Kapitola IV.

ZOBRAZENÍ Z E_r DO E_s .

§ 1. Doplňky z obecné teorie množin a zobrazení množin.

Známe význam symbolů: $a \in M$, $M \subset N$, $M = N$[1], $\emptyset$ (prázdná množina). Dále sjednocení $A \cup B$, průnik $A \cap B$, rozdíl $A - B$. Je-li $B \subset A$, nazývá se $A - B$ také často doplňkem množiny B vzhledem k A . Také známe pojem sjednocení n množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$; píšeme $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ nebo $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$; podobně průnik $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$. Pro $n = 1$ je ovšem $\bigcap_{k=1}^{1} A_k = \bigcup_{k=1}^{1} A_k = A_1$. Obdobně: je-li dána nekonečná posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots,$ mluvíme o jejich sjednocení $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (to je množina těch prvků, které leží aspoň v jedné množině A_k) a o jejich průniku $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ (to je množina těch prvků, které leží ve všech množinách A_k). Ještě obecněji: Budiž dána jakákoliv množina (neprázdná) J ; každému $j \in J$ budiž přiřazena nějaká množina A_j . Potom definujeme sjednocení $S = \bigcup_{j \in J} A_j$ a průnik $P = \bigcap_{j \in J} A_j$ takto:

S je množina těch prvků, které leží v A_j aspoň pro jedno $j \in J$,
P je množina těch prvků, které leží v A_j pro všechna $j \in J$.

Důležité jsou tyto vztahy (de Morganovy):

$$A - \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} (A - B_j) , \tag{1}$$

$$A - \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} (A - B_j) . \tag{2}$$

(Jestliže $B_j \subset A$ pro všechna $j \in J$, lze (1), (2) číst takto: Doplněk sjednocení je průnikem doplňků, doplněk průniku je sjednocením doplňků - ovšem my nepředpokládáme $B_j \subset A$). Dokažme (1). Položme $M = A - \bigcup_{j \in J} B_j$, $N = \bigcap_{j \in J} (A - B_j)$. Máme dokázat, že každý prvek z M leží v N , a každý

1) Vždy je $M \subset M$; je-li $M \subset N$, $M \neq N$, nazývá se M pravou částí množiny N .

prvek z N leží v M. Budiž tedy předně $x \in M$. Potom pro každé $j \in J$ je pravda, že x neleží v B_j, ale leží v A, tedy leží v $A - B_j$ pro každé $j \in J$, tedy je $x \in N$. Budiž nyní za druhé $x \in N$. Pro každé $j \in J$ je pravda, že x leží v $A - B_j$, tj. leží v A a neleží v B_j. Tedy x leží v A, ale neleží v $\bigcup_{j \in J} B_j$, tedy $x \in M$.

Podobně si sami dokážete vzorec (2).

Důležitý je pojem zobrazení, o kterém jsme už také příležitostně mluvili. Mějme dvě libovolné množiny $M \neq \emptyset$, N. Nechť každému $x \in M$ je přiřazen určitý jediný prvek $y \in N$ (takže je jistě také $N \neq \emptyset$). Potom říkáme, že je dáno zobrazení množiny M do N; prvek y, přiřazený prvku x, se nazývá obrazem prvku x. Množina M se nazývá oborem nebo také definičním oborem tohoto zobrazení. Značíme-li dané zobrazení např. písmenem f, značíme obraz prvku x znakem $f(x)$. Vidíte, že to není nic jiného než zcela obecně pojatý pojem funkce. Také se místo "zobrazení" často říká "funkce", místo "obraz prvku x" se říká "hodnota funkce v bodě x" apod.

Příklad 1.: Budiž $M = \langle -1, 1 \rangle$, $N = E_1$; každému $x \in M$ přiřaďme číslo $\arcsin x$. To je zobrazení množiny M do E_1.

Je-li P nějaká množina, jež je částí oboru M zobrazení f, značíme znakem $f(P)$ množinu všech $f(x)$ pro všechna $x \in P$; je to tzv. obraz množiny P (při zobrazení f). Je-li f zobrazení množiny M do N, je $f(M) \subset N$. Jestliže $f(M) = N$, říkáme, že f je zobrazení množiny M na N. To tedy znamená, že každý prvek z N je obrazem některého (aspoň jednoho) prvku z M. Zobrazení z příkl. 1 ($M = \langle -1, 1 \rangle$, $f(x) = \arcsin x$) je tedy zobrazení intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Nechť konečně je f nějaké zobrazení, jehož definiční obor je částí množiny Q; potom říkáme, že f je zobrazení z množiny Q. Např. naše zobrazení z příkl. 1 je zobrazení z E_1 do E_1; současně je to zobrazení z E_1 na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, dále - jak jsme již řekli - je to zobrazení množiny (bez z!) $\langle -1, 1 \rangle$ do E_1 a zobrazení množiny $\langle -1, 1 \rangle$ na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Např. zobrazení z E_k do E_1 není nic jiného, než reálná funkce k reálných proměnných. Každé zobrazení f množiny M do N je zobrazením množiny M na $f(M)$.

Mám-li zobrazení f množiny A do B a zobrazení g množiny B do C, mohu každému $x \in A$ přiřadit prvek $h(x) = g(f(x)) \in C$, tím dostanu zobrazení h množiny A do C; mluvíme o zobrazení složeném ze zobrazení f a g.

Zobrazení f množiny M do N se nazývá prosté, jestliže dva různé prvky množiny M mají vždy různé obrazy, tj. jestliže platí

1014-4527

$$\forall_{x \in M} \forall_{y \in M} (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)) .$$

Např. zobrazení f : $f(x) = x^2$ s oborem $(-\infty, +\infty)$ není prosté; zobrazení f : $f(x) = x^2$ s oborem $\langle 0, +\infty)$ je prosté.

Zobrazení složené ze dvou prostých zobrazení f, g je prosté. Důkaz: Budiž $h(x) = g(f(x))$; je-li $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$, tedy $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, tj. $h(x_1) \neq h(x_2)$. Velmi jednoduché zobrazení f množiny M na sebe je zobrazení f dané rovnicí $f(x) = x$; říkáme mu <u>identické</u> zobrazení množiny M . Je ovšem prosté.

