Jindřich Bečvář
Měření kruhu

In: Zdeněk Halas (editor); Jindřich Bečvář (author); Martina Bečvářová (author); Zdeněk Halas (author); Tereza Bártlová (author); Vlasta Moravcová (author): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. (Czech). Praha: MATFYZPRESS, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty v Praze, 2012. pp. 45–[54].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402376

# II.

# ARCHIMÉDOVY VYBRANÉ MATEMATICKÉ SPISY

# MĚŘENÍ KRUHU

Jindřich Bečvář

Archimédův spis *Měření kruhu*[1] stojí na dvou důležitých výsledcích. Prvním je *exhaustivní metoda*, s jejíž pomocí Archimédés dokázal vztah mezi obvodem a obsahem kruhu. Druhým je velice *přesné vymezení hodnoty čísla* $\sqrt{3}$, které Archimédés využil při výpočtu horního i dolního odhadu obvodu kruhu, tj. vlastně konstanty označované dnes písmenem $\pi$. Zdůrazněme, že tento výpočet by nebyl možný bez jeho velké teoretické i počtářské erudice.

## 1 Exhaustivní metoda

Autorem exhaustivní metody je podle několika svědectví Eudoxos z Knidu (asi 408 až 355), matematik a astronom, tvůrce tzv. *teorie proporcí* a *teorie homocentrických sfér*. V Eukleidových *Základech* je princip exhaustivní metody vyjádřen v první větě 10. knihy. Miloslav Valouch ji roku 1903 v českém překladu Archimédova *Měření kruhu* vyslovil takto:

*Odejmeme-li nějaké veličině polovici aneb více než polovici a tuto operaci v postačitelném počtu opakujeme, dojdeme posléze veličiny, jež jest menší než kterákoli veličina téhož druhu.* ([Va1], str. 14)

M. Valouch ještě neměl k dispozici český překlad Eukleidových *Základů* [Eukl] Františka Servíta (1848–1923), který vyšel roku 1907.[2] Servítův překlad první věty 10. knihy *Základů* je asi srozumitelnější a přesnější:

*Jsou-li dány dvě veličiny nestejné, když od větší odečteme část větší než polovina a od zbytku opět větší než polovina a tak stále budeme činiti, zbude nějaká veličina, jež bude menší než daná veličina menší.* ([Eukl], str. 160)[3]

V moderní řeči a symbolice můžeme první větu 10. knihy *Základů* zformulovat takto:

Máme-li veličiny $S$ a $\varepsilon$, přičemž je $\varepsilon < S$, a odebíráme-li od veličiny $S$ postupně veličiny $a$, $b$, $c$, ..., přičemž

$$a > \frac{S}{2}, \qquad b > \frac{S-a}{2}, \qquad c > \frac{S-a-b}{2}, \quad \dots,$$

[1] V české verzi [Va1], v anglické a německé verzi [Hea], v ruské verzi [Ve], dále viz např. [Hei] a [Ee].

[2] Servítův překlad vycházel nejprve po částech ve výročních zprávách českého státního gymnázia na Královských Vinohradech, 10. kniha byla publikována na pokračování v letech 1905, 1906 a 1907. Viz [BeM1].

[3] Zhruba o dvě desetiletí je starší český překlad Josefa Smolíka (1832–1915): *Jsou-li dány dvě veličiny sobě nikoli rovné, a odejme-li se od větší z nich více nežli její polovice, od zbytku pak opět více nežli jeho polovice a tak podobně dále, zbude konečně veličina menší oné dané druhé veličiny.* ([Be1], str. 167) Smolíkův překlad, který zůstal v rukopisu, nemohl M. Valouch znát. Objeven byl až roku 2002. Viz [BeM1].

potom je po potřebném počtu kroků

$$S - a - b - c - \cdots - k < \varepsilon,$$

resp. v našem smyslu

$$a + b + c + \cdots \longrightarrow S.$$

Odejmeme-li tedy od obsahu $S_K$ kruhu $K$ obsah vepsaného čtverce, odejmeme více než polovinu obsahu kruhu $K$. Vepíšeme-li do čtyř vzniklých kruhových úsečí přirozeným způsobem rovnoramenné trojúhelníky, odejmeme opět více než polovinu obsahu těchto úsečí atd. Od čtverce tak dojdeme k pravidelnému osmiúhelníku, obdobným způsobem k šestnáctiúhelníku atd. Pokud tento postup dostatečně dlouho opakujeme, přiblížíme se obsahem pravidelného $2^k$-úhelníku zdola jakkoli blízko k obsahu kruhu $K$. Úplně stejně bychom postupovali, pokud bychom vyšli od vepsaného pravidelného šestiúhelníku.

