme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x - \alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x - \alpha)^{r-1}} + \ldots +$$
$$+ \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{P_r(x)}{Q_1(x)};$$

poslední zlomek je podobného tvaru jako $P(x) : Q(x)$; čitatel je buďto nula nebo reálný mnohočlen stupně nižšího než jmenovatel;

---

teď přijdou. Věc je v podstatě jednoduchá a až si čtenář přečte odst. 2 a propočítá příklady 1—5 k němu připojené, porozumí mu jistě bez nejmenších obtíží.

[12]) V dalším průběhu důkazu budu se stále omezovati jen na přípustná x, ale nebudu to stále výslovně podotýkati.

[13]) Je-li ovšem $P_1(x)$ nula, jsme s důkazem hotovi. Totéž platí o všech dalších krocích.

jmenovatel $Q_1(x)$ je však již o něco jednodušší: vypadl z něho činitel $(x-\alpha)^r$. Použijeme-li nyní téhož postupu na kořenové činitele $(x-\alpha')^{r'}, \ldots$ (pocházející od reálných kořenů), při čemž vycházíme nyní od zlomku $P_r(x) : Q_1(x)$, dostaneme konečně

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A'_{r'}}{(x-\alpha')^{r'}} + \\ + \frac{A'_{r'-1}}{(x-\alpha')^{r'-1}} + \ldots + \frac{A'_1}{x-\alpha'} + \ldots + \frac{T(x)}{S(x)}; \tag{16}$$

při tom čísla $A_r, \ldots, A_1, A'_{r'}, \ldots, A'_1, \ldots$ jsou reálná; dále je

$$S(x) = a_0 (x^2 + px + q)^s (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots \tag{17}$$

a $T(x)$ je buďto nula nebo reálný mnohočlen nižšího stupně než $S(x)$. Pišme nyní $S(x) = (x^2 + px + q)^s S_1(x)$ ($S_1(x)$ je prostě součin všech ostatních činitelů — kromě $(x^2 + px + q)^s$ — z pravé strany rovnice (17)); opětovným použitím věty 67 dostaneme rovnice

$$\frac{T(x)}{S(x)} = \frac{T(x)}{(x^2 + px + q)^s S_1(x)} =$$

$$= \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{T_1(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} S_1(x)},$$

$$\frac{T_1(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} S_1(x)} =$$

$$= \frac{M_{s-1} x + N_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \frac{T_2(x)}{(x^2 + px + q)^{s-2} S_1(x)},$$

. . . .

$$\frac{T_{s-1}(x)}{(x^2 + px + q) S_1(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{T_s(x)}{S_1(x)};$$

při tom $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_1, N_1$ jsou reálná čísla; v posledním zlomku v každé rovnici je v čitateli buď nula nebo reálný mnohočlen, jehož stupeň je nižší než stupeň jmenovatele. Podobně pokračujeme dále, až vyčerpáme všechny činitele $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q', \ldots$; tím dostaneme vzorec (s reálnými čísly $M_s, N_s, \ldots, M_1, N_1, M'_{s'}, N'_{s'}, \ldots, M'_1, N'_1, \ldots$)

$$\left.\begin{aligned}\frac{T(x)}{S(x)} &= \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M_{s-1}x + N_{s-1}}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \ldots + \\ &+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \\ &+ \frac{M'_{s'}x + N'_{s'}}{(x^2+p'x+q')^{s'}} + \frac{M'_{s'-1}x + N'_{s'-1}}{(x^2+p'x+q')^{s'-1}} + \ldots + \\ &+ \frac{M'_1 x + N'_1}{x^2+p'x+q'} + \ldots + \frac{U(x)}{a_0},\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

kde $U(x)$ je buďto nula nebo mnohočlen nižšího stupně než a_0; poslední případ však nemůže nastati, ježto a_0 je mnohočlen stupně nultého; tedy $U(x)$ je nula a z rovnic (16), (18) plyne hledaná rovnice (15).

Příklad 2.

$$R(x) = \frac{x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 4x^6 + x^4 + 2x^3 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3}.$$

Zde stupeň čitatele není nižší než stupeň jmenovatele; musíme tedy nejdříve provésti dělení a dostaneme

$$R(x) = x + 2 + \frac{x^7 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3};$$

zde již čitatel má nižší stupeň než jmenovatel. Jest $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3(x^6 + 2x^3 + 1) = x^3(x^3 + 1)^2$; ale $x^3 + 1 = (x+1) \times (x^2 - x + 1)$, kde poslední činitel vyhovuje podmínce $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. Rozklad (14) vypadá tedy takto: $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2$; podle věty 68 existují tedy reálná čísla $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ tak, že pro všechna x (vyjma pro kořeny rovnice $x^9 + 2x^6 + x^3 = 0$) je

$$\begin{aligned}\frac{x^7 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3} &= \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{e}{(x+1)} + \\ &+ \frac{fx + g}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{hx + k}{x^2 - x + 1};\end{aligned} \quad (19)$$

přičteme-li ještě mnohočlen $x + 2$, dostáváme hledaný rozklad funkce $R(x)$ — až na to, že jsme dosud neurčili čísla $a, b, \ldots, k$.

Vyložím zde nyní dva způsoby, jak je možno stanoviti reálná čísla

$$A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1, A'_{r'}, A'_{r'-1}, \ldots, A'_1, \ldots, M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots,$$
$$M_1, N_1, M'_{s'}, N'_{s'}, M'_{s'-1}, N'_{s'-1}, \ldots, M'_1, N'_1, \ldots \qquad (20)$$

v rovnici (15). Vynásobme rovnici (15) jmenovatelem $Q(x) : a_0$; dostaneme tuto rovnici:

$$\frac{P(x)}{a_0} = A_r(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ A_{r-1}(x-\alpha)(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ A_1(x-\alpha)^{r-1}(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ (M_s x + N_s)(x-\alpha)^r (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ (M_{s-1}x+N_{s-1})(x-\alpha)^r(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ (M_1x+N_1)(x-\alpha)^r(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^{s-1}(x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ \ldots \qquad (21)$$

(a_0 jsme nechali ve jmenovateli, abychom jím nemusili násobiti všechny členy vpravo; v každém členu vpravo ovšem stojí (kromě a_0) všichni činitelé z rozkladu (14), kromě toho, který stál v příslušném členu ve vzorci (15) ve jmenovateli). Obě strany rovnice (21) jsou mnohočleny; rovnice (21) vzniká z rovnice (15) tím, že násobíme mnohočlenem $Q(x) : a_0$; rovnice (15) vzniká z rovnice (21) naopak tím, že mnohočlenem $Q(x) : a_0$ dělíme. Jsou-li čísla (20) volena tak, že rovnice (15) platí pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$ (podle věty 68 víme, že taková čísla (20) existují), potom rovnice (21) platí rovněž pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$, tedy pro nekonečně mnoho x; ježto (21) je rovnice mezi dvěma mnohočleny, je potom podle věty C na str. 112 každý koeficient vlevo v rovnici (21) roven stejnolehlému koeficientu vpravo a tedy rovnice (21) platí *pro všechna x vůbec* (i pro ta x, pro něž je $Q(x) = 0$). Naopak, jsou-li čísla (20) volena tak, že rovnice (21) platí pro všechna x vůbec (čili — což je totéž podle věty C na str. 112 — je-li každý koeficient v rovnici (21) vlevo roven stejnolehlému koeficientu vpravo), platí rovnice (15) pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$. Můžeme tedy svoji úlohu vysloviti dvojím ekvivalentním způsobem:

I. Nalézti reálná čísla (20) tak, aby v rovnici (21) byl každý koeficient vlevo roven příslušnému koeficientu vpravo (víme, že taková čísla (20) existují).

II. Nalézti reálná čísla (20) tak, aby rovnice (21) platila identicky, t. j. pro každé komplexní x (víme, že taková čísla (20) existují).

