6. Současná pozice finanční matematiky na středních školách (renesance finanční matematiky 1989 – současnost)

V roce 1989 se všichni občané naší republiky rozloučili s „vidinou“ komunistické společnosti, ve které bychom se obešli bez peněz a operací s nimi. Totalitní režim se zhroutil, lidé mohli začít svobodně podnikat, byly zakládány nové banky, pojišťovny a rozšířila se nabídka produktů postavených na operacích s financemi. V tento okamžik začala opět být životně důležitá dobrá znalost práce s penězi a finančními produkty. Podnikatelé k rozjezdu firem potřebovali vstupní kapitál, proto začali většinou kontaktovat finanční ústavy. Při jednání s bankami, spořitelnami, či záložnami nastaly pro podnikatele problémy a u nemalého procenta byly fatálního charakteru. V lepším případě si podnikatel včas uvědomil neúnosnost splácení půjček a jejich úroků, v tom horším případě na to doplatil po několika letech ztrátou firmy, majetku a také nadějí na další podnikání. V běžném životě se objevila nutnost rozšíření a doplnění základních znalostí z finanční matematiky.

První otázkou bylo nalezení vhodného prostoru pro obnovenou výuku základů finanční matematiky. Podle mého pohledu na strukturu obyvatelstva jsou nejvhodnější skupinou středoškolští studenti, neboť z nich vznikala většina budoucích podnikatelů. Ponechání výuky finanční matematiky jen na vysokých ekonomických školách zaměřujících se na výchovu budoucích odborníků finančních ústavů, či její rozšíření na další typy vysokých škol, by problém nevyřešilo, protože procento podnikatelů s vysokoškolským vzděláním, respektive vysokoškolským vzděláním finančního charakteru je mizivé.

Od roku 1989 postupně prochází finanční matematika obrozením zejména na středních školách, neboť ve druhé polovině dvacátého století byla na nich tato problematika vřazena pouze do kapitoly *Posloupnosti a řady*, v níž byly příklady procvičující jen jednoduché úročení (aritmetická posloupnost) a složené úročení (geometrická posloupnost). Nepatrně více se dozvěděli jen studenti středních ekonomických škol (dnes obchodní akademie) v rámci odborných ekonomických předmětů. Matematický aparát potřebný ke zvládnutí výpočtů ve finanční matematice bývá na středních školách vyložen a procvičen v hodinách matematiky již během prvních tří let. Výuku finanční matematiky je proto nejvhodnější zařadit do osnov třetího ročníku. Dalšími důvody je, že student vidí nové uplatnění získaných vědomostí a není ještě časově stresován maturitními zkouškami.

V této kapitole se pokusím analyzovat středoškolské učebnice a sbírky věnující se finanční matematice, které vyšly po roce 1989. Ukážu jejich vývoj, pokrok a aktualizaci jejich stavby v závislosti na společenských požadavcích. Je nutná vzhledem rozvoji bankovnictví a rozšiřování nabídek finančních produktů. Finanční ústavy se navzájem předbíhají v nabídkách, aby získaly klienta, a proto klient musí být schopen se v nich dobře a rychle orientovat.

Snažil jsem se vybrat takové učebnice a sbírky, abych co nejlépe pokryl všechny typy a úrovně středních škol. Zhodnotím následující učebnice:

- obchodní akademie: *Úvod do finanční matematiky* (B. Eichler);
- střední odborné školy: *Hospodářské výpočty* (B. Eichler);
- střední odborné školy a střední odborná učiliště: *Ekonomika*, 5. díl (J. Mlčoch);
- střední odborné školy a střední odborná učiliště: *Posloupnosti a finanční matematika* (O. Odvárko);
- gymnázia: *Matematika – Posloupnosti a řady* (O. Odvárko).

Budu se také věnovat speciálním učebnicím a příručkám oslovujícím veřejnost a středoškoláky bez rozlišení typu střední školy, tj. orientujících se především na zájemce o prohloubení základních znalostí. Jedná se o tyto učební pomůcky:

- střední školy: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy* (O. Odvárko);
- střední školy: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio* (O. Odvárko, J. Robová);
- příprava na vysokou školu ekonomickou: *Finanční matematika v příkladech* (J. Radová; V. Chýna, J. Málek);
- veřejnost: *Finanční matematika pro každého* (J. Radová, P. Dvořák, J. Málek).

Na následujících stránkách zhodnotím zejména výše uvedené učebnice a sbírky, které pokrývají učivo většiny typů středních škol. Dále nahlédnu do dvou sbírek úloh z matematiky pro základní školy:

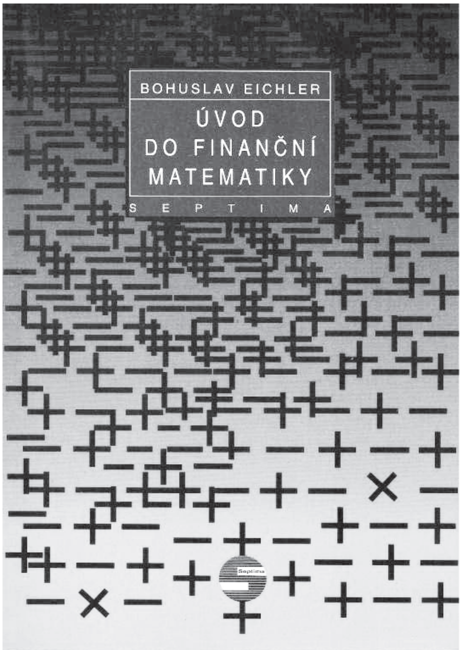
- *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ* (F. Běloun);
- *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií, ARITMETIKA, ALGEBRA, FUNKCE* (P. Krupka).

V závěru kapitoly připomenu existenci ještě jedné kvalitní učebnice finanční matematiky, která však z mého pohledu překračuje rozsahem, přístupem a náročností učivo střední školy:

- *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou* (T. Cipra).

6.1 Učebnice a sbírky pro střední školy

Bohuslav Eichler: *Úvod do finanční matematiky*, 1. vydání, Septima, Praha, 1993, 80 stran.



Úvod do finanční matematiky je první učebnice finanční matematiky, se kterou jsem se jako středoškolský učitel setkal a využíval ji při výuce. Je určena především středoškolským studentům a dne 8. 2. 1993 ji schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR pod č. j. 11 673/93-23 k zařazení do seznamu učebnic pro obchodní akademie. Svou strukturou je vhodná i pro podnikatele, kteří se při své práci musí potýkat s mnoha finančními otázkami.

Učebnice není příliš matematicky náročná. Autor v ní předpokládá pouze elementární znalosti procentového počtu, aritmetických a geometrických posloupností. Je rozdělena na deset základních kapitol, které jsou dále členěny na menší části – podkapitoly, v nichž jsou ilustrovány jednotlivé aplikace finanční matematiky. Autor při výkladu nepracuje s daní z úroků, ale zaměřuje se na podrobnější charakteristiku činností finančních ústavů.

Rámcové osnovy matematiky na gymnáziu neposkytovaly v devadesátých letech dvacátého století příliš volnosti pro vložení celé další oblasti, a proto jsem vykládal finanční matematiku podle této učebnice na semináři z matematiky pro třetí ročníky. Rozsah osmdesáti stran velmi dobře vyhovoval omezenému času, který jsem mohl této problematice věnovat. Při dotaci dvou vyučovacích hodin týdně jsem látku vyložil a procvičil během dvou měsíců. Studenti ji byli schopni vstřebat a závěrečný test z finanční matematiky dopadl každý rok velmi dobře. Tento přístup však měl jednu obrovskou nevýhodu a to, že seminář byl volitelný a ne každý si ho tedy vybral a prošel základy finanční matematiky. Od studentů, kteří výklad absolvovali, jsem měl pouze kladné odezvy a mnoho dalších podnětných poznámek, z nichž jsem však většinu nemohl uskutečnit z výše zmíněných časových důvodů. Jednalo se zejména o žádosti o rozšíření časové dotace finanční matematiky, návštěvy bank s rozborem jejich produktů, analýzy letáků, reklam a inzerátů, které nabízely různé druhy půjček a hypoték.

Obsah učebnice

1 Jednoduché úrokování (10 stran);

2 Výpočty na účtech v peněžních ústavech (10 stran);

2.1 Postupný způsob výpočtu úroků na účtech v peněžních ústavech;

2.2 Zůstatkový způsob výpočtu úroků na účtech v peněžních ústavech;

3 Složené úrokování (4 strany);

4 Kombinované úrokování (4 strany);

4.1 Úrokovací doba zahrnuje část prvního úrokovacího období a několik celých úrokovacích období;

4.2 Úrokovací doba zahrnuje několik celých let a část posledního úrokovacího období;

4.3 Úrokovací doba zahrnuje část prvního období, několik celých období a část posledního období;

5 Diskontování (2 strany);

6 Výpočet úrokovací doby a úrokové míry při složeném úrokování (3 strany);

7 Dlouhodobé střádání (7 stran);

7.1 Dlouhodobé střádání počátkem roku;

7.2 Dlouhodobé střádání koncem roku;

7.3 Dlouhodobé střádání počátkem měsíce;

7.4 Dlouhodobé střádání koncem měsíce;

8 Důchodový počet (3 strany);

9 Umořování dluhu (4 strany);

10 Početní technika kalkulace (20 stran);

10.1 Nákupní kalkulace;

10.2 Prodejní kalkulace;

10.3 Výrobní kalkulace;

Výsledky cvičení;

Příloha: tabulky úročitelů, odúročitelů, střadatelů, zásobitelů a umořovatelů.

Jednotlivé kapitoly umožňují studentům osvojení základů finanční matematiky, ale dávají i možnost hlubšího pochopení úloh s finanční tématikou. Pro učitele a zejména studenty je na konci učebnice připojena pětistránková příloha, která obsahuje tabulky důležitých parametrů finančnictví. Slouží ke kontrole výpočtů na kalkulátorech, neboť studenti mají ne zřídka problémy s použitím kalkulaček a nejsou si jisti ani svými výpočty.

Každá kapitola je uzavřena přibližně půlstránkovým shrnutím základních pojmů a vzorců. Učebnice obsahuje 38 vzorově řešených úloh a 30 neřešených příkladů, jejichž výsledky jsou uvedeny v závěru knihy. Text učebnice je stručný a jasný, koncepce i grafická úprava zvyšuje přehlednost a srozumitelnost prezentované látky.

Základní charakteristiky jednotlivých kapitol

1 Jednoduché úrokování

V této kapitole se student seznamuje se základními pojmy: kapitál, jistina, úroková míra, úrokovací období, úroková doba, úrok. Naučí se vypočítávat délku úrokovací doby, bez které by nebyl schopen úročit.

Pro výpočet délky úrokovací doby se používají dvě základní metody – přímá a odčítací. V obou metodách se uplatňuje pravidlo mezních dnů (den vkladu a den výběru), z nichž zahrnujeme pouze a právě jeden.

Přímá metoda postupuje od měsíce vkladu přes měsíce uložení k měsíci výběru. Počet dnů je součtem tří čísel: počet dnů uložení v měsíci vkladu, počet dnů měsíců uložení a počet dnů v měsíci výběru.

Odčítací metoda je na rozdíl od přímé méně pracná, ale pracuje jen se standardem 30A/360 (americká metoda – rok má 360 dnů a každý měsíc 30 dnů, jen v případě výběru 31. dne měsíce má tento poslední měsíc všech 31 dnů). Počet dnů je součtem rozdílu dne výběru a dne vkladu a třicetinásobku rozdílu měsíce výběru a měsíce vkladu.

Po vyložení těchto metod následují jednoduché praktické úlohy na jednoduché úročení.

Uveďme jeden příklad na ilustraci:

Na vkladní knížce úročené 9 % úroku p. a. bylo 31. 12. Kč 16 948,–. Knížka byla zřízena 4. 5. Vypočtěte původní jistinu a úroky. ([E1], str. 13, výsledek: jistina 16 000,– Kč, úroky 948,– Kč)

2 *Výpočty na účtech v peněžních ústavech*

Cílem této kapitoly je, aby se student naučil sledovat stav a pohyb peněz na svém účtu, vypočítat úrokovací dobu a úroky. Seznamuje se se dvěma základními způsoby:

- postupný způsob výpočtu úroků;
- zůstatkový způsob výpočtu úroků.

V úvodu autor naznačuje, že se v minulosti hledala nejpřehlednější a nejméně pracná metoda zaznamenávání finančních prostředků a úroků. Nejvíce se osvědčila metoda, při níž se účty po každém úrokovacím období uzavírají, vypočítává se úrok a tento úrok se připisuje k účtu. A právě tato metoda se pečlivě a dopodrobna vysvětluje a demonstruje na několika příkladech.

Pro jednoduchý a přehledný zápis je vytvořena tabulka, kde nejdůležitější jsou sloupce *Má dáti*, *Dal* a *Zůstatek*. Při studiu základů finanční aritmetiky se student učí sestavovat tyto tabulky.

Datum	Text	J i s t i n a Kč		
		Má dáti	Dal	Zůstatek

Oba způsoby, s nimiž se student seznámí, se liší pouze ve výpočtu úroků. V postupném způsobu se úrok vypočítává z částky ve sloupci *Má dáti*, *Dal* nebo *Zůstatku* převedeného z minulého úrokovacího období a úrokovací doba se počítá do konce úrokovacího období. Při zůstatkovém způsobu se pracuje jen se sloupcem Zůstatek a úrokovací doba k jednotlivým zůstatkům je počet dnů, po kterých se zůstatek nemění.

Ukažme typický příklad:

Vypočtěte postupným a zůstatkovým způsobem úroky na vkladovém účtu úročeném 4 % p. a. Účet měl 1. 1. zůstatek Kč 16 245,–, 18. 2. na něj byly uloženy Kč 4 000,– a 4. 7. z něho bylo vybráno Kč 9 000,–. Sestavte vkladový účet a uzavřete jej koncem roku. ([E1], str. 23, výsledek: úroky 611,91 Kč, zůstatek 11 856,91 Kč)

3 *Složené úrokování*

Tato kapitola studenta seznamuje s nejčastějším typem úrokování – složeným úrokováním. Ukazuje, že sice existují tabulky úročitelů, ale výklad zdůrazňuje spojitost složeného úročení s geometrickou posloupností. Uvádí především zjednodušené úlohy z praxe (např. není uvažována daň z úroků), což usnadňuje pochopení probírané látky.

Následující příklad dobře ilustruje vyučovanou problematiku:

Jan Novák půjčil Josefu Adamovi Kč 35 000,– na 6 let a dohodli úrok ve výši 9 % ročně. Jak velkou částku splatí J. Adam půjčku i úroky? ([E1], str. 28, výsledek: úroky 23 698,50 Kč, splátka 58 698,50 Kč)

4 *Kombinované úrokování*

V této kapitole je studentovi přiblížena finanční praxe běžného života, neboť jistina většinou nebývá uložena první den a vybrána poslední den úrokovacího období, a proto musí student zvládnout také kombinované úrokování, tj. kombinaci jednoduchého a složeného úrokování. Podrobně jsou popsány tři typy situací, které mohou nastat:

- úrokovací doba zahrnuje část prvního úrokovacího období a několik celých úrokovacích období;
- úrokovací doba zahrnuje několik celých let a část posledního úrokovacího období;
- úrokovací doba zahrnuje část prvního období, několik celých období a část posledního období.

Ukázkový příklad:

Dne 4.9. 1993 si podnikatel pan Vorel půjčil na 6 let Kč 80 000,– na 15 % úroku ročně. Kolik korun bude činit jeho dluh (pokud nebude nic splácet) k 31. 12. 1997? ([E1], str. 32, výsledek: dluh Kč 146 741,62)

5 *Diskontování*

Autor nejprve vyloží pojem diskontovat neboli odúročit, což znamená vypočítat původní hodnotu kapitálu před daným počtem úrokovacích období. Zavádí pojem odúročitel, který je převrácenou hodnotou úročitele při složeném úročení, s nímž se nejčastěji pracuje při plánování, když chce investor do určité doby získat určitý kapitál a zná úrokovou míru. Diskontováním se zjistí výše nutného počátečního kapitálu. Autor připomíná i další oblast, kde se běžně pracuje s diskontováním, resp. diskontem, a to je při koupi a prodeji cenných papírů.

6 *Výpočet úrokovací doby a úrokové míry při složeném úrokování*

Jedná se o další kapitolu patřící do oblasti složeného úrokování. Student se seznámí s novými typy příkladů, s využitím tabulek úročitelů a hlouběji procvičí základní vzorec

$$j_n = j_0 \cdot r^n,$$

kde j_n je jistina po n úrokovacích obdobích, j_0 je počáteční jistina, r je úročitel jednoho úrokovacího období a n je počet úrokovacích období.

Jednotlivé úlohy se liší typem otázky, a tak hlavním úkolem studenta je vyjádření neznámé ze vzorce. Umístění neznámé ve vzorci v některých případech také nutí studenta pracovat s logaritmy. Autor tedy předpokládá, že student zvládl řešení exponenciálních a logaritmických rovnic.

Pro větší názornost uveďme příklad:

Za kolik let vzroste jistina 80 000,– Kč při 15 % na 160 908,86 Kč? ([E1], str. 37, výsledek: za 5 let)

Domnívám se, že student bude patrně postupovat takto:

Po dosazení zadaných hodnot do základního vzorce získá rovnici:

$$160\,908{,}56 = 80\,000 \cdot 1{,}15^x.$$

Zlogaritmováním, využitím základních vět o logaritmech a po úpravách dostává:

$$x = \frac{\log 160\,908{,}56 - \log 80\,000}{\log 1{,}15} = 5.$$

7 Dlouhodobé střádání

Sedmá kapitola je věnována dlouhodobému střádání. Dlouhodobým střádáním je chápáno pravidelné ukládání stále stejně velké částky, tzv. anuity. Student se učí řešit úlohy, v nichž se při složeném úrokování ukládá pravidelně stejná částka při neměnné úrokové míře. Probírány jsou čtyři okruhy:

- dlouhodobé střádání počátkem roku;
- dlouhodobé střádání koncem roku;
- dlouhodobé střádání počátkem měsíce;
- dlouhodobé střádání koncem měsíce.

V okruhu *Dlouhodobé střádání počátkem roku* je poprvé vysvětleno pravidelné ukládání peněz. Nejprve je zaveden pojem střadatel a uvedena tabulka střadatelů. Pro větší názornost jsou příklady počítány nejprve klasickým „postupným“ způsobem. Provádí se složené úrokování každého vkladu samostatně. Poté se ukáže souvislost dlouhodobého střádání s částečným součtem členů geometrické posloupnosti. Postupný výpočet pracuje tedy s každým vkladem jako se samostatnou jednotkou a teprve poté jsou všechny částečné hodnoty sečteny. Výsledek postupného výpočtu je porovnán s výsledkem postupu s využitím střadatele a je zdůrazněna nebezpečnost zaokrouhlování.

V okruhu *Dlouhodobé střádání koncem roku* jsou úlohy vysvětlovány s odkazem na předešlý okruh. Opět jsou ukázány oba základní postupy (tj. postupný výpočet a postup s využitím střadatele) a vysvětlena je jejich odlišnost. Ta spočívá v tom, že každý vklad je úročen o jeden rok méně. Jedná se tedy opět o součet několika členů geometrické posloupnosti, které jsou posunuté o jeden prvek doleva, tj. vždy k předcházejícímu členu.

V části *Dlouhodobé střádání počátkem měsíce* se předpokládá, že student umí aplikovat znalosti jednoduchého i složeného úrokování. Nejprve musí vypočítat tzv. roční úsporu, což je částka, kterou pravidelným ukládáním počátkem měsíce investor nastřádá během jednoho roku. Každý vklad je na účtu jinou dobu a je tedy úročen odlišně. Vzniklá částka je částkou na konci roku a student využije poznatků z předešlého okruhu, tj. částka ukládaná pravidelně na konci roku.

V části *Dlouhodobé střádání koncem měsíce* se vysvětluje jediný rozdíl od předešlé části, který spočívá ve výpočtu roční úspory. Při výpočtu roční úspory je každý vklad na účtu o jeden měsíc kratší dobu než v předešlé části. Při výpočtu této hodnoty se opět uplatňuje jednoduché úrokování a studentovi je vše vysvětlováno jako součet členů posloupnosti.

Ocitujme typický příklad z této kapitoly:

Pravidelně měsíčně střádáme Kč 200,– po dobu tří let při 9 % úroku ročně. Kolik korun nastřádáme při úložkách počátkem, resp. koncem každého měsíce? ([E1], str. 44, úspora 8 250,98 Kč, resp. 8 191,97 Kč)

8 Důchodový počet

V osmé kapitole je student podrobněji seznámen s podstatou důchodového počtu. Jsou zde zavedeny základní pojmy: zakládací jistina, důchod, zásobitel, dočasný a stálý důchod. Vše je vysvětleno na základě složeného úrokování a také pomocí názorných grafů. Praktické využití dočasných důchodů je předvedeno na úlohách o zajištění pravidelného příjmu po dobu studia nebo na problému doplňku starobního důchodu. Početně student vystačí se znalostmi z předešlých kapitol.

Ilustrační příklad:

Jak velkou zakládací jistinou si zajistíte měsíční důchod Kč 400,–, pobíraný počátkem měsíce, na dobu čtyř let při 9 % úroku ročně? ([E1], str. 47, 16 308,75 Kč)

9 Umořování dluhu

Největší nebezpečí při práci s financemi spočívá v neschopnosti splácet dluh. Každý, kdo si potřebuje nebo jen chce půjčit finanční prostředky, by si měl udělat čas na prostudování této kapitoly. V ní je vysvětlen základní princip splácení dluhu a úroků z něho plynoucích pomocí pravidelných splátek. Novým pojmem je umořovatel, který je roven převrácené hodnotě zásobitele. Student se seznamuje se sestavováním umořovacích plánů a objevuje výhody a nevýhody dluhu.

Ukažme vše na jednom konkrétním příkladu.