Obdobným způsobem dojdeme od opsaného čtverce k opsanému osmiúhelníku atd., až se obsahem pravidelného $2^k$-úhelníku přiblížíme shora jakkoli blízko k obsahu kruhu $K$.[4]

## 2 Přesný odhad čísla $\sqrt{3}$

Ve svém pojednání o měření kruhu využil Archimédés následující velmi přesný odhad čísla $\sqrt{3}$:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780},$$

číslo $\sqrt{3}$ tedy leží v intervalu délky

$$\frac{1\,351}{780} - \frac{265}{153} = \frac{1}{39\,780}.$$

Odborníci se dosud liší v názorech, jak Archimédés, nebo někdo před ním, k tak přesnému odhadu dospěl. V článku *Výpočty odmocnin ve starověku* uvedeném v této knize je předložena rekonstrukce výpočtu tohoto odhadu. Současně je poukázáno na skutečnost, že vymezení čísla $\sqrt{3}$ ve dvou krocích je daleko přesnější než obdobné vymezení čísla $\sqrt{2}$. Výpočet odhadu čísla $\sqrt{2}$ stejnou metodou, ale ve třech krocích, je již numericky náročnější, stále však ještě zvládnutelný. Získaný výsledek se však pro další numerické výpočty (prováděné bez výpočetní techniky) nehodí.

Archimédés vyšel od šestiúhelníků (vepsaného a opsaného) a po čtyřech děleních středových úhlů dospěl k 96-úhelníkům (vepsanému a opsanému). Číslo $\sqrt{3}$ potřeboval k výpočtu obvodu výchozího opsaného šestiúhelníku.

Pokud by vyšel od čtverců, došel by po čtyřech děleních středových úhlů jen k 64-úhelníkům (vepsanému a opsanému), jejichž obvody aproximují obvod

[4] I zde užijeme exhaustivní metodu. Od rozdílu obsahu opsaného čtverce a kruhu odečteme „vnějšek“ opsaného osmiúhelníka, dále „vnějšek“ opsaného šestnáctiúhelníku atd.

kruhu podstatně hůře než obvody 96-úhelníků. Navíc by musel mít přesnější vymezení čísla $\sqrt{2}$, které je zapotřebí pro výpočet obvodu výchozího vepsaného čtverce.

## 3 Měření kruhu

Archimédův spis *Měření kruhu* obsahuje pouze tři matematické věty. Domníváme se, patrně oprávněně, že se dochovalo jen torzo původního díla, snad nějaký stručný výpis, který byl dále přepisován a šířen.[5]

V následujícím textu uvedeme tyto tři věty ve Valouchově českém překladu a připojíme jejich Heathovu anglickou verzi. Dokážeme je v duchu Archimédova *Měření kruhu* současným jazykem a symbolikou a připojíme stručný komentář. Výraznější odlišnosti od Archimédova postupu patřičně zdůrazníme.

**Věta 1.** *Každý kruh rovná se pravoúhlému trojúhelníku, je-li poloměr roven jednomu rameni pravého úhlu, obvod pak podstavě.*[6] ([Va1], str. 13)

Dnes bychom tvrzení této Archimédovy věty zformulovali takto:

*Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou poloměr a obvod tohoto kruhu.*

A vyjádřili bychom je vzorcem $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o$.

Archimédés dokázal tvrzení Věty 1 exhaustivní metodou. Jeho důkaz nyní uvedeme.

*Důkaz*: Uvažujme kruh $K$ o poloměru $r$ a obvodu $o$ a pravoúhlý trojúhelník $T$, jehož odvěsny mají délky $r$ a $o$.

Předpokládejme nejprve, že je obsah $S_K$ kruhu $K$ větší než obsah $S_T$ trojúhelníku $T$. Potom existuje pravidelný $n$-úhelník $N$, který je do kruhu $K$ vepsán a má větší obsah než trojúhelník $T$:

$$S_K > S_N > S_T.$$

Obsah $n$-úhelníku $N$ je však roven součtu obsahů $n$ rovnoramenných trojúhelníků, jejichž výšky jsou menší než $r$ a součet délek všech jejich základen je menší než $o$. Proto je $S_N < S_T$, a to je spor.