Budiž f prosté zobrazení množiny M na N. Každý prvek $y \in N$ je tedy obrazem <u>jediného</u> prvku $x \in M$ (tj. $f(x) = y$). Tento prvek nazvu <u>vzorem</u> prvku y při zobrazení f . Mohu nyní sestrojit zobrazení φ množiny N na M tak, že naopak každému prvku $y \in N$ jako jeho obraz při zobrazení φ přiřadím jeho vzor x při zobrazení f (tj. $\varphi(y)$ je ono x , pro něž $f(x) = y$). Zobrazení φ se nazývá <u>inverzní</u> k f . Jinými slovy: $y = f(x)$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $x = \varphi(y)$. Při inverzním zobrazení se tedy vymění úloha obrazu a vzoru. Zřejmě je φ prosté zobrazení N na M . Pro všechna $x \in M$ je $\varphi(f(x)) = x$, pro všechna $y \in N$ je $f(\varphi(y)) = y$. Tj. $\varphi(f(x))$ je identické zobrazení M na M; $f(\varphi(y))$ je identické zobrazení N na N . Inverzní zobrazení k φ je opět f .

Dokažte si sami toto: Budiž f_1 prosté zobrazení M na N, f_2 prosté zobrazení N na P . Budiž f složené zobrazení: $f(x) = f_2(f_1(x))$ pro $x \in M$. Potom f je prosté zobrazení M na P . Buďte φ_1, φ_2, φ zobrazení inverzní k f_1, f_2, f . Potom je

$$\varphi(z) = \varphi_1(\varphi_2(z)) \quad \text{pro} \quad z \in P .$$

Přecházíme k důležitému pojmu <u>ekvivalence</u> dvou množin. Mám-li dvě konečné neprázdné množiny M, N , kdy mají stejný počet prvků? Tehdy a jen tehdy, existuje-li prosté zobrazení množiny M na N. Tento pojem je možno zobecnit i na nekonečné množiny.

<u>Definice.</u> Množina M se nazývá ekvivalentní s množinou N , jestliže buďto existuje prosté zobrazení množiny $M \neq \emptyset$ na N nebo je $M = N = \emptyset$. (Kdybych zavedl také zobrazení s prázdným definičním oborem, mohl bych oba případy shrnout v jeden.) Pišme na okamžik $M \sim N$, jestliže M je ekvivalentní s N . Platí toto:

1) $M \sim M$ tj.: Každá množina je ekvivalentní sama sobě. Důkaz (o prázdnou množinu se už nemusíme starat): Je-li $M \neq \emptyset$, je identické zobrazení $\varphi(x) = x$ $(x \in M)$ prosté zobrazení M na M .

2) Je-li $M \sim N$, je $N \sim M$. Důkaz: Je-li f prosté zobrazení M na N, je inverzní zobrazení prostým zobrazením N na M . Proto ne-

musíme rozlišovat výroky " M je ekvivalentní s N " a " N je ekvivalentní s M " a můžeme prostě říkat " M , N jsou ekvivalentní".

3) Je-li $M \sim N$, $N \sim P$, je $M \sim P$. **Důkaz:** Je-li f prosté zobrazení M na N , g prosté zobrazení N na P , dostaneme jejich složením prosté zobrazení M na P .

Je zřejmé, že prázdná množina není ekvivalentní s žádnou neprázdnou množinou; víte, že konečné množiny jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když mají stejný počet prvků, že konečná množina nemůže být ekvivalentní s nekonečnou množinou. (Tyto dvě věci by vyžadovaly při přesném zdůvodnění např. podrobného studia množiny přirozených čísel.)

Obrátíme se k ekvivalenci nekonečných množin. Nejjednodušší je množina $\mathcal{N}$ všech přirozených čísel: 1 , 2 , 3 , ... Co znamená nyní výrok, že nějaká množina M je ekvivalentní s $\mathcal{N}$? To znamená, že existuje prosté zobrazení $\mathcal{N}$ na M . Označím-li obraz čísla n znakem x_n , je patrno, že $M \sim \mathcal{N}$ tehdy a jen tehdy, lze-li prvky množiny M uspořádat v prostou nekonečnou posloupnost

$$x_1 , x_2 , x_3 , \dots$$

(x_n je obrazem čísla n ; posloupnost se nazývá ovšem prostá, jestliže pro $n \neq m$ je $x_n \neq x_m$) .

Množiny, ekvivalentní s $\mathcal{N}$, nazveme <u>nekonečné spočetné množiny</u>; konečným množinám a nekonečným spočetným množinám dáme společný název <u>spočetné množiny</u>. Při čtení literatury dávejte pozor! Někteří autoři označují slovem "spočetná množina" pouze nekonečné spočetné množiny, a množinám konečným a nekonečným spočetným dávají název <u>nejvýše spočetné množiny.</u>

Příklad: Množina M všech sudých kladných čísel je spočetná. Stačí totiž sestrojit prosté zobrazení f rovnicí $f(x) = 2x$; to zobrazuje $\mathcal{N}$ na M :

x	1	2	3	4 ...
$f(x)$	2	4	6	8 ...

Setkáváme se zde s jevem, který není možný u konečných množin: množina $\mathcal{N}$ je ekvivalentní se svou pravou částí. Množina přirozených čísel a množina všech sudých kladných čísel vypadají dost podobně, takže jejich ekvivalence nepřekvapí. Více překvapí tato věta:

<u>Množina všech racionálních čísel je spočetná.</u>

Důkaz: Každé racionální číslo lze právě jedním způsobem napsat v tzv. základním tvaru, tj. ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p , q jsou celá a nesoudělná, $q > 0$.

Jde tedy o to, srovnat tyto zlomky v prostou posloupnost. Nazvu výškou zlomku $\frac{p}{q}$ číslo $|p| + q$. Zlomky srovnám podle výšky, zlomky téže výšky podle klesajícího čitatele:

Výška 1 : $\frac{0}{1}$;

Výška 2 : $\frac{1}{1}$, $\frac{-1}{1}$;

Výška 3 : $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-2}{1}$;

Výška 4 : $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{-1}{3}$, $\frac{-3}{1}$ ($\frac{\pm 2}{2}$ nemá základní tvar);

Výška 5 : $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{-1}{4}$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{-3}{2}$, $\frac{-4}{1}$

atd. Zřejmě posloupnost takto sestrojená

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-3}{1}, \ldots$$

je prostá a obsahuje všechna racionální čísla.