Občan si vypůjčil Kč 80 000,– na tři roky při 18 % p. a. Kolik korun musí splácet koncem každého roku, aby uvedený dluh a úroky z něho plynoucí splatil? ([E1], str. 50)

Nejprve vypočteme podle známého vzorce roční anuitu, tj.

$$\alpha = D_n \cdot (a_n^{(i)})^{-1},$$

neboli $$\alpha = 80\,000 \cdot 0{,}459\,923\,7.$$

Symbol ($a_n^{(i)}$) označuje zásobitele, jeho převrácenou hodnotou je umořovatel. Jeho hodnotu 0,459 923 7 nalezneme v tabulce umořovatelů podle počtu úrokovacích období a úrokové míry. V učebnici je vysvětlen také postup výpočtu zásobitele pomocí vzorce, tj. bez použití tabulky. Jednoduchým výpočtem dospějeme k výsledku, že občan musí ročně splácet 36 793,90 Kč.

Student ze znalosti předchozích kapitol sestaví přehledný umořovací plán:

Rok	Dluh počátkem roku Kč	Anuita 36 793,90 Kč		Dluh koncem roku Kč
		úrok Kč	úmor Kč	
1	80 000,00	14 400,00	22 393,90	57 606,10
2	57 606,10	10 369,10	26 424,80	31 181,30
3	31 181,30	5 612,63	31 181,27	0,03

10 Početní technika kalkulace

Poslední, desátá kapitola je zaměřena na praktické potřeby podnikatelů, neboť jsou v ní vysvětlovány různé úlohy z podnikatelské praxe, výhody a nevýhody při různých finančních nabídkách a transakcích. Problematika rozvíjí logické podnikatelské uvažování, seznamuje s výpočetními algoritmy a vývojovými diagramy pro:

- nákupní kalkulace;
- prodejní kalkulace;
- výrobní kalkulace.

Ilustrujme obsah kapitoly jedním příkladem:

Výrobce lyží má možnosti prodávat výrobky takto:

- *dodat 400 párů lyží velkoobchodu po Kč 1 620,– za pár, zaplatit dopravné a pojistné do velkoobchodního skladu Kč 13 800,–;*
- *prodat 400 párů lyží drobným prodejcům po Kč 1 560,– s odběrem v odbytovém skladu výrobce lyží;*
- *vyvézt 400 párů lyží do SRN při ceně DEM 90,– za pár lyží (kurs DEM = Kč 18,40), zaplatit dopravné a pojistné do skladu odběratele v SRN Kč 64 800,–.*

([E1], str. 59, skutečná prodejní cena jednoho páru lyží: velkoobchod – 1 585,50 Kč; drobní prodejci – 1 560,– Kč; SRN – 1 494,– Kč)

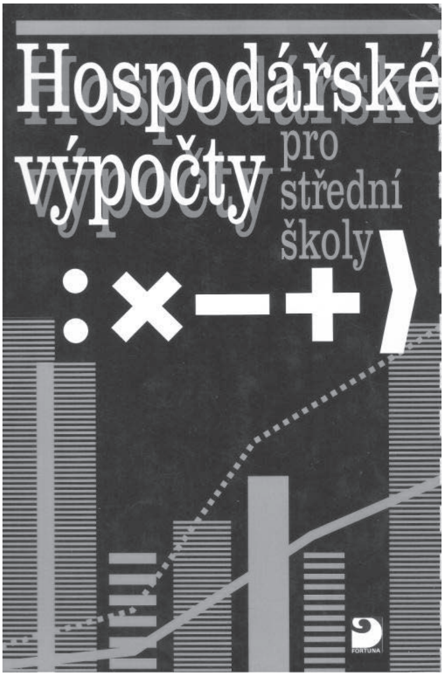
Hodnocení učebnice

Tato učebnice je napsána tak, aby všem studentům umožnila pohled do světa finanční matematiky, tedy i těm, kteří dosud tu možnost neměli a znali „cosi“, co zbylo po redukci na jednoduché a složené úročení jednoho obnosu v kapitolách o posloupnostech a řadách. Student dostává možnost zamyslet se nad nabídkami a myšlením finančních ústavů a může zvažovat všechna pro a proti při výběru jejich produktů, kterých stále přibývá. Získává totiž nástroj, který mu umožní se mezi nimi orientovat.

Příklady uvedené v učebnici, řešené i na procvičení, jsou po obsahové stránce praktické, matematicky nejsou příliš náročné, textově jsou stručné a jasné. Absence kalkulací daní s úroků je cílená, aby neodváděla pozornost studenta od podstaty. Autor nutí studenta přemýšlet a hodnotit situaci při práci s financemi a eliminuje rušivé vlivy.

Učebnici z vlastní pedagogické zkušenosti hodnotím kladně, neboť podle mého názoru je přehledným a dobře napsaným úvodem do finanční matematiky. Ačkoli je poměrně stručná, tematicky pokrývá širokou problematiku finanční matematiky. Objemově je únosná, což jsem jako učitel velmi ocenil, neboť osnovy „klasické“ matematiky jsou velmi nabité. V současné době na většině středních škol neexistuje samostatný předmět finanční matematika. Studenti se této problematice mohou hlouběji věnovat, jak jsem již zmiňoval, jen na volitelných seminářích, ale i v nich je pozornost převážně zaměřena na přípravu k maturitní a přijímací zkoušce. Učitel je časově velmi svázán a navíc velké procento učitelů považuje finanční matematiku za aplikaci matematiky, kterou se není třeba speciálně zabývat. V globálu to tedy znamená, že stále velké procento středoškolských studentů neabsolvuje ani základní „kurs“ finanční aritmetiky během svého středoškolského studia. Pro vyvrácení názoru o nedůležitosti tohoto „kursu“ je třeba ještě vykonat mnoho. Jednou z cest by mohlo být vypisování seminářů pro učitele v rámci jejich dalšího vzdělávání.

Bohuslav Eichler: *Hospodářské výpočty pro střední školy*, 1. vydání, Fortuna, Praha, 2001, 120 stran.



Druhá učebnice Bohuslava Eichlera je určena pro výuku hospodářských výpočtů, tj. samostatného předmětu na středních odborných školách a dne 3. 5. 2001 ji schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR pod č. j. : 16 745/2001-23 k zařazení do seznamu učebnic pro tento typ škol.

Finanční matematice je věnována pouze šestá kapitola nazvaná *Úrokový počet* (rozsah 31 stran).

Kapitola je rozdělena na následující podkapitoly:

6.1 Základní pojmy a vztahy úrokového počtu;

6.2 Výpočet úroku při jednoduchém úrokování;

6.3 Výpočet úroku z úrokových součinů dělením úrokovým dělitelem;

6.4 Výpočet společného úroku z několika jistin;

6.5 Další úlohy jednoduchého úrokového počtu (Výpočet původní jistiny, Výpočet úrokové míry);

6.6 Výpočty při zvětšené jistině;

6.7 Výpočty úroků na účtech v bankách;

6.8 Srovnání jednoduchého a složeného úrokování.

Učební text dává jen velmi povrchní pohled do světa financí a rozhodně není dostačující. Ve srovnání s *Úvodem do finanční matematiky* [E1] bychom mohli tuto kapitolu pojmenovat *Úvod k úvodu do finanční matematiky*.

Uveďme dva typické příklady, abychom ukázali témata probíraná v učebním textu:

Příklad 1: *Věřitel přijal Kč 430 666,67 jako splátku půjčky po 345 dnech a úroky ve výši 8 % p. a. Jak velká byla půjčka a jak velký byl úrok?* ([E2], str. 109, půjčka 400 000,– Kč, úrok 30 666,67 Kč)

Příklad 2: *Podnikatel si půjčil 1. 1. 2001 na dobu pěti let Kč 2 000 000,– při úroku 9 % ročně. Úvěr i úroky bude splácet po pěti letech. Kolik korun bude platit?* ([E2], str. 108, splátka 3 077 247,90 Kč)

Hodnocení učebnice

Cílem učebnice není jen finanční matematika, ale jsou to především hospodářské výpočty, které patří do obchodní, podnikatelské i manažerské praxe a rozhodují o dalším vývoji firmy, zakázky apod.

Učebnice je určena pro žáky středních odborných škol různého zaměření, a proto nemůže být jednostranně zaměřena. Autor také nemůže předpokládat matematickou úroveň studentů gymnázií či obchodních akademií. Jeho hlavní snahou je zmechanizovat některé již dříve (ze základní školy) známé početní postupy (např. trojčlenka, rozdělovací počet, směšovací počet), které procvičuje v prvních čtyřech kapitolách. Důraz klade na dovednost žáků použít tyto postupy v praxi, čemuž odpovídá struktura úloh. Pak následuje rozsáhlá pátá kapitola věnovaná procentovému počtu, kde jsou od základů vyložena všechna pravidla pro práci s procenty. Na tuto kapitolu bezprostředně navazuje kapitola vysvětlující základy úrokového počtu. Její rozsah i obsah je vhodný právě jen pro výklad jednoduchého a složeného úročení. Studenti se s finanční matematikou seznámí prostřednictvím jednoduchých řešených a neřešených příkladů. Kladem je, že kapitola umožňuje vhled do finanční matematiky poměrně velké skupině žáků odborných škol a podporuje tedy obrození této tématiky.

Jan Mlčoch: *Ekonomika pro střední školy, 5. díl: Bankovnictví a pojišťovnictví. Daně a cla*, 1. vydání, Fortuna, Praha, 1992, 54 stran.

Na některých odborných školách (např. integrované střední školy obchodního zaměření, podnikatelské střední školy) a zejména na obchodních akademiích existuje samostatný povinný nebo volitelný předmět ekonomika. Jeho úkolem je seznámit žáka se základními ekonomickými pojmy, s cíli a formami podnikání, s evidencí zboží, zásob a financí, platebním stykem, s jednoduchým účetnictvím, marketingem, managementem a také s bankovnictvím, pojišťovnictvím, daněmi a clem.

Téma bankovnictví a pojišťovnictví zahrnuje vztah podnikatele a banky, podnikatele a pojišťovny a rozhodování o investicích.

Řadu učebnic ekonomiky autorů Zdeňka Novotného (1. díl: *Základní ekonomické pojmy*; 2. díl: *Cíle a formy podnikání*; 3. díl: *Prvotní evidence a platební styk. Jednoduché účetnictví*), Jana Trunečka (4. díl: *Marketing a management*) a Jana Mlčocha (5. díl: *Bankovnictví a pojišťovnictví. Daně a cla*) v letech 1992 a 1993 schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky k zařazení do seznamu učebnic pro střední školy.

Řada je zaměřena na přípravu budoucích úředníků či podnikatelů. Jednotlivé kapitoly seznamují studenta s nejrůznějšími aspekty podnikání. Struktura, obsah i výklad je podřízen praktickým potřebám budoucího podnikatele.

Podíváme se podrobněji pouze na pátý díl sepsaný Janem Mlčochem, který stručně analyzuje vztahy podnikatel – banka – investice.

Obsah 5. dílu

Jak je z výše uvedeného obsahu patrné, pátý díl obsahuje dvě základní kapitoly. Za každou kapitolou autor uvádí přehledný seznam základního učiva a vodítko pro další studium, které pomáhá žákovi při opakování látky. Rozboru podrobíme jen první kapitolu *Bankovnictví a pojišťovnictví*, neboť obsahuje učivo, které patří do finanční matematiky.

V této kapitole je 12 řešených příkladů a 10 neřešených úkolů. Řešené úkoly obsahují podrobný návod a komentář postupu řešení.

Ukažme vše na příkladu:

Příklad výpočtu anuit při spotřebě uložené hodnoty

Na vkladní knížce s úrokovou sazbou 10 % ročně máme uloženo 100 Kčs (složité úrokování). Chceme tuto částku během 5 let vybrat tak, že každý rok vybereme stejnou částku. Jaká je její velikost?

Řešení: Dosadíme do vzorce pro výpočet anuity ze současné hodnoty:

$$s_u = 0{,}1,\ r = 1 + 0{,}1 = 1{,}1,\ n = 5$$

$$a_s = \frac{r^n \cdot s_u}{r^n - 1} = \frac{1{,}1^5 \cdot 0{,}1}{1{,}1^5 - 1} = \frac{1{,}610\,51 \cdot 0{,}1}{1{,}610\,51 - 1} = 0{,}263\,79$$

Výsledným anuitním koeficientem vynásobíme kapitál, který máme k dispozici:

$$100 \cdot 0{,}26379 = 26{,}38$$

Ročně si za uvedených podmínek můžeme vybrat vždy 26,38 Kčs. ([M5], str. 15)

Cílem autora je ukázat, jak se kapitál zvyšuje o úrok z minulého roku a klesá o pravidelně vypočtenou částku 26,38 Kčs. Vše shrne do tabulky.

Stav na vkladní knížce se postupně vyvíjí takto (údaje v Kčs):

	Počátek	*Výběr 1. ledna*	*Zůstatek*	*Roční úrok*	*Konec*
1. rok	*100,00*	–	*100,00*	*10,00*	*110,00*
2. rok	*110,00*	*26,38*	*83,62*	*8,36*	*91,98*
3. rok	*91,98*	*26,38*	*65,60*	*6,56*	*72,16*
4. rok	*72,16*	*26,38*	*45,78*	*4,58*	*50,36*
5. rok	*50,36*	*26,38*	*23,98*	*2,40*	*26,38*
6. rok	*26,38*	*26,38*	–	–	–

([M5], str. 16)

Učebnice vyšla v roce 1992 v Československu, proto byla použita zkratka měny Kčs, tj. korun československých.

V tabulce jsou kromě výsledku údaje o postupném vývoji disponibilního kapitálu. Abychom porozuměli jednotlivým hodnotám, je třeba se zaměřit na vlastní postup výpočtu hodnot jednotlivých buněk, což můžeme shrnout do tří kroků, tedy

1. *Počátek – Výběr = Zůstatek*;
2. *Zůstatek · Úroková míra = Roční úrok*;
3. *Zůstatek + Roční úrok = Konec*, což je *Počátek* pro následující rok.

Výše hodnot a zanedbání daně z úroků podporuje tento autorův cíl.

Základní charakteristika jednotlivých podkapitol

5.1.1 Podnikatel a banka

V této podkapitole se student seznámí s bankovní soustavou, rolí peněz a zejména vztahem banka a klient. Je zde charakteristika základních bankovních služeb (vkladní knížky, účty, úvěrová činnost, směnárenská činnost, operace s cennými papíry atd.). Autor nejprve vysvětlí pojem úrok a úroková sazba, pak uvede jednoduchou úlohu na výpočet úroků a úlohu na porovnání růstu hodnoty kapitálu při jednoduchém a složeném (zde pojem složitém) úrokování. V komentáři řešení úlohy autor využívá také názorný grafický popis.

V dalších příkladech počítá budoucí kapitál a vysvětluje výpočet pravidelných ročních plateb – anuit. Vzorce uvádí v konečném tvaru bez odvození. Spojitost vzorců s posloupnostmi je zmíněna jen v komentáři řešené úlohy.

Příklad pro ilustraci náročnosti:

Jaké budou celkové úrokové náklady při úvěru 100 Kčs spláceném v pravidelných pololetních splátkách 4 roky při roční úrokové sazbě 10 %? ([M5], str. 18)

Při řešení se použije hodnota 22,5 % nalezená v tabulce souhrnných koeficientů (viz níže) a pak se jen vypočítá tato procentová část z hodnoty úvěru, který je nezvykle malý. Nedokážu si představit, že by někdo žádal o úvěr o hodnotě 100 korun.

Tabulka souhrnných koeficientů ([M5], Tab. 3, str. 18):

Úroková sazba % p. a.	*Doba splácení úvěru v letech*					
	0,5	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
10	*5,00*	*7,50*	*12,50*	*17,50*	***22,50***	*27,50*
11	*5,50*	*7,25*	*13,75*	*19,25*	*24,75*	*30,25*
12	*6,00*	*9,00*	*15,00*	*21,00*	*27,00*	*33,00*
13	*6,50*	*9,75*	*16,25*	*22,75*	*29,25*	*35,75*
14	*7,00*	*10,50*	*17,50*	*24,50*	*31,50*	*38,50*
15	*7,50*	*11,25*	*18,75*	*26,25*	*33,75*	*41,25*

Velkou pomoc studentovi poskytuje tabulka zobrazující vývoj úvěru, která je uvedena v poznámkách k řešení. Úvěr je splacen osmi pololetními splátkami ve výši 12,50 Kčs + úrokové náklady. V konečné sumarizaci úrokových nákladů je pak částka 22,50 Kčs, kterou jsme si již předem vypočítali pomocí hodnoty úvěru a souhrnného koeficientu a nyní ji máme ověřenou z postupného vývoje úvěru.

5.1.2 Rozhodování o investicích

Ve druhé podkapitole se student seznámí se základními metodami investování. Vyloženy jsou všechny základní priority investora: náklady, výnosnost, doba návratnosti a peněžní toky.

Uveďme jeden konkrétní příklad:

Vypočtěte dobu návratnosti úvěru 100 000 tis. Kčs za těchto podmínek:

konstantní tržby		*100 000 tis. Kčs/rok*
konstantní náklady		*75 000 tis. Kčs/rok*
úroková sazba		*12 % ročně*
daň ze zisku		*–*
odpisy	*1. rok*	*3 400 tis. Kč*
	dále	*6 900 tis. Kčs*

([M5], str. 26)

Řešení je pro zvýšení přehlednosti zapsáno v názorné tabulce:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6 a dále*
Tržby	*100 000*	*100 000*	*100 000*	*100 000*	*100 000*	*100 000*
Náklady	*75 000*	*75 000*	*75 000*	*75 000*	*75 000*	*75 000*
Hrubý zisk	*25 000*	*25 000*	*25 000*	*25 000*	*25 000*	*25 000*
Úroky	*12 000*	*10 032*	*7 408*	*4 469*	*1 177*	*–*
Zisk	*13 000*	*14 968*	*17 592*	*20 531*	*23 823*	*25 000*
Daň	*–*	*–*	*–*	*–*	*–*	*–*
Zisk po zdanění	*13 000*	*14 968*	*17 592*	*20 531*	*23 823*	*25 000*
Odpisy	*3 400*	*6 900*	*6 900*	*6 900*	*6 900*	*6 900*
Podnikový efekt	*16 400*	*21 868*	*24 492*	*27 431*	*30 723*	*31 900*
Splátky úvěru	*16 400*	*21 868*	*24 492*	*27 431*	*9 809*	*–*
Zůstatek úvěru	*83 600*	*61 732*	*37 240*	*9 809*	*–*	*–*
Volné zdroje	*–*	*–*	*–*	*–*	*20 914*	*31 900*

([M5], Tab. 4, str. 26)

V příkladu se počítá umořování dluhu nestejnými anuitami, kdy se na splácení úvěru použije kompletní podnikový efekt. Student se naučí, že tímto způsobem se dluh umoří v nejkratší možné době. Současně se v komentáři dozví, že při plánování takovéhoto splácení je nutné mít vše zahrnuté ve smlouvě.

Hodnota úroku se vypočítává jako 12 % ze zůstatku úvěru v minulém roce. Tedy každá splátka je až na konci roku, i v případě pátého roku, i když by byl podnik schopen půjčku splatit dříve.

Celková doba splácení, tj. doba návratnosti úvěru, se zde počítá pro pátý rok klasickou úměrou. Tedy doba návratnosti jsou 4 roky a taková část pátého, která je rovna podílu splátky úvěru a podnikového efektu (v uvedeném příkladu 0,32).

5.1.3 Podnikatel a pojišťovna

V poslední podkapitole se autor věnuje pojišťovnictví a jeho významu pro podnikatele. Zdůrazňuje především podnikatelská rizika, kterým se podnikatel může částečně bránit pojištěním.

Student se seznámí s úvodem do pojistné matematiky, naučí se počítat základní pojistné sazby a sazby pojistné prémie, aby dosáhl optimálního výnosu.

Principy pojistné matematiky jsou pro studenta novou aplikací dovedností získaných ve finanční matematice. Vyčíslení míry rizika pojišťovnou na základě statistických údajů má podobu spolehlivé předpovědi, která je založena na dlouhodobých zkušenostech. Tato předpověď slouží k ochraně pojišťovny i podnikatele. Ochranou je míněna ochrana před různými riziky (např. podnikatelskými, věcně technickými, obchodně ekonomickými). Mechanismus ochrany proti rizikům rizika omezuje, rozvrhuje, přesouvá, přenáší, kompenzuje, neutralizuje a dělí. Vše závisí na typu existujících rizik, které v některých případech podnikatel ovlivnit může, ale v jiných nikoli.

Pracuje se s pojmy *zásobitel* a *střadatel*, které jsou známé z finanční matematiky probírané v první části páté kapitoly.

Příklad na ilustraci:

Roční pojistné hmotného majetku je 500 Kčs. Protože jsme dosáhli mimořádného zisku, máme zájem toto pojistné zaplatit jednorázově na dobu 10 let. Kolik bude činit jednorázově zaplacené pojistné (r = 1,08)? Výsledky zaokrouhlete na celé Kčs.

Řešení:

Dosadíme do vzorce pro výpočet zásobitele pro n = 10

$$\frac{1{,}08^{10}-1}{1{,}08^{10}\cdot 0{,}08} = 6{,}710\ 08.$$

Vynásobíme roční platbou pojistného

$$500 \cdot 6{,}71008 = 3\ 355\ \text{Kč}.$$

Jednorázově zaplatíme 3 355 Kčs. ([M5], str. 35)

Porovnání částky 3 355 Kčs již není následně porovnáno s deseti splátkami po 500 Kčs. Tím může být celý efekt snížen. Při výpočtu používáme jen známé vzorce z dřívějších kapitol věnovaných finanční matematice.

Hodnocení učebnice

Tato série učebnic představuje cenného rádce budoucího podnikatele. Znalost finanční matematiky je pro něho nezbytností, ale není jediným tématem, které musí zvládnout. Proto rozsah probírané problematiky finanční matematiky, který je obsahem jen části pátého dílu, není vyčerpávající. Myslím si, že může dobře posloužit jako základní odrazový můstek k dalšímu samostudiu, ale není naprosto postačující k úplnému pochopení celé šíře finanční matematiky, což však nebylo účelem této série učebnic.