Předpokládejme nyní, že je obsah $S_K$ kruhu $K$ menší než obsah $S_T$ trojúhelníku $T$. Potom existuje pravidelný $n$-úhelník $N$, který je kruhu $K$ opsán a má menší obsah než trojúhelník $T$:

$$S_K < S_N < S_T.$$

---

[5] Podrobněji o Archimédových dílech viz článek M. Bečvářové uveřejněný v této publikaci.

[6] V anglické verzi: *The area of any circle is equal to a right-angled triangle in which one of the sides about the right angle is equal to the radius, and the other to the circumference, of the circle.* ([Hea], str. 91)

Obsah $n$-úhelníku $N$ je však roven součtu obsahů $n$ rovnoramenných trojúhelníků, jejichž výšky jsou rovny $r$ a součet délek všech jejich základen je větší než $o$. Proto je $S_N > S_T$, a to je spor. □

Archimédés tak exaktně ukázal, patrně jako první matematik vůbec, jaký je vztah obvodu a obsahu kruhu. Připomeňme, že číslo $\pi$[7] je definováno jako poměr obvodu a průměru kruhu, tj.

$$\pi = \frac{o}{2r};$$

odtud vyplývá vzorec pro výpočet obvodu kruhu:

$$o = 2\pi r.$$

Známý vzorec pro výpočet obsahu kruhu je tedy důsledkem Archimédovy Věty 1.

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

Konstanta $\pi$, kterou jsme definovali pomocí obvodu a průměru kruhu, figuruje tedy i ve vzorci pro obsah kruhu.

**Věta 2.** *Kruh jest ke čtverci průměru v poměru jako 11 ke 14.*[8] ([Va1], str. 15)

Dnes bychom tvrzení druhé Archimédovy věty zformulovali takto:

*Obsah kruhu je přibližně roven jedenácti čtrnáctinám obsahu čtverce jehož stranou je průměr kruhu.*

Věta 2 využívá výsledek následující Věty 3, která říká, že obvod kruhu o poloměru $r$ je přibližně roven $\frac{22}{7} \cdot 2r$. Snad byla Věta 2 původně zařazena jako důsledek Věty 3 a při nějakém přepisu Archimédova díla, případně při pořízení výpisu, bylo pořadí těchto vět obráceno.

*Důkaz.* Podle Věty 1 a následující Věty 3 je obsah $S_K$ kruhu $K$ přibližně roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek $r$ a $\frac{22}{7} \cdot 2r$. Nyní je

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{22}{7} \cdot 2r = \frac{11}{14} \cdot (2r)^2.$$ □

**Věta 3.** *Obvod každého kruhu rovná se trojnásobnému průměru a ještě přesahuje o něco méně než sedminu průměru, ale o více než deset jedenasedmdesátin.*[9] ([Va1], str. 15)

[7] V antice tato konstanta neměla samostatné označení, vždy se pracovalo se slovním vyjádřením poměru obvodu kruhu k průměru. Označení pomocí malého řeckého písmene $\pi$ (zkratka řeckého slova *perimetros* – obvod) použil poprvé velšský matematik William Jones (1675–1749) v roce 1706. Definitivně se však $\pi$ v matematice usadilo díky tomu, že je začal používat Leonhard Euler (1707–1783).

[8] V anglické verzi: *The area of a circle is to the square on its diameter as 11 to 14.* ([Hea], str. 93)

[9] V anglické verzi: *The ratio of the circumference of any circle to its diameter is less than* $3\frac{1}{7}$ *but greater than* $3\frac{10}{71}$. ([Hea], str. 93)

Dnes bychom tvrzení Věty 3 zformulovali takto:

*Pro obvod o kruhu, který má poloměr r, platí*

$$3\,\frac{10}{71}\cdot 2r \;<\; o \;<\; 3\,\frac{1}{7}\cdot 2r.$$

V důkazu této věty Archimédés vypočítal horní a dolní odhad obvodu $o$ kruhu přesněji:

$$\frac{6\,336}{2\,017\,\frac{1}{4}}\cdot 2r \;<\; o \;<\; \frac{14\,688}{4\,673\,\frac{1}{2}}\cdot 2r.$$