Formulace I vede k tomuto řešení naší úlohy (t. zv. *metoda neurčitých součinitelů* nebo *neurčitých koeficientů*): Vynásobíme-li vpravo v rovnici (21), vidíme, že koeficient každé mocniny x vpravo je lineární formou[14]) v číslech (20); položíme-li každý takový koeficient roven stejnolehlému koeficientu vlevo, dostaneme pro čísla (20) soustavu lineárních rovnic, jež jistě má reálné řešení (neboť víme, že čísla (20), mající žádané vlastnosti, existují).[15])

Příklad 3. Stanovení koeficientů $a, b, \ldots, k$ v rovnici (19). Násobíme rovnici (19) mnohočlenem $x^9 + 2x^6 + x^3 = x^3 (x + 1)^2 \times \times (x^2 - x + 1)^2$; dostaneme

$$\begin{aligned} x^7 + 7x - 1 = {} & a (x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2 + \\ & + bx (x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2 + \\ & + cx^2 (x + 1)^2 (x^2 - x + 1)^2 + dx^3 (x^2 - x + 1)^2 + \\ & + ex^3 (x + 1) (x^2 - x + 1)^2 + \\ & + (fx + g) x^3 (x + 1)^2 + \\ & + (hx + k) x^3 (x + 1)^2 (x^2 - x + 1), \end{aligned} \tag{22}$$

neboli

$$\begin{aligned} x^7 + 7x - 1 = {} & a (x^6 + 2x^3 + 1) + b (x^7 + 2x^4 + x) + \\ & + c (x^8 + 2x^5 + x^2) + \\ & + d (x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3) + \\ & + e (x^8 - x^7 + x^6 + x^5 - x^4 + x^3) + \\ & + (fx + g) (x^5 + 2x^4 + x^3) + \\ & + (hx + k) (x^7 + x^6 + x^4 + x^3). \end{aligned}$$

V této rovnici se vyskytují mocniny od x^8 až do x^0; položíme-li koeficient každé mocniny x vpravo roven koeficientu téže mocniny vlevo, dostaneme těchto devět rovnic:

$$\begin{array}{l|l|l} c + e + h = 0, & 2c + 3d + e + 2f + g + h = 0, & c = 0, \\ b + d - e + h + k = 1, & 2b - 2d - e + f + 2g + h + k = 0, & b = 7, \\ a - 2d + e + f + k = 0, & 2a + d + e + g + k = 0, & a = -1. \end{array}$$

Z těchto rovnic dostanete řešením (doporučuji, abyste si je provedli) $a = -1$, $b = 7$, $c = 0$, $d = 1$, $e = \frac{31}{9}$, $f = -\frac{1}{3}$, $g = -\frac{7}{3}$, $h = -\frac{31}{9}$, $k = -\frac{1}{9}$.

* * *

---

[14]) Viz Bydžovský, Základy teorie determinantů . . ., str. 60.

[15]) Jak se řeší soustavy lineárních rovnic, najdete v citované knížce Bydžovského.

Řešení metodou neurčitých součinitelů sice dovedeme vždy provésti, ale ve složitějších případech bývá často zdlouhavé.

Vyložím proto ještě jednu metodu,[16]) která též vždy vede k cíli, a jež spočívá na druhé formulaci (viz II na str. 123): víme, že existují reálná čísla (20) taková, že rovnice (21) platí pro všechna x vůbec; jak tato čísla (20) nalezneme? Především snadno najdeme číslo A_r: dosaďme do rovnice (21) $x = \alpha$; levá strana je $P(\alpha) : a_0$, na pravé straně všichni sčítanci vyjma první obsahují činitele $x - \alpha$, jenž pro $x = \alpha$ se rovná nule; zbude nám tedy rovnice

$$P(\alpha) : a_0 = A_r(\alpha - \alpha')^{r'} \ldots (\alpha^2 + p\alpha + q)^s (\alpha^2 + p'\alpha + q')^{s'} \ldots ; \quad (23)$$

ježto číslo α není kořenem žádného činitele v rovnici (14) vpravo s výjimkou činitele $x - \alpha$, je součinitel při A_r v rovnici (23) různý od nuly a dělíme-li jím, dostaneme A_r.[17]) Předpokládejme, že už známe čísla $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_{r-(k-1)}$ a že chceme počítati následující číslo A_{r-k}. Rovnice (21) platí pro všechna x, tedy specielně také pro všechna reálná x; derivujeme-li tedy obě strany rovnice (21) k-kráte, dostáváme vlevo i vpravo mnohočlen, a tyto dva mnohočleny se ovšem sobě rovnají pro všechna reálná x,[18]) tedy pro nekonečně mnoho hodnot x a tedy podle věty C (str. 112) rovnají se sobě tyto mnohočleny *vůbec* pro všechna (komplexní) x. Tedy: derivujeme-li obě strany rovnice (21) k-kráte, dostaneme rovnici, která platí nejen pro všechna reálná, nýbrž i pro všechna komplexní x. Jak vypadá rovnice (21)? Známe-li čísla $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_{r-(k-1)}$, tvoří prvních k členů pravé strany rovnice (21) mnohočlen již úplně známý, jejž označme třeba $R(x)$; potom přijde člen $A_{r-k}(x - \alpha)^k (x - \alpha')^{r'} \ldots (x^2 + px + q)^s (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots$ a po něm další členy, z nichž se dá vytknouti $(x - \alpha)^{k+1}$; takže rovnice (21) má tento tvar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0} P(x) = R(x) + A_{r-k}(x - \alpha)^k (x - \alpha')^{r'} \ldots \\ \ldots (x^2 + px + q)^s (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots + (x - \alpha)^{k+1} S(x), \end{aligned} \quad (24)$$

kde mnohočleny P, R již úplně známe; mnohočlen $S(x)$ ovšem

[16]) Čtenář, kterému by se následující úvahy zdály obtížné, může zbytek tohoto odst. 2 vynechati. Která z obou metod je výhodnější, závisí na tvaru dané funkce $P(x) : Q(x)$.

[17]) Zároveň je viděti, že číslo A_r je jednoznačně stanoveno.

[18]) Neboť jsou-li si dvě funkce rovny pro všechna reálná x a mají-li všude derivaci, jsou si i jejich derivace rovny pro všechna reálná x.

obsahuje po příp. součinitele ještě neznámé. Derivujeme-li poslední rovnici k-kráte, dostaneme — jak čtenář snadno zjistí — tento výsledek:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_0} P^{(k)}(x) = R^{(k)}(x) + k!\, A_{r-k}(x-\alpha')^{r'} \dots \\ &\dots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \dots + (x-\alpha)\, T(x),\end{aligned} \tag{25}$$

kde $T(x)$ je opět mnohočlen.[19] Dosaďme do rovnice (25) $x = \alpha$; dostaneme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_0} P^{(k)}(\alpha) - R^{(k)}(\alpha) = \\ &= k!\, A_{r-k}(\alpha-\alpha')^{r'} \dots (\alpha^2+p\alpha+q)^s (\alpha^2+p'\alpha+q')^{s'} \dots\end{aligned} \tag{26}$$

Levá strana je známa; činitel u A_{r-k} je různý od nuly, jak jsme už při rovnici (23) zjistili, a tedy můžeme A_{r-k} z rovnice (26) vypočísti (opět je A_{r-k} jednoznačně stanoveno). Tímto způsobem vypočteme tedy po řadě $A_r, A_{r-1}, \dots, A_1$ a obdobně $A'_{r'}, A'_{r'-1}, \dots$ $\dots, A'_1, \dots$

Zbývá vypočísti čísla $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \dots, M_1, N_1, \dots$ Postup je obdobný, jen o něco složitější. Mnohočlen $x^2 + px + q$ má dva kořeny $\sigma = \gamma + \delta i$, $\tau = \gamma - \delta i$ (γ, δ reálná, $\delta \neq 0$); pro $x = \sigma$ a pro $x = \tau$ je tedy $x^2 + px + q = 0$, ale žádný jiný činitel na pravé straně rovnice (14) se nerovná nule ani pro $x = \sigma$ ani pro $x = \tau$. Dosaďme do rovnice (21) $x = \sigma$; ježto všichni členové vpravo, obsahující činitel $x^2 + px + q$, se rovnají nule pro $x = \sigma$, dostaneme

$$\frac{1}{a_0} P(\sigma) = (M_s\sigma + N_s)(\sigma-\alpha)^r(\sigma-\alpha')^{r'} \dots (\sigma^2+p'\sigma+q')^{s'} \dots; \tag{27}$$

činitel u $M_s\sigma + N_s$ je známé číslo různé od nuly, takže můžeme z rovnice (27) vypočísti $M_s\sigma + N_s = C$, kde C je jisté známé

[19]) Stačí uvážiti toto: je $((x-\alpha)^m f(x))' = m(x-\alpha)^{m-1} f(x) + (x-\alpha)^m f'(x)$; derivováním takového součinu $(x-\alpha)^m f(x)$ tedy dostaneme dva členy: v jednom se mocnitel u $x - \alpha$ o jednotku sníží, v druhém se nesníží. Tedy: derivuji-li k-kráte výraz $(x-\alpha)^{k+1} S(x)$, zůstane tam jistě činitel $x - \alpha$. Derivuji-li pak k-kráte výraz $A_{r-k}(x-\alpha)^k (x-\alpha')^{r'} \dots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \dots$, dostanu jednak druhý člen pravé strany rovnice (25) (když totiž po k-kráte derivuji mocninu činitele $x - \alpha$), jednak řadu dalších členů, v nichž se však mocnitel u $x - \alpha$ snížil o méně než k, takže ze všech těchto členů lze ještě $x - \alpha$ vytknouti.

