Jindřich Bečvář
Výpočty odmocnin ve starověku

In: Zdeněk Halas (editor); Jindřich Bečvář (author); Martina Bečvářová (author); Zdeněk Halas (author); Tereza Bártlová (author); Vlasta Moravcová (author): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. (Czech). Praha: MATFYZPRESS, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty v Praze, 2012. pp. 111–[124].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402382

III.

APENDIX

VÝPOČTY ODMOCNIN VE STAROVĚKU

Jindřich Bečvář

V tomto článku se pokusíme dát odpověď na letitý problém: jak byla vypočítána racionální čísla, která jsou horním a dolním odhadem iracionálního čísla $\sqrt{3}$, tj. jak Archimédés (nebo někdo před ním) dospěl k odhadu

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780},$$

který využil ve spisu *Měření kruhu.*[1]

Budeme postupovat zcela elementárním způsobem, nevyužijeme žádné hlubší poznatky (např. řetězové zlomky). Budeme jen mírně modifikovat metodu, která byla pro výpočet odmocnin užívána již v Mezopotámii a ve staré Indii.[2] Hodnotu čísla $\sqrt{3}$ vymezíme v dalším kroku předloženou metodou ještě daleko přesněji, srovnáme výpočty horních i dolních odhadů čísel $\sqrt{3}$ a $\sqrt{2}$ a ukážeme, jak asi byly tyto odmocniny počítány ve staré Indii a staré Mezopotámii. V závěru porovnáme získaná vymezení hodnoty čísla $\sqrt{3}$ s hodnotami konvergentů příslušného řetězového zlomku.

Upozorněme ještě na důležitou skutečnost. Zatímco v Mezopotámii a v Indii pracovali počtáři s *přibližnými hodnotami* čísel $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, Archimédés užíval *horní a dolní odhad* čísla $\sqrt{3}$.

1 Teoretický základ

První způsob. Máme-li vypočítat druhou odmocninu přirozeného čísla A, které není čtvercem, tj.

$$(a-1)^2 < A < a^2 \quad \text{pro přirozené číslo} \ \ a,$$

vyjádříme je ve tvaru

$$A = a^2 - r, \quad \text{kde} \quad 1 \leq r < a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1.$$

Potom je

$$\sqrt{A} = a - k, \quad \text{kde} \quad 0 < k < 1.$$

[1] *Měření kruhu* v české verzi viz [Va1], v anglické a německé verzi viz [Hea], v ruské viz [Ve], dále viz [Hei], [Ee].

[2] Některé úvahy o Archimédově výpočtu čísla $\sqrt{3}$ se lze dočíst v anglické verzi Heathova vydání Archimédových spisů [Hea] na str. xc–xcix, případně v německé verzi z roku 1914 na str. 82–93. Thomas Little Heath (1861–1940) zde odkazuje na dvě práce Siegmunda Günthera (1848–1923) – *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* [Gü1] z roku 1882 a *Abriß der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Altertum* [Gü2] z roku 1894, které se touto problematikou podrobně zabývají a uvádějí četné bibliografické prameny.

Odtud

$$a^2 - r = A = (a-k)^2 = a^2 - 2ak + k^2, \quad \text{tedy} \quad 2ak - k^2 = r \quad \text{a} \quad k = \frac{r}{2a-k}.$$

Protože je $0 < k < 1$, je

$$\frac{r}{2a} < k < \frac{r}{2a-1}$$

a

$$\frac{2a^2 - a - r}{2a-1} = a - \frac{r}{2a-1} < \sqrt{A} < a - \frac{r}{2a} = \frac{2a^2 - r}{2a}.$$