Oldřich Odvárko: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – Posloupnosti a finanční matematika*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2002, 124 stran.

Tato učebnice autora, který se dlouhodobě zabývá finanční matematikou, je věnována posloupnostem a patří do řady učebnic pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. Finanční matematika je obsažena v jedné čtvrtině jako aplikace posloupností. Učebnici schválilo MŠMT ČR č. j. 17024/02-23 dne 21. 5. 2002 k zařazení do seznamu učebnic pro střední školy. Pokrývá jedno ze základních témat středoškolské matematiky, se kterým se studenti setkávají u maturity nebo u přijímacích zkoušek na vysoké školy. Pro nás je cenná tím, že zdůrazňuje výše zmíněnou aplikaci posloupností.

Obsah učebnice

1. Posloupnosti a jejich vlastnosti (14 stran);
2. Aritmetické a geometrické posloupnosti (20 stran);
3. Posloupnosti a finanční matematika (45 stran);

4. Limity posloupností a nekonečné řady (28 stran);

Historická poznámka; Výsledky úloh; Rejstřík.

K výkladu základů finanční matematiky se autor dostává po důkladné přípravě studenta na práci s posloupnostmi, jak aritmetickými (potřebné při jednoduchém úročení), tak geometrickými (nutné při složeném úročení).

Třetí kapitola věnující se finanční matematice je nejrozsáhlejší kapitolou učebnice, čímž jasně naznačuje hlavní zaměření učebnice, tj. jedno z hlavních praktických využití posloupností. Ve všech kapitolách autor svědomitě graficky rozlišuje základní a rozšiřující učivo (postranní čára tvořená trojúhelníčky). Také náročnější úlohy viditelně označil hvězdičkou.

Třetí kapitola má následující strukturu:

3.1 Úroková míra a úrok;

3.2 Jednoduché úročení;

3.3 Úroková doba;

3.4 Složené úročení;

3.5 Úrokovací období;

3.6 Spoření;

3.7 Splácení dluhů.

Autor nabízí studentovi přehled základních objektů a operací s nimi, kterými se zabývá finanční matematika (tj. vklad, spoření, úvěr, splácení) a dává mu nástroj ke kontrolním či plánovacím výpočtům finančních operací. Finanční matematice je věnováno 45 stran, což jasně hovoří o důrazu, který autor této aplikaci posloupností přikládá.

Struktura výkladu v jednotlivých podkapitolách třetí kapitoly studenta vede od definic přes vzorce a jejich odvození k řešení konkrétních úloh. V řešených příkladech je každý důležitý krok popsán a věřím, že většina středoškolských studentů by zvládla tuto látku s touto učebnicí i formou samostudia.

Základní charakteristiky jednotlivých podkapitol

V první podkapitole *Úroková míra a úrok* jsou definice pojmů: úrok, úroková míra, depozitní certifikát, doba splatnosti a zdaňovací koeficient. Autor předpokládá znalost práce s procenty a uvádí jednoduché úlohy na procvičení. Jeho cílem je, aby si každý student v případě problémů s těmito úlohami zopakoval základní pravidla pro počítání s procenty. Jejich neznalost by měla v dalších podkapitolách vážnější charakter.

Ukažme typický příklad:

Pan Koňák uložil do banky na jeden rok 4 800 Kč s úrokovou mírou 3,8 %. Banka zúročila vklad v den jeho splatnosti; daň z úroku je 15 %. Vypočítejte úrok před zdaněním, úrok po zdanění a celkovou částku, kterou pan Koňák obdrží. ([O3], str. 45, výsledek: 182,40 Kč, 155 Kč, 4 955 Kč)

Ve druhé podkapitole *Jednoduché úročení* je uvedena definice tohoto typu úročení a jeho vazba na aritmetickou posloupnost. Autor zavádí vzorec až po vyřešení vzorového příkladu, kterým vtahuje studenta do problematiky.

Autor použil tento příklad:

Pan Král půjčil paní Roubalové 150 000 Kč na čtyři roky. Každý rok bude požadovat jako úrok 10 % z poskytnuté půjčky. Půjčený kapitál spolu s úroky splatí paní Roubalová najednou, až po čtyřech letech. Kolik korun dostane pan Král celkem?

Řešení:

půjčený kapitál ... 150 000 Kč

dluh po 1. roce ... 150 000 Kč + 0,1 · 150 000 Kč

dluh po 2. roce ... 150 000 Kč + 0,1 · 150 000 Kč + 0,1 · 150 000 Kč =

= 150 000 Kč + 2 · 0,1 · 150 000 Kč

dluh po 3. roce ... 150 000 Kč + 3 · 0,1 · 150 000 Kč

dluh po 4. roce ... 150 000 Kč + 4 · 0,1 · 150 000 Kč =

= [*150 000* · (*1 + 4 · 0,1*)] *Kč*

Pan Král obdrží od paní Roubalové celkem 210 000 Kč. ([O3], str. 46)

Autor k úloze neopomene zdůraznit, že pro legální půjčování má pan Král oprávnění a řádně odvádí státu daň z příjmu.

V následujícím příkladě autor pracuje se zdaňováním úroku a zavádí vzorec pro výpočet hodnoty kapitálu se zdaňovacím koeficientem

$$U_n = k \cdot i \cdot n \cdot K_0 \,,$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot n\right),$$

kde U_n je úrok, K_n je kapitál po n letech, k je zdaňovací koeficient, i je úroková míra vyjádřená desetinným číslem a K_0 je počáteční kapitál, tedy vklad nebo úvěr.

Ve třetí podkapitole *Úroková doba* je definice této doby a jsou uvedeny různé metody jejího výpočtu. Při řešení příkladů je zvolena jedna z nich – a to obchodní metoda neboli evropský standard (tj. finanční rok má 360 dní a finanční měsíc má 30 dní). Autor navíc zdůrazňuje, že do úrokovací doby se započítává právě jeden ze dnů vkladu a výběru, a volí, že on bude započítávat den výběru či splatnosti.

Náročnost příkladů můžeme posoudit z následující ukázky:

Klient banky uložil 7. 3. na vkladní knížku bez výpovědní lhůty částku 5 000 Kč a 23. 5. částku 7 500 Kč. Obě částky spolu s úroky vybral 14. 7. téhož roku. Po celou dobu byla úroková míra 1,4 %; banka vložený kapitál zúročila při výběru peněz; daň z úroku je 15 %. Kolik korun banka klientovi vyplatila? ([O3], str. 54)

Řešení: Podle daných pravidel můžeme velmi jednoduše vypočítat, že první suma byla na vkladní knížce 127 dní, tj. úrok po zdanění činí 21 Kč, a druhá suma 51 dní, tj. úrok po zdanění činí 12,60 Kč. Z toho plyne, že klientovi banka vyplatila 12 533,60 Kč.

Ve čtvrté podkapitole *Složené úročení* je uvedena definice tohoto typu úročení a je zdůrazněna jeho vazba na geometrickou posloupnost. Autor zavádí vzorec po objasnění motivačního příkladu. Ve výkladu uvádí způsoby zaokrouhlování v bankách na haléře po každém úrokovacím období, což v porovnání s výsledky, které obdrží podle vzorce

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i)^n ,$$

vede k chybám v řádu desetihaléřů. Dále upozorňuje na pracnost a zdlouhavost při oddělených výpočtech po jednotlivých zdaňovacích obdobích a nejednotnost zaokrouhlování v bankách.

Úlohy také nutí studenta porovnávat jednoduché a složené úročení:

Jeden půjčil druhému 10 000 Kč na 10 let s úrokovou mírou 10 %. Úročí se jednou ročně. Zjistěte, kolik druhý splatí po deseti letech prvnímu, jde-li a) o jednoduché úročení, b) o složené úročení. ([O3], str. 45, výsledek: a) 20 000 Kč, b) 25 937,40 Kč)

V páté podkapitole *Úrokovací období* autor zdůrazňuje základní možnosti délky úrokovacího období (roční, pololetní, čtvrtletní, měsíční, týdenní a denní) a uvádí modifikaci vzorce pro složené úročení

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)^m,$$

kde t je počet dní tvořících jedno úrokovací období, m je celkový počet úrokovacích období, k je zdaňovací koeficient, i je úroková míra, K_0 je počáteční a K_m je konečný kapitál.

V šesté podkapitole *Spoření* autor představuje první z nejrozšířenějších aplikací finanční matematiky. Rozšiřuje složené úročení, tedy výpočet konkrétního členu geometrické posloupnosti, o práci s více vklady, tedy částečným součtem prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem q.

Vše je pro studenta srozumitelné po zavedení vzorce:

$$S_m = K \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}, \text{ kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i,$$

t je počet dní tvořících jedno úrokovací období, m je celkový počet úrokovacích období, k je zdaňovací koeficient, i je úroková míra, S_m je kapitál dosažený pravidelným spořením stejných částek a K je částka naspořená v jednom úrokovacím období a na konci tohoto úrokovacího období zúročená.

Uveďme jeden z náročnějších příkladů, který je studentovi předložen:

Slečna Malá spoří od začátku roku na počátku každého měsíce 200 Kč. Banka úročí na konci každého kalendářního čtvrtletí, úroková míra je stále 4,4 %; daň z úroku je 15 %. a) Kolik korun bude mít slečna Malá na konci druhého roku? b) Kolik korun z toho činí úrok? ([O3], str. 77, výsledek: a) 4 991 Kč, b) 191 Kč)

V sedmé podkapitole *Splácení dluhů* autor představuje druhou z nejrozšířenějších aplikací finanční matematiky. Rozšiřuje složené úročení o složené úročení dlužné částky a představuje operace při jejím splácení. Opět zdůrazňuje související vlastnosti geometrické posloupnosti a na jejich základě odvozuje vzorec pro splácení dluhu stejnými částkami. Potřebné vyjádření neznámé obsahuje kvocient q, jehož hodnotu spočítá podle výše uvedeného vzorce. Se známou hodnotou kvocientu se zaměřuje na výši splátky. Hodnotu splátky s tak počítá pomocí vzorce

$$s = \frac{D \cdot q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1},$$

kde D je počáteční výše dluhu a q zmiňovaný kvocient.

Na nutnost znalostí operací s algebraickými výrazy student naráží v této učebnici velmi často. Také ve finanční matematice je množství otázek, které nelze odpovědět jen pomocí jednoduchých výpočtů ze základních vzorců. S řadou takových problémů se setkáváme i v této učebnici, jak dokládá příklad:

Slečna R. si chce půjčit 30 000 Kč s tím, že by měsíčně splácela 2 000 Kč. Kolik měsíců by musela dluh splácet? Předpokládáme, že by úroková míra byla 15 % a úrokovací období 1 měsíc. Slečna R. by začala dluh splácet po jednom měsíci od poskytnutí půjčky. ([O3], str. 85, výsledek: 17 měsíců a poslední splátka bude nižší, a to 1 432 Kč)

Hodnocení učebnice

Jedná se o svědomitě sepsané a vyložené základy finanční matematiky, které považuji za „životní“ minimum pro existenci v dnešním světě financí.

Struktura jednotlivých kapitol vede od jednoduchého praktického příkladu řešeného krok za krokem, z něhož je odvozen příslušný vzorec, k řešeným složitějším příkladům. Mezi řešenými příklady jsou uvedeny potřebné definice pojmů a v závěru kapitol je dostatečné množství neřešených úloh a obtížnější z nich jsou označeny hvězdičkou. Látka zařazená do rozšiřující je po straně označena trojúhelníky. Text je přehledný a student se v něm může lehce orientovat. Pro vyučujícího, který si připravuje výklad, je spolupráce s takovouto učebnicí velkým ulehčením.

V řešených příkladech je uveden celý postup s komentářem i odvozením vzorce či vyjádření neznámé ze vzorce. Není opomenut žádný krok, v němž by student mohl mít nějaký problém. Úlohy sloužící k procvičení probrané látky jsou textově bohaté, aby si student mohl velmi jasně představit situaci, kterou musí řešit.

Přestože je hlavním úkolem učebnice seznámit studenta s posloupnostmi, jsou zde řešeny nejdůležitější otázky finanční matematiky. To osobně velmi postrádám v učebnici [O2], kterou hodnotím níže. Myslím si, že také studenti gymnázií by měli zvládnout základy finanční matematiky. Tento nedostatek se vyřešil až v roce 2005 vydáním učebnice a sbírky [O1] (viz níže) stejného autora, která je uceleným kurzem základů finanční matematiky.

Oldřich Odvárko: ***Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*****,**
1. vydání, Prometheus, Praha, 1995, 128 stran.

V řádných hodinách matematiky je málo volného prostoru pro dokonalé procvičení povinné látky, nemluvě o látce, která jde nad její rámec. Učitel má sice dnes možnost rozvrhnout si časovou dotaci jednotlivých kapitol sám, ale přesto je stále pod velkým časovým tlakem. A to zejména na gymnáziích, kde kromě maturity je další prioritou příprava na přijímací zkoušky na vysoké školy. Do přijímacích zkoušek z matematiky ještě téma finanční matematiky bohužel neproniklo, což dokládá, že mu ještě není věnována dostatečná pozornost.

Jediné místo, kam je vhodné umístit prvky finanční matematiky, nacházíme u posloupností, neboť jedna uložená jistina se svou hodnotou chová buď jako člen aritmetické nebo geometrické posloupnosti podle toho, jestli se jedná o jednoduché nebo složené úrokování.

V řadě monotematických učebnic matematiky pro gymnázia se jedna učebnice zabývá posloupnostmi a řadami. Právě zde by měl vyučující žáka upozornit na aplikace posloupností ve světě financí a seznámit ho alespoň se základními finančními operacemi (tj. úročení, spoření a umořování (splácení) dluhu).

V podkapitole nazvané *Užití geometrických posloupností* nalezneme čtyři nejjednodušší řešené úlohy z finanční problematiky (jednoduché a složené úrokování). Dále je zde 11 neřešených úloh, z nichž jsou tři označeny symbolem pro složitější úlohy a tři symbolem pro úlohy přesahující rámec povinného učiva, tzn. že při snížených hodinových dotacích matematiky na gymnáziu většina vyučujících během běžných hodin projde se studenty jen elementární příklady. Domnívám se, že i ten nejobtížnější příklad patří mezi základní úlohy finanční matematiky. Uveďme jeho zadání:

Banka poskytla podnikateli počátkem roku 1994 úvěr ve výši 2 500 000 Kč, a to na dobu pěti let s roční úrokovou mírou 15,5 % (úrokovací období je 1 rok). Podnikatel bude dluh splácet pravidelně ve stejných ročních splátkách, první po jednom roce od poskytnutí úvěru. Vypočítejte výši jedné splátky. ([O2], str. 67)

Z vlastní zkušenosti vím, že se řešení předložené studentem, který absolvoval základní kurz finanční matematiky (například na hodinách semináře), a studentem bez těchto znalostí bude značně odlišovat, i když by se oba měli dobrat stejného výsledku.

Z textu příkladu vyplývá, že se jedná o klasické umořování dluhu. Student, který nemá žádné znalosti z finanční matematiky, pracuje pouze se znalostmi geometrické posloupnosti.

Úvěr má hodnotu D = 2 500 000 Kč, úroková sazba i = 0,155, úročitel r = 1,155 a a je hledaná roční anuita. Student pravděpodobně použije označení x, y, jak je zvyklý z řešení rovnic a nerovnic. Pokud se budeme držet značení z finanční matematiky, zapíše rovnici:

$$\Big(\Big(\big((D\cdot 1{,}155-a)\cdot 1{,}155-a\big)\cdot 1{,}155-a\Big)\cdot 1{,}155-a\Big)\cdot 1{,}155-a=0,$$

kde „$\cdot$ 1,155 – a“ je operace prováděná s hodnotou úvěru na konci každého roku – tedy nejprve úročení, poté splátka.

Po jednoduchých algebraických úpravách vidíme jeden ze základních vzorců finanční matematiky:

$$D\cdot 1{,}155^5-a\cdot 1{,}155^4-a\cdot 1{,}155^3-a\cdot 1{,}155^2-a\cdot 1{,}155-a=0,$$

$$D\cdot 1{,}155^5=a\cdot 1{,}155^4+a\cdot 1{,}155^3+a\cdot 1{,}155^2+a\cdot 1{,}155+a,$$

$$D\cdot 1{,}155^5=a\cdot\left(1{,}155^4+1{,}155^3+1{,}155^2+1{,}155+1\right),$$

$$D\cdot 1{,}155^5=a\cdot\frac{1{,}155^5-1}{1{,}155-1},$$

$$a=D\cdot 1{,}155^5\cdot\frac{1{,}155-1}{1{,}155^5-1},$$

$$a=D\cdot 1{,}155^5\cdot\frac{0{,}155}{1{,}155^5-1},$$

$$a=D\cdot\frac{0{,}155}{1-1{,}155^{-5}}.$$

Tedy v obecném případě vzorec pro výpočet anuity a:

$$a = D \cdot \frac{i}{1 - r^{-n}}.$$

Student bez znalosti vzorců finanční matematiky dospěje k předposlednímu řádku a vypočítá hodnotu a (a = 754 637 Kč). Při studiu finanční matematiky student tímto způsobem odvodí závěrečný vzorec jen jedenkrát při řešení prvního příkladu a pak jej již zná, standardně používá a po jeho aplikaci má ihned po druhém kroku správný výsledek. Úkolem finanční matematiky není samozřejmě opomíjet, jak byl používaný vzorec odvozen na základě matematických pravidel, ale zmechanizovat řešení daného typu úloh. Prvořadým cílem uvedené úlohy je však prohloubení znalostí o posloupnostech. Domnívám se, že finanční matematika je v tomto případě jen vhodnou ukázkou praktického využití matematických znalostí v běžném životě, po kterém studenti často volají.

Charakteristika učebnice

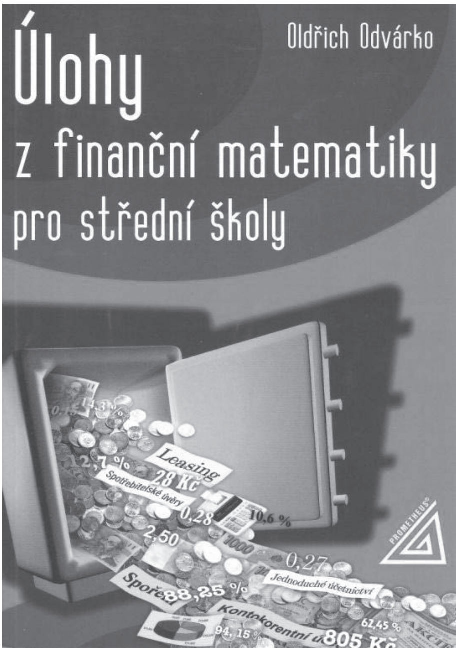
Tato učebnice je kvalitní učebnicí matematiky pro gymnázia, ale pro finanční matematiku nemá skoro žádný přínos. Jejím cílem je vyložit a naučit jednu ze zásadních kapitol středoškolské matematiky – posloupnosti a řady. Finanční matematika je pouze jednou z aplikací, kde se využívají vlastnosti elementárních posloupností, a proto není ani příliš zdůrazněna její důležitost. Přesto si myslím, že u zvídavého studenta může i malé množství těchto úloh s finanční tématikou vzbudit zájem o tuto problematiku, o níž slyší dennodenně kolem sebe.

Z hlediska finanční matematiky není důvod pro hlubší rozbor této učebnice. Jak jsem již dříve zmiňoval, problém neexistence vhodné učebnice základů finanční matematiky pro střední školy vyřešila až učebnice a sbírka [O1], kterou analyzuji níže.

6.2 Učebnice a sbírky pro školy a veřejnost

Oldřich Odvárko: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 200 stran.

Tato sbírka úloh vyšla v roce 2005 a ihned mě jako učitele zaujala. Představuje průvodce finančnictvím se zaměřením na žáky středních škol. Jsou v ní definice pojmů, vysvětlení základních myšlenek a řada příkladů. Autor knihy nepředpokládá žádné předchozí znalosti z finanční matematiky, což je nesporným kladem pro studenty i učitele.



Většina studentů středních škol má problém obsáhnout a zvládnout větší objem daného předmětu a teprve maturita je donutí tento problém řešit. Domnívám se, že zopakování a připomenutí dříve probrané látky na vhodném místě učebnice je z didaktického hlediska nezbytností. Právě tato sbírka kombinovaná s učebnicí pečlivě dodržuje výše uvedené pravidlo. Studentovi je v ní postupně znovu předloženo vše od procent až po posloupnosti, vše je vyloženo v teoretické i praktické rovině a vysvětleno na příkladech.

Obsah učebnice

Několik úmluv

1 Začínáme od začátku (37 stran);

1.1 Úroková míra a úrok;

1.2 Daň z úroku;

1.3 Pásmové úročení;

1.4 Standardy;

1.5 Sankce a rizika;
1.6 Podílové listy a akcie;
1.7 Inflace;
2 Jednoduché úročení (33 stran);
2.1 Podstata jednoduchého úročení;
2.2 Jednoduché úročení a aritmetická posloupnost;
2.3 Skonto;
2.4 Diskont a diskontní míra;
2.5 Eskont směnky;
2.6 Kontokorentní účet;
3 Složené úročení (36 stran);
3.1 Podstata složeného úročení;
3.2 Složené úročení a jednoduché úročení;
3.3 Úrokové míry neměnné i pohyblivé;
3.4 Složené úročení a geometrická posloupnost;
3.5 Užití vzorců pro složené úročení;
3.6 Úrokovací období;
4 Úvěry a leasing (36 stran);
4.1 Umořovací plány;
4.2 Anuitní splátky;
4.3 Spotřebitelské úvěry, prodej na splátky;
4.4 Hypoteční úvěry;
4.5 Leasing;
5 Spoření (29 stran);
5.1 Podstata spoření;
5.2 Od jednoduchých případů ke složitějším;
5.3 Jak si naspořit;
5.4 Důchodové spořící programy;
Přehled základních vzorců z finanční matematiky;

Stručně o posloupnostech;

Výsledky cvičení.