komplexní číslo, $C = D + Ei$ (D, E reálná). My chceme však stanoviti reálná čísla M_s, N_s; k tomu cíli pišme do poslední rovnice $\sigma = \gamma + \delta i$ a dostaneme $M_s(\gamma + \delta i) + N_s = D + Ei$; tato rovnice bude správná tehdy a jen tehdy, budou-li si rovny reálné i imaginární části na obou stranách, t. j. bude-li $M_s\delta = E$, $M_s\gamma + N_s = D$; tyto dvě rovnice mají skutečně řešení, a to jediné: $M_s = E : \delta$ (pamatujme, že je $\delta \neq 0$), $N_s = D - M_s\gamma = D - E\gamma : \delta$. Tím je M_s, N_s vypočteno.[20]) Předpokládejme nyní, že známe již čísla $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_{s-(k-1)}$, $N_{s-(k-1)}$ a že chceme vypočísti čísla M_{s-k}, N_{s-k}. Rovnice (21) vypadá nyní takto: oněch k členů, v nichž se vyskytují koeficienty $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_{s-(k-1)}, N_{s-(k-1)}$, tvoří jistý mnohočlen $R(x)$ již úplně známý; potom přijde člen

$$(M_{s-k}x + N_{s-k})(x - \alpha)^r (x - \alpha')^{r'} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + px + q)^k (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots$$

a potom další členy, z nichž se dá vytknouti $(x^2 + px + q)^{k+1}$, takže rovnice (21) vypadá takto:

$$\frac{1}{a_0} P(x) = R(x) +$$
$$+ (M_{s-k}x + N_{s-k})(x-\alpha)^r (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^k (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots +$$
$$+ (x^2 + px + q)^{k+1} S(x),$$

kde mnohočleny P, R již úplně známe; mnohočlen $S(x)$ ovšem obsahuje po případě součinitele ještě neznámé. Derivujeme-li poslední rovnici k-kráte, dostaneme — jak čtenář snadno zjistí — tento výsledek (platný, jak víme, pro všechna komplexní x):

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(x) = R^{(k)}(x) + (M_{s-k}x + N_{s-k}) . k! \, (2x + p)^k . (x - \alpha)^r \times$$
$$\times (x - \alpha')^{r'} \ldots (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots + (x^2 + px + q)\, T(x), \tag{28}$$

---

[20]) Opět je viděti, že čísla M_s, N_s jsou jednoznačně stanovena.

[21]) Stačí uvážiti toto: je $((x^2 + px + q)^m f(x))' = (x^2 + px + q)^{m-1} . m\,(2x + p)\, f(x) + (x^2 + px + q)^m f'(x)$; derivováním takového součinu dostanu tedy dva členy: v jednom se mocnitel m o jednotku snížil (a přibyl ještě činitel $m\,(2x + p)$), v druhém se nesnížil. Tedy: derivuji-li k-kráte výraz $(x^2 + px + q)^{k+1} S(x)$, zůstane tam ještě činitel $x^2 + px + q$. Derivuji-li pak k-kráte výraz $(M_{s-k}x + N_{s-k})(x - \alpha)^r (x - \alpha')^{r'} \ldots (x^2 + px + q)^k (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots$, dostanu jednak druhý člen pravé strany rovnice (28) (když totiž

kde $T(x)$ je opět mnohočlen.[21]) Dosaďme do rovnice (28) $x = \sigma = \gamma + \delta i$; činitel $2x + p$ nemá kořen σ (neboť má jediný kořen $x = -\frac{1}{2}p$, a ten je reálný) a ostatní činitelé $x - \alpha$, $x - \alpha'$, ..., $x^2 + p'x + q'$, ... také nemají kořen σ, kdežto ovšem $\sigma^2 + p\sigma + q = 0$. Dostaneme tedy

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(\sigma) = R^{(k)}(\sigma) + (M_{s-k}\sigma + N_{s-k})\, G,$$

kde $P^{(k)}(\sigma)$, $R^{(k)}(\sigma)$, G jsou známá čísla (obecně komplexní). $G \neq 0$. Ježto $G \neq 0$, lze z poslední rovnice vypočísti $M_{s-k}\sigma + N_{s-k} = C$, kde C je jisté známé komplexní číslo, $C = D + Ei$ (D, E reálná). Z rovnice $M_{s-k}(\gamma + \delta i) + N_{s-k} = D + Ei$ stanovíme pak — jako dříve — reálná čísla M_{s-k}, N_{s-k}: musí totiž býti $M_{s-k}\gamma + N_{s-k} = D$, $M_{s-k}\delta = E$, tedy $M_{s-k} = E : \delta$, $N_{s-k} = D - E\gamma : \delta$.[22]) Dovedeme tedy stanoviti čísla $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_1, N_1$ a obdobně ovšem čísla $M'_{s'}, N'_{s'}, \ldots$

Máme tedy celkem tento předpis: do rovnice (21) dosadíme za x po řadě všechny kořeny mnohočlenu $Q(x)$ (při čemž zde i při dalších krocích stačí, když ze dvou komplexně sdružených kořenů dosadíme vždy jen jeden); tím vypočteme čísla A_r, $A'_{r'}$, ..., M_s, N_s, $M'_{s'}$, $N'_{s'}$, ... Jsou-li všechny kořeny jednoduché, je tím výpočet hotov. Nejsou-li všechny kořeny jednoduché, derivujeme rovnici (21) (do níž jsme za A_r, $A'_{r'}$, ..., M_s, N_s, $M'_{s'}$, $N'_{s'}$, ... dosadili hodnoty již vypočtené) a do této derivované rovnice dosadíme po řadě za x všechny aspoň *dvojnásobné* kořeny mnohočlenu $Q(x)$ a vypočteme čísla A_{r-1}, $A'_{r'-1}$, ..., M_{s-1}, N_{s-1}, $M'_{s'-1}$, $N'_{s'-1}$, ... (pokud se ovšem vůbec vyskytují; je-li na př. $r = 1$, odpadá A_{r-1}). Potom derivujeme rovnici (21) po druhé a do rovnice tak vzniklé dosadíme po řadě za x všechny aspoň *trojnásobné* kořeny mnohočlenu $Q(x)$ atd., až všechny hledané koeficienty (20) jsou vypočteny. Zároveň máme tento vedlejší výsledek: čísla (20) jsou jednoznačně stanovena; t. j. reálná čísla (20) lze určiti *jen* jedním způsobem tak, aby rovnice (15) ve větě 68 platila pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$.

---

po k-kráte derivuji vždy mocninu činitele $x^2 + px + q$), jednak řadu dalších členů, v nichž se však mocnitel u $x^2 + px + q$ snížil o méně než k, takže ze všech těchto členů lze ještě $x^2 + px + q$ vytknouti.

[22]) Opět vidíme, že čísla M_{s-k}, N_{s-k} jsou jednoznačně stanovena.

Příklad 4.

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 (x^2 + 2)^3} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{cx + d}{(x^2 + 2)^3} + \frac{ex + f}{(x^2 + 2)^2} + \frac{gx + h}{x^2 + 2}$$

a tedy

$$x^2 + x - 1 = a (x^2 + 2)^3 + bx (x^2 + 2)^3 + (cx + d) x^2 + \\ + (ex + f) x^2 (x^2 + 2) + (gx + h) x^2 (x^2 + 2)^2.$$

Kořeny jsou 0 (dvojnásobný), $\pm i \sqrt{2}$ (trojnásobné). Dosaďme $x = 0$: dostaneme $-1 = 8a$, $a = -\frac{1}{8}$. Dosaďme $x = i \sqrt{2}$: dostaneme $-2 + i \sqrt{2} - 1 = -2 (ci \sqrt{2} + d)$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{2}$. Nyní budeme 0 dosazovati ještě do rovnice jednou derivované, $i \sqrt{2}$ do rovnice jednou a dvakráte derivované. Derivujme, dosazujíce za a, c, d:

$$2x + 1 = -\tfrac{1}{8} \,.\, 3 (x^2 + 2)^2 . 2x + b (x^2 + 2)^3 + b . 3 (x^2 + 2)^2 . 2x^2 - \\ - \tfrac{3}{2} x^2 + 3x + ex^2 (x^2 + 2) + (ex + f) (4x^3 + 4x) + \\ + gx^2 (x^2 + 2)^2 + (gx + h) \,.\, 2x \,.\, (x^2 + 2)^2 + \\ + (gx + h) \,.\, 2x^3 \,.\, 2 (x^2 + 2).$$

Dosaďme $x = 0$: $1 = 8b$, $b = \frac{1}{8}$; dosaďme $x = i \sqrt{2}$ (tedy $x^2 + 2 = 0$): $2i \sqrt{2} + 1 = 3 + 3i \sqrt{2} + (ei \sqrt{2} + f) (-8i\sqrt{2} + 4i\sqrt{2})$; tedy $1 = 3 + 8e$, $e = -\frac{1}{4}$; $2 \sqrt{2} = 3 \sqrt{2} - 4f \sqrt{2}$, $f = \frac{1}{4}$.