Číslo $\sqrt{A}$ tedy leží v intervalu délky

$$\frac{r}{2a-1} - \frac{r}{2a} = \frac{r}{2a(2a-1)}.$$

Vzhledem k tomu, že číslo r je menší než $2a-1$, leží číslo $\sqrt{A}$ v intervalu délky menší než $\frac{1}{2a}$ bez ohledu na to, kde je číslo A umístěno mezi čísly $(a-1)^2$ a a^2. Přesnost odhadu čísla $\sqrt{A}$ se tedy výrazně zvyšuje s rostoucím číslem A.[3] Poznamenejme ještě, že pro výpočet odmocniny čísla A, které se od nejbližšího většího čtverce liší jen o jedničku, tj. pro $r = 1$, leží číslo $\sqrt{A}$ v intervalu délky $\frac{1}{2a(2a-1)}$. Uveďme pro zajímavost několik odhadů:

$$1\frac{1}{3} < \sqrt{2} < 1\frac{1}{2}, \qquad 1\frac{2}{3} < \sqrt{3} < 1\frac{3}{4},$$

$$2\frac{1}{5} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{3}, \qquad 2\frac{4}{5} < \sqrt{8} < 2\frac{5}{6}.$$

Druhý způsob. První způsob s úspěchem použijeme pro malé číslo A, které je „blízké“ čtverci přirozeného čísla, který je větší než A. Je-li

$$a^2 < A < (a+1)^2 \qquad \text{pro přirozené číslo } a,$$

a je-li A naopak blízké čtverci a^2, který je menší než A, postupujeme obdobně. Vyjádříme

$$A = a^2 + r, \quad \text{kde} \quad 1 \le r < (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Potom je

$$\sqrt{A} = a + k, \quad \text{kde} \quad 0 < k < 1.$$

Odtud

$$a^2 + r = A = (a+k)^2 = a^2 + 2ak + k^2, \quad \text{tedy} \quad 2ak + k^2 = r, \quad \text{a} \quad k = \frac{r}{2a+k}.$$

[3] Například pro odmocniny čísel ležících mezi 99^2 a 100^2 je rozdíl horní a dolní meze výše uvedeného odhadu menší než $0,005$.

Protože je $0 < k < 1$, je

$$\frac{r}{2a+1} < k < \frac{r}{2a}$$

a

$$\frac{2a^2+a+r}{2a+1} = a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{A} < a + \frac{r}{2a} = \frac{2a^2+r}{2a}.$$

Číslo $\sqrt{A}$ je tedy v intervalu délky $\frac{r}{2a(2a+1)}$.

Snadno se ukáže, že dolní odhad je při prvním i druhém způsobu stejný, malý rozdíl je v horním odhadu. Uveďme pro srovnání vymezení odmocnin čtyř malých čísel.

$$1\frac{1}{3} < \sqrt{2} < 1\frac{1}{2}, \qquad 1\frac{2}{3} < \sqrt{3} < 2,$$

$$2\frac{1}{5} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{4}, \qquad 2\frac{4}{5} < \sqrt{8} < 3.$$

Při prvním způsobu získáme přesnější vymezení čísel $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, při druhém způsobu lepší vymezení čísla $\sqrt{5}$. Vymezení čísla $\sqrt{2}$ je v obou případech stejné.

2 Vymezení hodnoty čísla $\sqrt{3}$

Archimédův odhad. Podle předchozího (první způsob) máme

$$1\frac{2}{3} < \sqrt{3} < 1\frac{3}{4} \qquad \text{(1. odhad)},$$

odmocnina čísla $3 = 2^2 - 1$ leží tedy v intervalu délky

$$\frac{7}{4} - \frac{5}{3} = \frac{1}{12}.$$

Tato přesnost není postačující. Upřesníme nejprve dolní odhad. Hledejme číslo x, pro které je

$$\left(\frac{5}{3} + x\right)^2 = 3, \quad \text{tj.} \quad \frac{25}{9} + \frac{10}{3}x + x^2 = 3, \quad \text{tj.} \quad \frac{10}{3}x + x^2 = \frac{2}{9}.$$

Zanedbáme-li x^2, dostaneme přibližnou hodnotu x_1 čísla x: vychází $x_1 = \frac{1}{15}$. Protože jsme zanedbali x^2, je $x_1 > x$.[4] Vypočtenou hodnotu x_1 nyní dosadíme za jedno x v dvojmoci x^2 a vypočítáme kořen x_2 rovnice

$$\frac{10}{3}x + \frac{1}{15}x = \frac{2}{9}; \quad \text{odtud} \quad x_2 = \frac{10}{153}.$$

Protože jsme jednu hodnotu čísla x nahradili číslem $x_1 > x$, je $x_2 < x$. Vypočetli jsme tedy dolní odhad čísla $\sqrt{3}$:

$$\frac{5}{3} + \frac{10}{153} = \frac{265}{153} \doteq 1{,}732\,026\,143\ldots$$

[4] Získali jsme tedy horní odhad $\frac{5}{3} + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}$ čísla $\sqrt{3}$, který označíme (1).