Horní mez potom zaokrouhlil nahoru a dolní dolů:

$$3\,\frac{10}{71}\cdot 2r \;<\; \frac{6\,336}{2\,017\,\frac{1}{4}}\cdot 2r \;<\; o \;<\; \frac{14\,688}{4\,673\,\frac{1}{2}}\cdot 2r \;<\; 3\,\frac{1}{7}\cdot 2r.$$

Převedeme-li tyto zlomky na desetinná čísla, bude přesnost Archimédových výsledků zjevnější:

$$3,140\,845\ldots\cdot 2r \;<\; 3,140\,909\ldots\cdot 2r \;<\; o \;<\; 3,142\,826\ldots\cdot 2r \;<\; 3,142\,857\ldots\cdot 2r.$$

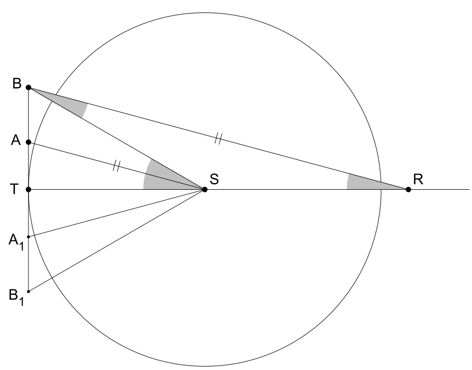
Archimédův výsledek můžeme interpretovat jako odhad čísla $\pi = 3,141\,592\ldots$, který je přesný na dvě desetinná čísla:

$$3,140\,909\ldots \;<\; \pi \;<\; 3,142\,826\ldots$$

Archimédés nejprve vypočetl obvod vepsaného pravidelného šestiúhelníku a obvod opsaného pravidelného šestiúhelníku, rozpůlením středových úhlů získal pravidelné dvanáctiúhelníky, vypočetl jejich obvody, a tak postupoval až k 96-úhelníkům. Obvod kruhu pak odhadl shora obvodem opsaného pravidelného 96-úhelníku a zdola obvodem vepsaného pravidelného 96-úhelníku.

Předchozí dva Archimédovy důkazy jsme modifikovali jen nepodstatně – pouze jsme je převedli do současné řeči a symboliky. Třetí důkaz však přepracujeme podstatně výrazněji, využijeme totiž algebraickou symboliku, kterou Archimédés k disposici neměl.

*Důkaz.* Uvažujme pro jednoduchost jednotkovou kružnici, které byl opsán pravidelný $n$-úhelník a rozpůlením jeho „středových“ úhlů vznikl pravidelný $2n$-úhelník.




Obr. 1

Na obr. 1 je $|ST| = 1$, $BT$ je polovina strany opsaného $n$-úhelníku a $AT$ je polovina strany opsaného $2n$-úhelníku (tedy $|\sphericalangle TSA| = |\sphericalangle ASB|$), jejich délky označme $t_n$ a $t_{2n}$, tj. $|BT| = t_n$ a $|AT| = t_{2n}$. Nechť je přímka $BR$ rovnoběžná s přímkou $AS$. Je tedy $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle SBR| = |\sphericalangle SRB|$, a proto $SB = SR$. Trojúhelník $\triangle ATS$ je podobný trojúhelníku $\triangle BTR$ (věta *uuu*), proto je

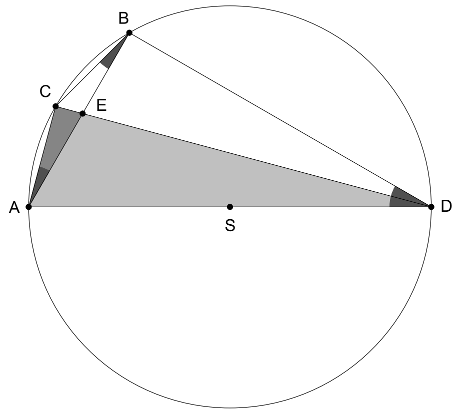
$$\frac{AT}{TS} = \frac{BT}{TR} = \frac{BT}{TS + SR} = \frac{BT}{TS + SB}$$

a po dosazení je

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}}. \tag{1}$$

Nyní je třeba si uvědomit, že $t_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Podle vztahu (1) vypočteme $t_{12}$, potom $t_{24}$, potom $t_{48}$ a nakonec $t_{96}$. Vypočetli jsme tedy obvod opsaného 96-úhelníku: $96 \cdot 2t_{96} = 192 \cdot t_{96}$.

Uvažujme opět jednotkovou kružnici, do níž byl vepsán pravidelný $n$-úhelník a rozpůlením jeho „středových“ úhlů vznikl pravidelný $2n$-úhelník.