Derivujme ještě jednou (dosazujíce za b, e, f), pamatujíce, že do výsledku budeme dosazovati jen $x = i \sqrt{2}$ (tedy $x^2 + 2 = 0$), takže členy, násobené činitelem $x^2 + 2$, nevypisuji:

$$2 = -3x + 3 - \tfrac{1}{4} . 2x^3 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 8 (gx + h) . x^4 + \ldots;$$

pro $x = i \sqrt{2}$ vyjde

$$2 = -3i \sqrt{2} + 3 + i \sqrt{2} + 8i \sqrt{2} - 6 - 2i \sqrt{2} + 1 + \\ + 32 (gi \sqrt{2} + h);$$

tedy $\qquad 2 = 3 - 6 + 1 + 32h$, $h = \frac{1}{8}$;

$$0 = -3 \sqrt{2} + \sqrt{2} + 8 \sqrt{2} - 2 \sqrt{2} + 32g \sqrt{2}, \quad g = -\tfrac{1}{8}.$$

Tedy celkem

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 (x^2 + 2)^3} = -\frac{1}{8x^2} + \frac{1}{8x} + \frac{-x + 3}{2 (x^2 + 2)^3} + \\ + \frac{-x + 1}{4 (x^2 + 2)^2} + \frac{-x + 1}{8 (x^2 + 2)}.$$

Příklad 5. Druhá metoda je zvláště jednoduchá, jsou-li kořeny mnohočlenu $Q(x)$ vesměs jednoduché; potom totiž netřeba derivovati. Na př.

$$\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+1)} =$$
$$= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-2} + \frac{ex+f}{x^2+1}.$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 = {} & a(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+1) + \\ & + bx(x+1)(x-2)(x^2+1) + \\ & + cx(x-1)(x-2)(x^2+1) + \\ & + dx(x-1)(x+1)(x^2+1) + \\ & + (ex+f)\,x(x-1)(x+1)(x-2). \end{aligned}$$

Dosazuji po řadě $x = 0, 1, -1, 2, i$ a dostanu: $1 = 2a$, $a = \frac{1}{2}$; $3 = -4b$, $b = -\frac{3}{4}$; $1 = -12c$, $c = -\frac{1}{12}$; $7 = 30d$, $d = \frac{7}{30}$; $-1 + i + 1 = (ei + f)\,i\,.\,(-2)(i-2)$, $i = 2ei - 4e + 2f + 4fi$; $-4e + 2f = 0$, $2e + 4f = 1$, $f = 2e$, $10e = 1$, $e = \frac{1}{10}$, $f = \frac{1}{5}$.

3. Integrace racionálních funkcí. Máme-li vypočísti $\int \frac{S(x)}{Q(x)}\,dx$, kde $S(x)$, $Q(x)$ jsou reálné mnohočleny,[23]) postupujeme podle odst. 2; není-li stupeň mnohočlenu $S(x)$ nižší než stupeň mnohočlenu $Q(x)$, provedeme dělení a dostaneme

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P_1(x)$, $P(x)$ jsou reálné mnohočleny a $P(x)$ je buďto nula nebo mnohočlen nižšího stupně než $Q(x)$. Mnohočlen $P_1(x)$ dovedeme integrovati; zlomek $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rozložíme pak (není-li $P(x)$ nula) podle věty 68 na částečné zlomky. Stačí tedy vypočísti ještě integrály jednotlivých sčítanců v rovnici (15) (věta 68), t. j. integrály tvaru

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx \quad (n \text{ celé kladné}),$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx \quad (n \text{ celé kladné}),$$

---

[23]) Zdůrazňuji ještě jednou, že od tohoto okamžiku až do konce knihy počítáme opět jen s *reálnými* funkcemi *reálných* proměnných.

kde $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. První integrál se rovná $-\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}$ pro $n > 1$ a rovná se $A \lg|x-\alpha|$ pro $n = 1$ (výsledek platí v každém intervalu, neobsahujícím bod α); druhý integrál dovedeme též vypočísti (viz příklad 9 v kap. III, odst. 4), a to v intervalu $(-\infty, \infty)$. Dovedeme tedy též vypočísti integrál libovolné reálné racionální funkce $\int \frac{S(x)}{Q(x)}\,dx$, ovšem jen tehdy, dovedeme-li rozložiti mnohočlen $Q(x)$ podle vzorce (14) (věta 68), t. j. dovedeme-li řešiti rovnici $Q(x) = 0$. Výsledek platí potom v každém otevřeném intervalu, neobsahujícím žádný kořen rovnice $Q(x) = 0$.

Příklad 1.

$$\int \frac{x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 4x^6 + x^4 + 2x^3 + 7x - 1}{x^9 + 2x^6 + x^3}\,dx.$$

V odst. 2, příkl. 2 a 3 jsme již provedli rozklad integrované funkce; hledaný integrál se tedy rovná

$$\int\left(x + 2 - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{31}{9(x+1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x+7}{3(x^2 - x + 1)^2} - \frac{31x + 1}{9(x^2 - x + 1)}\right)dx = \frac{x^2}{2} +$$
$$+ 2x + \frac{1}{2x^2} - \frac{7}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{31}{9}\lg|x+1| -$$
$$- \frac{1}{3}\int \frac{x+7}{(x^2 - x + 1)^2}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{31x + 1}{x^2 - x + 1}\,dx.$$

Poslední dva integrály počítáme podle vzoru př. 9 v kap. III, odst. 4:

$$I_2 = \int \frac{x+7}{(x^2 - x + 1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}\,dx +$$
$$+ \frac{15}{2}\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2},$$

$$I_1 = \int \frac{31x + 1}{x^2 - x + 1}\,dx = \frac{31}{2}\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\,dx +$$
$$+ \frac{33}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

Substitucí $x^2 - x + 1 = t$, $(2x - 1)\,dx = dt$ dostaneme

$$\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-x+1};$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \lg|t| = \lg(x^2-x+1)$$

(neboť je stále $x^2 - x + 1 > 0$). Jest $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$; položíme-li $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}t$, $dx = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,dt$, máme dále $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}(t^2 + 1)$,

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\frac{16}{9}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2+1};$$

podle kap. III, odst. 3, příkl. 5 je (do (16) jest dosaditi $n = 1$ a psáti t místo x)

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1};$$

ale

$$t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}},\quad t^2 + 1 = \frac{4}{3}(x^2 - x + 1),$$

takže

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\left(\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Tím jsou vypočteny integrály I_1, I_2 a tedy též hledaný integrál (doporučuji čtenáři, aby si provedl ještě dosazení); výsledek platí v každém otevřeném intervalu, neobsahujícím ani bod 0 ani bod -1.

Příklad 2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$. Především musíme rozložiti $x^4 + 1$ podle vzorce (14); rovnice $x^4 + 1 = 0$ nemá reálných kořenů, proto rozklad vypadá takto: $x^4 + 1 = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$ (při čemž dosud není vyloučeno, že by oba mnohočleny 2. stupně byly identické[24]). Z této (identicky platné) rovnice plyne podle věty C, str. 112:

$$p + p' = 0,\ q + q' + pp' = 0,\ pq' + p'q = 0,\ qq' = 1.$$

Podle první rovnice můžeme tyto rovnice psáti též takto: $p' = -p$, $q + q' = p^2$, $p(q' - q) = 0$, $qq' = 1$. Podle poslední rovnice mají q, q' totéž znamení a jsou různy od nuly; podle druhé rovnice je $q + q' = p^2$, takže q, q' jsou kladná a $p \neq 0$; z rovnice $p(q' - q) = 0$ potom plyne $q = q'$, tedy $qq' = q^2 = 1$ a tedy $q = q' = +1$ (ježto $q > 0$): tedy $p^2 = q + q' = 2$, $p = \pm\sqrt{2}$, $p' = -p$. Vezměme $p = \sqrt{2}$, tedy $p' = -\sqrt{2}$ (kdybychom vzali $p = -\sqrt{2}$, bylo by $p' = \sqrt{2}$ a oba činitelé by se pouze vyměnili): tedy máme rozklad $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$; vidíme, že kořeny rovnice $x^4 + 1$ jsou jednoduché, ježto kořeny $\gamma \pm \delta i$ $(\delta \neq 0)$ rovnice $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ *nejsou* kořeny rovnice $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ (viz poznámku [5]) na str. 113); tedy

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Snadným výpočtem (nechť si jej čtenář provede) obdržíme

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right).$$

Jest pak (znamení $\pm$ si odpovídají)

$$\int_0^1 \frac{x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1}\,dx \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}.$$

---

[24]) Čtenář, znalý počátků algebry, zjistí ovšem ihned, že rovnice $x^4 + 1 = 0$ má čtyři různé kořeny jednoduché a nikoliv dva dvojnásobné — ale raději tento výsledek odvodíme.