Dokážeme několik vět o spočetných množinách:

Věta. Každá část spočetné množiny je spočetná.

Důkaz: Budiž M spočetná, N její část. Je-li N konečná, je spočetná podle definice. Je-li N nekonečná, je též M nekonečná, takže její prvky lze srovnat v prostou posloupnost:

(3) M : $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Nechť k_1 je nejmenší index, pro který $a_{k_1} \in N$; nechť k_2 je nejmenší index $> k_1$, pro který $a_{k_2} \in N$, atd. Zřejmě jsou tím prvky množiny N uspořádány v posloupnost $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ vybranou z (3), a tedy je tato posloupnost prostá, N je spočetná.

Je vám jistě jasno, co budu nazývat "množinou všech členů posloupnosti". Např. množina všech členů posloupnosti $2, 4, 6, 8, \ldots$ (n-tý člen je $2n$) je množina všech sudých kladných čísel; množina všech členů posloupnosti $a, a, a, a, \ldots$ (všechny členy jsou a) se skládá z jediného prvku a ; množina všech členů posloupnosti $1, -1, 1, -1, \ldots$ (n-tý člen $(-1)^{n-1}$) se skládá ze dvou prvků $1, -1$.

Věta. Množina M všech členů posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je spočetná.

Důkaz: Když M je konečná, je to pravda. Když M je nekonečná, položme $k_1 = 1$; budiž k_2 nejmenší index k , pro který $a_k \neq a_{k_1}$; budiž

k_3 nejmenší index k, pro který $a_k \neq a_{k_1}$, $a_k \neq a_{k_2}$, atd. Zřejmě je a_{k_1}, a_{k_2}, ... prostá posloupnost, obsahující všechny prvky z M.

Věta. Obraz $f(M)$ spočetné množiny M při libovolném zobrazení je spočetná množina.

Důkaz. Když M je konečná, je $f(M)$ konečná. Když prvky množiny M jsou srovnány v prostou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$, je $f(M)$ zřejmě množina všech členů posloupnosti $f(x_1), f(x_2), \ldots$, tedy je spočetná podle předešlé věty.

Věta. Sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetná množina. Podrobně řečeno: Mějme spočetnou množinu spočetných množin. Tu tedy mohu srovnat v posloupnost (konečnou nebo nekonečnou)

(4) $\quad M_1, M_2, M_3, \ldots$;

každé M_k je spočetná množina. Mám dokázat, že $\bigcup_k M_k$ je spočetná množina.

Mohu předně vynechat prázdné množiny M_k. Mohu předpokládat, že (4) je nekonečná posloupnost; je-li totiž konečná o n členech, mohu poslední člen opakovat: $M_1, M_2, \ldots, M_n, M_n, M_n, \ldots$ - sjednocení se nezmění.[2] Prvky každé množiny M_k mohu srovnat v nekonečnou posloupnost $a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots$ (kdyby byla M_k konečná, opakuji poslední člen). Tedy $\bigcup_k M_k$ je množina všech prvků, vyskytujících se ve schematu

$$\begin{array}{lllll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\ \ldots & & & & \end{array}$$

Tyto prvky mohu "podle úhlopříček" srovnat v posloupnost (obecně ne prostou!)

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, \ldots ;$$

$\bigcup_k M_k$ je množina všech členů této posloupnosti - tedy je spočetná.

Věta. Budiž $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 1$) konečná posloupnost spočetných množin (jež nemusí být navzájem různé). Potom množina všech uspořádaných n-tic (nebo-li konečných posloupností) $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, kde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, je spočetná.

Důkaz indukcí podle n.

1) Budiž $n = 1$. Přiřadím-li každému $a_1 \in A_1$ jednočlennou posloupnost

---

[2] Kdyby všechny M_k byly prázdné, bylo by i $\bigcup_k M_k = \emptyset$.

$[a_1]$, je to zřejmě prosté zobrazení spočetné množiny A_1 na množinu těch jednočlenných posloupností.

2) Budiž to pravda pro jisté $n \geqq 1$. Pro každou n-tici $[a_1, \ldots, a_n]$ ($a_1 \in A_1$, $a_n \in A_n$) budiž $M_{[a_1, \ldots, a_n]}$ množina těch $(n+1)$-tic $[a_1, \ldots, a_n, x]$, kde $x \in A_{n+1}$. Množina všech $[a_1, \ldots, a_{n+1}]$ je sjednocením spočetných množin $M_{[a_1, \ldots, a_n]}$, a množina těch $[a_1, \ldots, a_n]$ je podle indukčního předpokladu spočetná. Tedy je množina všech $[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}]$ spočetná podle předešlé věty.

Např. množina všech "racionálních bodů" v E_k, tj. všech bodů $[a_1, \ldots, a_k]$ s racionálními souřadnicemi, je spočetná (zde $A_1 = A_2 = \ldots = A_k$ je množina všech racionálních čísel). Dále množina všech intervalů

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_k, b_k)$$

s racionálními a_k, b_k je spočetná (je totiž ekvivalentní s množinou všech $2k$-tic $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k)$ s racionálními a_k, b_k, kde $a_k < b_k$.

Existují vůbec množiny, které nejsou spočetné? Odpověď je kladná:

<u>Věta.</u> Množina všech čísel intervalu $(0, 1)$ není spočetná.