Autor rozdělil učebnici do pěti základních částí, jež pokrývají celé základní spektrum finanční matematiky. Jednotlivé kapitoly mají přehlednou strukturu. Začínají definicemi základních pojmů, které student nachází ve zvýrazněných barevných rámečcích, jež umožňují snadnou orientaci v textu, a pokračují výkladem jednotlivých témat finanční matematiky prostřednictvím řešených příkladů doplněných komentáři.

Učebnice obsahuje 48 vzorově řešených úloh s komentářem a 234 neřešených úloh na další procvičení. Jsou pestré, spojené s realitou a potřebami běžného života a je jich dostatečný počet. Celková grafická úprava textu zvyšuje názornost a přehlednost. Poznamenejme, že vzorce použité při výpočtech jsou pečlivě odvozovány a student tak vidí cestu jejich vzniku. Stávají se tak pro něho jasnější a srozumitelnější, než kdyby je autor uvedl bez odvození a komentáře a student by se je měl učit nazpaměť bez hlubšího porozumění.

Autor učebnici uzavírá samostatným oddílem – přehledem všech vzorců, které se v jednotlivých kapitolách vyskytují.

Uveďme pro zajímavost způsob odvození nejdůležitějšího vzorce finanční matematiky – vzorce pro složené úročení – a z něho plynoucí vzorec pro celkový úrok:

Kapitál K_1 na konci ***prvního*** *úrokovacího období (po zúročení bankou):*

$$K_1 = K_0 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right).$$

Kapitál K_2 na konci ***druhého*** *úrokovacího období:*

$$K_2 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^2.$$

Kapitál K_3 na konci ***třetího*** *úrokovacího období:*

$$K_3 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^2 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^2 =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^2 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^3 .$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

*Kapitál K_n na konci **n**-tého úrokovacího období:*

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^{n-1} + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^{n-1} =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n .$$

*Celková částka na konci **n**-tého úrokovacího období:*

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n .$$

*Celkový úrok po zdanění na konci **n**-tého úrokovacího období:*

$$U_n = K_n - K_0 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \tfrac{t}{360}\right)^n - K_0,$$

$$U_n = K_0 \cdot \left[\left(1 + k \cdot i \cdot \tfrac{t}{360}\right)^n - 1\right].$$ ([O1], str. 81–82)

Poznamenejme, že označení jednotlivých veličin, o nichž jsme hovořili již dříve, je stejné: n – počet úrokovacích období, K_0 – počáteční kapitál, K_n – kapitál po n úročeních, i – úroková míra (desetinné číslo), k – zdaňovací koeficient, t – počet dní jednoho úrokovacího období, U_n – úrok po zdanění po n úrokovacích obdobích.

Výklad jednotlivých problémových okruhů finanční matematiky je přehledný, srozumitelný a obsahuje kvalitní komentáře. Text je doplněný tabulkami a grafy, s nimiž se setkáváme v médiích, informačních letácích, reklamách apod.

Základní charakteristika jednotlivých kapitol

Několik úmluv

V úvodu učebnice autor stanovuje základní pravidla, na nichž jsou výpočty v učebnici založeny:

1) používaný standard 30E/360 (tj. evropský standard) – každý měsíc má 30 dnů a každý rok 360 dnů;
2) dosažený úrok je daněný patnácti procenty;
3) úroky z vkladů a úvěrů jsou zaokrouhlovány na haléře, při vyplácení úroků z vkladů na koruny nahoru a při splácení úroků z úvěrů na koruny podle matematických pravidel;
4) do úrokovací doby se nezapočítává den vkladu či půjčení, den splatnosti se započítává.

1 Začínáme od začátku

V této kapitole student najde definice nejdůležitějších pojmů finanční matematiky: úrok, roční úroková míra (sazba), daň z úroku, doba splatnosti, termínovaný vklad (účet), úroková doba, standard 30E/360, 30A/360, ACT/360, ACT/365, vkladní knížka bez a s výpovědní lhůtou, zdaňovací koeficient, podílové listy, podílové fondy, hrubý a čistý výnos, míra výnosu, inflace, míra inflace, nominální úroková míra, reálná úroková míra, reálná hodnota kapitálu. Pak jsou řešeny úlohy, v nichž jsou prakticky využity dříve definované pojmy, čímž student získává názornější přehled o jejich aplikaci a významu.

Kapitola pracuje jen s jednoduchým úročením a student se seznamuje se základními aspekty ukládání peněz. Jsou ukázány a vysvětleny možnosti uložení peněz nejen na termínované účty, ale i vklady do podílových listů a akcií, které sice na jedné straně slibují větší výnosnost, ale na druhé straně mohou klesnout i do „záporných“ procent.

Student se v této kapitole setkává s reálným světem financí. Je upozorněn na sankce při nedodržení výpovědních lhůt, na rizika při krachu banky i na vliv inflace na hodnotu finančních prostředků.

Uveďme na ukázku jeden typický příklad z první kapitoly:

Podnikatel Mareš získal od banky na půl roku úvěr ve výši 250 000 Kč s úrokovou mírou 9,9 %. Úvěr splatí jednorázově, v den splatnosti. Kolik korun celkem bance zaplatí? ([O1], str. 26, výsledek: 262 375 Kč)

2 *Jednoduché úročení*

Ve druhé kapitole jsou nejprve definovány nové pojmy: úrokovací období, jednoduché úročení, dluhopis (obligace), skonto, diskont, diskontní míra, směnka, eskont směnky, eskontní provize, kontokorentní účet (kontokorent), kreditní úrok, kreditní úroková míra, debetní úrok, debetní úroková míra, úvěrový rámec.

Student se v úvodu kapitoly seznámí s podstatou jednoduchého úročení, jehož základy objevil již v první kapitole. Autor uvádí řadu názorných příkladů, které studentovi pomáhají orientovat se ve světě financí. Předveďme jeden z jich i s řešením; ukazuje problematiku jednoduchého úročení zcela obecně:

Do banky byl uložen kapitál K_0 s úrokovou mírou i (která je vyjádřena desetinným číslem), zdaňovací koeficient je k. Banka používá standard 30E/360. Úrokovací období je t dní, počet úrokovacích období je n. Úrok se stále počítá z počátečního kapitálu K_0, jde tedy o jednoduché úročení. Určíme celkový úrok po zdanění na konci n-tého úrokovacího období a celkovou částku, na kterou vzroste kapitál K_0 do konce n-tého úrokovacího období, tj. po n úročeních.

Řešení:

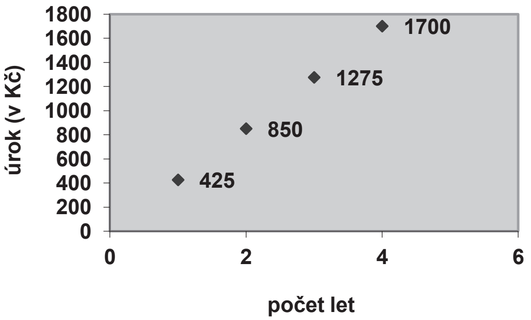
Celkový úrok po zdanění:

$$U_n = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot n.$$

Celková částka:

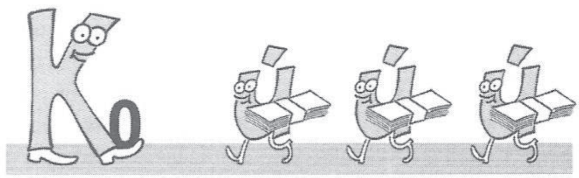
$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right).$$ ([O1], str. 46)

V této kapitole je student podrobně seznámen nejenom s jednoduchým úročením, ale i s oblastmi jeho využití. Vhled do probírané problematiky je zjednodušen názorným grafickým zpracováním vazby jednoduchého úročení s aritmetickou posloupností.



(Využita data z příkladu 1, [O1], str. 50–52)

Body grafu můžeme proložit přímku, úrok narůstá lineárně. Na následujícím obrázku vidíme, že hodnota úroku je pro každé úrokovací období stejná.



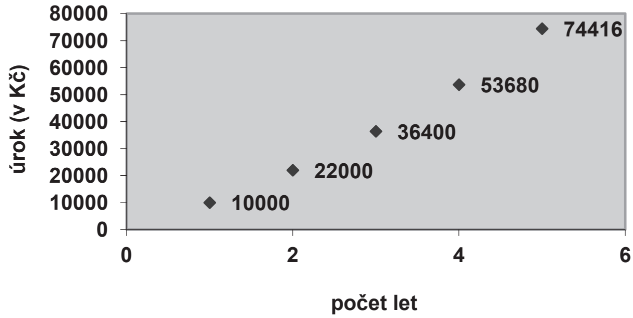
([O1], str. 47)

Na běžných příkladech z praxe jsou ukázány typy slev při dřívějším zaplacení či splacení půjčky. Jsou vysvětleny pojmy diskont a diskontní míra a jejich využití v praxi. Pracuje se se splátkou vyplácenou dlužníkem věřiteli na konci úrokové doby a její úrokovou mírou, o kterou je úvěr na počátku snížen, tj. úrokovou míru banka odečte ihned při poskytnutí úvěru z požadované částky a podnikatel pak po roce splatí požadovanou částku (tj. úroky se platí předem).

Vyloženy jsou také operace s cennými papíry, kdy při nákupu (eskontu) před dnem splatnosti dochází ke slevě z nominální hodnoty, a existence kontokorentního účtu, což je typ běžného účtu, při němž je zvýhodněno poskytování úvěrů. Zavedeny jsou též pojmy kreditní a debetní zůstatek.

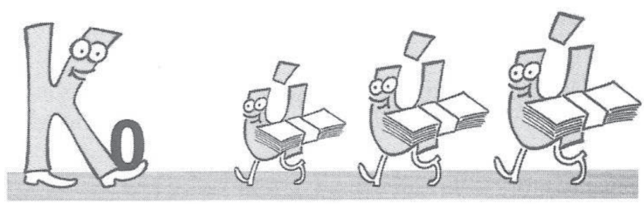
3 Složené úročení

Ve třetí kapitole jsou nejprve definovány pojmy: složené úročení, efektivní úroková míra, spojité úročení. Pak je vysvětlena podstata složeného úročení. Autor pracuje s pojmem úrok z úroku a ukazuje jeho uplatnění v praxi. Graficky znázorňuje zásadní rozdíl mezi úročením jednoduchým a složeným a upozorňuje na možnost změny úrokové míry v čase. Aby zjednodušil vhled do popisované problematiky, ukazuje souvislosti mezi složeným úročením a geometrickou posloupností.



(Využita data z příkladu 1, [O1], str. 96–98)

Body grafu můžeme proložit exponenciálu, úrok tedy narůstá exponenciálně. Na obrázku vidíme, že hodnota úroku je pro každé následující úrokovací období větší.



([O1], str. 81)

Autor zde v celé „kráse“ odvozuje zjednodušení postupu při výpočtu cílové částky při složeném úročení, tj. základní vzorec

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n,$$

kde k je zdaňovací koeficient úroku, i je úroková míra, t je počet dnů úrokovacího období, n je počet úrokovacích období a K_0 je vstupní kapitál (odvození viz výše).

Použití vzorce demonstruje na několika příkladech. Pracuje s možnostmi variability délky úrokovacího období a zavádí pojem spojitého úročení, kdy se délka úrokovacího období limitně blíží k nule. Předešlý vzorec se při spojitém úročení mění na tvar

$$K_n = K_0 \cdot e^{kim},$$

kde *k* je zdaňovací koeficient úroku, *i* je úroková míra, *m* je počet roků a *e* je Eulerovo číslo (*e* = 2,718 281 828 459 0...; základ přirozených logaritmů).

Uváděné příklady jsou úzce spjaty s praxí a ukazují studentovi možnosti uplatnění znalostí z finanční matematiky, jak dokládá následující příklad.

Klient získal na začátku roku úvěr na tři roky ve výši 100 000 Kč s úrokovou mírou 15 % s tím, že zapůjčený kapitál spolu s úrokem splatí najednou, po třech letech. Banka úročí jednou ročně, vždy na konci roku; na konci prvního roku vypočítá úrok jako 15 % z půjčené částky, na konci druhého a třetího roku je úrok 15 % z částky, která se rovná celkovému dluhu z konce předchozího roku. Vypočítáme, kolik korun bude muset klient na konci třetího roku bance celkem splatit. ([O1], str. 78, výsledek 152 088 Kč)

4 Úvěry a leasing

Ve čtvrté kapitole jsou zavedeny pojmy: úmor dluhu, umořovací plán, anuitní splátka (anuita), spotřebitelský úvěr (spotřební úvěr), účelový a neúčelový spotřebitelský úvěr, akontace, hypoteční úvěr, leasing, operativní a finanční leasing, zůstatková hodnota.

Autor dále objasňuje nejdůležitější typy půjček, o něž se v současné době lidé nejčastěji zajímají. Rodiny chtějí stavět, bydlet a berou si hypoteční úvěr, chtějí si vybavit byt a zařizují si spotřebitelské úvěry, chtějí si koupit auto, a proto si berou leasing. Je to tím, že ne vždy mají vlastní prostředky k okamžitému řešení situace.

Tato rozsáhlejší kapitola je rozdělena do pěti podkapitol.

V první podkapitole jsou uvedeny úlohy, v nichž se požaduje sestavení umořovacího plánu s nestejnými splátkami. Studenti se učí na problémech ze života sestavovat umořovací tabulku. Uveďme na ukázku jeden z příkladů s celou tabulkou:

Nestejnými splátkami podnikatel umoří dluh 1 000 000 Kč za tři roky (viz tabulka).

	Splátka v Kč	*Úrok v Kč*	*Úmor v Kč*	*Stav dluhu v Kč*
Počáteční stav				*1 000 000*
Konec 1. roku	*300 000*	*140 000*	*160 000*	*840 000*
Konec 2. roku	*400 000*	*117 600*	*282 400*	*557 600*
Konec 3. roku	*635 664*	*78 064*	*557 600*	*0*

([O1], str. 114)

Tabulce předchází rozpis všech výpočtů hodnot pro jednotlivé buňky. Autor studenta vede krok za krokem. Komentuje dění na účtu na konci každého roku, tj. připsání úroku bankou, splátka podnikatele a stav dluhu na konci roku. Vše pak zapíše do přehledné tabulky, která slouží především ke shrnutí a zobrazení vývoje dluhu.

Ve druhé podkapitole je pozornost věnována anuitním splátkám, tj. výpočtu roční splátky pro umořování dluhu, která má během celého splácení stejnou hodnotu. Studenti po výpočtu anuity sestavují umořovací plán podle výkladu z předešlé podkapitoly.

Třetí podkapitola pojednává o spotřebitelských úvěrech a prodeji na splátky. Autor uvádí zajímavé úlohy z praxe (například splácení dluhu měsíčními anuitami) a rozvíjí tak základní principy z předešlé kapitoly.

V následující podkapitole se student seznámí s účelovými hypotečními úvěry. Dozví se, že účelovým úvěrem může být i spotřebitelský úvěr, pokud je určen k získání konkrétního zboží nebo služeb (např. elektronika, sportovní potřeby, dovolená, studium, svatba). Hlavní pozornost je však věnována tzv. klasickým hypotečním úvěrům, při nichž jsou peníze poskytnuty bankou na financování koupě či rekonstrukce nemovitosti. Veškeré typy úvěrů, které autor považuje za důležité, a jejich vlastnosti jsou objasněny na konkrétních praktických příkladech.

Poslední podkapitola vysvětluje formy pronájmu různých zařízení, tj. leasing. Jedná se o téma velmi aktuální, protože na leasingové společnosti student v budoucnosti jistě narazí. Vyloženy jsou především typy operativního a finančního leasingu. Je objasněna jejich podstata, tj. že při operativním leasingu se vrací pronajatý předmět zpět leasingové společnosti a při finančním leasingu končí převodem vlastnických práv.

5 Spoření

V poslední kapitole jsou zavedeny pojmy: spořící účet (vkladový účet, bankovní konto), stavební spoření, důchod (renta), rentový účet (bankovní renta).

Ve čtyřech podkapitolách jsou ukázány možnosti uložení finančních prostředků pro pozdější využití. Jsou vysvětleny klady a zápory různých spořících programů. Na praktických příkladech je doloženo, že vhodné uložení finančních prostředků mírní vliv inflace a navíc prostředky zhodnocuje. Početní algoritmy jsou známé již z předešlých kapitol. Jedná se jen o další důležité využití získaných znalostí z finanční matematiky, jak dokazuje následující příklad.

Pan Mrázek uložil na začátku roku na rentový účet s úrokovou mírou 3,1 % částku 85 000 Kč. Dále už peníze neukládal. Spořící fáze trvá 5 let. Podle *smlouvy má výběrová fáze též délku 5 let; důchod je roční, první výběr se uskuteční na konci šestého roku, poslední na konci desátého roku. Úrokovací období je 1 rok. Vypočítejte výši ročního důchodu.* ([O1], str. 177, výsledek 20 918 Kč)

Hodnocení učebnice

Tato učebnice poskytuje hlubokou sondu do finanční matematiky. Jasné, stručné a přesné definice základních pojmů napomáhají v lepší orientaci v peněžních problémech, dobrému využití a zhodnocení finančních prostředků. Podle mého názoru se jedná o nejpřehlednější a zároveň nejkomplexnější zavedení nejdůležitějších pojmů finanční matematiky pro studenty středních škol. Základní početní pravidla a metody jsou velmi dobře popsány a vysvětleny a umožní studentům plánovat a kontrolovat jejich vlastní finanční transakce v budoucím životě.

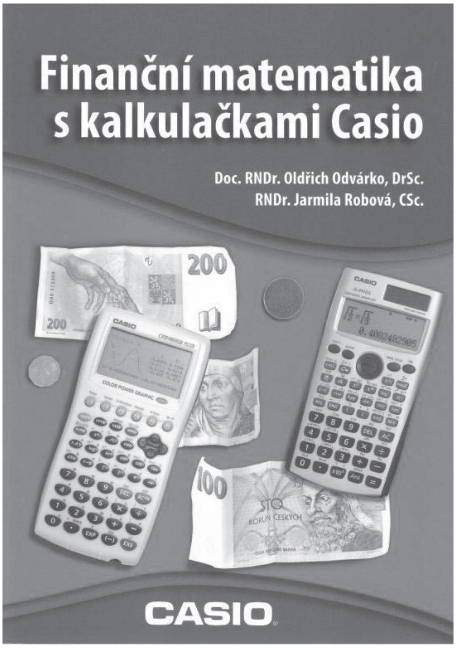
Myslím si, že učebnice byla zamýšlena především pro studenty gymnázií, neboť ostatní typy středních škol mají obvykle pro své předměty, které tuto tématiku obsahují, vlastní učebnice (viz např. [E1] nebo [E2] uvedené výše). Při výuce finanční matematice na gymnáziu však nastává problém, neboť metodické příručky či nové školní vzdělávací programy dávají výuce tohoto tématu poměrně velkou volnost. Záleží jen na vyučujícím matematiky nebo matematického semináře, kolik hodin bude finanční matematice věnovat. Bohužel jsou i tací, kteří nezmíní o této problematice více, než je uvedeno v kapitole učebnice *Posloupnosti a řady* ([O2], viz výše). Každý učitel má ve svém předmětu oblasti oblíbené více a oblasti oblíbené méně. Doufám, že to však neznamená, že si kvalitní učitel dovolí vynechat téma, které ho nebaví. Co se týká finanční matematiky, je situace trochu jiná. Samostatné téma finanční matematiky se strukturou, která shrnuje základní dovednosti, jež by měl student po absolvování střední školy neekonomického zaměření zvládat, není nikde výrazně zviditelněno. Většina současných učitelů matematiky navíc neprošla při svém studiu dostatečnou přípravou na výuku tohoto tématu. Můžeme tedy na jednu stranu být shovívaví a označit opomíjení finanční matematiky za nevědomé. Vzhledem k tomu, že na nás „finanční" problémy hledí z plakátů a novin, vidíme je v televizi a slyšíme v rádiu, lze o tom úspěšně pochybovat. Podle mého názoru by jedním z důležitých bodů dalšího vzdělávání učitelů matematiky měla být právě finanční matematika.

Při výuce matematiky jsem se na střední škole snažil věnovat finanční matematice dostatečný prostor, ale nelze to provést na úkor jiných témat, a to ani v matematickém semináři. Hlavní prioritou je totiž příprava studenta na maturitní zkoušku a přijímací zkoušky na vysoké školy. Když se mi poprvé dostala do rukou tato učebnice ([O1]), viděl jsem její obrovský přínos na cestě za odstraněním handicapu všeobecné neznalosti finanční matematiky. Problém nastal v okamžiku tvorby příprav na vyučování a při vyučování samotném. Důvodem byl především čas. V hodinách, jež jsou vyhrazeny finanční matematice, jsem nemohl obsáhnout celou tuto učebnici. A tak jsem se vrátil k používání učebnice [E1], která je na semináři objemově zvládnutelná. Učebnici [O1] jsem studentům doporučil k samostudiu a při hodinách semináře jsme z ní probírali jen jejich dotazy, které se týkaly zejména úloh, případně jejich modifikací. Definice pojmů finanční matematiky a produktů finančních ústavů byly bez problémů. Tato cesta je však pouze pro studenty svědomité, talentované nebo nadšené pro finanční matematiku. Vzhledem k tomu, že „finance" budou studenty obklopovat celý život, je žádoucí nepodceňovat jejich výuku. Myslím si, že jediná cesta k vyřešení tohoto problému je zavedení samostatného semináře finanční matematiky. Tady však obvykle narazíme na podmínky otevření semináře – tj. minimální počet studentů, maximální počet volených seminářů atd. To tedy znamená, že studenti gymnázia nemají většinou možnost navštěvovat samostatný předmět věnující se finanční matematice. Přitom by se mělo jednat o základnu inteligence, o níž se opírá celá společnost. Jak tento problém vyřešit? Na jedné straně je tu omezený počet volitelných seminářů a financování nepovinných předmětů, na druhé straně je potřeba zvládnout alespoň základy finanční matematiky.