Zde je

$$\int_0^1 \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\, dx = [\lg |x^2 \pm \sqrt{2}x + 1|]_0^1 = \lg (2 \pm \sqrt{2})$$

(viz kap. III, odst. 4, příkl. 8). Dále je $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = (x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$, položíme-li $x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} t$, a tedy $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} dt$, $t = \sqrt{2}\, x \pm 1$, máme tedy (pozor na meze!)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \int_{\pm 1}^{\sqrt{2} \pm 1} \frac{dt}{t^2 + 1} =$$
$$= \sqrt{2}\, (\operatorname{arctg} (\sqrt{2} \pm 1) - \operatorname{arctg} (\pm 1)).$$

Je $\operatorname{arctg} (\pm 1) = \pm \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{arctg} (\sqrt{2} + 1) = \frac{3}{8}\pi$, $\operatorname{arctg} (\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{8}\pi$.[25] Tedy celkem[26])

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big(\frac{1}{2} \lg (2 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \lg (2 - \sqrt{2}) +$$
$$+ \operatorname{arctg} (\sqrt{2} + 1) - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} (\sqrt{2} - 1) - \operatorname{arctg} (-1) \Big) =$$

---

[25]) Vypočtěme to: je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}$ a tedy specielně pro $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ je $1 = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{8}\pi}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{8}\pi}$, $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{8}\pi + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{8}\pi - 1 = 0$, $\operatorname{tg} \frac{1}{8}\pi = -1 \pm \sqrt{2}$; ale $\operatorname{tg} \frac{1}{8}\pi > 0$, tedy $\operatorname{tg} \frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$; jest $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$ a tedy $\operatorname{tg} \frac{3}{8}\pi = \operatorname{tg} (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi) = 1 : \operatorname{tg} \frac{1}{8}\pi = 1 : (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$; tedy: $\frac{1}{8}\pi = \operatorname{arctg} (\sqrt{2} - 1)$, $\frac{3}{8}\pi = \operatorname{arctg} (\sqrt{2} + 1)$.

[26]) Užíváme dále vztahu $(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2$, takže $-\lg(2 - \sqrt{2}) = \lg (2 + \sqrt{2}) - \lg 2$.

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\lg(2+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\lg 2 + \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{8}\pi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lg(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\pi.$$

4. Integrály tvaru $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}\right) dx$. Mnohočlenem ve dvou proměnných x, y nazýváme součet konečného počtu členů tvaru $cx^m y^n$, kde c je konstanta, m a n jsou celá nezáporná čísla. Podíl dvou mnohočlenů $P(x, y) : Q(x, y)$ nazývá se racionální funkcí proměnných x, y; taková funkce je definována ve všech bodech, v nichž je $Q(x, y) \neq 0$. V tomto odstavci budeme se zabývati integrály tvaru

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}\right) dx, \tag{29}$$

kde s je *celé* číslo větší než 1 a kde $R(x, y)$ je racionální funkce proměnných x, y.[27]) Integrál tvaru (29) (a ovšem také *určitý* integrál tohoto tvaru) dá se převésti na integrál racionální funkce substitucí

$$\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}} = t.$$

Vskutku, z této substituce plyne

$\dfrac{ax+b}{cx+f} = t^s$, $x = \dfrac{b - ft^s}{ct^s - a}$, $dx = \dfrac{af - bc}{(ct^s - a)^2} st^{s-1} dt$; provedeme-li tuto substituci, vidíme, že výrazy x, $\left(\dfrac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}$ jsou nahraze-

---

[27]) Funkci $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}\right)$ dostaneme tedy tak, že do racionální funkce $R(x, y)$ za y dosadíme $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}$. Kdyby bylo $s = 1$, byla by funkce $R\left(x, \frac{ax+b}{cx+f}\right)$ ovšem racionální funkcí proměnné x a integrovali bychom podle metody odst. 3. Také v případě $af - bc = 0$ — jak čtenář snadno nahlédne — je předložený integrál — pokud vůbec má význam — integrálem racionální funkce.

ny *racionálními* funkcemi proměnné t a rovněž dx je nahrazeno výrazem $r(t) \,.\, dt$, kde $r(t)$ je *racionální* funkcí proměnné t. Tedy vskutku integrál (29) přejde touto substitucí v integrál racionální funkce proměnné t.

Poznámka 1. Integrál $\int R(x, (ax + b)^{\frac{1}{s}})\, dx$ patří ovšem též mezi integrály tvaru (29); je to prostě speciální případ $c = 0$, $f = 1$.

Poznámka 2. V tomto odstavci i ve zbytku této kapitoly přenechávám čtenáři, aby si rozvážil — buď v obecném případě nebo v jednotlivých příkladech — zda a v kterých intervalech uvedené úvahy platí.

Příklad 1. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} - x}\, dx$; substituce $\sqrt{2x+3} = t > 0$,

$2x + 3 = t^2$, $x = \frac{1}{2}(t^2 - 3)$, $dx = t\, dt$.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} - x}\, dx = \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \frac{2t + t^2 - 3}{2t - t^2 + 3}\, t\, dt =$$

$$= \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \left(-t - 4 - \frac{9}{t-3} + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= \left[-\frac{t^2}{2} - 4t - 9 \lg |t - 3| + \lg |t + 1| \right]_1^{\sqrt{5}} =$$

$$= -\frac{5}{2} - 4\sqrt{5} - 9 \lg (3 - \sqrt{5}) + \lg (\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{2} + 4 +$$

$$+ 9 \lg 2 - \lg 2 = 2 - 4\sqrt{5} - 9 \lg (3 - \sqrt{5}) + \lg (\sqrt{5} + 1) +$$

$$+ 8 \lg 2.$$

Příklad 2. $\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} \cdot \frac{dx}{x^2}$. Substituce

$$\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} = t, \quad \frac{2x+1}{x+1} = t^3; \quad x = \frac{t^3 - 1}{2 - t^3}, \quad dx = \frac{3t^2\, dt}{(2 - t^3)^2};$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2} = \int \frac{3t^3\,dt}{(t^3-1)^2} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{3(t-1)^2} + \frac{1}{3(t-1)} + \frac{t+1}{(t^2+t+1)^2} - \frac{t+3}{3(t^2+t+1)} \right) dt =$$

$$= -\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{3} \lg |t-1| - \frac{1}{6} \lg (t^2+t+1) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}};$$

do tohoto výsledku jest ještě místo t zavésti x podle rovnice $t = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}$. Doporučuji čtenáři, aby si všechny jednotlivosti tohoto příkladu propočetl.

Poznámka 3. Vyskytuje-li se v integrované funkci několik *různých* odmocnin $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s'}}, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s''}}, \ldots$ *téhož* výrazu $\frac{ax+b}{cx+f}$, položme číslo s rovno nejmenšímu společnému násobku čísel $s', s'', \ldots$; je zřejmo, že všechny uvedené odmocniny jsou mocninami výrazu $\left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{s}}$, takže máme opět tvar, vyšetřovaný v tomto odstavci. Na př. budiž $I = \int \frac{x^2 + x\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{7}{4}} + \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{1\frac{1}{6}}}\,dx$;

nejmenší společný násobek čísel 3, 4, 6 je 12, takže lze psáti

$$I = \int \frac{x^2 + x\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{8}{12}}}{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{21}{12}} + \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{22}{12}}}\,dx;$$

substituce $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{12}} = t$ převádí integrál I na integrál funkce racionální.

5. Integrály tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, kde $R(x,y)$ je racionální funkce. Především můžeme vyloučiti případ $a = 0$, který byl řešen již v předešlém odstavci (případ $a = b = 0$ vede dokonce přímo k integrálu racionální funkce). Nechť tedy je $a \neq 0$. Za druhé je možno vyloučiti případ, že mnohočlen $ax^2 + bx + c$ má *dvojnásobný* kořen, neboť potom je $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2$; je-li $a < 0$, je $ax^2 + bx + c < 0$ pro všechna reálná $x \neq \alpha$ a tedy $\sqrt{ax^2+bx+c}$ nemá pro nás smyslu pro $x \neq \alpha$ (ježto připouštíme jen reálné hodnoty); je-li však $a > 0$, je $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$ a dostáváme přímo integrál racionální funkce. Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $ax^2 + bx + c$ má dva různé kořeny α_1, α_2.