<u>Důkaz.</u> Každé číslo intervalu $(0, 1)$ lze psát ve tvaru nekonečného desetinného zlomku $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, a naopak každý takový nekonečný desetinný zlomek dává číslo z $(0, 1)$ - s výjimkou zlomků $0,000\ldots = 0$ a $0,999\ldots = 1$. Dva zlomky, lišící se na některém místě, mohou dávat totéž číslo jen tehdy, když jeden končí samými nulami, druhý samými devítkami; např.

$$0,248 = 0,2480000\ldots = 0,2479999\ldots$$

Máme dokázat, že čísla intervalu $(0, 1)$ (kterých je zřejmě nekonečně mnoho) nelze srovnat v posloupnost. Jinými slovy: máme dokázat, že žádná posloupnost čísel intervalu $(0, 1)$ neobsahuje <u>všechna</u> čísla tohoto intervalu. Budiž tedy $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nějaká posloupnost čísel intervalu $(0, 1)$; naším cílem je sestrojit číslo $b \in (0, 1)$, které se nerovná žádnému a_k. Rozviňme čísla a_k v desetinné zlomky:

$$a_1 = 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots,$$
$$a_2 = 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots,$$
$$\vdots$$
$$a_k = 0, a_{k1}\, a_{k2}\, a_{k3}\, a_{k4} \ldots$$

Číslo $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ sestrojíme takto: je-li $a_{11} \neq 1$, volíme $b_1 = 1$; je-li $a_{11} = 1$, volíme $b_1 = 2$, takže $b_1 \neq a_{11}$. Je-li $a_{22} \neq 1$, volíme $b_2 = 1$; je-li $a_{22} = 1$, volíme $b_{22} = 2$, takže $b_2 \neq a_{22}$.

Obecně volíme b_k takto: Je-li $a_{kk} \neq 1$, volíme $b_k = 1$; je-li $a_{kk} = 1$, volíme $b_k = 2$, takže $b_k \neq a_{kk}$ pro každé k. Číslo b je rozvinuto v desetinný zlomek s ciframi 1 a 2 - tedy se dá rozvinout jen jedním způsobem v desetinný zlomek, tj. každý desetinný zlomek, který se na některém místě liší od $0, b_1 b_2 \dots$, dává číslo __různé__ od b. Ale zlomek pro b se liší od zlomku pro a_1 na 1. decimále, od a_2 na 2.decimále, obecně od a_k na k-té decimále. Tedy je b __různé__ ode všech čísel posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \dots$ Tím je důkaz hotov. Jeho myšlenka je stejně jednoduchá jako duchaplná (pochází od Cantora): čísla $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ volíme tak, aby se lišila od "stejnolehlých" členů "diagonály" $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots$ Proto mluvíme o "diagonálním postupu".

Množinu, která není spočetná, nazýváme __nespočetnou__. Ježto interval $(0, 1)$ lze zobrazením $f(x) = a + (b - a)x$ zobrazit prostě na každý omezený interval (a, b), je každý takový interval nespočetná množina.

Ježto množina racionálních čísel intervalu (a, b) je spočetná, je množina všech iracionálních čísel intervalu (a, b) nespočetná (jinak by i množina všech čísel intervalu (a, b) byla spočetná). To je výsledek, který se jevil velmi překvapující, když jej Cantor objevil: Množina všech přirozených čísel a množina všech racionálních čísel vypadají na pohled "velmi nepodobné", a přece jsou ekvivalentní; kdežto množina všech racionálních čísel a množina všech iracionálních čísel vypadají "na první pohled" podobně, a přece nejsou ekvivalentní - to ukazuje na velmi hluboké rozdíly mezi těmito dvěma množinami. Populárně řečeno, množina všech iracionálních čísel je nesrovnatelně "bohatší" než množina všech racionálních čísel.

Věty tohoto paragrafu jsou velmi důležité; nečísloval jsem je, protože jsou velmi jednoduché a každý by je měl mít vždy pohotově.

§ 2. Množiny v E_n.

E_n je množina všech bodů $x = [x_1, \dots, x_n]$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou reálná čísla (neboli body z E_1). Je-li $y = [y_1, \dots, y_n]$ rovněž bod z E_n, je jejich eukleidovská vzdálenost

$$\rho(x, y) = \rho_n(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} .$$

Vedle této vzdálenosti jsme zavedli v kap. II, § 1 ještě "vzdálenosti"

$$d(x, y) = d_n(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| ,$$

$$d'(x, y) = d'_n(x, y) = \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| .$$

Zjistili jsme, že

$$d(x,y) \leq \rho(x,y) \leq d'(x,y) \leq k\,d(x,y) ;$$

proto v otázkách limity a spojitosti (kde jde o to - zhruba řečeno - zda lze jistou vzdálenost učinit za jistých okolností libovolně malou) je jedno, které z těchto vzdáleností užíváme. Budeme užívat vzdálenosti d, se kterou se nejpohodlněji pracuje.

Je-li $a \in E_k$, $\delta > 0$, nazvali jsme δ-okolím bodu a množinu těch bodů x, pro něž $d(a,x) < \delta$; znak $U_\delta(a)$ nebo $U_\delta^k(a)$.

Definice. Říkáme, že posloupnost bodů $x_1, x_2, \ldots$ z E_k má limitu $x \in E_k$, jestliže

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0 . \tag{1}$$

Vzorec (1) se týká limity posloupnosti reálných čísel $d(x_n, x)$ - jeho smysl tedy známe.

Posloupnost, která má limitu, se nazývá konvergentní. Posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů v E_k má nejvýše jednu limitu. Důkaz: Nechť dva různé body $x \neq y$ jsou limitami této posloupnosti; z toho odvodíme spor. Je $d(x,y) > 0$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x,y)$. Podle (1) a podle rovnice $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geq n_0$ je $d(x_n, x) < \varepsilon$, $d(x_n, y) < \varepsilon$. To tedy platí např. pro $n = n_0$. Ale potom dostáváme

$$d(x,y) \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) < 2\varepsilon = d(x,y) ,$$

což je hledaný spor.

Okolnost, že bod x je limitou posloupnosti bodů $x_1, x_2, \ldots$, zapisujeme opět symbolem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x .$$

Této definice limity lze užíti v každém metrickém prostoru, nejenom v E_k [1]. Řada vět této kapitoly platí v jakémkoliv metrickém prostoru, jiné jsou specifické pro E_k. Čtenáři, který by se zajímal o to, které věty platí v každém metrickém prostoru, pomůže toto opatření: Věty, které platí v každém metrickém prostoru, označíme hvězdičkou; jestliže také důkaz uvedený v textu lze provést týmž způsobem pro každý metrický prostor, označím i důkaz hvězdičkou. Tak dostane čtenář jakýsi (značně neúplný) obrázek o teorii metrických prostorů.

[1] Co je to metrický prostor bylo řečeno v kap. II, § 1. δ-okolí bodu a v metrickém prostoru P je opět množina těch bodů $x \in P$, pro něž je $\rho(x,a) < \delta$. Přitom ρ znamená metriku prostoru P.