Obr. 2

Na obr. 2 je $|SA| = 1$, $AB$ je strana vepsaného $n$-úhelníku, $AC$ a $BC$ strany vepsaného $2n$-úhelníku. Jejich délky označme $s_n$ a $s_{2n}$, tj. $|AB| = s_n$ a $|AC| = |BC| = s_{2n}$. Pomocí elementárních geometrických poznatků zjistíme, že trojúhelníky $\triangle ADC$ a $\triangle EAC$ jsou podobné (věta *uuu*) a rovněž trojúhelníky $\triangle CDB$ a $\triangle CBE$ jsou podobné (věta *uuu*).[10] Z těchto podobností vyplývají vztahy

$$\frac{AD}{CD} = \frac{EA}{CA}, \qquad \frac{BD}{CD} = \frac{EB}{CB} = \frac{EB}{CA}.$$

Odtud

$$\frac{AD + BD}{CD} = \frac{EA + EB}{CA} = \frac{AB}{CA},$$

[10] Úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CDB$, $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAB$ jsou obvodové úhly ke stejně dlouhému oblouku, mají tedy stejnou velikost.

po dosazení je

$$\frac{2+\sqrt{4-s_n^2}}{\sqrt{4-s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}$$

a po malé úpravě

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}}. \tag{2}$$

Nyní je třeba si uvědomit, že $s_6 = 1$; podle předchozího vztahu (2) tedy vypočteme $s_{12}$, potom $s_{24}$, potom $s_{48}$ a nakonec $s_{96}$. Vypočetli jsme tedy obvod vepsaného 96-úhelníku: $96 \cdot s_{96}$.

Pro obvod $o$ kruhu tedy platí: $96 \cdot s_{96} \; < \; o \; < \; 192 \cdot t_{96}$. □

Podle výše uvedených vzorců (1) a (2) lze výpočet přibližné hodnoty obvodu kruhu (resp. čísla $\pi$) provést i na malé kalkulačce. Pro $n = 6, 12, 24, 48, 96$ dostáváme:

| | |
|---|---|
| $n = 6$ | $3,000 < \pi < 3,464$ |
| $n = 12$ | $3,106 < \pi < 3,215$ |
| $n = 24$ | $3,133 < \pi < 3,160$ |
| $n = 48$ | $3,139 < \pi < 3,146$ |
| $n = 96$ | $3,141 < \pi < 3,143$ |

Odhadli jsme tedy číslo $\pi$ s přesností na dvě desetinná místa.

Archimédés však počítal s konkrétními čísly a postupoval po jednotlivých krocích. Od obvodu opsaného (vepsaného) šestiúhelníku přešel k obvodu opsaného (vepsaného) dvanáctiúhelníku, a tak postupoval až k 96-úhelníkům. V každém kroku navíc pečlivě zvažoval, zda počítá dolní nebo horní odhad, a podle toho (v závislosti na tom, zda přičítal, odčítal, násobil či dělil) volil dolní nebo horní odhad čísla, s nímž právě pracoval.

## 4 Poznámky

**Poznámky historické.** Podle Héróna Alexandrijského (1. století po Kr.) dospěl Archimédés dokonce k odhadu[11]

$$\frac{211\,875}{67\,441} \doteq 3,141\,634\ldots \; < \; \pi \; < \; \frac{197\,888}{62\,351} \doteq 3,173\ldots$$

Hodnoty jsou však zřejmě porušeny, dolní odhad je ve skutečnosti odhadem horním a horní odhad je příliš velký. Malou úpravou jeho čitatele lze získat chybějící dolní odhad, a tím i velmi přesný odhad čísla $\pi$:

$$\frac{195\,881}{62\,351} \doteq 3,141\,585\ldots \; < \; \pi \; < \; \frac{211\,875}{67\,441} \doteq 3,141\,634\ldots$$

[11] Odhad se nachází v první knize Hérónova spisu *Metrika,* odstavec 26.