I. $a > 0$; v tomto případě zaveďme substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$ (t. j. $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\,x$). Umocněním dostaneme $ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,xt + t^2$, t. j. $bx + c = 2\sqrt{a}\,xt + t^2$, $x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t} + t = \dfrac{-\sqrt{a}\,t^2 + bt - \sqrt{a}\,c}{b-2\sqrt{a}\,t}$, $dx = 2\dfrac{-\sqrt{a}\,t^2 + bt - \sqrt{a}\,c}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt$. Tedy x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ jsou racionální funkce proměnné t a také dx má tvar $r(t)\,dt$, kde $r(t)$ je racionální funkce proměnné t.[28]) Tím je tedy předložený integrál převeden na integrál racionální funkce.

Příklad 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$; substituce $\sqrt{x^2+x-1} = x + t$, $x - 1 = 2xt + t^2$, $x = \dfrac{t^2+1}{1-2t}$, $dx = \dfrac{-2(t^2-t-1)}{(1-2t)^2}\,dt$,

$$\sqrt{x^2+x-1} = \frac{t^2+1}{1-2t} + t = \frac{-(t^2-t-1)}{1-2t}.$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}} = -2\int \frac{(t^2-t-1)\,dt}{(t^2+1-t^2+t+1)(1-2t)} =$$
$$= \int \frac{(t^2-t-1)\,dt}{(t+2)\left(t-\frac{1}{2}\right)} = \int \left(1 - \frac{2}{t+2} - \frac{1}{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right)dt =$$

---

[28]) Všimněte si podobnosti výrazů pro $\sqrt{ax^2+bx+c}$ a pro dx; bývá leckdy užitečná.

$$= t - 2 \lg |t + 2| - \frac{1}{2} \lg \left|t - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \sqrt{x^2 + x - 1} - x - 2 \lg \left|\sqrt{x^2 + x - 1} - x + 2\right| -$$

$$- \frac{1}{2} \lg \left|\sqrt{x^2 + x - 1} - x - \frac{1}{2}\right|.$$

II. $a < 0$. Zde má pro nás význam jen ten případ, že kořeny α_1, α_2 jsou reálné[29]) (a ovšem různé, viz počátek tohoto odst.); nechť je označení tak voleno, že $\alpha_1 < \alpha_2$. Jest $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$; je-li $x > \alpha_2$, je též $x > \alpha_1$ a tedy $a(x - \alpha_1) \times (x - \alpha_2) < 0$ (ježto $a < 0$); rovněž pro $x < \alpha_1$ je též $x < \alpha_2$ a tedy $a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) < 0$. Hodnoty $x < \alpha_1$ a $x > \alpha_2$ nepřicházejí tedy pro nás v úvahu. Zbývají tedy hodnoty x intervalu $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. Omezme se tedy na interval (α_1, α_2) (hodnoty $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, pokud by se vyskytly jako meze určitého integrálu, vyžadovaly by zvláštní malé úvahy). Je-li $\alpha_1 < x < \alpha_2$, je

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = (-a)(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x),$$

kde všichni tři činitelé jsou kladná čísla. Tedy

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)} = \sqrt{-a(x - \alpha_1)^2 \frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} =$$

$= \sqrt{-a}\,(x - \alpha_1) \sqrt{\dfrac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}$; náš integrál má tedy tvar

$$\int R\left(x, \sqrt{-a}\,(x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}\right) \mathrm{d}x,$$

což je tvar vyšetřovaný v odst. 4 $\left(\text{substituce } \sqrt{\dfrac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} = t\right)$.

Příklad 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{5x + 2 + 3\sqrt{-x^2 + x + 2}}$. V intervalu $\langle 0,1 \rangle$

---

[29]) Kdyby totiž mnohočlen $ax^2 + bx + c$ neměl reálných kořenů, měl by pro všechna (reálná) x totéž znamení; ježto pak pro dostatečně velká (reálná) x je $ax^2 + bx + c = ax^2 \left(1 + \dfrac{b}{ax} + \dfrac{c}{ax^2}\right) < 0$, bylo by $ax^2 + bx + c < 0$ pro všechna reálná x a tedy by neexistovala reálná odmocnina $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

je $\sqrt{-x^2+x+2} = \sqrt{-(x+1)(x-2)} = \sqrt{(x+1)(2-x)} =$
$= (x+1)\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$.

$$\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} = t,\quad \frac{2-x}{x+1} = t^2,\quad x = \frac{2-t^2}{t^2+1},\quad x+1 = \frac{3}{t^2+1},\quad dx = -\frac{6t\,dt}{(t^2+1)^2}:$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{5x+2+3\sqrt{-x^2+x+2}} = \int_0^1 \frac{dx}{5x+2+3(x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} =$$

$$= -\int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{6t\,dt}{(12-3t^2+9t)(1+t^2)} = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t\,dt}{(t^2-3t-4)(1+t^2)} =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{5(t+1)} + \frac{8}{85(t-4)} - \frac{5t+3}{17(t^2+1)}\right) dt =$$

$$= \frac{8}{85}\lg\frac{4\sqrt{2}-1}{4-\sqrt{2}} - \frac{3}{34}\pi + \frac{6}{17}\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$ [30]

6. Integrály tvaru $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, kde $R(u, v)$ je racionální funkce. Zde vede k cíli substituce $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$; odtud $\cos^2\frac{1}{2}x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} = \dfrac{1}{1+t^2}$; $\cos x = \cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2}x =$ $= 2\cos^2\frac{1}{2}x - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x =$ $= 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x \,.\, \cos^2\frac{1}{2}x = 2t \,.\, \dfrac{1}{1+t^2}$. Konečně $\dfrac{\frac{1}{2}\,dx}{\cos^2\frac{1}{2}x} = dt$, $dx =$ $= 2\cos^2\frac{1}{2}x\,dt = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$. Tedy máme dohromady vzorce $\cos x =$

[30]) Doporučuji, aby si čtenář podrobně vše vypočítal; užívám toho, že $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

$= \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$; integrál předložený přejde touto substitucí zřejmě v integrál racionální funkce.

Příklad 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+t^2-2t}{1+t^2+1-t^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2-2t}{1+t^2}\,dt = [t-\lg(t^2+1)]_0^1 = 1-\lg 2.$$

7. Integrály tvaru $\int R(e^{\alpha x})\,dx$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u. O konstantě α předpokládejme, že je různá od nuly (jinak by bylo ihned $\int R(e^0)\,dx = \int R(1)\,dx = R(1)\,.\,x$). Zaveďme $e^{\alpha x} = t$, $x = \dfrac{1}{\alpha}\lg t$, $dx = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{dt}{t}$ a vidíme, že daný integrál je převeden na $\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int R(t)\,\frac{dt}{t}$, což je integrál racionální funkce.

Příklad 1.

$$I = \int \frac{e^{\frac{1}{2}\pi x} - e^{\frac{1}{3}\pi x}}{e^{\frac{1}{3}\pi x}+1}\,dx;$$

integrovaná funkce je racionální funkcí výrazu $e^{\frac{1}{6}\pi x} = t$, neboť $e^{\frac{1}{3}\pi x} = t^2$, $e^{\frac{1}{2}\pi x} = t^3$; $\dfrac{\pi}{6}e^{\frac{1}{6}\pi x}dx = dt$, takže

$$I = \frac{6}{\pi}\int\frac{t^3-t^2}{t^2+1}\,\frac{dt}{t} = \frac{6}{\pi}\int\frac{t^2-t}{t^2+1}\,dt = \frac{6}{\pi}\int\left(1-\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(t - \tfrac{1}{2}\lg(t^2+1) - \operatorname{arctg} t\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi}\left(e^{\frac{1}{6}\pi x} - \tfrac{1}{2}\lg\left(e^{\frac{1}{3}\pi x}+1\right) - \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{6}\pi x}\right).$$

Poznámka. Na př. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{\alpha\sqrt{2}x}+e^{\alpha x}}$ $(\alpha \neq 0)$ *nelze* takto počítati, ježto, položíte-li $e^{\beta x} = t$, bude $e^{\alpha x} = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$, $e^{\alpha\sqrt{2}x} = t^{\frac{\alpha\sqrt{2}}{\beta}}$, a není možno voliti β tak, aby oba mocnitelé $\frac{\alpha}{\beta}$ i $\frac{\alpha\sqrt{2}}{\beta}$ byla celá čísla (ježto jejich podíl je iracionální číslo $\sqrt{2}$).

8. **Integrály tvaru $\int R(\lg x)\frac{dx}{x}$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u.** Substituce $\lg x = t$, $\frac{dx}{x} = dt$ převádí předložený integrál ihned na $\int R(t)\,dt$, což je integrál funkce racionální.