Stejným způsobem upřesníme horní odhad. Budeme hledat číslo y, pro které je
$$\left(\frac{7}{4}-y\right)^2=3,\quad \text{tj.}\quad \frac{49}{16}-\frac{7}{2}y+y^2=3,\quad \text{tj.}\quad \frac{1}{16}+y^2=\frac{7}{2}y.$$
Zanedbáme-li y^2, dostaneme přibližnou hodnotu y_1 čísla y: vychází $y_1=\frac{1}{56}$. Protože jsme zanedbali y^2, je $y_1<y$.[5] Vypočtenou hodnotu y_1 nyní dosadíme za jedno y v dvojmoci y^2 a vypočítáme kořen y_2 rovnice

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{56}y=\frac{7}{2}y;\quad \text{odtud}\quad y_2=\frac{14}{780}.$$

Protože jsme jednu hodnotu čísla y nahradili číslem $y_1<y$, je $y_2<y$. Vypočetli jsme tedy horní odhad čísla $\sqrt{3}$:

$$\frac{7}{4}-\frac{14}{780}=\frac{1\,351}{780}\doteq 1,732\,051\,282\ldots$$

Poměrně elementárním způsobem jsme dospěli k Archimédovu odhadu

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}\doteq 1,732\,050\,807\ldots<\frac{1\,351}{780}\qquad \text{(2. odhad).}$$

Číslo $\sqrt{3}$ je tedy sevřeno v intervalu délky

$$\frac{1\,351}{780}-\frac{265}{153}=\frac{1}{39\,780}.$$

Další krok. Archimédovo vymezení čísla $\sqrt{3}$ nyní stejnou metodou ještě upřesníme. Hledejme číslo x, pro které je

$$\left(\frac{265}{153}+x\right)^2=3,\quad \text{tj.}\quad \frac{265^2}{153^2}+\frac{2\cdot 265}{153}x+x^2=3,\quad \text{tj.}\quad \frac{2\cdot 265}{153}x+x^2=\frac{2}{153^2}.$$

Zanedbáme-li x^2, vyjde přibližná hodnota $x_1=\frac{1}{153\cdot 265}$.[6] Dosadíme-li ji za jedno x do x^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{2\cdot 265}{153}x+\frac{1}{153\cdot 265}x=\frac{2}{153^2}$$

přibližnou hodnotu
$$x_2=\frac{2\cdot 265}{153\cdot 140\,451}.$$

Číslo

$$\frac{265}{153}+\frac{2\cdot 265}{153\cdot 140\,451}=\frac{265\cdot 140\,453}{153\cdot 140\,451}=\frac{37\,220\,045}{21\,489\,003}\doteq 1,732\,050\,807\,568\,876\,043\ldots$$

[5] Získali jsme tedy horní odhad $\frac{7}{4}-\frac{1}{56}=\frac{97}{56}$ čísla $\sqrt{3}$, který označíme (2).
[6] Získali jsme tedy horní odhad $\frac{265}{153}+\frac{1}{153\cdot 265}=\frac{70\,226}{40\,545}$ čísla $\sqrt{3}$, který označíme (3).

je dolním odhadem čísla $\sqrt{3}$, který je velmi přesný (na 14 desetinných míst), neboť

$$\sqrt{3} \doteq 1,732\,050\,807\,568\,877\,293\,527\ldots$$

Hledejme dále číslo y, pro které je

$$\left(\frac{1\,351}{780} - y\right)^2 = 3, \quad \text{tj.} \quad \frac{1\,351^2}{780^2} - \frac{2 \cdot 1\,351}{780}y + y^2 = 3.$$