<u>Věta 59.</u> Buďiž $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost bodů z E_k; $x_n = [x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}]$.

Bod $x = [x_1, \ldots, x_k]$ je limitou této posloupnosti tehdy a jen tehdy, je-li

$$\lim_{n\to\infty} x_{n1} = x_1, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k .$$

Důkaz: Rovnost (1) říká, že

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq k} |x_{nj} - x_j| = 0 ;$$

to platí tehdy a jen tehdy, když pro každé j $(= 1, 2, \ldots, k)$ je $\lim_{n\to\infty} |x_{nj} - x_j| = 0$, tj. $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = x_j$.

Množinu $M \subset E_k$ jsme již v kap. II nazvali omezenou, jestliže existuje $K > 0$ tak, že absolutní hodnoty všech souřadnic všech bodů z M jsou menší než K.[2] Posloupnost se nazývá omezená, jestliže množina jejích členů je omezená.

Platí pak: 1)* Každá konvergentní posloupnost je omezená.

2)* Má-li posloupnost limitu x, má každá její vybraná posloupnost limitu x.

Důkazy nebudu provádět. Dají se buďto pomocí věty 59 převést na obdobné věty v E_1 (tj. pro posloupnost reálných čísel) nebo se dají dokázat z naší definice limity.

3) (podmínka B. - C). Posloupnost bodů $x_1, x_2, \ldots$ prostoru E_k je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená p je $d(x_{n_0+p}, x_{n_0}) \leq \varepsilon$. Rovnocenná je tato podmínka: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Pomocí věty 59 lze tuto větu dokázat tím, že použijeme podmínky B.C. (tj. věty 21[b]) pro jednotlivé souřadnice bodů.

<u>Věta 60.</u> (Bolzano a Weierstrass).

Každá omezená posloupnost v E_k obsahuje vybranou posloupnost konvergentní.

<u>Důkaz.</u> Větu jsme dokázali ve větě 21 pro E_1, tj. pro posloupnosti reálných čísel (dokonce i pro posloupnosti komplexních čísel). Odtud již

---

2) Ekvivalentní definice je tato: M se nazývá omezená, když existuje $L > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$, $y \in M$ je $d(x, y) < L$. V této formě lze definice užít pro každý metrický prostor (d značená metriku tohoto prostoru).

snadno odvodíme větu 60 pro E_k takto:

Budiž $x_1, x_2, x_3, \dots$ omezená posloupnost v E_k; pišme $x_n = [x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}]$. Každá z k posloupností

$$\begin{array}{l} x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots \\ x_{12}, x_{22}, x_{32}, \dots \\ \dots\dots \\ x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \dots \end{array}$$

je omezená. Nyní budeme užívat opětovně věty 21. Z posloupnosti $1, 2, 3, \dots$ vybereme posloupnost

$$(2) \qquad k_1 < k_2 < k_3 < \dots .$$

tak, aby posloupnost prvních souřadnic

$$(2') \qquad x_{k_1 1}, x_{k_2 1}, x_{k_3 1}, \dots$$

byla konvergentní. Z posloupnosti (2) vyberu posloupnost

$$(3) \qquad m_1 < m_2 < m_3 < \dots$$

tak, aby posloupnost druhých souřadnic

$$(3') \qquad x_{m_1 2}, x_{m_2 2}, x_{m_3 2}, \dots$$

byla konvergentní; posloupnost prvních souřadnic

$$x_{m_1 1}, x_{m_2 1}, x_{m_3 1}, \dots$$

(vybraná z (2')) zůstane ovšem konvergentní. Z (3) vyberu posloupnost

$$(4) \qquad p_1 < p_2 < p_3 < \dots$$

tak, aby posloupnost třetích souřadnic byla konvergentní atd. Po k krocích dojdu k cíli, tj. k vybrané posloupnosti, u níž posloupnost prvních, druhých,.. .., k-tých souřadnic jsou vesměs konvergentní.

Dokážeme ještě tuto větu:

*<u>Věta 61.</u> Buďte $x_1, x_2, \dots$ body z E_k a budiž x bod z E_k, jenž <u>není</u> limitou posloupnosti $x_1, x_2, \dots$ Potom existuje číslo $\varepsilon > 0$ a vybraná posloupnost $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots$ tak, že $d(x, x_{k_n}) > \varepsilon$ pro všechna n.

*<u>Důkaz.</u> Podle předpokladu je

$$\mathrm{non}\left[\mathop{\forall}_{\varepsilon>0}\ \mathop{\exists}_{n_0\in\mathcal{N}}\ \mathop{\forall}_{n\in\mathcal{N}}(n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon)\right]$$

tj.

$$\mathop{\exists}_{\varepsilon>0}\left\{\mathop{\forall}_{n_0\in\mathcal{N}}\ \mathop{\exists}_{n\in\mathcal{N}}(n \geq n_0 \ \&\ d(x_n, x) > \varepsilon)\right\} .$$

Vezměme takové $\varepsilon > 0$, že platí $\{\dots\}$. Volme $n_0 = 1$: existuje $k_1 \geqq 1$ tak, že $d(x_{k_1}, x) > \varepsilon$ (mohu vzít třeba nejmenší takové k_1). Volme $n_0 = k_1 + 1$; existuje $k_2 > k_1$ tak, že $d(x_{k_2}, x) > \varepsilon$; volme $n_0 = k_2 + 1$; existuje $k_3 > k_2$ tak, že $d(x_{k_3}, x) > \varepsilon$ atd. Úplnou indukcí dostaneme žádanou vybranou posloupnost.

Tolik zatím o posloupnostech bodů v E_k.

Zopakujme a doplňme nyní některé věci o množinách v E_k (viz kap. II, § 1).