Příklad 1. $I = \int \frac{1}{\lg^2 x - 1}\cdot\frac{dx}{x}$. Substituce $\lg x = t$ dává

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = $$
$$= \frac{1}{2}\lg\left|\frac{\lg x - 1}{\lg x + 1}\right|.$$

Poznámka. Jednotlivé odstavce této kapitoly bylo by možno ještě různým způsobem doplniti; odkazuji v této věci na Petrův Počet integrální. Tak na př. integrály, vyšetřované v odst. 5, je možno počítati ještě jinou, často výhodnější metodou, jež je vyložena v Petrově knize na str. 70—77 (cituji podle 2. vyd.). Také použití komplexních funkcí, po př. komplexní proměnné usnadní nám často výpočet, jak jsem se o tom již zmínil v pozn. [2]) na str. 109. Při této příležitosti upozorňuji ještě na zvláště výhodnou metodu pro rozklad racionální funkce v částečné zlomky, jež je vyložena v Petrově knize na str. 19—21.

CVIČENÍ.[31])

A) K odst. 3.

1. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}$.

2. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x^2 + 2x - 2)^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12\sqrt{3}}\lg(2 + \sqrt{3})$.

3. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = -\frac{2x-1}{2(x-1)^2}$ (výhodnější než metoda odst. 3 je zde substituce $x - 1 = t$).

4. V odst. 3, příkl. 2 jsme vypočetli $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$. Vypočtěte

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2,$$

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \lg \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{arctg} (\sqrt{2}\,x - 1) + \operatorname{arctg} (\sqrt{2}\,x + 1)).$$

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{4} \lg (x^4 + 1).$$

První a třetí integrál nebudete ovšem počítati metodou odst. 3, nýbrž jednodušeji vhodnou substitucí.

5. Počítáte-li první integrál předešlého cvičení metodou odst. 3, dostanete

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} (\sqrt{2}\,x - 1) - \operatorname{arctg} (\sqrt{2}\,x + 1));$$

tedy je v intervalu $(-\infty, \infty)$

$$\operatorname{arctg} x^2 = \operatorname{arctg} (\sqrt{2}\,x - 1) - \operatorname{arctg} (\sqrt{2}\,x + 1) + C; \qquad (30)$$

dosazením $x = 0$ dostanete $C = \frac{1}{2}\pi$. Dokažte vzorec (30) (s hodnotou $C = \frac{1}{2}\pi$) přímo z definice funkce $\operatorname{arctg} x$.[32])

6. Pro výraz, který se vyskytuje v druhém integrálu cvičení 4, odvoďte obdobně rovnici

$$\operatorname{arctg} (\sqrt{2}\,x - 1) + \operatorname{arctg} (\sqrt{2}\,x + 1) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\,x}{1 - x^2} + C,$$

platnou v každém z intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. Při tom C je v každém z těchto intervalů konstanta, ale v každém z nich jiná (její hodnoty dostanete tím, že položíte předně $x = 0$ a že za druhé necháte x vzrůstati do $+\infty$ a klesati do $-\infty$).

7. $\int \frac{x^2 + x - 1}{(x^2 - 1)(x + 2)(x^2 - 5)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{24} \lg |x - 1| -$

[31]) Při neurčitých integrálech nechť čtenář sám uváží, ve kterých intervalech uvedené výsledky platí.

[32]) Při této úloze a podobných úlohách postupujeme asi takto: buďte a, b dvě reálná čísla; položme $\alpha = \operatorname{arctg} a$, $\beta = \operatorname{arctg} b$; tedy $a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \operatorname{tg} \beta$; tedy $\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{a + b}{1 - ab}$ (není-li $ab = 1$); odtud pak plyne, že $\alpha + \beta = \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a + b}{1 - ab} + k\pi$, kde k je celé číslo.

$$-\frac{1}{8}\lg|x+1| - \frac{1}{3}\lg|x+2| + \frac{1}{40}(10-3\sqrt{5})\lg|x-\sqrt{5}| +$$
$$+\frac{1}{40}(10+3\sqrt{5})\lg|x+\sqrt{5}|.$$

8. $$\int \frac{x^4\,dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{1}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{16}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{x}{4(x^4-1)}.$$

9. $$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+2)(x+1)} = \frac{1}{4}\lg 2 + \frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$; dokažte, že poslední závorka má hodnotu $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{5}$.

10. $$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-2x^2)\,dx}{x^6+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lg(2+\sqrt{3}).$$

Návod: je $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$; metodou neurčitých součinitelů nebo přímo řešením rovnice $x^4-x^2+1=0$ najdete rozklad $x^4-x^2+1=(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$.

B) K odst. 4.

11. $$\int\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,dx = \lg(1-\sqrt{1-x^2}) + \sqrt{1-x^2}$$ (čitatel i jmenovatel dělíme $\sqrt{1-x}$).

12. $$\int_1^2 x\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\,dx = -\frac{3}{2} + \frac{15}{8}\lg 3.$$

13. $$\int_0^3\frac{x^2\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{59}{10} + \frac{7-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\lg\frac{5+\sqrt{5}}{2} - \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\lg\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

14. Položíme-li $\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}} = t$, je

$$\int\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int\frac{2nt^n\,dt}{(1-t^n)^2}$$

(pro $n=4$ jsme poslední integrál vypočetli v cvičení 8).

C) K odst. 5.

15. Je-li $a>0$, je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|.$$

16. Budiž $a < 0$; rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nechť má reálné kořeny α_1, α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$; tedy

$$\alpha_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \alpha_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (\text{neboť } a < 0).$$

Potom je v intervalu (α_1, α_2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}.$$

17. Nechť platí předpoklady cvič. 16; potom lze předložený integrál počítati též jinak. Je totiž

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = -a\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right);$$

zavedeme-li substituci

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}\, t,$$

dostaneme v int. (α_1, α_2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

18. Podle cvič. 16 a 17 je v int. (α_1, α_2)

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} = \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C,$$

kde C je konstanta. Položíme-li $\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} = \lambda$ a použijeme-li výrazů pro α_1, α_2, přejde tato rovnice v rovnici

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} = \arcsin \lambda + C.$$

Dokažte tento vzorec (pro $-1 < \lambda < 1$) přímo z definice funkcí $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, při čemž zjistíte, že $C = \frac{1}{2}\pi$.

19. $$\int_0^1 \frac{x(\sqrt{x^2+1} - x)}{1+x}\, dx = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lg 2 - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \lg (\sqrt{2} - 1).$$

20. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}\,dx = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1.$

21. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2}\lg\frac{5 + 2\sqrt{6}}{3 + 2\sqrt{2}}.$

22. V případě $a > 0$ užili jsme substituce $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ (t. j. $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}x$); se stejným úspěchem možno též užíti substituce $\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{a}x + t$, t. j. $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$. Vyjde

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}\,t}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{(b + 2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt,$$
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{b + 2\sqrt{a}t}.$$

Vzorce jsou tedy zcela obdobné jako při dřívější substituci; snad jsou o něco příjemnější tím, že se v nich méně často vyskytuje znamení minus. Vypočtěte tímto způsobem znova cvič. 15 a 19.

23. Metody, které jsme užili v případě $a < 0$, lze užíti i pro $a > 0$, jsou-li kořeny mnohočlenu $ax^2 + bx + c$ reálné a různé. Budiž tedy $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, kde $a > 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$. Zajímají nás pouze ty intervaly, kde $ax^2 + bx + c > 0$. Omezme se tedy na intervaly $(-\infty, \alpha_1)$, $(\alpha_2, +\infty)$. Potom bude

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\,.\,|x - \alpha_1|\sqrt{\frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}};$$

tím dostáváme z integrálu $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ integrál typu, vyšetřovaného v odst. 4 — provedeme tedy substituci $\sqrt{\dfrac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}} = t$. Ale nutno dáti pozor na to, že v intervalu $(\alpha_2, +\infty)$ je $|x - \alpha_1| = x - \alpha_1$, v intervalu $(-\infty, \alpha_1)$ však $|x - \alpha_1| = \alpha_1 - x$.

24. Způsobem uvedeným v cvič. 23 vypočtěte ještě jednou integrál z cvič. 21.

25. Způsobem uvedeným v cvič. 23 vypočtěte

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} = \sqrt{x^2 + 3x + 2} \mp 3\lg(\sqrt{|x + 1|} + \sqrt{|x + 2|});$$

při tom horní znamení platí v intervalu $(-1, +\infty)$, dolní v intervalu $(-\infty, -2)$. (Při výpočtu je stále nutno pečlivě dbáti znamének; pro $x > -1$ je $|x + 1| = x + 1$, $|x + 2| = x + 2$, kdežto pro $x < -2$ je $|x + 1| = -x - 1$, $|x + 2| = -x - 2$.)

26. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 + 2\sin x}{\sin x + 3\cos x + 3}\, dx = \frac{1}{5} \lg 6 + \frac{1}{10}\pi.$

27. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\, dx = 1 + \lg 2.$

28. Integrál z cvičení 27 vypočtete rychleji, užijete-li vzorců $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

29. Budiž aspoň jedno ze tří čísel a, b, c různé od nuly. Potom dostáváme pro integrál

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$$

tyto výsledky, je-li $c \neq a$:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \lg \left| \frac{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \right|,$$

je-li $a^2 + b^2 > c^2$;

$$\frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}},$$

je-li $a^2 + b^2 < c^2$;

$$-\frac{2}{(c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + b},$$

je-li $a^2 + b^2 = c^2$.

Je-li však $c = a$, dostáváme

$$\frac{1}{b} \lg | a + b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x | \text{ pro } b \neq 0; \qquad \frac{1}{a} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x \text{ pro } b = 0.$$

30. V některých případech lze integrály tvaru $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ počítati jednodušeji než substitucí $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$; některé důležité případy toho druhu jsme probrali v kap. III, cvičení 8—13. Všimněme si ještě jednoho případu. Buďte $P(u, v)$, $Q(u, v)$ dva mnohočleny, jejichž členy jsou buď všechny lichého nebo všechny sudého stupně[33]; položme $R(u, v) = P(u, v) : Q(u, v)$. Příklady:

$$R(u, v) = \frac{1 + 2u^2 + uv - v^4}{v^2 + uv}$$

nebo

$$R(u, v) = \frac{u + v^3 + uv^2}{v^5 + u^2 v}.$$

[33]) Stupněm členu $au^m v^n$ nazýváme číslo $m + n$.

V tomto případě vede při výpočtu integrálu $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ k cíli substituce $\operatorname{tg} x = t$. Neboť je potom $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$,[34] $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, takže

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{P\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)}{Q\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\,;$$

z předpokladů o mnohočlenech P, Q pak plyne, že se odmocnina $\pm\sqrt{1+t^2}$ (po eventuelním krácení) vyskytne pouze se sudým mocnitelem; t. j. znamení $\sqrt{\ }$ vypadne a integrál předložený je tím převeden na integrál racionální funkce. Následující příklady 31—35 řeší se touto substitucí $\operatorname{tg} x = t$.

31. Položíme-li $\operatorname{tg} x = t$, je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{at^2 + bt + c}.$$

32. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x} = \operatorname{arctg} 2 - \tfrac{1}{4}\pi.$

33. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x} = \lg \tfrac{4}{3}.$

34. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}\lg|1 + 2\operatorname{tg} x| - \tfrac{3}{10}\lg(1 + \operatorname{tg}^2 x).$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 3\cos^2 x} = \tfrac{1}{2}\pi.$

Zde je nutno dáti dobrý pozor! Dosadíte-li bezmyšlenkovitě $\operatorname{tg} x = t$, máte pro $x = 0$ i pro $x = \pi$ hodnotu $t = 0$, takže byste dostali $\displaystyle\int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{4 + t^2} = 0$. Postup byl ovšem nesprávný, ježto substituce $\operatorname{tg} x = t$ nesmíme použíti v žádném intervalu, obsahujícím bod $x = \frac{1}{2}\pi$.

Vypočteme tedy na př. napřed $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1 + 3\cos^2 x}$ pro $0 < b < \frac{1}{2}\pi$;

[34]) Buďto platí v obou vzorcích znamení +, nebo v obou znamení —; neboť $\sin x : \cos x = t$.

ježto určitý integrál je spojitou funkcí své horní meze, dostanete potom $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} = \lim_{b \to \frac{1}{2}\pi -} \int_0^b$; podobně byste mohli vypočísti $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}$; ale raději užijeme vztahu

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x},$$

který dostaneme, použijeme-li na levé straně substituce $\pi - x = t$.

E) K odst. 7.

36. Pro $\alpha \neq 0$ je

$$\int \frac{dx}{e^{2\alpha x} + e^{\alpha x} + 1} = x - \frac{1}{2\alpha} \lg (e^{2\alpha x} + e^{\alpha x} + 1) - \\ - \frac{1}{\alpha\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^{\alpha x} + 1}{\sqrt{3}}.$$

37. Buďiž $R(u, v)$ racionální funkce; buďiž $\alpha \neq 0$, $n > 1$ (n celé). Potom lze integrály

$$\int R\left(e^{\alpha x}, \left(\frac{ae^{\alpha x} + b}{ce^{\alpha x} + f}\right)^{\frac{1}{n}}\right) dx,$$

$$\int R(e^{\alpha x}, \sqrt{ae^{2\alpha x} + be^{\alpha x} + c})\, dx$$

převésti na integrály funkcí racionálních. Substitucí $e^{\alpha x} = t$ převádějí se tyto integrály na integrály

$$\frac{1}{\alpha} \int R\left(t, \left(\frac{at + b}{ct + f}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \frac{dt}{t}, \quad \frac{1}{\alpha} \int R(t, \sqrt{at^2 + bt + c})\, \frac{dt}{t},$$

jež patří k typům, vyšetřovaným v odst. 4 a 5.

38. $$\int_0^1 \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} = \lg \frac{2e + 1 + 2\sqrt{e^2 + e + 1}}{3 + 2\sqrt{3}}.$$

39. $$\int \sqrt{e^x + 1}\, dx = 2\sqrt{e^x + 1} + 2 \lg \left(\sqrt{e^x + 1} - 1\right) - x.$$

F) K odst. 8.

40. $$\int \frac{1}{\lg^2 x + \lg x - 2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} \lg \left| \frac{\lg x - 1}{\lg x + 2} \right|.$$

41. Obdobně jako ve cvič. 37 dají se počítati integrály ($n > 1$, celé)

$$\int R\left(\lg x, \left(\frac{a \lg x + b}{c \lg x + f}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \frac{dx}{x}, \quad \int R(\lg x, \sqrt{a \lg^2 x + b \lg x + c})\, \frac{dx}{x},$$

kde $R(u, v)$ je racionální funkce.

42. $$\int \frac{1}{\lg x + \sqrt{\lg x + 1}} \frac{dx}{x} = \lg \left| \lg x + \sqrt{\lg x + 1} - 1 \right| + \frac{1}{\sqrt{5}} \lg \left| \frac{2\sqrt{\lg x + 1} + 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{\lg x + 1} + 1 - \sqrt{5}} \right|.$$

KAPITOLA V.

Obsah rovinných oborů a délka rovinné křivky.

1. Obsah rovinných oborů. V kap. II, odst. 1 provedli jsme malou orientační úvahu (ovšem nikterak průkaznou!) o „plošné velikosti" jistých rovinných oborů. Věty, odvozené v kap. II, dovolují nám nyní formulovati tyto úvahy přesněji a dospěti tak k vhodné definici „plošné velikosti" nebo kratčeji „obsahu" těchto oborů. Z elementární geometrie znáte obsah trojúhelníka a obsah oněch útvarů, jež se dají složiti z konečného počtu trojúhelníků, t. j. obsah mnohoúhelníků. Na př. obsah obdélníka rovná se součinu ze základny a výšky. Naším cílem jest nyní, tuto definici vhodně zobecniti na obory, o nichž jsme mluvili v kap. II, odst. 1. Budeme vyšetřovati rovinné obory (t. j. množiny bodů v rovině) tohoto tvaru: dána jsou dvě čísla a, b ($a < b$) a funkce $f(x)$, spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b \rangle$.[1])

Tím je definována určitá množina bodů v rovině, totiž množina všech bodů $[x, y]$, pro něž je $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ (na obr. 5 je tato množina šrafována). Tuto množinu (jež závisí na a, na b a na tvaru funkce $f(x)$) označme znakem $M(a, b, f(x))$.[2]) Budeme se nyní snažiti přiřaditi *každé* takové množině $M(a, b, f(x))$ jisté číslo $P(a, b, f(x))$[3]), [které nazveme „obsahem" množiny $M(a, b, f(x))$] tak, aby byly splněny tyto čtyři požadavky:

---

[1]) T. j.: je-li $a \leqq x \leqq b$, je $f(x) \geqq 0$ (názorně: všechny body „čáry" $y = f(x)$ leží nad osou x nebo na ní; žádný bod neleží pod osou x. V kap. II, odst. 1 jsme pro větší jednoduchost požadovali $f(x) > 0$; nyní připouštíme i $f(x) = 0$).

[2]) Na př. $M(1, 3, x^2)$ je množina, omezená „dole" osou x, „vlevo" přímkou $x = 1$, „vpravo" přímkou $x = 3$ a „nahoře" parabolou $y = x^2$.

[3]) Toto číslo závisí ovšem na množině $M(a, b, f(x))$, t. j. na číslech a, b a na tvaru funkce $f(x)$.