Zanedbáme-li y^2, vyjde přibližná hodnota $y_1 = \frac{1}{2\cdot 780 \cdot 1\,351}$.[7] Dosadíme-li ji za jedno y do y^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{1}{780^2} + \frac{1}{2 \cdot 780 \cdot 1\,351}y = \frac{2 \cdot 1\,351}{780}y$$

přibližnou hodnotu

$$y_2 = \frac{2 \cdot 1\,351}{780 \cdot 7\,300\,803}.$$

Číslo

$$\frac{1\,351}{780} - \frac{2 \cdot 1\,351}{780 \cdot 7\,300\,803} = \frac{1\,351 \cdot 7\,300\,801}{780 \cdot 7\,300\,803} = \frac{9\,863\,382\,151}{5\,694\,626\,340} \doteq$$

$$\doteq 1,732\,050\,807\,568\,877\,293\,536\ldots$$

je horním odhadem čísla $\sqrt{3}$, který je velice přesný (na 19 desetinných míst), výrazně přesnější než výše uvedený dolní odhad. Je tedy

$$\frac{37\,220\,045}{21\,489\,003} < \sqrt{3} < \frac{9\,863\,382\,151}{5\,694\,626\,340} \qquad \text{(3. odhad).}$$

Tímto výpočtem jsme sice přesně vymezili číslo $\sqrt{3}$, se získanými odhady se však klasickým způsobem (bez výpočetní techniky) již nedá rozumným způsobem dále počítat.

3 Vymezení hodnoty čísla $\sqrt{2}$

Obdoba Archimédova vymezení. Pro výpočet odmocniny čísla $2 = 1^2+1$ dostaneme (prvním i druhým způsobem) nerovnosti

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} < \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dolní i horní odhad nyní upřesníme. Hledejme číslo x, pro něž

$$\left(\frac{4}{3} + x\right)^2 = 2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{8}{3}x + x^2 = \frac{2}{9}.$$

[7] Získali jsme tedy další horní odhad $\frac{1\,351}{780} - \frac{1}{780\cdot 2 \cdot 1\,351} = \frac{3\,650\,401}{2\,107\,560}$ čísla $\sqrt{3}$, který označíme (4).

Zanedbáme-li x^2, vyjde přibližná hodnota $x_1 = \frac{1}{12}$. Dosadíme-li ji za jedno x do x^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{8}{3}x + \frac{1}{12}x = \frac{2}{9}$$

přibližnou hodnotu $x_2 = \frac{8}{99}$. Protože je $x_1 > x$, je $x_2 < x$, a proto je číslo

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{99} = \frac{140}{99}$$

dolním odhadem čísla $\sqrt{2}$.

Hledejme dále číslo y, pro něž

$$\left(\frac{3}{2} - y\right)^2 = 2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{1}{4} + y^2 = 3y.$$

Zanedbáme-li y^2, vyjde přibližná hodnota $y_1 = \frac{1}{12}$. Dosadíme-li ji za jedno y do y^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12}y = 3y$$

přibližnou hodnotu $y_2 = \frac{3}{35}$. Protože je $y_1 < y$, je $y_2 < y$, a proto je číslo

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{35} = \frac{99}{70}$$

horním odhadem čísla $\sqrt{2}$. Je tedy

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70},$$

číslo $\sqrt{2}$ leží uvnitř intervalu délky

$$\frac{99}{70} - \frac{140}{99} = \frac{1}{6\,930}.$$

Tento odhad je tedy výrazně horší než odpovídající výše uvedený 2. odhad čísla $\sqrt{3}$.

Další krok. Provedeme ještě jeden krok a předchozí odhad stejným způsobem upřesníme. Hledejme číslo x, pro které je

$$\left(\frac{140}{99} + x\right)^2 = 2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{140^2}{99^2} + \frac{280}{99}x + x^2 = 2.$$