Budiž $M \subset E_k$. Bod $a \in E_k$ nazývám vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje δ-okolí bodu a, obsažené v M :

$$\mathcal{U}_\delta(a) \subset M \quad \text{(potom ovšem } a \in M \text{)}.$$

Bod $a \in E_k$ nazvu vnějším bodem množiny M (nebo snad lépe bodem vnějším vzhledem k M), jestliže existuje δ-okolí bodu a, jež nemá společných bodů s M : $\mathcal{U}_\delta(a) \subset E_k - M$. Body prostoru E_k, jež nejsou ani vnitřní ani vnější, se nazývají hraničními body množiny M. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá hranice množiny M ; znak $H(M)$. Bod $a \in E_k$ je tedy hraničním bodem množiny M tehdy a jen tehdy, jestliže každé δ-okolí bodu a obsahuje aspoň jeden bod z M a aspoň jeden bod z $E_k - M$. Z této symetrie je vidět, že $H(M) = H(E_k - M)$. M se nazývá otevřená, když všechny její body jsou vnitřní, tj. když $M \cap H(M) = \emptyset$ (neboli $H(M) \subset E_k - M$). Množina M se nazývá uzavřená, když $H(M) \subset M$ (neboli $H(M) \cap (E_k - M) = \emptyset$). Odtud je vidět: M je otevřená tehdy a jen tehdy, když $E_k - M$ je uzavřená; M je uzavřená tehdy a jen tehdy, když $E_k - M$ je otevřená.

*Věta 62. Sjednocení jakéhokoliv systému otevřených množin je otevřená množina. Průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina.

*Důkaz. 1) Buďte dány otevřené množiny M_j, kde j probíhá jistou množinu J ; označme $M = \bigcup_{j \in J} M_j$. Budiž $a \in M$. Existuje j tak, že $a \in M_j$. Ježto M_j je otevřená, existuje $\delta > 0$ tak, že $\mathcal{U}_\delta(a) \subset M_j$, a tedy $\mathcal{U}_\delta(a) \subset M$. Bod a (libovolný bod množiny M) je vnitřním bodem množiny M ; tedy je M otevřená.

2) Budiž dán konečný systém otevřených množin $M_1, M_2, \dots, M_n$. Označme $M = \bigcap_{j=1}^{n} M_j$. Budiž $a \in M$. Máme dokázat, že a je vnitřním bodem M. Pro každé $j = 1, \dots, n$ je $a \in M_j$. Ježto M_j je otevřená, existuje pro každé j číslo $\delta_j > 0$ tak, že $\mathcal{U}_{\delta_j}(a) \subset M_j$. Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Potom $\mathcal{U}_\delta(a) \subset M_j$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$, tj. $\mathcal{U}_\delta(a) \subset M$. Důkaz je hotov.

Pomocí de Morganových vzorců

(5) $$E_k - \bigcup_{j \in J} M_j = \bigcap_{j \in J} (E_k - M_j) ,$$

(6) $$E_k - \bigcap_{j \in J} M_j = \bigcup_{j \in J} (E_k - M_j)$$

dostaneme z předešlé věty tuto větu:

*Věta 63. Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřený. Sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřené.

*Důkaz. Nechť množiny $M_j \, (j \in J)$ jsou uzavřené, tedy $E_k - M_j$ otevřené, tedy (věta 62) $\bigcup_{j \in J} (E_k - M_j)$ otevřená, tedy podle (6) je $E_k - \bigcap_{j \in J} M_j$ otevřená, tedy $\bigcap_{j \in J} M_j$ uzavřená. Druhou část dokáže čtenář sám obdobně ze vzorce (5).

*Důsledky vět 62, 63. Je-li M otevřená, N uzavřená, je $M - N$ otevřená; je-li M uzavřená, N otevřená, je $M - N$ uzavřená.

*Důkaz. $M - N = M \cap (E_k - N)$; v prvním případě jsou M , $E_k - N$ otevřené, tedy jejich průnik je otevřený. Podobně v druhém případě.

Ještě jednu větu o kartézském součinu[3].

*Věta 64. Budiž $M \subset E_k$, $N \subset E_s$. Jsou-li M , N otevřené, je $M \times N$ otevřená. Jsou-li M , N uzavřené, je $M \times N$ uzavřená.

*Důkaz: 1) Buďte M, N otevřené. Budiž $[a, b] \in M \times N$, tj. $a \in M$, $b \in N$. Máme dokázat, že existuje okolí $U_\delta^{k+s}(a, b) = U_\delta^k(a) \times U_\delta^s(b)$, ležící v $M \times N$. Existuje okolí $U_{\delta_1}^k(a) \subset M$, $U_{\delta_2}^s(b) \subset N$; stačí položit $\delta = \mathrm{Min}(\delta_1, \delta_2)$.

2) Buďte M, N uzavřené. Je $E_{k+s} - M \times N =$ $= ((E_k - M) \times E_s) \cup (E_k \times (E_s - N))$. Podle bodu 1 je pravá strana otevřená množina, tedy $E_{k+s} - M \times N$ je otevřená, $M \times N$ uzavřená.

---

3) Obecně: Jsou-li P_1 , P_2 metrické prostory s metrikami d_1, d_2, vytvoří se z kartézského součinu $P_1 \times P_2$ metrický prostor tak, že se v něm definuje metrika $\rho([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}$. Pro naše účely (limita, vnitřní, vnější a hraniční body atd.) je tato metrika rovnocenná s metrikou

$$d([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \mathrm{Max}(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) .$$

Ježto intervaly (a, b) jsou otevřené množiny, intervaly $\langle a, b\rangle$ jsou uzavřené množiny, je "otevřený interval" $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_k, b_k)$ otevřená množina, "uzavřený interval" $\langle a_1, b_1\rangle \times \ldots \times \langle a_k, b_k\rangle$ uzavřená množina.

Budiž M nějaká množina v E_k. Sjednocení všech otevřených množin $G \subset M$ je otevřená množina $M^\circ \subset M$, nazývaná vnitřkem nebo otevřeným jádrem množiny M.

Průnik všech uzavřených množin $F \supset M$ je uzavřená množina $\overline{M} \supset M$, nazývaná uzávěrem nebo uzavřeným obalem množiny M.[4]

*M° je množina všech vnitřních bodů množiny M.

*Důkaz: 1) Každý bod z M° musí být vnitřním bodem M°, tedy tím spíše vnitřním bodem M.

2) Každý vnitřní bod a množiny M má okolí $\mathcal{U}_\delta(a) \subset M$. $\mathcal{U}_\delta(a)$ je otevřená množina, tedy je částí M°, tedy speciálně $a \in M^\circ$. Odtud je vidět: víme, že M je otevřená tehdy a jen tehdy, když všechny její body jsou vnitřní.

Tedy: *M je otevřená tehdy a jen tehdy, když $M = M^\circ$.