Zatím musíme být vděčni za každou část finanční matematiky, kterou studentům zvládneme časově předat a kterou pochopí a naučí se aplikovat v každodenním životě. Je však stále velké procento lidí, kteří při vyjednávání půjčky či hypotéky ignorují základní pravidla, opomíjejí i zobrazené hodnoty RPSN, což je roční procentní sazba nákladů, kterou je dlužník povinen zaplatit věřiteli z dlužné částky za jeden rok, a nevšímají si dalších parametrů půjček a hypoték. Nezamýšlejí se nad zdrojem financí a často doplácejí na praktiky lichvářů a končí v exekucích. Člověk, který si nedokáže propočítat splacenou částku na základě jednotlivých splátek, jejich počtu, poplatků za vyřízení a vedení úvěru, by neměl o něm ani uvažovat.

Téma finančnictví mělo v hodinách semináře velmi kladný ohlas. Studenti byli po několika vyřešených problémech schopni s přijatelnou přesností odhadnout podstatné veličiny v dalších úlohách, tj. například velikost jednotlivých splátek, velikost celkové sumy, kterou dlužník zaplatí, doba trvání dluhu. To byl také hlavní cíl, jehož jsem chtěl ve svých hodinách dosáhnout. Každý klient banky či jiného finančního ústavu by měl být schopen hrubého odhadu toho, co získá při spoření a co zaplatí při splácení úvěru.

Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*, Prometheus, Praha, 1. vydání, 2005, 100 stran.



Tento učební text vyšel v roce 2005 jako další pomůcka pro výuku finanční matematiky. Autoři publikaci sestavili jako praktický manuál základů finanční matematiky s ohledem na využití kalkulaček. Důraz kladli na chronologii a popis jednotlivých kroků při řešení úloh tak, aby text mohl být využíván také při samostudiu.

Obsah publikace

Publikace je rozdělena do deseti kapitol, každá má jasný cíl, s čím studenta seznámí a co procvičí. Kromě první má každá následující strukturu:

- definice pojmů a zavedení vzorců;
- řešený příklad a neřešená úloha.

Charakteristika jednotlivých kapitol

1 Seznámení s kalkulačkami

V této kapitole se student podrobněji seznámí s kalkulačkami Casio FX-991ES a Casio CFX-9850GB PLUS. Kalkulačka Casio FX-991ES má dvouřádkový negrafický display, v současné době s ní nebo typově podobnou pracuje většina studentů. Obvykle se ve třídě objeví jeden až dva studenti, v budoucnu to bude jistě více, kteří pracují s grafickým typem kalkulaček. Tohoto typu je druhá zmiňovaná kalkulačka Casio CFX-9850GB PLUS. Tato kalkulačka pracuje s ikonovým menu, má funkční klávesy, které známe z klávesnice počítače a je programovatelná.

Kapitola 2 až 10

Jak už jsem se zmínil, od druhé kapitoly text začíná stručnou teorií a přehledem vzorců, pak následuje vzorově řešený a komentovaný příklad. Řešení každého příkladu se skládá ze tří částí:

- standardní matematické řešení;
- výpočet na dvouřádkové kalkulačce;
- výpočet na grafické kalkulačce.

Postup řešení je velmi podrobně rozpracován. Práce s kalkulačkami, zejména s grafickou, je popisována krok za krokem. Pro použití grafické kalkulačky jsou uvedeny poznámky, v nichž student najde další cenné rady (návrat do menu, přepnutí režimu, popis a aktivace příkazů, kombinace kláves ...).

Po vzorově řešeném příkladu následuje vždy jedna neřešená úloha; celkem je uvedeno 35 řešených příkladů a 35 neřešených úloh.

Kapitoly 3, 4, 5, 6, 8 a 9 obsahují ty části finanční matematiky, které jsem již podrobně charakterizoval při rozboru učebnice [O1].

Samostatnou charakteristiku uvedu tedy jen u kapitol 2, 7 a 10.

2 Marže

V této kapitole student pracuje s pojmem marže, který je spjat s obchodováním, a udává procentuální rozdíl mezi nákupní a prodejní cenou.

Základem tohoto procentového počtu je prodejní cena, která zajímá prodejce i zákazníka. Student zde pozná problematiku cesty zboží od výrobce přes prodejce až k zákazníkovi a nahlédne pod pokličku stanovování cen.

Předveďme styl zavedení pojmu:

MARŽE *M je dána vztahem*

$$M = \frac{P - N}{N} \cdot 100\%,$$

kde P je prodejní cena zboží a N je nákupní cena zboží. Jde tedy o určitou charakteristiku postihující rozdíl mezi cenou prodejní a cenou pořizovací. ([OR], str. 13)

Uveďme pro zajímavost jeden příklad:

Nákupní cena jednoho kusu zboží činí 235 Kč, jeho prodejní cena je 399 Kč. Jak vysoká je marže prodejce? ([OR], str. 13, výsledek 41,1%)

7 Efektivní úroková míra

V této kapitole této učebnice je rozebírán rozdíl mezi nominální a efektivní úrokovou mírou. Podstata spočívá v tom, že nominální úroková míra může mít jiné úrokovací období než jeden rok. Aby byl člověk schopen porovnávat více finančních produktů, je nutné umět přepočítávat nominální úrokové míry na úrokové míry pro úrokovací období jeden rok, tj. efektivní úrokové míry.

Problematiku názorně osvětluje následující ilustrační příklad:

Paní Hlavatá uložila 57 000 Kč na termínovaný vklad na 1 rok. Banka úročí tento vklad s úrokovou mírou 2,40 %, úrokovací období je jeden měsíc, jde o složené úročení. Určete úrokovou míru vkladní knížky s ročním úrokovacím obdobím, na které by paní Hlavatá při vkladu 57 000 Kč získala za jeden rok stejný úrok. ([OR], str. 61, výsledek 2,43 %)

10 Oceňování investic

V závěrečné kapitole autoři operují s výdaji na různé projekty a transakce. Ukazují, jak posuzovat výhodnost investice, nebo jak se rozhodovat při jejich výběru. Pracují s pojmy čisté budoucí a čisté současné hodnoty a vnitřní míry výnosnosti.

Pomocí konkrétních příkladů dokládají, že se jedná o oblast finanční matematiky, která velkým i malým firmám umožňuje posuzovat návratnost a zisk z různých nákupů nemovitostí a jejich zařízení či dlouhodobých investic do cenných papírů. Pomoc zde naleznou také jednotlivci a to zejména ti, kteří jednorázově získali větší finanční obnos (dědictví, výhra apod.).

Pro každého podnikatele i jednotlivce je dobré umět si při investici vypočítat zisk a míru zisku v závislosti na počátečních a průběžných výdajích a na plánovaných příjmech. Na straně výdajů jsou obvykle nákupy strojů, budov, cenných papírů apod., na straně příjmů je prodej vyrobeného zboží, budov, cenných papírů apod.

Ukažme jeden příklad a vyřešme jej.

Stavební firma hodlá investovat do výstavby hotelu. Podle investičního projektu je třeba začátkem roku zakoupit pozemek za 5 milionů Kč a zároveň investovat 10 milionů do zahájení výstavby. Částky ve výši 10 milionů Kč bude nutno ještě investovat na konci prvního a druhého roku výstavby hotelu. Po třech letech bude možno dokončený hotel prodat za 40 milionů Kč. Rozhodněte, zda je tento investiční projekt finančně výhodnější než stejná investice do státních dluhopisů s mírou výnosu 7 %. ([OR], str. 93)

Řešení:

Vidíme, že investiční plán výstavby počítá se ziskem 5 milionů Kč z investovaných 35 milionů. Tuto výši zisku musíme porovnat s alternativním možným ziskem, pokud bychom částku 35 milionů investovali do státních dluhopisů:

Na začátku prvního roku je k dispozici 15 milionů Kč:

$$15\,000\,000 \cdot 1{,}07^3 = 18\,375\,645 \text{ Kč}.$$

Na začátku druhého roku je k dispozici dalších 10 milionů Kč:

$$10\,000\,000 \cdot 1{,}07^2 = 11\,449\,000 \text{ Kč}.$$

Na začátku posledního třetího roku ještě jednou 10 milionů Kč:

$$10\,000\,000 \cdot 1{,}07 = 10\,700\,000 \text{ Kč}.$$

Celkový objem prostředků na konci třetího roku ve státních dluhopisech činí:

$$18\,375\,645 + 11\,449\,000 + 10\,700\,000 = 40\,524\,645 \text{ Kč}.$$

Porovnání částky 40 milionů Kč, které by firma získala za hotel, a částky získané z dluhopisů při stejné sekvenci investic, tj. 15 milionů na tři roky, 10 milionů na dva roky a 10 milionů na jeden rok, je podstatou firemního plánování.

Vidíme, že investice do státních dluhopisů je výhodnější než výstavba hotelu o více než půl milionu korun, tj. přibližně o 11 % vyšší zisk. Dodatečnou otázkou ovšem zůstává, jakou by firma získala výstavbou nového hotelu reklamu a přísun nových zakázek, což v úloze zakotveno není. Podobné další aspekty by svědomití plánovači firmy měli zahrnout do svých analýz také. Potom by však odpověď byla komplikovanější a úloha by přesahovala stanovený rámec finanční matematiky.

Hodnocení publikace

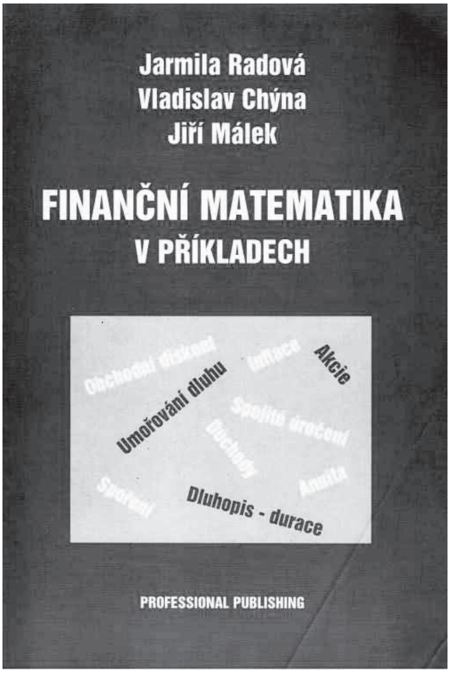
Publikace seznamuje uživatele se základními pojmy finanční matematiky a učí s nimi pracovat. Objem učiva není příliš velký, ale autoři vedou čtenáře k řešení krok za krokem a výklad doplňují kompletním komentářem. Díky propracované struktuře a vhodně zvolené grafice, zejména při popisu práce s kalkulačkami, je učebnice použitelná i pro samostudium. Z mého pohledu se jedná o cenný přírůstek do skupiny literatury věnující se finanční matematice.

Největší přínos tohoto učebního textu vidím kromě ukázkově řešených úloh především v pečlivém výkladu použití kalkulaček. Z mnohaleté učitelské praxe totiž vím, že je velké procento studentů, a to i na gymnáziích, kteří si myslí, že když zvládnou základní početní operace a možná i goniometrické funkce, umí dobře pracovat s kalkulačkou. Ale při práci se závorkami, složenými zlomky, mocninami a dalšími složitějšími výrazy se zcela ztrácejí a docházejí k naprosto nesprávným výsledkům, které nejsou schopni vysvětlit, neumějí odhalit chyby ve výpočtu, zápisu apod. V horším případě nesmyslnému výsledku bezmezně věří, protože to přece „řekla" kalkulačka.

Tuto publikaci mohu vřele doporučit každému vyučujícímu matematiky na střední škole a není třeba, aby ji používal jen při výkladu finanční matematiky. V textu je mnoho číselných výrazů, na kterých lze se studenty procvičit práci s kalkulačkami, což velmi ocení i v další předmětech (fyzika, chemie, biologie).

Jarmila Radová, Vladislav Chýna, Jiří Málek:
Finanční matematika v příkladech,
1. vydání, Professional Publishing, Praha, 2005, 160 stran.

Tato publikace je všeobecně málo známá, neboť nemá doložku Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, a proto není užívána ani běžně nabízena školám. Dokud jsem nezačal přímo pátrat po učebnicích a sbírkách věnujících se finanční matematice na úrovni střední školy, tak jsem o ní vůbec nevěděl. Kniha využívá převážně matematický aparát, který student získá během studia střední školy. Jsou zde však výjimky, kdy autoři používají parciální derivace a v dodatku připomínají Taylorův rozvoj. Přesto si myslím, že ji nemohu opominout. Patří na



rozhraní střední a vysoké školy a jejím hlavním cílem je zopakovat všechny důležité vzorce a pojmy z finanční matematiky a dát studentovi do rukou množství řešených a neřešených příkladů.

Obsah učebnice

1. Jednoduché úročení (9 stran);
2. Obchodní diskont (10 stran);
3. Složené úročení (10 stran);
4. Efektivní úroková sazba (3 strany);
5. Spojité úročení (2 strany);
6. Smíšené úročení (6 stran);
7. Inflace, jmenovitá a reálná úroková míra (4 strany);
8. Spoření – budoucí hodnota anuity (10 stran);
9. Důchody – současná hodnota anuity (16 stran);
10. Umořování dluhu (15 stran);
11. Čistá současná hodnota a vnitřní výnosové procento (5 stran);
12. Dluhopis – cena (15 stran);
13. Dluhopis – rendita a běžná výnosnost (5 stran);
14. Dluhopis – realizovaná výnosnost (6 stran);
15. Dluhopis – durace (11 stran);
16. Časová struktura úrokových sazeb (výnosové křivky) (5 stran);
17. Spotové a forwardové úrokové míry (4 strany);
18. Akcie (8 stran);
19. Použitá a doporučená literatura;

Dodatek A – Posloupnosti;

Dodatek B – Kvadratické rovnice;

Dodatek C – Taylorův vzorec;

Dodatek D – Vybrané teoretické otázky.

Osmnáct základních kapitol učebnice má stejnou strukturu, což pomáhá při orientaci a studiu. Každá je rozdělena do tří částí; první obsahuje vzorce a jejich výklad, druhá řešené příklady a třetí neřešené příklady.

Základní charakteristiky jednotlivých kapitol

1. *Jednoduché úročení*

Autoři nejprve zavedou základní vzorec pro jednoduché úročení a zmíní standardy, podle nichž se vypočítává doba uložení kapitálu. Připomínají, že tento typ úročení se používá při uložení kapitálu na dobu kratší než jedno úrokovací období. Pak uvádějí vzorové příklady; při řešení některých z nich užívají také tabulkový procesor MS Excel. Typy příkladů jsou obdobné jako v učebnicích, které jsem zmiňoval a hodnotil již dříve.

2. *Obchodní diskont*

V této kapitole autoři pracují s obchodním diskontem, s nímž se můžeme setkat při obchodování s některými cennými papíry (směnka, depozitní certifikát). Při řešení úloh užívají vzorce pro jednoduché úročení. Vše je vidět na následujícím příkladu:

Firma eskontovala dne 2. 11. na banku následující směnky (splatná částka – datum splatnosti): 10 000 Kč – 9. 11.; 15 000 Kč – 2. 12. a 8 000 Kč – 7. 12.

Jakou částku firma od banky obdržela, pokud banka používá diskontní míru 10 % p. a.? ([R1], str. 20)

Řešení:

Autoři připomenou základní vzorec $K_0 = K_n \cdot \left(1 - i_d \cdot \frac{t}{360}\right)$,

který použijí na přepočet hodnot všech tří směnek:

$$K_{01} = 10\ 000 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{7}{360}\right) = 9\ 980{,}56\ \text{Kč},$$

$$K_{02} = 15\ 000 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{30}{360}\right) = 14\ 875{,}00\ \text{Kč},$$

$$K_{03} = 8\ 000 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{35}{360}\right) = 7\ 922{,}22\ \text{Kč}.$$

Firma od banky obdržela součet těchto tří hodnot, tj. 32 778 Kč.

3. *Složené úročení*

V předchozích rozborech učebnic se zmiňuji o počítání s daní z úroků. Autoři této knihy neužívají zdaňovací koeficient (viz např. předešlá učebnice), ale pracují přímo se srážkovou daní z úroků (ve vzorci je označena *d*). Používají vzorec

$$K_0 = K_n \cdot \left(1 + \frac{i \cdot (1-d)}{m}\right)^n,$$

který se od základního vzorce pro složené úročení liší především ve své pružnosti. Proměnná m totiž označuje, kolikrát za rok se úročí, tedy ročně – $m = 1$, pololetně – $m = 2$, měsíčně – $m = 12$ apod., a proměnná n je počet zdaňovacích období, tj. m-krát počet roků. Autoři navíc zmiňují i možnost $d = 0$, tedy složené úročení bez srážkové daně.

Zadání úloh se nijak neodlišuje od jiných učebnic, jen zde autoři více pracují se splácením úvěrů. Ocitujme jeden typický příklad:

Půjčka ve výši 200 000 Kč má být splacena dvěma nominálně stejnými splátkami, splatnými za rok a za tři roky. Určete výši těchto splátek při úrokové sazbě 15 % p. a. a čtvrtletním připisování úroků. ([R1], str. 35, výsledek: 132 804,59 Kč)

4. *Efektivní úroková sazba*

Autoři vysvětlují možnost porovnání více úrokových sazeb s odlišnou úrokovací dobou. Vedou čtenáře k tomu, aby dokázal přepočítat úrokovou sazbu na jednotnou úrokovací dobu jednoho roku. Uvádějí spojité úročení, kdy úrokovací doba limitně klesá k nule, a proto se mění základní užívaný vzorec

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1,$$

kde m je počet úrokovacích období za jeden rok a i úroková míra, na vzorec

$$i_e = e^i - 1.$$

5. *Spojité úročení*

Spojitému úročení se podrobněji věnuje samostatná pátá kapitola této učebnice, v níž autoři v jednom řešeném příkladu uvádějí i odvození výše uvedeného vzorce s odvoláním na jednu ze základních limit matematické analýzy, kterou je

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e\,.$$

Odvození vzorce pro spojité úročení kapitálu na n roků vypadá takto:

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0\cdot\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0\cdot\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{i\cdot n} = K_0\cdot e^{i\cdot n}\,.$$

([R1], str. 41)

6. Smíšené úročení

Autoři v této kapitole kombinují dříve vysvětlené typy úročení. Objasňují, že smíšené úročení nastává v okamžiku, kdy je kapitál uložen na necelý počet úrokovacích období. Ukazují, že celá úrokovací období počítáme pomocí složeného úročení a necelá úrokovací období (může se to týkat prvního nebo posledního nebo těchto obou úrokovacích období, pokud nejsou celá) počítáme každé zvlášť pomocí jednoduchého úročení.

Postup tedy vypadá takto:

1. krok: Zúročíme kapitál pomocí jednoduchého úročení za dobu do konce prvního neceléno úrokovacího období.

2. krok: Zúročíme výsledný kapitál pomocí složeného úročení za období celých úrokovacích období.

3. krok: Zúročíme výsledný kapitál pomocí jednoduchého úročení za dobu posledního neceléno úrokovacího období.

Pokud je kapitál vložen, resp. vybrán v okamžiku začátku nového úrokovacího období, vynecháme první, resp. třetí krok.

7. Inflace, jmenovitá a reálná úroková míra

Autoři nejprve definují pojem inflace, poté ukazují její vliv na znehodnocení kapitálu a možnosti vhodné obrany (např. výhodné uložení finančních prostředků). Vysvětlují, že porovnáním kupní síly získáme z nominální (jmenovité) úrokové míry v závislosti na inflaci úrokovou míru reálnou, která je pro nás podstatná. Její hodnota ukazuje nárůst kupní síly, a tedy skutečné zhodnocení uloženého kapitálu.

Zdůrazňují, že inflace způsobuje nárůst ceny zboží a služeb:

$$K = K_0\cdot(1+\pi),$$

kde π je míra inflace.

Při složeném úročení našeho vloženého kapitálu ukazují, jak přepočítat budoucí hodnotu kapitálu na budoucí cenu zboží a služeb:

$$K = K_0 \cdot [1 + i_{nom} \cdot (1 - d)] = K_0 \cdot (1 + i_{real}) \cdot (1 + \pi),$$

V poslední rovnosti je uveden základní vztah pro výpočet reálné úrokové míry.

Praktický příklad osvětlí podstatu inflace, kterou mnoho lidí z neznalosti opomíjí či úmyslně neuvažuje:

Komerční banka nabízí termínovaný vklad úročený 5 % ročně. Daň z úroků je 15 % a očekávaná inflace 5,1 %. Jaká je reálná úroková míra na tento vklad? ([R1], str. 52, výsledek: –0,809 %)

8. Spoření – budoucí hodnota anuity

V úvodu kapitoly je vyložena podstata spoření. Jednoduše řečeno, základem spoření je pravidelné ukládání stejné úložky. Jedná se tedy o jednoduché úročení pro jednotlivá úrokovací období a složené úročení částek vzniklých v jednotlivých úrokovacích období. Střadatele zajímá součet více částek, které jsou úročeny smíšeně, tj. částečný součet aritmetické posloupnosti dává první člen geometrické posloupnosti, u níž chceme opět najít její částečný součet. Podle délky trvání spoření rozlišujeme spoření dlouhodobé a krátkodobé. Poznamenejme, že krátkodobé spoření nepřesahuje jedno úrokovací období.

V této kapitole se autoři podrobněji zmiňují o spoření předlhůtním a polhůtním, které ovlivňuje tvar vzorce pro jedno úrokovací období (zdůrazňují např. rozdíl mezi pravidelným ukládáním částky na začátku nebo na konci měsíce a rozdíl v zisku finančních prostředků).