Zanedbáme-li x^2, vyjde přibližná hodnota $x_1 = \frac{1}{99 \cdot 140}$. Dosadíme-li ji za jedno x do x^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{280}{99}x + \frac{1}{99 \cdot 140}x = \frac{2}{9\,801}$$

přibližnou hodnotu $x_2 = \frac{280}{99 \cdot 39\,201}$. Číslo

$$\frac{140}{99} + \frac{280}{99 \cdot 39\,201} = \frac{140 \cdot 39\,203}{99 \cdot 39\,201} \doteq 1,414\,213\,562\,373\,048\,100\ldots$$

je dolním odhadem čísla $\sqrt{2}$. Srovnejme jej se skutečnou hodnotou

$$\sqrt{2} \doteq 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\ldots$$

Hledejme dále číslo y, pro které je

$$\left(\frac{99}{70} - y\right)^2 = 2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{99^2}{70^2} - \frac{99}{35}y + y^2 = 2.$$

Zanedbáme-li y^2, vyjde přibližná hodnota $y_1 = \frac{1}{70 \cdot 198}$. Dosadíme-li ji za jedno y do y^2, vypočteme z rovnice

$$\frac{1}{70^2} + \frac{1}{70 \cdot 198}y = \frac{99}{35}y$$

přibližnou hodnotu $y_2 = \frac{198}{70 \cdot 39\,203}$. Číslo

$$\frac{99}{70} - \frac{198}{70 \cdot 39\,203} = \frac{99 \cdot 39\,201}{70 \cdot 39\,203} \doteq 1,414\,213\,562\,373\,141\,997\ldots$$

je horním odhadem čísla $\sqrt{2}$.[8] Tedy

$$\frac{140 \cdot 39\,203}{99 \cdot 39\,201} \;<\; \sqrt{2} \;<\; \frac{99 \cdot 39\,201}{70 \cdot 39\,203}.$$

4 Historie

Odmocniny ve staré Indii. Odmocniny čísel 2 a 3 byly ve staré Indii vyjádřeny již v době před Archimédem ve spisu *Śulbasūtra* takto:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52}.$$

Dospějeme k nim následujícím postupem.

Vyjdeme od dolního odhadu $\frac{4}{3}$ čísla $\sqrt{2}$ a upřesníme jej.

$$\left(\frac{4}{3} + x\right)^2 = 2, \quad \text{po zanedbání čtverce } x^2 \text{ řešíme rovnici} \quad \frac{8}{3}x = \frac{2}{9}.$$

[8] O výpočtu čísla $\sqrt{2}$ a o dalších souvislostech viz např. [BD1] a [BD2].

Pro vypočtenou hodnotu $x_1 = \frac{1}{12}$ je $x_1 > x$. Tuto hodnotu znovu upřesníme:

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{12} - y\right)^2 = 2, \quad \text{po zanedbání čtverce } y^2 \text{ řešíme rovnici } \quad \frac{34}{12}y = \frac{1}{144}.$$

Pro vypočtenou hodnotu $y_1 = \frac{1}{12 \cdot 34}$ je $y_1 < y$. Získali jsme tedy přibližnou hodnotu

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \doteq 1,414\,215\,686\ldots,$$

která je horním odhadem čísla $\sqrt{2} \doteq 1,414\,213\,562\ldots$

Vyjdeme od dolního odhadu $\frac{5}{3}$ čísla $\sqrt{3}$ a upřesníme jej.

$$\left(\frac{5}{3} + x\right)^2 = 3, \quad \text{po zanedbání čtverce } x^2 \text{ řešíme rovnici } \quad \frac{10}{3}x = \frac{2}{9}.$$

Pro vypočtenou hodnotu $x_1 = \frac{1}{15}$ je $x_1 > x$. Tuto hodnotu znovu upřesníme:

$$\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{15} - y\right)^2 = 3, \quad \text{po zanedbání čtverce } y^2 \text{ řešíme rovnici } \quad \frac{52 \cdot 15}{225}y = \frac{1}{225}.$$

Pro vypočtenou hodnotu $y_1 = \frac{1}{15 \cdot 52}$ je $z_1 < y$. Získali jsme tedy přibližnou hodnotu

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} = \frac{1\,351}{780} \doteq 1,732\,051\,282\ldots,$$

která je horním odhadem čísla $\sqrt{3} \doteq 1,732\,050\,807\ldots$ Obě odmocniny jsou vypočteny s přesností na 5 desetinných míst.