Jak popíšeme uzávěr $\overline{M}$? Jestliže F je uzavřená $\supset M$, je $E_k - F = G$ otevřená $\subset E_k - M$ a naopak. Jestliže tedy F probíhá všechny uzavřené množiny $\supset M$ a G všechny otevřené množiny $\subset E_k - M$, je

$$\overline{M} = \bigcap_{F \supset M} F = \bigcap_{G \subset E_k - M} (E_k - G) = E_k - \bigcup_{G \subset E_k - M} G = E_k - (E_k - M)^\circ .$$

Tedy $\overline{M}$ je doplňkem množiny $(E_k - M)^\circ$. Tato množina obsahuje právě všechny vnitřní body doplňku $E_k - M$, tj. všechny vnější body množiny M. Tedy $\overline{M}$ obsahuje všechny ostatní body prostoru E_k tj. $\overline{M} = M^\circ \cup H(M)$. Ale dá se psát též $\overline{M} = M \cup H(M)$. Proč? Především je $M^\circ \cup H(M) \subset M \cup H(M)$; za druhé je $M \subset \overline{M}$, tedy $M \cup H(M) \subset \overline{M} \cup H(M) = M^\circ \cup H(M)$. Budeme užívat vzorce

$$\overline{M} = M \cup H(M) . \tag{7}$$

Víme, že M je uzavřená tehdy a jen tehdy, když $H(M) \subset M$. Podle (7) to nastane tehdy a jen tehdy, když $M = \overline{M}$. Tedy:

*M je uzavřená tehdy a jen tehdy, když $M = \overline{M}$.

Je možno charakterisovat $\overline{M}$ také pomocí posloupností:

---

[4] Často se pro uzavřené (fermé) množiny užívá písmena F, pro otevřené (starší název Gebiet) písmena G. (Nyní se slova Gebiet užívá zpravidla jen pro tzv. souvislé otevřené množiny.)

*<u>Věta 65.</u> Bod $x \in E_k$ leží v $\overline{M}$ tehdy a jen tehdy, jestliže existuje posloupnost $x_1, x_2, \dots$ bodů z M, která má limitu x (nemusí to být prostá posloupnost!). Tedy: $\overline{M}$ je množina všech limit všech konvergentních posloupností bodů z M.

*<u>Důkaz:</u> Je-li $x \in M$, je x limitou posloupnosti $x, x, x, x, \dots$. Je-li $x \in H(M)$, existuje v každém okolí $U_{\frac{1}{n}}(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ aspoň jeden bod $x_n \in M$.

Vyberu-li pro každé přirozené n jeden takový bod x_n, dostanu posloupnost $x_1, x_2, \dots$ bodů z M takovou, že $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$; tedy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Jestliže konečně x neleží v $\overline{M}$, je x vnějším bodem M, tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $U_\delta(x) \subset E_k - M$; pro všechny body $y \in M$ je tedy $d(x, y) \geq \delta$, takže x nemůže být limitou posloupnosti bodů z M.

Velmi důležitý je pojem kompaktní množiny:

<u>Definice.</u> Množina $M \subset E_k$ se nazývá <u>kompaktní</u>, jestliže každá posloupnost bodů z M obsahuje konvergentní vybranou posloupnost, jejíž limita leží v M.

V E_k (ale ne v obecných metrických prostorech!) lze kompaktní množiny charakterisovat takto:

<u>Věta 66.</u> Množina $M \subset E_k$ je kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li uzavřená a omezená.

Důkaz: 1) Nechť M není omezená. To znamená, že ke každému $n = 1, 2, 3, \dots$ můžeme vybrat bod $x_n = [x_{n1}, \dots, x_{nk}] \in M$ tak, že $\max(|x_{n1}|, \dots, |x_{nk}|) > n$. Z posloupnosti $x_1, x_2, \dots$ nelze vybrat žádnou posloupnost omezenou, tedy ani konvergentní. M není kompaktní.

2) Nechť není M uzavřená, tj. existuje bod $x \in \overline{M} - M$. Ježto $x \in \overline{M}$, existuje (podle věty 65) posloupnost bodů $x_1, x_2, \dots$ z M, pro něž $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Každá vybraná posloupnost má limitu x, tj. nemůže mít limitu v M, tedy M není kompaktní.

3) Má-li být M kompaktní, musí být uzavřená a omezená. Ukážeme, že to také stačí. Budiž M omezená a uzavřená. Budiž $x_1, x_2, \dots$ posloupnost bodů z M. Tedy je omezená a podle věty 60 obsahuje konvergentní vybranou posloupnost $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots$, $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x$. Máme ještě dokázat, že $x \in M$. Ale podle věty 65 je $x \in \overline{M}$, a ježto M je uzavřená, je $M = \overline{M}$, tedy $x \in M$.

Nerostoucí posloupnost neprázdných množin může mít prázdný průnik, např.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle n, +\infty) = \emptyset .$$

Je svrchovaně důležité, že u kompaktních množin tento případ nemůže nastat:

*Věta 67 (Cantor) Nerostoucí posloupnost

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$$

neprázdných kompaktních množin má neprázdný průnik: $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$.

*Důkaz. V každé množině M_n zvolím bod x_n . Ježto všechna x_n leží v kompaktní M_1 , existuje vybraná posloupnost

(8) $$x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots ,$$

jež je konvergentní: $\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = x$. Tvrdím, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ (tím bude věta dokázána). Uvažme, že $k_1 < k_2 < \dots$, tedy $k_m \geqq m$. Vezměme libovolné přirozené n . Je-li $m \geqq n$, je $x_{k_m} \in M_{k_m} \subset M_m \subset M_n$, tedy všechny členy posloupnosti (8) od n-tého členu počínaje leží v M_n (na prvních $n-1$ členech pro otázky konvergence a limity nezáleží). Ježto M_n je kompaktní, existuje v (8) vybraná posloupnost, mající limitu v M_n . Ježto však celá posloupnost (8) má limitu x , má i ta vybraná posloupnost limitu x , tedy $x \in M_n$. To platí pro každé $n = 1, 2, \dots$, tedy

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \text{ , což bylo třeba dokásat.}$$

Druhá důležitá věta o kompaktních množinách se týká pokrývání množiny systémem množin. Nechť každému $j \in J$ je přiřazena nějaká množina M_j . Říkáme, že systém množin M_j ($j \in J$) pokrývá množinu M , jestliže $M \subset \bigcup_{j \in J} M_j$.