Předveďme vše na příkladu:

Kolik naspoří klient, který ukládá po dobu pěti let vždy počátkem čtvrtletí 1 250 Kč při roční úrokové sazbě 10 % a pololetním připisování úroků? ([R1], str. 60)

Řešení:

Nejprve vypočítáme s použitím vzorce pro jednoduché úročení stav účtu na konci prvního úrokovacího období:

$$a = 1250 \cdot (1 + 0{,}05) + 1250 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05\right) = 1250 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2+1}{2 \cdot 2} \cdot 0{,}05\right) = 2\ 593{,}75\ \text{Kč}.$$

Představíme si, že tato částka 2 593,75 Kč je anuitou, kterou ukládáme na konci každého z deseti úrokovacích období (je to 10 pololetí). Tyto anuity jsou úročeny složeně; první devětkrát, druhá osmkrát až poslední nulakrát. Je zřejmé, že jde o prvních deset členů geometrické posloupnosti v obráceném pořadí od a_{10} po a_1. Kvocientem je $q = (1+i)$ a s_{10} vyjádříme vzorcem

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1},$$

který upravíme na tvar užívaný ve finanční matematice a obdržíme

$$s_{10} = a \cdot \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}, \text{ tj. } s_{10} = 2\ 593{,}75 \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05} = 32\ 623{,}9\ \textit{Kč}.$$

9. Důchody – současná hodnota anuity

V této kapitole čtenář vystačí se vzorci pro jednoduché a složené úročení. Autoři nejprve vysvětlí, co je podstatou důchodu. Jedná se o to, že nějaké finanční instituci poskytneme náš kapitál a ten se úročí a je nám z něho vyplácena určitá částka.

Autoři vyloží všechny základní typy důchodů. Nejdříve rozliší důchod stálý (tj. trvalý) a dočasný; v případě důchodu stálého je vyplácen pouze úrok, v případě vyplácení většího obnosu je částka po určité době vyčerpána a jedná se o důchod dočasný. Poté objasní další alternativy, jež jsou závislé na okamžiku první výplaty, tj. zda se vyplácí tato částka okamžitě po založení důchodu, či až po několika úrokovacích období.

Podstatu opět ihned pochopíme z konkrétního příkladu:

Jaká je počáteční hodnota důchodu 6 000 Kč vyplácených na počátku každého čtvrtletí po dobu 10 let? Úrokovací sazba je 5 % p. a. s ročním připisováním úroků.

Řešení:

V jednom úrokovacím období (rok) se důchod vyplácí 4x (každé čtvrtletí). Důchod je vyplácen 10 let, tj. 10 úrokovacích období. Úroková sazba na úrokovací období je 5 % a jde o důchod předlhůtní.

$$D = X \cdot k \cdot \left[1 + \frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot i\right] \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

$$D = 6000 \cdot 4 \cdot \left[1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right] \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}05}\right)^{10}}{0{,}05} = 191\ 112{,}94$$

Počáteční hodnota důchodu je 191 112,94 Kč. ([R1], str. 65–66)

Podle dosazení vidíme, že X je vyplácená anuita důchodu, k je počet výplat v jednom úrokovacím období, i je úroková sazba na úrokovací období, n je počet úrokovacích období a v je diskontní faktor $\left(v = \frac{1}{1+i}\right)$. Výše uvedený finální vzorec vznikl kombinací vzorců pro součet k členů aritmetické posloupnosti a n členů geometrické posloupnosti. Jeho podrobné odvozování však v učebnici postrádám.

10. Umořování dluhu

Tato kapitola hovoří o umořování dluhu. Při svém vlastním výkladu studenty vedu k představě výměny rolí banky a klienta. Závěr je pro ně velmi povzbuzující, neboť se nemusí učit nic nového. Lze si totiž jednoduše představit, že důchod je v podstatě umořování dluhu bankou vůči vkladateli. Role se vymění, ale matematická pravidla a vzorce zůstávají stejné.

Jak jsem naznačil, umořováním dluhu se míní jeho splácení věřiteli, kterým je v současné době nejčastěji nějaký bankovní ústav. Při výpočtech se využívají částečné součty geometrických posloupností, složené úročení a další již dříve vyložené vzorce. Podstatné pro výši splátek je, zda chceme mít konkrétní anuity, konstantní anuitu, konstantní úmor nebo určitý počet splátek. Při sestavování skupin příkladů se autoři řídí právě těmito požadavky.

Těsnou příbuznost umořování dluhu s důchody předvedeme na konkrétním příkladu:

Půjčka ve výši 100 000 Kč má být splacena 10 stejnými ročními anuitami. Vytvořte umořovací plán, jestliže banka používá úrokovou míru 10 % p. a. ([R1], str. 80)

Řešení:

Nebudeme sestavovat umořovací plán, jen se podíváme na výpočet roční anuity. Protože se jedná o anuitu roční (splácí se jedenkrát za úrokové období), použijeme vzorec ve tvaru

$$D = a \cdot \frac{1-v^n}{i},$$

a odtud plyne, že

$$a = D \cdot \frac{i}{1-v^n},$$

a tedy po dosazení zadaných hodnot

$$a = 100\,000 \cdot \frac{0{,}1}{1 - \left(\frac{1}{1 + 0{,}1} \right)^{10}} = 16\,274{,}54\ Kč.$$

K těmto výpočtům lze podle mého názoru i názoru autorů velmi dobře využít tabulkový procesor MS Excel. Práce s nástroji tohoto softwaru včetně tvorby vzorců je zařazena na středních školách do předmětu informační a výpočetní technika. Protože jsem vyučoval základní kurz počítačů, tj. včetně tabulkového procesoru MS Excel, mohl jsem studentům ukázat výhody, nevýhody, časovou i odbornou náročnost. Studenti oceňovali praktické využití tvorby vzorců v tabulkovém procesoru a uvědomovali si zejména časovou náročnost tvorby formuláře pro jednotlivé typy úloh.

Další kapitoly

Od 11. do 18. kapitoly autoři pracují zejména s dluhopisy, akciemi, úrokovými sazbami a měrami. Je to látka určená především studentům, kteří se zajímají o finanční matematiku hlouběji a plánují například její studium na vysoké škole zejména ekonomického směru. Rozhodně již nepatří do základů finanční matematiky vyučovaných na středních školách, ačkoli vlastní matematický aparát není příliš složitý. V jednotlivých kapitolách jsou objasněny zejména finanční transakce s dluhopisy a akciemi. Autoři vysvětlují např. kupónové dluhopisy, diskontované dluhopisy, konzole, akcie, jejich renditu, výnosnost, duraci, změnu ceny při změně úrokové sazby, dividendy, operují s portfolii, výnosovými křivkami a riziky investice.

Hodnocení učebnice

Struktura učebnice a jednotlivých kapitol svědčí o tom, že autoři předpokládají základní znalosti z oblasti finanční matematiky. Tato publikace je vhodná k opakování již probraných oblastí finanční matematiky. Myslím si, že optimální cílovou skupinou jsou studenti prvních ročníků vysokých škol s ekonomickým zaměřením.

Domnívám se, že první dvě třetiny učebnice mohou používat vyučující finanční matematiky i na středních školách. Uváděné úlohy jsou praktické, jasně formulované a student při jejich četbě vidí, že získané znalosti v budoucnu využije. Matematický aparát této učebnice se odlišuje od ostatních učebnic jen v některých tvarech vzorců a způsobech jejich odvození; od páté kapitoly se využívají jen modifikace zavedených vzorců na základě zaměření příslušné kapitoly. Z vlastní pedagogické zkušenosti vím, že právě při modifikacích studenti narážejí na největší problémy, proto považuji zařazení těchto kapitol za velmi důležité. Autoři učebnice kladou hlavní důraz na využití vzorců a jejich modifikací v konkrétních úlohách a teoretický podklad zmiňují převážně v poznámkách. Domnívám se, že používat samostatně tuto publikaci bez další literatury by nebylo vhodné. Student by při studiu postrádal hlubší teoretický vhled.

Kromě šíře záběru a množství příkladů je kladem této učebnice-sbírky využití počítačů při „mechanickém počítání". Tak jako autoři předešlé učebnice [OR] pracují s kalkulačkami, autoři této publikace se snaží vysvětlit, jak a proč k výpočtům používat tabulkový procesor MS Excel. Nejlépe je to vidět při sestavování umořovacích plánů, které jsou časově náročné. Při tvorbě vzorců v excelovských buňkách vedou autoři studenta krok za krokem a pro snadnou orientaci a pochopení stačí jen elementární znalost tohoto tabulkového procesu.

K výuce základního kurzu finanční matematiky bych si tuto knihu nevybral. Zvolil bych ji až k souhrnnému procvičování již probrané látky, neboť její koncepce (stručný souhrn nezbytné teorie, dostatečné množství řešených a neřešených příkladů) dobře vyhovuje samostatné práci a především umožní hlubší procvičení studované tématiky.

Jarmila Radová, Petr Dvořák: *Finanční matematika pro každého*, 1., 2., 3., a 4. vydání, Grada, Praha, 1993, 1997, 2001, 2003.

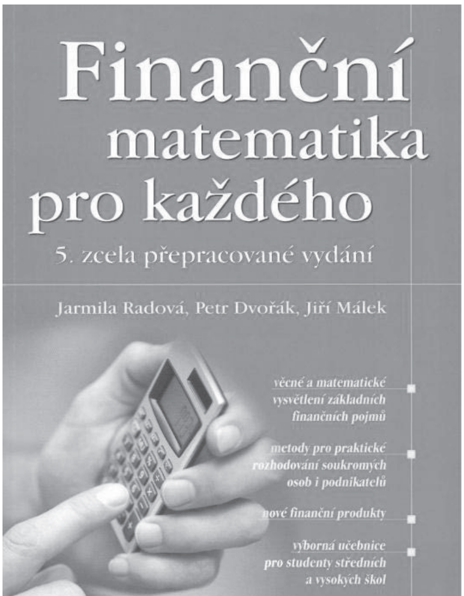
Kniha je určena zejména těm, kteří během svých studií nenarazili na finanční matematiku, je spolehlivým průvodcem touto tématikou a od čtenářů nevyžaduje rozsáhlé ani matematické, ani ekonomické znalosti. Jejím cílem je srozumitelně popsat a vysvětlit základní matematické postupy využívané ve finanční matematice, přiblížit svět bankovnictví a finančnictví i s příslušnými definicemi a naučit čtenáře aplikovat vyložené postupy v konkrétních finančních otázkách.

O zájmu veřejnosti o tohoto průvodce hovoří i počet vydání; od roku 1993 do roku 2009 jsme se dočkali již sedmi. Každé pružně reaguje na nové skutečnosti ve světě financí, na nové produkty a aplikace. Každé vydání můžeme rozdělit na dvě části. V první autoři vysvětlují matematické metody a postupy užívané v oblasti financí (úročení, spoření, důchody, splácení atd.). Ve druhé pracují s jejich aplikacemi u všech nejdůležitějších bankovních a finančních produktů (směnky, skonto, účty, hypoteční a spotřebitelské úvěry, leasing, dluhopisy, akcie, devizové obchody atd.).

Výklad všech témat je velmi přehledný a dobře propracovaný. Jednotlivé příklady jsou názorné, krok za krokem řešené a vysvětlované. Publikaci však chybí neřešené úlohy k procvičování.

Všichni recenzenti knihy hovoří pochvalně o její celkové struktuře a šíři vykládané látky. Velmi pozitivní a výstižnou recenzi napsali na třetí, podstatně rozšířené vydání z roku 2001 doc. Ing. Petr Marek, CSc., z katedry financí a oceňování podniku VŠE Praha, a Ing. Jiří Sedláček, Ph.D., z katedry mezinárodního obchodu VŠE Praha. Vyšla v Softwarových novinách 12(2001), roč. 12, č. 9, str. 112, pod názvem *Precizní a srozumitelná finanční matematika*. Z vlastních učitelských zkušeností se domnívám, že každý, pro koho je publikace určena a kdo ji prostudoval, ji shledal velmi užitečnou.

Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého*, 5. zcela přepracované vydání, Grada, Praha, 2005, 288 stran.



Zhodnotíme podrobněji páté přepracované vydání, které obsahuje již sedmnáct kapitol a dosahuje téměř 300 stran. Rozšířený kolektiv autorů zachovává strukturu a hlavní cíle publikace, tj. nejprve uvádí stručnou teorii, pak srozumitelně a přehledně podává řešení všech základních úloh. Podíváme-li se na obsah, zjistíme, že učebnice pokrývá celou šíři činností bankovních a finančních ústavů. Měla by být pohodlným a pohotovým rádcem zejména těm, kteří se otázkám finanční matematiky nevěnují pravidelně.

Obsah průvodce

1. Základní pojmy (15 stran);
2. Úročení (22 stran);
3. Složené úročení (34 stran);
4. Spoření (28 stran);
5. Důchody jako pravidelné platby z investice (19 stran);

6. Splácení úvěru (25 stran);
7. Směnky a směnečné obchody (10 stran);
8. Skonto (4 strany);
9. Běžné účty (4 strany);
10. Hypoteční úvěry (11 stran);
11. Spotřebitelské úvěry (5 stran);
12. Forfaiting, faktoring a leasing (16 stran);
13. Dluhopisy (24 stran);
14. Durace, konvexita, imunizace (18 stran);
15. Akcie (18 stran);
16. Měnový kurz a devizové obchody (6 stran);
17. Finanční termínované obchody (14 stran).

Charakteristika jednotlivých kapitol

1. *Základní pojmy*

V úvodní kapitole autoři zdůrazňují, že finanční matematika není nic jiného než využití matematiky ve finanční oblasti. Uvádějí pojmy procentového počtu, lineární funkci, nepřímou úměrnost, exponenciální funkci, logaritmickou funkci, průměr aritmetický, geometrický a vztah mezi nimi. Celou podkapitolu věnují aritmetickým a geometrickým posloupnostem a řadám. V této kapitole řeší pouze dva příklady na procvičení procent, vše ostatní je teoretický základ nutný pro následující kapitoly.

2. *Úročení*

Ve druhé kapitole autoři definují pojmy úrokové míry, úroku, úrokové sazby a představují typy úročení včetně standardů pro počítání doby uložení či vypůjčení finančních prostředků. Vysvětlují jednoduché úročení polhůtní, uvádějí nutné vzorce a rovnice u něj používané, současnou a budoucí hodnotu při jednoduchém úročení, diskont, vztah mezi polhůtní úrokovou sazbou a diskontní sazbou.

Typově podobné úlohy jsme ukazovali v rozborech předešlých učebnic, proto uvedeme jen nejzajímavější příklad této kapitoly:

Dne 17. 2. 2005 se konala holandská aukce státních pokladničních poukázek o jmenovité hodnotě 1 000 000 Kč.

Den emise	*Den splatnosti*	*Objem aukce*	*Požadováno*	*Emitent odkoupil*	*Průměrná cena*
18. 2. 2005	*20. 5. 2005*	*8 mld. Kč*	*27,83 mld. Kč*	*10 mld. Kč*	*994 694,7 Kč*

Jaká je roční výnosnost této pokladniční poukázky? ([K5], str. 45)

K řešení použijeme známé vzorce pro jednoduché úročení. V den splatnosti, tj. za 91 dní (podle standardu ACT/360) dostaneme za investici (průměrná cena) jmenovitou hodnotu. Míru výnosnosti tedy vypočítáme

$$i = \frac{1\,000\,000 - 994\,694{,}7}{994\,694{,}7} \cdot \frac{360}{91} = 0{,}0211 = 2{,}11\%.$$

3. *Složené úročení*

Ve třetí kapitole autoři vysvětlují základní vztahy pro toto úročení polhůtní, dále ukazují kombinaci jednoduchého a složeného úročení, tedy smíšené úročení. Pak se věnují výpočtům doby splatnosti, současné hodnoty při složeném úročení, výnosnosti, úroku, srovnávají jednoduché a složené úročení. Zavádějí také pojem efektivní úrokové sazby, spojitého úročení, nominální a reálné úrokové sazby, hrubého a čistého výnosu. Většinu z nich jsme již vysvětlili při rozboru učebnice [R1] a předešlých učebnic. Ukažme nyní jen příklad na výpočet čisté výnosnosti:

Jaké čisté roční výnosnosti dosáhne klient, jestliže uložil na počátku roku částku 100 000 Kč na šestiměsíční termínovaný vklad při 2% úrokové sazbě p. a. a v polovině roku kapitál včetně vyplacených úroků znovu okamžitě uložil na šestiměsíční termínovaný vklad při 2,5% úrokové sazbě p. a.? Úroky z vkladů podléhají dani z příjmů vybírané srážkou ve výši 15 %. ([K5], str. 76–77, výsledek: 1,92 % p. a.)

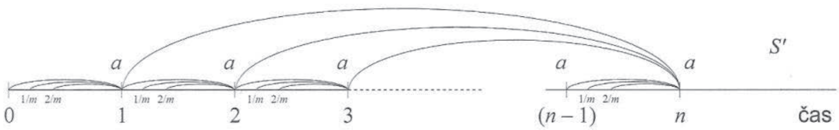
4. *Spoření*

Ve čtvrté kapitole autoři osvětlují problematiku krátkodobého a dlouhodobého střádání. U každé úlohy objasňují, že nejprve musíme počítat se spořením krátkodobým (jedno úrokovací období a tudíž pracujeme s jednoduchým úročením) a pak s dlouhodobým. Aby zvýšili přehlednost textu, využívají pro znázornění doby úročení jednotlivých vkladů tabulek a schémat, které pomáhají při tvorbě a pochopení příslušných vzorců.

Spoření rozdělují na krátkodobé předlhůtní, krátkodobé polhůtní, dlouhodobé předlhůtní a dlouhodobé polhůtní. Připomeňme, že předlhůtní znamená vklad na počátku období a polhůtní na konci období (rozdíl je vidět nejen ve vzorcích, ale i ve schématech uvedených níže). V úlohách ukazují praktické situace, kdy dochází ke kombinaci těchto spoření. Kapitolu uzavírají podkapitolou o stavebním spoření, které využívá poměrně velké procento občanů.

Podívejme se na užívaná schémata, z nichž se dá vyčíst doba uložení a získat přehled, kdy se jedná o částečný součet aritmetické posloupnosti a kdy geometrické. Posuďte sami v případech, kdy je m vkladů během jednoho úrokovacího období a spoří se n období:

Schéma kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření předlhůtního:



([K5], str. 97, obrázek 4.5)

Pro jedno úrokovací období dostáváme součet dob uložení jednotlivých vkladů

$$\frac{m}{m}+\frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}+\ldots+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m}{m}+\frac{1}{m}\right)\cdot m=\frac{m+1}{2}$$

a z toho získáváme vztah pro částku vzniklou z vkladů včetně úroků na konci prvního úrokovacího období (vklad = x, úroková sazba = i):

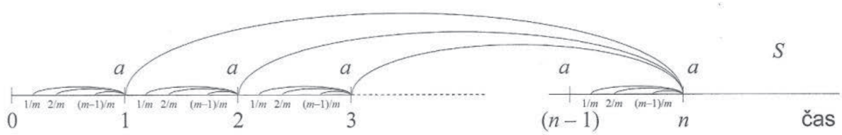
$$a=x\cdot\left(m+\frac{m+1}{2}\cdot i\right).$$

Tuto anuitu máme nově na účtu na konci každého z n úrokovacích období. Anuity jsou úročeny složeně a výsledkem je tedy nám známý a ze schématu čitelný částečný součet geometrické posloupnosti. Po úpravách dostáváme finální vzorec:

$$S'=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=x\cdot\left(m+\frac{m+1}{2}\cdot i\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=m\cdot x\cdot\left(1+\frac{m+1}{2\cdot m}\cdot i\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

Vytknutí m z první závorky zdůrazňuje počet vkladů za jedno úrokovací období, jiný důvod úprava nemá. Čárku v označení celkově naspořené částky S' používají autoři pro předlhůtní vklady.

Schéma kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření polhůtního:



([K5], str. 101, obrázek 4.6)

Pro jedno úrokovací období dostáváme součet dob uložení jednotlivých vkladů

$$\frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}+\frac{m-3}{m}+\ldots+\frac{0}{m}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m-1}{m}+\frac{0}{m}\right)\cdot m=\frac{m-1}{2}$$

a získáváme vztah pro částku vzniklou z vkladů včetně úroků na konci roku (vklad = x, úroková sazba = i):

$$a=x\cdot\left(m+\frac{m-1}{2}\cdot i\right).$$

Tuto anuitu máme opět nově na účtu na konci každého úrokovacího období. Tyto částky jsou jako v předešlém případu úročeny složeně a výsledkem je obdobný vzorec:

$$S=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=x\cdot\left(m+\frac{m-1}{2}\cdot i\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=m\cdot x\cdot\left(1+\frac{m-1}{2\cdot m}\cdot i\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

Použití výše uvedených vzorců předvádějí autoři na konkrétních řešených příkladech.

Ocitujme znění dvou z nich:

Kolik naspoříme za tři roky, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1 000 Kč při úrokové sazbě 2,8 % p. a. a čtvrtletním úrokovém období? ([K5], str. 100, výsledek: 37 593,48 Kč)

Kolik budeme mít k dispozici na účtu na konci roku, jestliže jsme na počátku roku uložili částku 10 000 Kč a koncem každého měsíce spoříme na tento účet 1 000 Kč? Úroková sazba je 2,5 % p. a. s pololetním připisováním úroků. ([K5], str. 101, výsledek: 22 389,45 Kč)

Vidíme, že úlohy jsou velmi podobné úlohám již dříve zmíněným v předešlých publikacích, liší se jen v drobnostech – výše vkladu, popis situace.

5. *Důchody jako pravidelné platby z investice*

Pátá kapitola také patří mezi základní pilíře finanční matematiky. Jejím obsahem je důchod. Autoři vysvětlují smysl a základní typy důchodů, tj. důchod bezprostřední, odložený a věčný, a typy jeho plateb, tj. předlhůtní a polhůtní; známe je již z předešlých rozborů. Používají také obdobná schémata jako v předešlé kapitole a stejnou cestu odvozování vzorců. Zavádějí nové nezbytné pojmy: střadatel, zásobitel a diskontní faktor. Podívejme se jen na zajímavé úlohy.