Ještě přesnější odhad lze získat úpravou Hérónových odhadů, kterou navrhl francouzský historik matematiky Paul Tannery (1843–1904):

$$\frac{211\,872}{67\,441} \doteq 3,141\,590\ldots \ < \ \pi \ < \ \frac{195\,882}{62\,351} \doteq 3,141\,601\ldots$$

Zdá se, že původní jednoduchý Archimédův odhad čísla $\pi$ byl používán i při praktických výpočtech. Většinou se jednalo přímo o hodnotu $3\frac{1}{7}$. V šesté knize astronomického pojednání *Almagest*, které sepsal v polovině 2. století po Kr. alexandrijský astronom, geograf a matematik Klaudios Ptolemaios, se používá při výpočtech týkajících se zatmění Slunce a Měsíce velmi přesná hodnota $\pi$, která je zaokrouhlena tak, aby byla snadno použitelná při výpočtech v šedesátkové soustavě:

$$\pi \doteq 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} \doteq 3,141\,666\ldots$$

Sám Ptolemaios o ní píše, že leží *nejblíže mezi* $3\frac{1}{7}$ *a* $3\frac{10}{71}$.

Archimédův výpočet poměru obvodu a průměru kruhu inspiroval řadu matematiků. Byl to například Leonardo Pisánský[12] (Fibonacci, asi 1170 až 1250), který Archimédův výpočet zopakoval ve svém díle *De practica geometrie* z roku 1223. Dospěl k vymezení hodnoty čísla $\pi$ nerovnostmi

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} \ < \ \pi \ < \ \frac{1440}{458\frac{1}{5}} \qquad \text{a k přibližné hodnotě} \quad \frac{864}{275} \doteq 3,141\,818\ldots$$

Citujme příslušnou pasáž:

*... erit proportio circulj ad suum dyametrum, sicut* 1 440 *ad* $\frac{1}{3}$458*, cum sint in medio inter* $\frac{4}{9}$458 *et* $\frac{1}{5}$458*. Sed proportio de* 1 440 *ad* $\frac{1}{3}$458 *est sicut triplum unius numerorum ad triplum alterius, hoc est sicut* 4 320 *ad* 1 375*; quorum proportio in minimis numeris est sicut* 864 *ad* 275*: sed proportio de* 864 *ad* 275*, minus* $\frac{1}{11}$*, est sicut* $\frac{1}{7}$3 *ad* 1 *...* ([LP], str. 91.)[13]

Z mnoha více či méně úspěšných pokusů o výpočet čísla $\pi$ připomeňme ještě dva. Perský matematik a astronom al-Kāshī (14. až 15. stol.), který působil v Samarkandu, vypočetl roku 1429 hodnotu čísla $\pi$ na 16 desetinných míst a holandský matematik Ludolf van Ceulen (1540–1610) vypočítal v roce 1596 číslo $\pi$ podle Archimédova vzoru na 20 desetinných míst (došel přitom k $15 \cdot 2^{37}$-úhelníku) a roku 1603 na 32 desetinných míst. Při svých výpočtech dospěl až k $2^{62}$-úhelníku.[14]

---

[12] O životě a díle Leonarda Pisánského viz např. [BeJ2].

[13] ... bude poměr kružnice ke svému průměru jako 1 440 k $458\frac{1}{3}$, což je mezi $458\frac{4}{9}$ a $458\frac{1}{5}$. Ale poměr 1 440 k $458\frac{1}{3}$ je jako trojnásobek jednoho čísla k trojnásobku druhého, to je jako 4 320 k 1 375; jejich poměr v nejmenších číslech je jako 864 k 275: ale poměr [čísla] 864 k [číslu] 275 zmenšenému o $\frac{1}{11}$ je jako $3\frac{1}{7}$ k 1 ...

[14] O historii a výpočtech čísla $\pi$ viz například článek [VeJ]. Podrobněji viz [B], [BBB], [EL], [Phi], [Sche].

**Poznámka metodická.** Archimédův výpočet čísla $\pi$ pomocí aproximace obvodu kruhu obvody pravidelných $n$-úhelníků (opsaných i vepsaných) můžeme (v modernizované podobě) využít i na střední škole v matematickém semináři, resp. při zadání projektu. Zopakuje se přitom řada poznatků základní a střední školy: Thalétova věta, Pýthagorova věta, obvodový úhel, podobné trojúhelníky, rovnost vhodných dvojic úhlů, úprava algebraického výrazu, práce s odmocninami atd. Archimédův postup může být proveden na počítači, podnětné může být programování jednotlivých výpočtů. Lze rovněž modifikovat Archimédův postup a začít s opsaným a vepsaným čtvercem; oba postupy a výsledky lze pak porovnat. Je možno se dokonce vydat přesně po stopách Archiméda a počítat v jeho duchu horní i spodní odhady.