Indické vyjádření čísel $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ přesně koresponduje s naším výše uvedeným výpočtem. Zdá se tedy velmi pravděpodobné, že k nim indičtí počtáři došli právě takto. Není příliš podstatné, zda byly výpočty prováděny aritmeticky nebo zda byly chápány a znázorňovány geometricky.[9]

Odmocniny v Mezopotámii. V Mezopotámii znali velmi přesně (na pět desetinných míst) hodnotu čísla $\sqrt{2}$ již ve druhém tisíciletí př. Kr. Dokládá to tabulka YBC 7289 s obrázkem čtverce s vyznačenými úhlopříčkami, vepsanými délkami strany a úhlopříčky a přibližnou hodnotou čísla $\sqrt{2}$, případně tabulka YBC 7243 se soupisem různých konstant.[10] V šedesátkové soustavě byla $\sqrt{2}$ vyjádřena v tvaru

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \doteq 1,414\,212\,963\ldots$$

Babylonský výpočet přibližné hodnoty čísla $\sqrt{2}$ se nyní pokusíme (v šedesátkové soustavě) reprodukovat. Vyjdeme z dolního odhadu

$$\frac{4}{3} = \frac{80}{60} < \sqrt{2},$$

[9] Pro další informace o výpočtu odmocnin ve staré Indii viz [Bü], [Dat], [Hen], [Plo], [Sar], [Katz].

[10] Viz např. [NgS], [FwR] a [Katz].

upřesníme jej, tj. vypočteme neznámou x z rovnice

$$\left(\frac{80}{60}+x\right)^2=2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{2\cdot 80}{60}x+x^2=\frac{800}{60^2}.$$

Zanedbáme x^2, získaný kořen x_1 tedy bude proto větší než hledaný kořen x.

$$x_1=\frac{800}{60^2}\cdot\frac{60}{2\cdot 80}=\frac{5}{60}.$$

Jako druhou aproximaci proto vezmeme jen $\frac{84}{60}=1+\frac{24}{60}$; tuto hodnotu upřesníme stejným způsobem. Budeme řešit rovnici

$$\left(\frac{84}{60}+x\right)^2=2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{2\cdot 84}{60}x+x^2=\frac{144}{60^2}.$$

Zanedbáme x^2, získaný kořen x_2 bude proto větší než hledané x:

$$x_2=\frac{144}{60^2}\cdot\frac{60}{2\cdot 84}=\frac{1}{60^2}\cdot\frac{360}{7} \;>\; \frac{51}{60^2};$$

není třeba provádět exaktní dělení sedmi, což dělalo v šedesátkové soustavě problémy, ale stačí pouze najít odhad.

Získanou hodnotu

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}$$

znovu upřesníme. Budeme řešit rovnici

$$\left(\frac{84\cdot 60+51}{60^2}+x\right)=2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{2\cdot 5\,091}{60^2}x+x^2=\frac{1\,719}{60^4}.$$

Zanedbáme opět x^2, získaný kořen x_3 bude větší než hledané x.

$$x_3=\frac{1\,719}{60^4}\cdot\frac{60^2}{2\cdot 5\,091}=\frac{1}{60^3}\cdot\frac{51\,570}{5\,091} \;>\; \frac{10}{60^3};$$

opět není třeba dělit, stačí porovnat čísla 51 570 a 5 091. Tak jsme došli k hodnotě

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3},$$

která je uváděna na mezopotamských tabulkách.[11]

Poznamenejme, že se výpočtem odmocnin zabýval i Leonardo Pisánský (Fibonacci, asi 1170 až 1250) ve svých knihách *Liber abaci* z roku 1202 (druhá verze z roku 1228) a *De practica geometrie* z roku 1223. Jeho početní postupy byly velmi nápadité. Viz např. [BeJ2], str. 278–283, resp. původní latinský text [LP] a překlad [Sig].

[11] Některé aspekty výpočtu čísla $\sqrt{2}$ viz [BD1] a [BD2].