Máme k dispozici 30 000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční polhůtní důchod na pět let s tím, že s jeho výplatou začneme za dva roky. Jak vysoké budou výplaty při neměnné 4% roční úrokové sazbě? ([K5], str. 118)

Řešení:

Z rozboru zadání vyplývá, že první dva roky se částka složeně úročí čtyřmi procenty, během třetího také a na jeho konci je první výplata. Zmenšená částka o výplatu se úročí ve čtvrtém roce a na jeho konci je opět výplata atd. Na konci sedmého roku je úročená částka rovna výplatě. Zapišme rovnici, kde K = 30 000 Kč a a je výplata (anuita)

$$\left(\left(\left((K \cdot 1{,}04^2 \cdot 1{,}04 - a) \cdot 1{,}04 - a\right) \cdot 1{,}04 - a\right) \cdot 1{,}04 - a\right) \cdot 1{,}04 - a = 0.$$

Odstraníme-li závorky a převedeme-li členy se záporným znaménkem na pravou stranu rovnice, obdržíme rovnici

$$K \cdot 1{,}04^7 = a \cdot 1{,}04^4 + a \cdot 1{,}04^3 + a \cdot 1{,}04^2 + a \cdot 1{,}04 + a.$$

Na pravé straně vidíme součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti, a proto ji můžeme upravit na tvar

$$K \cdot 1{,}04^7 = a \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{1{,}04 - 1}.$$

Z rovnice vyjádříme a, dosadíme za K a vypočítáme a

$$a = \frac{K \cdot 1{,}04^7 \cdot 0{,}04}{1{,}04^5 - 1} = \frac{30\ 000 \cdot 1{,}04^7 \cdot 0{,}04}{1{,}04^5 - 1} = 7\ 288{,}70.$$

Částka 7 288,70 Kč je roční polhůtní důchod vyplácený podle podmínek úlohy.

Některé uvedené úlohy mají stejnou matematickou podstatu, ale jejich otázka se zaměřuje na investiční rozhodnutí.

Kolik budeme ochotni nyní investovat, jestliže nám z investice vždy na konci měsíce plyne platba ve výši 1 000 Kč po dobu pěti let? Uvažujeme úrokovací sazbu 5 % p. a. a pololetní úrokové období. ([K5], str. 126, výsledek: 53 059,39 Kč)

Každý typ důchodu je podrobně popsán a řešení úloh je velmi dobře okomentováno. Na žádnou důležitou modifikaci typu úloh a podmínek výplat nebylo zapomenuto.

6. *Splácení úvěru*

Šestá kapitola je poslední kapitolou vysvětlující matematický aparát finanční matematiky. Tato část je pro praktický život tou nejdůležitější. Pokud špatně investujeme, máme buď malý zisk nebo ztratíme mnoho svých prostředků. Zde však je řeč o prostředcích, které nám jsou zapůjčeny a za půjčení platíme poplatky. Při problémech může dojít až k exekuci našeho majetku a takových případů rok od roku stále přibývá.

Autoři nejprve definují úvěr neboli dluh neboli půjčku jako poskytnutí peněžní částky na určitou dobu za odměnu zvanou úrok. Následně rozdělují typy úvěru podle jejich základních parametrů, tedy doby splatnosti a způsobu úmoru neboli splacení. Podle doby je rozdělují na krátkodobé (do jednoho roku), střednědobé (do čtyř let) a dlouhodobé (nad čtyři roky) a podle způsobu umořovaní na splatné najednou včetně úroků, najednou po výpovědi, pravidelnými platbami při konstantní anuitě, při konstantním úmoru a při rostoucí anuitě.

Popsanou problematiku můžeme převést na již známá pravidla finanční matematiky. Nejen využití způsobu úrokování, ale celou situaci můžeme v již vyložené látce objevit. Stačí si vzpomenout, co je důchod. Někam někomu jsme dali své finanční prostředky a ty jsou úročeny a nám výplatami spláceny. U úvěru si bankovní ústav k nám „uloží“ finanční prostředky, ty jsou podle stanovených pravidel úročeny a my je splácíme. Vidíme, že to není nic nového, jak jsem již popsal v rozboru předešlé publikace. Je obtížně pochopitelné, proč si to tolik lidí stále odmítá uvědomit. Autoři tuto souvislost zmiňují, ale dále nerozvádějí z důvodu šíře možností způsobu splácení úvěru. Každý učitel by při svém výkladu měl tuto souvislost zdůraznit a na vhodných příkladech předvést.

Vše posoudíme na konkrétních příkladech.

Úvěr 40 000 Kč má být umořen polhůtními ročními anuitami za šest let při neměnné roční 5% úrokové sazbě. Určete výši anuity a sestavte umořovací plán. ([K5], str. 132)

Řešení: Porovnejme situaci s příkladem ze strany 118 této publikace (viz výše) a ihned souvislosti objevíme. Na místo *K* budeme používat *D* jako dluh, vše ostatní zůstane zachováno. Sledujme vývoj hodnoty úvěru a na závěr zobrazme umořovací plán.

$$\left(\left(\left(\left((D \cdot 1{,}05 - a) \cdot 1{,}05 - a\right) \cdot 1{,}05 - a\right) \cdot 1{,}05 - a\right) \cdot 1{,}05 - a\right) \cdot 1{,}05 - a = 0.$$

$$D \cdot 1{,}05^6 = a \cdot 1{,}05^5 + a \cdot 1{,}05^4 + a \cdot 1{,}05^3 + a \cdot 1{,}05^2 + a \cdot 1{,}05 + a,$$

$$D \cdot 1{,}05^6 = a \cdot \frac{1{,}05^6 - 1}{1{,}05 - 1},$$

$$a = \frac{D \cdot 1{,}05^6 \cdot 0{,}05}{1{,}05^6 - 1}.$$

Do tohoto finálního vzorce dosadíme zadanou hodnotu úvěru:

$$a = \frac{40\,000 \cdot 1{,}05^6 \cdot 0{,}05}{1{,}05^6 - 1} = 7\,880{,}70.$$

Autoři používají vzorec $a = D \cdot \frac{i}{1 - v^n}$, kde $v = \frac{1}{1+i}$ je diskontní faktor. Jedinou algebraickou úpravou můžeme náš odvozený vzorec převést na jejich a to rozšířením zlomku n-tou mocninou diskontního faktoru.

Částka 7 880,70 Kč je roční polhůtní anuita. Správnost výpočtů můžeme ověřit umořovacím plánem.

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				40 000,00
1	7 880,70	2 000,00	5 880,70	34 119,30
2	7 880,70	1 705,97	6 174,73	27 944,57
3	7 880,70	1 397,23	6 483,47	21 461,10
4	7 880,70	1 073,05	6 807,64	14 653,45
5	7 880,70	732,67	7 148,03	7 505,43
6	7 880,70	375,27	7 505,43	0,00

Další příklady se liší jen typem podmínek splácení úvěru.

Úvěr 500 000 Kč se má splácet ročními anuitami ve výši 90 000 Kč při 7% roční úrokové sazbě. Máme určit počet anuit, výši poslední splátky a sestavit umořovací plán. ([K5], str. 137, výsledek: 8 splátek, osmá ve výši 25 710,86 Kč)

Úvěr 120 000 Kč má být splacen ročními polhůtními splátkami (včetně úroků). První splátka je o rok odložena, tedy bude splatná za dva roky ve výši 24 000 Kč. Každá další splátka je vždy o 20 000 Kč vyšší. Sestavte umořovací plán, je-li úroková sazba 10 % p. a. ([K5], str. 150, výsledek: úvěr bude splacen čtyřmi splátkami v celkové výši 169 677,20 Kč)

Úlohy s pevně danou i proměnnou velikostí anuity patří mezi běžné a při práci bankovních ústavů na ně také často narazíme.

Touto problematikou končí základní část průvodce. Jak zmiňuji již v základním popisu, druhá část se věnuje konkrétním důležitým bankovním a finančním produktům. Na nich jsou aplikovány postupy vyložené v první části. Náplň odpovídá nárokům budoucího investora a je tudíž nadstavbou pro středoškolské studenty.

Z pohledu požadavků z finanční matematiky kladených na středoškolského studenta hlubší analýza následujících jedenácti kapitol není nutná. Nezbytný matematický aparát byl vyložen v prvních šesti kapitolách a další kapitoly jen využívají v závislosti na produktu jeho modifikace. Pro lepší orientaci v popisované problematice uvedeme z každé kapitoly jeden ilustrační příklad, který pracuje se zkoumaným produktem. Některé příklady si každý může bez problémů každý čtenář přepočítat sám, k jiným je třeba nastudovat další teorii.

Firma odprodala dne 2. 9. 2003 směnku bance, znějící na částku 150 000 Kč, se splatností 2. 10. 2003. Jaká byla při diskontní úrokové sazbě 10 % p. a. částka, kterou banka firmě vyplatila? ([K5], kapitola 7, str. 154, výsledek: 148 750 Kč)

Prodávající firma dodala zboží v celkové prodejní ceně 200 000 Kč. Částka je splatná do čtyř týdnů, přičemž při zaplacení do jednoho týdne nabízí prodávající firma možnost skonta ve výši 2 % z prodejní ceny. V případě okamžitého zaplacení by musela kupující firma nákup financovat krátkodobým úvěrem, úroková sazba činí 12 % p. a. Je pro kupující firmu za daných podmínek výhodné využít skonta a zaplatit zboží do týdne či nikoliv? ([K5], kapitola 8, str. 165, výsledek: skonto 4 000 Kč, úrok 1 372 Kč, skonto s využitím úvěru je výhodnější)

Určete, jaký bude stav běžného účtu na konci roku, jestliže na něm byl během roku následující pohyb: 1. 1. stav účtu 3 000 Kč, 15. 4. vklad 1 500 Kč, 15. 6. výběr 1 000 Kč, 1. 10. vklad 1 000 Kč. Předpokládáme, že úrokové období je roční, vycházíme ze standardu 30/360 – měsíc počítáme jako 30 dní a rok 360 dní; úroková sazba 1 % zůstává po celý rok neměnná, od zdanění úroků abstrahujeme. ([K5], kapitola 9, str. 167, výsledek: 4 537,71 Kč)

Žadatel mladší 36 let chce získat hypoteční úvěr na koupi rodinného domu s jednou bytovou jednotkou, jehož cena je 2 500 000 Kč. Jakou částku mu banka poskytne? Jak vysoké budou měsíční anuity při úrokové sazbě 5 % p. a., počítá-li, že úvěr splatí za patnáct let? Jak vysoké budou anuity v případě poskytnutí státní podpory? ([K5], kapitola 10, str. 176, výsledek:

výše hypotéky 1 750 000 Kč, měsíční anuita 13 839 Kč, státní podpora 1 %, rozdíl měsíčních anuit 723 Kč)

Porovnejte z hlediska klienta dvě varianty spotřebitelských úvěrů a rozhodněte, která pro něj bude výhodnější. V obou případech se jedná o úvěr ve výši 100 000 Kč jednorázově čerpaný se splatností 1 rok.

1. varianta: Za sjednání si banka účtuje poplatek 500 Kč (splatný při sjednání smlouvy), úvěr je splatný během jednoho roku ve čtyřech pravidelných čtvrtletních splátkách ve výši 27 000 Kč.

2. varianta: Za sjednání úvěru banka neúčtuje žádný poplatek, úvěr je splatný během jednoho roku ve dvanácti pravidelných měsíčních splátkách ve výši 9 000 Kč.

([K5], kapitola 11, str. 184, výsledek: 1. RPSN 13,21 %, 2. RPSN 15,45 %, 1. je výhodnější)

Porovnejte jako právnická osoba výhodnost zakoupení osobního automobilu v pořizovací ceně 300 000 Kč na úvěr a na leasing, pokud banka a leasingová společnost nabízejí následující podmínky:

Leasing		*Úvěr*	
Akontace	*100 000 Kč*	*úroková sazba p. a.*	*10 %*
Roční leasingová splátka	*64 500 Kč*	*doba splatnosti*	*čtyři roky*
Doba trvání leasingu	*čtyři roky*	*roční úmor*	*75 000 Kč*

Pro výpočet dále uvažujme lineární způsob odpisování dle zákona o daní z příjmů a sazbu daně z příjmů 24 %. ([K5], kapitola 12, str. 200, odpověď: výhodnější je leasing)

Vypočítejte teoretickou cenu dluhopisu s pevnou kuponovou platbou s kuponovou sazbou 5 % p. a., s jmenovitou hodnotou 1 000 Kč, se splatností tři roky a při tržní úrokové míře 5,5 %. ([K5], kapitola 13, str. 206, výsledek: 986,50 Kč)

Vypočítejte duraci dluhopisu s pevnou kuponovou úrokovou sazbou 8 %, jestliže jmenovitá hodnota dluhopisu je 1 000 Kč, doba do splatnosti tři roky, aktuální tržní cena dluhopisu je 920,25 Kč, a tedy výnosnost do doby splatnosti (tržní úroková sazba) činí 10 % (kuponové platby jsou vypláceny jedenkrát ročně, první bude následovat ode dneška za jeden rok). ([K5], kapitola 14, str. 228, výsledek: 2,79)

Stanovte vnitřní hodnotu akcie firmy za předpokladu, že očekáváte výši dividendy na konci prvního roku 120 Kč a uvažujete 14% požadovanou míru výnosnosti, přičemž předpokládáte a) konstantní absolutní výši dividend *v jednotlivých letech, b) konstantní roční míru růstu dividend ve výši 10 %.* ([K5], kapitola 15, str. 248, výsledek: a) 857 Kč, b) 3 000 Kč)

Stanovte termínovou cenu akcie k termínu za šest měsíců, pokud je aktuální promptní kurz 1 000 Kč a šestiměsíční úroková sazba činí 4 % p. a. Během této doby, předpokládejme v termínu realizace obchodu (T_1), bude vyplacena na 1 akcii čistá dividenda ve výši 100 Kč. ([K5], kapitola 17, str. 273, výsledek: 920 Kč)

V úlohách autoři pracují jen s již definovanými pojmy, vždy přesně charakterizují danou situaci, popíší její podmínky a položí srozumitelnou otázku. Při nejasnostech čtenář ve všech případech může nahlédnout do následného autorského řešení, které neobsahuje vždy všechny elementární kroky, ale základní strukturu postupu autoři nezanedbávají.

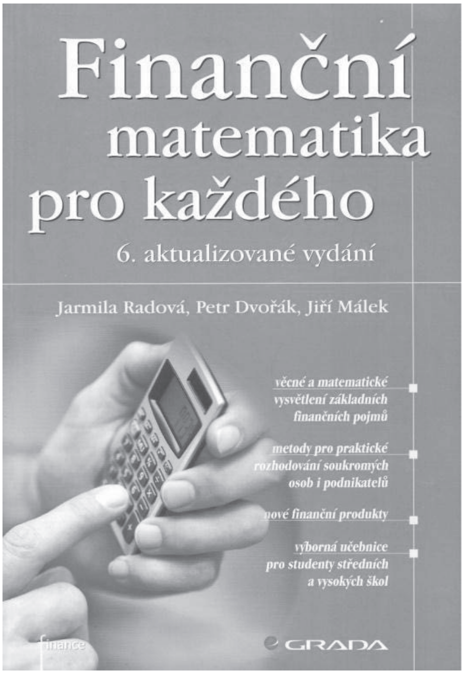
Hodnocení průvodce

Autoři chtějí oslovit každého zájemce o finanční matematiku. Definují pojmy, popisují aplikace, odvozují vzorce, tvoří a řeší úlohy stylem, který nás o tom nenechá na pochybách.

Rozsah jednotlivých kapitol i celé publikace ukazuje význam, jaký autoři finanční matematice přikládají. Prvních šest kapitol obsahuje kompletní matematický aparát nutný ke zvládnutí základů finanční matematiky, poté autoři systematicky představují produkty bankovního a finančního světa, na něž může člověk narazit v běžném každodenním životě.

Každému, zejména těm, kteří již odrostli školnímu věku, mohu tohoto průvodce světem financí jen doporučit. I přes těch několik tiskových chyb, které jsem v publikaci objevil, se jedná o velmi kvalitní a dobře propracovanou publikaci sledující jasný cíl – pomoci těm, kteří ve finanční matematice tápají.

Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého*, 6. aktualizované vydání, Grada, Praha, 2007, 296 stran.



Aktualizace šestého vydání spočívá ve vložení nové kapitoly, která se věnuje portfoliu. *Měření výkonnosti portfolia* v rozsahu 6 stran najdeme před kapitolou o akciích a seznámíme se se dvěma váženými metodami měření – časově váženou metodou (TWR) a peněžně váženou metodou (MWR). Pomohou nám změřit výkonnost portfolia v případě, kdy dochází např. k peněžním tokům, neboli investice není konstantní.

Jejich význam můžeme pochopit z následujícího příkladu:

Předpokládejme měsíční časovou periodu (30 dnů). Na počátku je hodnota portfolia 50 000 Kč, desátý den je vloženo 20 000 Kč a dvacátý den je vybráno 10 000 Kč. Konečná hodnota portfolia třicátý den je 70 000 Kč. ([K6], str. 249)

Úkolem je vypočítat měsíční výnosovou míru, tj. vnitřní výnosové procento (užívaná zkratka IRR) do doby splatnosti.

Autoři ve vzorovém řešení využívají vztah

$$V_E = V_T \cdot (1 + r)^T = \sum \left[C(t) \cdot (1 + r)^{(T-t)} \right],$$

kde T je délka časového horizontu, V_E je konečná hodnota portfolia, V_T je počáteční hodnota portfolia, $C(t)$ je peněžní tok v čase t a r je vnitřní výnosové procento za čas T.

Upozorňují, že neexistuje explicitní vzorec pro vyjádření r a že je třeba použít nějakou vhodnou numerickou metodu.

Ze zadání příkladu sestavíme rovnici, v níž exponenty označují počet dekád:

$$70\,000 = 50\,000 \cdot (1 + r)^3 + 20\,000 \cdot (1 + r)^2 - 10\,000 \cdot (1 + r).$$

Hodnota r představuje desetidenní výnosovou míru. Autoři uvádějí výsledek $r = 20{,}22\ \%$, s čímž nesouhlasím. Aproximační metodou mi hodnota r vychází mezi 5,287 % a 5,288 %. Předvedu potvrzení své pochybnosti. Nahraďme výše uvedenou rovnici funkcí y:

$$y = 50\,000 \cdot (1 + r)^3 + 20\,000 \cdot (1 + r)^2 - 10\,000 \cdot (1 + r) - 70\,000.$$

Nyní hledejme průsečík této funkce s osou x, hodnoty peněz snížíme na desetitisícinu a pro zjednodušení ještě provedeme substituci $x = 1 + r$. Dostáváme tedy:

$$y = 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 7.$$

Hodnota hledaného x musí být větší než 1, neboť portfolio prokazuje kladný výnos (s nulovým výnosem bychom měli na konci hodnotu portfolia jen 60 tisíc Kč). Pomocí první derivace funkce y podle x nalezneme stacionární body, tj. body podezřelé z lokálních extrémů:

$$y' = 15 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1 = 0.$$

Přibližná hodnota stacionárních bodů je $x_1 \doteq -0{,}424$ a $x_2 \doteq 0{,}157$. Podle znaménka první derivace jednoduše zjistíme, že na intervalu $(-\infty; x_1)$ je funkce rostoucí, na intervalu $(x_1; x_2)$ je klesající a na intervalu $(x_2; +\infty)$ je opět rostoucí. Nás zajímá jen poslední interval, protože lokální maximum v bodě x_1 má y-ovou souřadnici zápornou. Monotonie funkce na tomto intervalu zajišťuje existenci maximálně jednoho průsečíku grafu funkce s osou x. Z předpisu funkce $y = f(x)$ velmi jednoduše nalezneme potřebné funkční hodnoty:

$$f(1) = -1 \text{ a } f(2) = 39$$

a pomocí aproximace nalezneme

$$f(1{,}052\,87) = -0{,}000\,082\,051\,85 \quad \text{a} \quad f(1{,}052\,88) = +0{,}000\,116\,345.$$

Vrátíme-li se k substituci $x = 1 + r$ zjistíme, že hodnota r náleží intervalu (5,287 %; 5,288 %) a nemůže tedy být 20,22 %, jak je uvedeno v knize. Připomeňme, že vypočítané r udává desetidenní výnosovou míru a hledaná měsíční výnosová míra je pak její trojnásobek.

Novému vydání musím vytknout to, že autoři neodstranili tiskové chyby předešlého vydání. Když porovnávám text nového vydání s předešlým, v němž mám nalezeno několik chyb, jsou opět na stejných místech. Uveďme dvě z nich.

Příklad 10-2 ([K5], str. 176–177; resp. [K6], str. 176–177)

V části vzorce je chybně dosazena úroková míra – na místo 4 % uvedeno 5 % z jiné části příkladu, ale výsledek je správný:

$$a_{p.m.} = \frac{1\,500\,000 \cdot \frac{0{,}04}{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{10\cdot 12}}{\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{10\cdot 12} - 1} = 15\,187.$$

Správně mělo být:

$$a_{p.m.} = \frac{1\,500\,000 \cdot \frac{0{,}04}{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{10\cdot 12}}{\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{10\cdot 12} - 1} = 15\,187.$$

Příklad 13-3 ([K5], str. 214; resp. [K6], str. 214)

Chybně je uvedena a použita 10% kuponová sazba nebo je špatně proveden výpočet:

$$r_R = \frac{C}{P_0} + \frac{P_k - P_0}{k \cdot P_0} = \frac{100}{950} + \frac{1150 - 950}{1 \cdot 950} = 0{,}221.$$

Výsledek odpovídá 1% kuponové sazbě. Pak jsou dosazeny hodnoty:

$$r_R = \frac{C}{P_0} + \frac{P_k - P_0}{k \cdot P_0} = \frac{10}{950} + \frac{1150 - 950}{1 \cdot 950} = 0{,}221.$$

Stejné hodnoty s touto chybou jsou použity v *příkladu 13-4* řešeného na straně 216 v obou vydáních.

6.3 Učebnice a sbírky pro základní školy

František Běloun a kolektiv: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školy*, 6. přepracované vydání, SPN, Praha, 1992, 204 stran.

Bez této sbírky si žádný žák končící základní školu a připravující se na přijímací zkoušky z matematiky nedokázal své studium představit. O její vznik se přičinili autoři: František Běloun, Ivan Bušek, Vlastimil Macháček, Jana Müllerová, Květa Sovíková a Václav Šůla. První vydání bylo určeno pro první absolventy tzv. nové koncepce základní školy s osmiletou docházkou. Mezi ně jsem patřil také já a jako většina žáků osmé třídy základní školy ve školním roce 1983–84 jsme ji se svědomitou učitelkou matematiky zcela propočítali. O její kvalitě nemůže nikdo, kdo její příklady vypočítal, pochybovat.