5 Archimédovy odhady odmocnin

Archimédés nahradil při výpočtu horního a dolního odhadu obvodu kruhu ve spisu *Měření kruhu* hodnoty sedmi odmocnin poměrně velkých čísel jejich vhodnými horními nebo dolními odhady.[12]

Výše uvedený (podle prvního či druhého způsobu) horní a dolní odhad odmocniny $\sqrt{A}$ se pro další výpočet nehodí, neboť připojený zlomek má v čitateli a zejména ve jmenovateli velká čísla. Přitom je lhostejné, zda vyjdeme (podle výše uvedené teorie) od dolního nebo horního odhadu, které se (pro velká čísla) liší jen nepatrně. Uvedenou hodnotu je třeba vhodným způsobem buď trochu zmenšit nebo trochu zvětšit, a to tak, aby se při dalším výpočtu se zvolenými zlomky dalo rozumně pracovat. Archimédés to provedl takto:

$$\sqrt{349\,450} > 591\,\frac{1}{8}, \quad \sqrt{1\,373\,943\,\frac{33}{64}} > 1\,172\,\frac{1}{8}, \quad \sqrt{5\,472\,132\,\frac{1}{16}} > 2\,339\,\frac{1}{4},$$

$$\sqrt{9\,082\,321} < 3\,013\,\frac{3}{4}, \quad \sqrt{3\,380\,929} < 1\,838\,\frac{9}{11}, \quad \sqrt{1\,018\,405} < 1\,009\,\frac{1}{6},$$

$$\sqrt{4\,069\,284\,\frac{1}{36}} < 2\,017\,\frac{1}{4}.$$

Vyjádříme nyní výše uvedená čísla A ve tvaru $A = a^2 + r$, připojíme dolní odhad jejich odmocnin $a + \frac{r}{2a+1}$ a Archimédem upravenou hodnotu:

1.	$349\,450 = 591^2 + 169$	$591\,\frac{169}{1\,183} > 591\,\frac{1}{8}$
2.	$1\,018\,405 = 1\,009^2 + 324$	$1\,009\,\frac{324}{2\,019} < 1\,009\,\frac{1}{6}$
3.	$1\,373\,943\,\frac{33}{64} = 1\,172^2 + 359\,\frac{33}{64}$	$1\,172\,\frac{359}{2\,345} > 1\,172\,\frac{1}{8}$
4.	$3\,380\,929 = 1\,838^2 + 2685$	$1\,838\,\frac{2\,685}{3\,677} < 1\,838\,\frac{9}{11}$
5.	$4\,069\,284\,\frac{1}{36} = 2\,017^2 + 995\,\frac{1}{36}$	$2\,017\,\frac{995}{4\,035} < 2\,017\,\frac{1}{4}$
6.	$5\,472\,132\,\frac{1}{16} = 2\,339^2 + 1\,211\,\frac{1}{16}$	$2\,339\,\frac{1\,211}{4\,679} > 2\,339\,\frac{1}{4}$
7.	$9\,082\,321 = 3\,013^2 + 4\,152$	$3\,013\,\frac{4\,152}{6\,027} < 3\,013\,\frac{3}{4}$

[12] O Archimédových odmocninách viz [Hea], str. lxxx–xcix.

Některé Archimédovy odhady jsou zcela průhledné:

2. $6 \cdot 324 = 1\,944 < 2\,019 < 2\,268 = 7 \cdot 324,$

proto je zlomek zvětšen na $\dfrac{1}{6}$

5. $4 \cdot 995 = 3\,980 < 4\,035 < 4\,975 = 5 \cdot 995,$

proto je zlomek zvětšen na $\dfrac{1}{4}$

6. $3 \cdot 1\,211 = 3\,633 < 4\,679 < 4\,844 = 4 \cdot 1\,211,$

proto je zlomek zmenšen na $\dfrac{1}{4}$

Ve dvou případech je výše uvedený princip mírně porušen, je volen „sousední“ kmenný zlomek (místo sedminy osmina):

1. $7 \cdot 169 = 1\,183 < 1\,352 = 8 \cdot 169,$

přesto je zlomek zmenšen na $\dfrac{1}{8}$

3. $6 \cdot 359 = 2\,154 < 2\,345 < 2\,513 = 7 \cdot 359,$

přesto je zlomek zmenšen na $\dfrac{1}{8}$

V dalších dvou případech nebylo možno volit kmenné zlomky:

4. Je zjevné, že $\frac{2\,685}{3\,677} < \frac{9}{12} < \frac{9}{11}$,

7. Je zjevné, že $\frac{4\,152}{6\,027} < \frac{3}{4}$.

6 Řetězové zlomky

Hodnotu čísla $\sqrt{3}$ lze vyjádřit pomocí řetězového zlomku

$$[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}};$$

jeho hodnotou je limita posloupnosti dílčích zlomků (tzv. konvergentů) $\dfrac{a_k}{b_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, přičemž $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ a pro každé $k = 1, 2, \dots$ je

$$a_{2k} = a_{2k-1} + a_{2k-2}, \qquad a_{2k+1} = a_{2k} + a_{2k-1},$$
$$b_{2k} = b_{2k-1} + b_{2k-2}, \qquad b_{2k+1} = b_{2k} + b_{2k-1}.$$

V následující tabulce uvedeme čitatele a_k a jmenovatele b_k konvergentů řetězového zlomku $[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$ pro $k = 0, 1, \dots, 36$. Pro sudé hodnoty k dostáváme dolní odhady a pro liché hodnoty k horní odhady čísla $\sqrt{3}$. Současně je v tabulce poznamenáno, pro které hodnoty k vycházejí konvergenty odpovídající výše uvedeným horním a dolním odhadům čísla $\sqrt{3}$.

k	a_k	b_k	poznámka
0	1	1	$t = 0$
1	2	1	$t = 1$
2	5	3	1. dolní odhad
3	7	4	1. horní odhad, $t = 2$
4	19	11	
5	26	15	horní odhad (1)
6	71	41	
7	97	56	horní odhad (2), $t = 3$
8	265	153	2. dolní odhad
9	362	209	
10	982	571	
11	1351	780	2. horní odhad
12	3 691	2 131	
13	5 042	2 911	
14	13 775	7 953	
15	18 817	10 864	$t = 4$
16	51 409	29 681	
17	70 226	40 545	horní odhad (3)
18	191 861	110 771	
19	262 087	151 316	
20	716 035	413 403	
21	978 122	564 719	
22	2 672 279	1 542 841	
23	3 650 401	2 107 560	horní odhad (4)
24	9 973 081	5 757 961	
25	13 623 482	7 865 521	
26	37 220 045	21 489 003	3. dolní odhad
27	50 843 527	29 354 524	
28	138 907 099	80 198 051	
29	189 750 626	109 552 575	
30	518 408 351	299 303 201	
31	708 158 977	408 855 776	$t = 5$
32	1 934 726 305	1 117 014 753	
33	2 642 885 282	1 525 870 529	
34	7 220 496 869	4 168 755 811	
35	9 863 382 151	5 694 626 340	3. horní odhad
36	17 083 879 020	9 863 382 151	

Hodnoty prvních tří dolních i horních odhadů čísla $\sqrt{3}$, které byly elementárním způsobem vypočteny, odpovídají v tabulce hodnotám uvedeným pro $k = 2, 3, 8, 11, 26, 35$. Z tabulky je zřejmé, proč je 2. horní odhad čísla $\sqrt{3}$ přesnější než 2. dolní odhad a proč je 3. horní odhad výrazně přesnější než 3. dolní odhad.

Poznamenejme ještě, že rychleji než řetězový zlomek konverguje k hodnotě $\sqrt{3}$ posloupnost

$$H_0 = 1, \quad H_{t+1} = \frac{1}{2}\Big(H_t + \frac{3}{H_t}\Big) = \frac{H_t^2 + 3}{2H_t}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Jejími prvními členy jsou čísla

$$1, \quad 2, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{97}{56}, \quad \frac{18\,817}{10\,864}, \quad \frac{708\,158\,977}{408\,855\,776}, \ \ldots,$$

která odpovídají výše uvedeným hodnotám pro $k = 0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$ Uvedená tabulka umožňuje srovnání rychlosti konvergence řetězového zlomku, posloupnosti H_t a elementárních výpočtů.[13]

---

[13] Obdobná problematika týkající se čísla $\sqrt{2}$ je předmětem článků [BD1] a [BD2]. O řetězových zlomcích viz např. [Chi].