Uveďme pro zajímavost jednotlivá vydání:

- 1. vydání, SPN, Praha, 1984, 312 stran;
- 2. vydání, SPN, Praha, 1985, 312 stran;
- 3. doplněné vydání, SPN, Praha, 1985, 387 stran;
- 4. vydání, SPN, Praha, 1986, 387 stran;
- 5. vydání, SPN, Praha, 1987, 387 stran;
- 6. přepracované vydání, SPN, Praha, 1992, 204 stran;
- 7. vydání, SPN, Praha, 1994, 206 stran;
- 8. upravené vydání, SPN, Praha, 1998, 254 stran.

Zaměřme se na zlom mezi pátým a šestým vydáním. Podívejme se na třetí kapitolu ve starším vydání [B5] nazvanou *Úlohy na procenta* a v novějším [B6] *Procenta*. Ve vydání [B5] nenarazíme na jedinou úlohu, která by operovala s uložením peněz. Drtivá většina úloh na procvičení procent zmiňuje JZD, traktoristy, pionýry a podobně. Následující vydání [B6] z roku 1992 obsahuje tři úlohy na jednoduché úrokování. Právě těmito úlohami se finanční matematika vrátila na základní školy jako praktické využití znalostí procent. Obávám se však, že rozsahu z období Rakousko-Uherské monarchie a první republiky již nikdy nedosáhne.

Uveďme zmíněné tři úlohy:

32. Vypočítejte, o kolik Kčs vzroste uložený vklad 6 450 Kčs za jeden rok, je-li úročen 4,5 % za rok.

33. Vklad byl uložen jeden rok při ročním úroku 7,5 %. Po připsání úroků vzrostl na částku 36 012,50 Kčs. Určete původní vklad.

34. Vklad 27 500 Kčs byl uložen čtvrt roku při ročním úroku 3,6 %. O jakou částku vzrostl?
([B6], str. 29, výsledky: 32. nárůst o 290,25 Kčs, 33. původní vklad 33 500 Kčs, 34. nárůst o 247,50 Kčs)

Jako žák jsem tuto sbírku velmi ocenil, neboť pokrývá všechna témata matematiky základní školy. Navíc náročnější úlohy byly odlišeny hvězdičkou. Bohužel současný trend přijímacího řízení nenutí žáky k rozsáhlé přípravě na přijímací zkoušky na střední školy. Podle zpráv, které mám od svých kolegů ze základních škol, je procento počtářů této sbírky mizivé. V porovnání s obdobím druhé poloviny osmdesátých let, kdy téměř každý z žáků, jenž se hlásil na střední školu, vypočítal většinu úloh této sbírky, je tento trend alarmující.

Peter Krupka: *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií, Aritmetika, algebra, funkce*, 1. vydání, Global, Praha, 1995, 359 stran.

S touto rozsáhlou dvoudílnou sbírkou úloh pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií jsem se setkal a ocenil ji až jako učitel. První díl pokrývá kromě geometrie všechna témata matematiky základní školy a je tedy pro studenty prvních ročníků středních škol velmi vhodný k opakování a oživení probrané látky. Druhý díl nazvaný *Geometrie* obsahuje planimetrii, úlohy s rovinnými obrazci, tělesy, tj. konstrukce, výpočty obvodů, obsahů, povrchů a objemů.

První díl sbírky, na nějž jsem se při analýze zaměřil, se díky své kvalitě dočkal několika vydání:

- 1. vydání, Global, Praha, 1995, 359 stran;

- 2. vydání, Global, Praha, 1996, 359 stran;
- 3. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2002, 367 stran;
- 4. vydání, Prometheus, Praha, 2006, 367 stran.

Počet příkladů v tomto dílu sbírky je více než čtyřnásobný oproti sbírce [B5] či její novější verzi [B6]. Také v ní jsou označeny složitější úlohy. Na místo hvězdičky autor použil puntík, respektive dva u velmi náročných úloh. Navíc je zde uvedena kapitola *Nápovědy*, která pomáhá žákům a studentům při samostatném tréninku.

Úlohy z finanční matematiky nalezneme v deváté kapitole nazvané *Procenta*, a to v její druhé podkapitole nazvané *Slovní úlohy*. Je zde 48 úloh, z nichž šest se zabývá úročením vkladů. Uveďme dvě z nich, které vzhledem k použití složeného úrokování přesahují rozsah sbírky [B6].

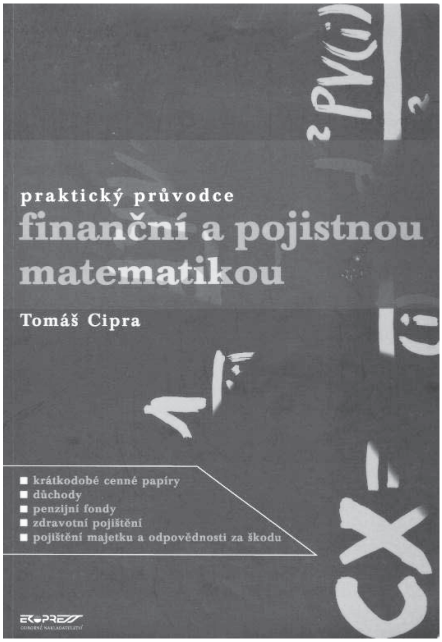
2.32 Vklad na vkladní knížce je úročen 11 %. Kolik je třeba na knížku uložit, abychom mohli za tři roky vybrat 10 000 Kč? S vkladem během té doby nemanipulujeme.

2.34 Kolika procenty by musel být úročen vklad na vkladní knížce, aby se vklad zdvojnásobil po pěti letech?
([KR], str. 227, výsledky: 2.32 požadovaný vklad 7 312 Kč, 2.34 úroková míra 14,87 %, v nápovědách autor opakovaně úročí a sestavuje rovnice: třikrát úročit = 10 000, tj. $1{,}11 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}11 \cdot x = 10\,000$ Kč; resp. $x^5 = 2$)

Na sbírce oceňuji zejména její tematickou bohatost a množství úloh od těch nejjednodušších až k dosti složitým. Výjimečností jsou nápovědy k úlohám. Z pohledu rozsahu finanční matematiky se však nejedná o nijak zvláštní sbírku. Objevuje se v ní jednoduché i složené úrokování, ale úlohy nejsou nijak komplikované.

6.4 Praktický průvodce

Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou,* 1. vydání, HZ, Praha, 1995, 320 stran (2. vydání, Ekopress, Praha, 2005, 308 stran).



V této rozsáhlé publikaci autor velmi podrobně vykládá základní kapitoly finanční matematiky, objasňuje všechny podstatné produkty finančních ústavů a zabývá se také pojištěním. Navazuje tak na své dřívější publikace *Finanční matematika v praxi* (1993) a *Pojistná matematika v praxi* (1994).

Autor danou problematiku přednáší na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze a na Vysoké škole ekonomické v Praze. Knihu pojal jako ucelenou učebnici a výkladový slovník finanční a pojistné matematiky nejen pro studenty příslušných vysokých škol, ale snažil se látku přístupně prezentovat i široké veřejnosti. Veškeré uvedené početní postupy předvedl na praktických příkladech. V závěru knihy připojil množství užitečných finančních tabulek, které známe z učebnic první poloviny dvacátého století, a které umožňují, aby počtáři vystačili s pouhým násobením bez mocnin.

Učebnice byla povolena ediční komisí Fakulty informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze dne 9. 5. 1995 jako vysokoškolský učební text a byla také doporučena MŠMT ČR dne 16. 6. 1995, č. j. 17603/95-23, jako učební pomůcka pro gymnázia a střední školy obchodního zaměření. Její druhé vydání s těmito doložkami vyšlo v roce 2005 v nezměněné struktuře v nakladatelství Ekopress v Praze. Aktualizace se týkaly zejména finančních a pojistných produktů a úrokových měr. Rozšířeny byly finanční tabulky a doplněn byl výklad na výpočtovou metodiku, tj. částečné vynechání „stárnoucích" praktických detailů.

Obsah učebnice

Charakteristika průvodce

Vzhledem k našemu zájmu se zaměříme na prvních dvanáct kapitol. V nich nalezneme 86 podrobně a přehledně řešených příkladů a vedle klasického řešení na „papír“ autor uvádí návody na řešení v tabulkovém procesoru Excel. Všechny příklady mají kvalitní komentář.

Při studování této učebnice nás zaujme precizní grafická struktura – definice pojmů, znění a následné řešení příkladů, množství doplňujících poznámek, systematické značení proměnných finanční matematiky atd.

Autor svědomitě dodržuje symboliku běžnou ve finančnictví. Pokud tato značení uváděli ve svých knihách jiní autoři (např. [E1]), v samotných výpočtech a odvozování jsme se jim mohli vyhnout. Právě značení proměnných finanční matematiky (např. $\ddot{a}_{4n\rceil j/4}$ – současná hodnota jednotkového předlhůtního čtvrtletního důchodu) mi činilo při studiu prvotní problémy. Ať už hovořím za studenty středních škol či jejich učitele matematiky, nesetkáváme se a nepracujeme běžně s těmito symboly.

V učebnici objevíme rozsáhlou přílohu s finančními tabulkami a právě proto je nezbytné, abychom si zvykli na používání výše zmíněných symbolů pro finanční proměnné. Jejich vyhledání v konkrétních tabulkách nám následně usnadní výpočty a ušetří čas. Je zde ovšem skryté nebezpečí, že nás přestane zajímat původní způsob výpočtu hodnot těchto proměnných a matematická podstata se skryje. Řešení problému zkrátíme na minimum, ale nebudeme vidět matematiku, budeme jen mechanicky násobit a dělit. Na tento „nešvar“ jsem upozornil v této kapitole již dříve.

Tato učebnice označená jako praktický průvodce obsahuje kapitoly finanční matematiky, které jsem rozebíral již v předešlých učebnicích. Zaměřím se proto jen na ukázku definice a řešení dvou vybraných příkladů.

Kapitola **4.5. *Reálná úroková míra*** ([C1], str. 48–50)

Inflace *je znehodnocení měny v důsledku růstu cen. Obvykle se měří pomocí tzv. cenových indexů založených na maloobchodní ceně spotřebního koše vybraných položek zboží a služeb (např. Retail Price Index RPI ve Velké Británii, Consumer Price Index CPI v USA, index spotřebitelských cen v ČR).*

Příklad 4.5.2. *Jaká je čistá reálná míra zisku, jestliže hrubá nominální míra zisku je 13 %, daň ze zisku je 25 % a míra inflace je 10,5 %? (Aby posouzení zisku bylo realistické, je nutné vzít v úvahu nejen daně, ale také inflaci. Často se pak ukáže, že zdánlivý zisk je vlastně ztráta.)*

Řešení: *Čistá nominální míra zisku je*

$$i_{nom} = 0{,}13 \cdot 0{,}75 = 0{,}097\,5,$$

tj. 9,75 %.

Reálná míra zisku je pak podle (4.5.2)

$$i_{real} = \frac{i_{nom} - i_{infl}}{1 + i_{infl}} = \frac{0{,}975 - 0{,}105}{1 + 0{,}105} = -0{,}006\,8,$$

tj. –0,68 %.

Ve skutečnosti se tedy jedná o ztrátu ve výši 0,68 %. Jestliže pro srovnání počítáme i_{real} *pomocí aproximace z (4.5.2), dostaneme srovnatelný výsledek*

$$i_{real} \sim i_{nom} - i_{infl} = 0{,}087\,5 - 0{,}105 = -0{,}007\,5, \textit{ tj. } -0{,}75\ \%.$$

Během řešení autor nevynechává žádné podstatné kroky a studujícímu vyloží také další možné varianty řešení. V tomto příkladu se konkrétně jedná o postup využívající aproximaci. Pro snadnou orientaci v učebnici autor označil každý důležitý vzorec číslem kapitoly a pořadovým číslem v kapitole a při řešení příkladů se odvolává na toto značení, což ocení každý student, jemuž to ušetří čas při vyhledávání.

Kapitola ***6.4. Hypoteční úvěr*** ([C2], str. 82)

Příklad 6.4.1. *Klient chce koupit nemovitost za 1 450 000 Kč. Při uzavření smlouvy zaplatí hotově 450 000 Kč (tj. 31 % ceny) a zbytek má splatit v měsíčních hypotečních splátkách vždy na konci měsíce během 20 let. Kolik činí měsíční splátka, je-li úroková míra připadající na vrub klienta 5,4 %?*

Řešení: *Podle postupů z této kapitoly (viz také příklad 6.2.5) pro*

$$PV = 1\,450\,000 - 450\,000 = 1\,000\,000,\ j = 0{,}054,\ m = 12,\ n = 20 \text{ je}$$

$$K = PV / a_{mn\rceil j/m} = 1\,000\,000 / a_{12\cdot 20\rceil 0{,}054/12} = 1\,000\,000 / a_{240\rceil 0{,}0045} =$$

$$= 1\,000\,000 / \frac{1 - (1/1{,}0045)^{240}}{0{,}0045} = 1\,000\,000/146{,}573\,49 = 6\,823\ Kč.$$

V Excelu bychom příslušnou výši měsíční splátky z tohoto příkladu snadno zjistili pomocí finanční funkce tvaru =PLATBA(5,4%/12;240;1000000;1).

Ve jmenovateli vzorce vidíme současnou hodnotu jednotkového polhůtního měsíčního důchodu, kterou však nemůžeme v příslušné tabulce nalézt vzhledem k atypické úrokové míře. Řešitel tedy musí hodnotu 146,573 49 vypočítat podle vzorce

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i},$$

jenž zná z předešlých rozborů (i – úroková míra pro jedno úrokovací období, n – počet úrokovacích období, v – diskontní faktor, tj. odúročitel).

Pokud by úroková míra byla násobkem poloviny procenta (např. 5,5 %), nalezneme hodnotu měsíčního důchodu v tabulce 7 nazvané *Jaká částka umožní platby 1 Kč vždy na konci měsíce během dané doby?* ([C2], str. 288). V řádku 20 roků ve sloupci 5,5% roční úrokové míry → 145,3726.

Autor vybral vhodné, názorné a praktické příklady, na nichž si student může ověřit své znalosti nastudované v předcházející teoretické části.

Hodnocení učebnice

Strukturu a výklad doplněný přehledem podrobných definic následovaným pečlivě vyřešeným rozumným počtem praktických příkladů ocení každý zájemce o studium finanční matematiky.

Středoškolští studenti, především ti, kteří budou z nějakého důvodu donuceni k samostudiu, narazí na několik úskalí – v některých pasážích jsou přílišné podrobnosti (jedná se o vysokoškolský text) a je používáno nejasné a komplikované značení zavedené ve finančnictví. Domnívám se, že ne malé procento raději sáhne po jiné učebnici a s výbavou, kterou tam získají, se možná později vrátí k tomuto kvalitnímu a obsáhlému průvodci.

Člověk, který se zabývá nebo chce zabývat prací s běžnými produkty finančních ústavů, zde nalezne odpovědi na drtivou většinu svých otázek. Pro začátečníka v průvodci postrádám podrobný výklad a rozbor různých typů spoření podle frekvence vkladů a jejich časového rozpisu (např. ukládání konstantní částky na počátku měsíce po dobu více úrokovacích období, ukládání konstantní částky na konci měsíce po dobu více úrokovacích období), různých typů výplat důchodu (např. důchod vyplácený na počátku měsíce po dobu více úrokovacích období, důchod vyplácený na konci měsíce po dobu více úrokovacích období). Také při výpočtech je hodně užíváno vyhledávání hodnot ve finančních tabulkách a student není vždy nucen „vidět“, jak se k nim dospělo. Autor předpokládá, že čtenář tyto vědomosti získal již během dřívějšího studia.

Učebnice není matematicky příliš náročná, autor svědomitě používá výhradně středoškolský matematický aparát. Zaměřuje se však především na rozsáhlý a velmi podrobný výklad, definice finančních objektů a práci s nimi. Řešení úloh nejsou komplikovaná, postupy jsou jasné, stručné a výstižné.

Tento praktický průvodce je dalším významným nástrojem podporujícím finanční vzdělanost. Jeho kvality (odbornost, struktura, přehlednost i grafika) ho bezpochyby řadí na přední místo našich současných učebnic. Myslím si, že většina studentů, kteří nejsou obeznámeni se základy finanční matematiky, jej bude pokládat za velmi náročný. Jako rozšiřující či doplňkovou učebnici bych jej však doporučil i běžnému uživateli finančních produktů. Navíc bych vyzdvihl, že obsahuje rozsáhlé a přehledné kapitoly o pojistné matematice, do níž „vidí“ jen velmi malé procento populace.

6.5 Shrnutí

Z předchozí analýzy vidíme, že nových učebnic a sbírek věnujících se finanční matematice vzniklo a vzniká značné množství. Publikace se liší šířkou, hloubkou, úrovní a náročností teorie, odvozováním vzorců, rozbory řešených příkladů, množstvím úloh na procvičení atd. Každý zájemce o toto téma má tedy možnost vše potřebné nalézt, prostudovat, propočítat a pochopit. Propočítání je velmi důležité, neboť slouží k pochopení postupu, hlubšímu porozumění studovanému problému i ke zlepšení odhadu výhod a rizik. Z výše uvedeného důvodu nestačí seznámit se a setrvat jen u jedné učebnice, neboť pohled jiného autora může přinést lepší pochopení a podnítit širší nadhled. Může také vést k odhalení numerických, tiskových, přepisových a jiných chyb, zanedbání podmínek či opomenutí reálných situací. Každému mohu poskytnout jednu důležitou radu, kterou již určitě od svých učitelů mnohokrát slyšel: *Při studiu určitého tématu musíte pracovat s více než jedním zdrojem informací, nemůžete se spolehnout na jedinou osamělou knihu.*

Porovnejme z pohledu finanční matematiky hodnocené publikace pro střední školy přehledně v tabulce.

publikace	odvozování vzorců	počet řešených příkladů	počet neřešených příkladů
E1	ano	38	30
E2	ano	13	42
M5	ne	17	14
O1	ano	48	234
O2	ano	4	12
O3	ano	32	59
OR	ne	35	35
R1	ne	123	141
K5	ano	111	0
K6	ano	115	0
C1/C2	ano	86	0

Když k tomuto výčtu knih přidáme další existující učebnice, sbírky a průvodce (např. učební texty Tomáše Cipry, sbírky a učebnice Oldřicha Odvárka nebo Bohuslava Eichlera, průvodce Otakara Macháčka, Ludvíka Prouzy a Josefa Jílka), má každý, kdo má zájem, k dispozici dostatečně širokou škálu vhodného studijního materiálu. Jestliže se tedy někdo „spálí“, protože podcenil přípravu, či přecenil své znalosti nebo informace získané například při pohovoru při sjednávání úvěru či z reklamních letáků finančních institucí, může to dávat za vinu jen sobě samému.

6.6 Seznam literatury a internetových zdrojů

Obecná literatura

[VK] Alena Vališová, Hana Kasíková a kolektiv: *Pedagogika pro učitele*, 1. vydání, Grada, Praha, 2007, 402 stran.

Učebnice

[B5] František Běloun a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školy*, 5. vydání, SPN, Praha, 1987, 387 stran.
(1. vydání – 1984, 312 stran; 2. nezměněné vydání – 1985, 312 stran; 3. doplněné vydání – 1985, 387 stran; dotisk 3. doplněného vydání – 1986, 387 stran; 4. vydání – 1986, 387 stran; 5. vydání – 1987, 387 stran; 6. přepracované vydání – 1992, 204 stran; 7. vydání – 1994, 206 stran; 8. upravené vydání – 1998, 254 stran)

[B6] František Běloun a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školy*, 6. přepracované vydání, SPN, Praha, 1992, 204 stran.

[C1] Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, 1. vydání, HZ, Praha, 1995, 320 stran.

[C2] Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, 2. vydání, Ekopress, Praha, 2005, 308 stran.

[E1] Bohuslav Eichler: *Úvod do finanční matematiky*, 1. vydání, Septima, Praha, 1993, 80 stran.

[E2] Bohuslav Eichler: *Hospodářské výpočty pro střední školy*, 1. vydání, Fortuna, Praha, 2001, 120 stran.

[K] Jarmila Radová, Petr Dvořák: *Finanční matematika pro každého*, 1. vydání, Grada, Praha, 1993, 170 stran.
(2. vydání – 1997, 224 stran; 3. rozšířené vydání – 2001, 264 stran; 4. vydání – 2003, 260 stran; 5. zcela přepracované vydání – 2005, 288 stran; 6. aktualizované vydání – 2007, 296 stran; 7. aktualizované vydání – 2009, 293 stran)

[K5] Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého*, 5. zcela přepracované vydání, Grada, Praha, 2005, 288 stran.

[K6] Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého*, 6. aktualizované vydání, Grada, Praha, 2007, 296 stran.

[KR] Peter Krupka: *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií, Aritmetika, algebra, funkce*, 1. vydání, Global, Praha, 1992, 359 stran.

[M5] Jan Mlčoch: *Ekonomika pro střední školy, 5. díl: Bankovnictví a pojišťovnictví. Daně a cla*, 1. vydání, Fortuna, Praha, 1992, 54 stran.

[O1] Oldřich Odvárko: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 200 stran.
[O2] Oldřich Odvárko: *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 1995, 128 stran.
(2. vydání – 2001, 126 stran; 3. vydání – 2008, 126 stran)
[O3] Oldřich Odvárko: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – Posloupnosti a finanční matematika*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2002, 124 stran.
[OR] Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 100 stran.
[R1] Jarmila Radová, Vladislav Chýna, Jiří Málek: *Finanční matematika v příkladech*, 1. vydání, Professional Publishing, Praha, 2005, 160 stran.

Internetové zdroje

[I01] Národní pedagogická knihovna J. A. Komenského, Praha: *http://www.npkk.cz*.
[I02] Online katalog Národní knihovny ČR: *http://www.nkp.cz*.