*Věta 68 (Borel). Nechť systém otevřených množin M_j ($j \in J$) , $M_j \subset E_k$ pokrývá kompaktní množinu K . Potom existuje konečný podsystém tohoto systému, jenž pokrývá K (tj. existuje konečný počet "indexů" $j_1, j_2, \dots, j_n$ z J tak, že

$$K \subset (M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup M_{j_3} \cup \dots \cup M_{j_n})).$$

Důkaz. Bez újmy obecnosti budiž $K \neq \emptyset$. Nazvu racionálním intervalem každý otevřený interval

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_k, b_k) ,$$

kde a_j, b_j jsou racionální čísla. Víme, že systém všech racionálních intervalů je spočetný. Vezměme systém všech racionálních intervalů

(9) $I_1, I_2, I_3, \dots$, které jsou obsaženy

v některém M_j (tj. racionální interval I patří do tohoto systému tehdy a jen tehdy, když existuje $j \in J$ tak, že $I \subset M_j$). Že ty intervaly lze srovnat v posloupnost, je jasné. Budiž $x \in K$, tedy $x \in M_j$ pro některé $j \in J$. Ježto M_j je otevřená, existuje okolí $U_\delta(x) \subset M_j$ a tedy zřejmě i racionální interval, obsahující bod x a obsažený v M_j, tj. některý z intervalů

$I_1, I_2, \ldots$ obsahuje bod x.

Tedy: každý bod $x \in K$ leží v některém intervalu (9), tj. posloupnost intervalů (9) pokrývá K. Tvrdím nyní: Existuje přirozené n tak, že už konečná posloupnost

$$I_1, I_2, \ldots\ldots, I_n \tag{10}$$

pokrývá K. To je zřejmé, když (9) je konečná posloupnost[5] (potom za (10) stačí vzít (9)). Nechť tedy (9) je nekonečná posloupnost a nechť žádná posloupnost (10) (pro žádné přirozené n) nepokrývá K. Z toho odvodíme spor. Pro každé přirozené n je podle předpokladu

$$P_n = K - \bigcup_{k=1}^{n} I_k \neq \emptyset .$$

Zřejmě je $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$; dále jsou P_n omezené (leží v K) a uzavřené (jsou tvaru "uzavřená minus otevřená"), tedy kompaktní. Podle Cantorovy věty je tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset$, neboli $K - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$, což je ve sporu s tím, že (9) pokrývají K. Tedy vskutku existuje n tak, že $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Ale každé I_k je obsaženo v některém M_{j_k} (pro každé $k = 1, \ldots, n$ jedno takové M_{j_k} vyberu), tedy vskutku

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} M_{j_k} .$$

§ 3. Zobrazení z E_r do E_s.

Budiž dáno zobrazení f z E_r do E_s. To znamená toto: Je dána jistá neprázdná množina $M \subset E_r$ - obor tohoto zobrazení, a každému bodu $x = [x_1, \ldots, x_r] \in M$ je přiřazen určitý bod $y = [y_1, \ldots, y_s]$, který značíme $f(x)$. Každému $x \in M$ je tedy přiřazeno určité číslo y_1, určité číslo y_2, ..., určité číslo y_s. Tato čísla jsou tedy jisté reálné funkce v oboru M:

$$y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, \ldots, x_r),$$
$$\vdots$$
$$y_s = f_s(x) = f_s(x_1, \ldots, x_r);$$

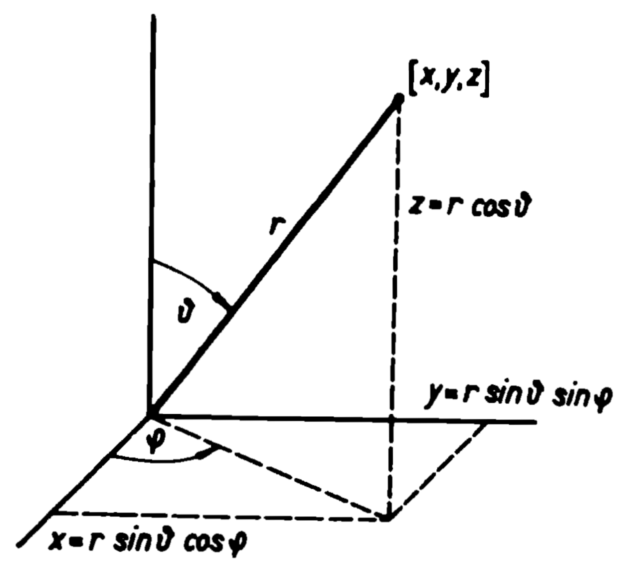
5) Snadno se ostatně dokáže, že tento případ nemůže nastat.

$f(x)$ je tedy bod o souřadnicích $f_1(x), \dots, f_s(x)$. Tedy: dát zobrazení f množiny $M \subset E_k$ do E_s znamená dát s reálných funkcí $f_1, \dots, f_s$ v oboru M; pro každé $x \in M$ je pak

(1) $$f(x) = [f_1(x), \dots, f_s(x)] .$$

Zobrazení z E_k do E_s se velmi často vyskytují. Např. zobrazení z E_k do E_1 je prostě reálná funkce k reálných proměnných. Za druhé: Pohybuje-li se bod v prostoru E_3, potom v každém okamžiku t má tento bod určité souřadnice $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, tj. každé hodnotě t (to je reálné číslo) je přiřazen bod $[x(t), y(t), z(t)] \in E_3$; máme zde tedy zobrazení z E_1 do E_3. Tohoto zobrazení se často užívá také v geometrii při tzv. parametrickém vyjádření prostorové křivky; při rovinné křivce jde o zobrazení z E_1 do E_2. Podobně se v geometrii často užívá parametrického vyjádření plochy v prostoru E_3. Např. je-li $r > 0$ pevné číslo, a probíhají-li φ, ϑ všechna reálná čísla, probíhá bod o souřadnicích

(2) $$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi , \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi , \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$



Obr. 34.

právě všechny body kulové plochy o poloměru r a o středu v počátku (každému $[\vartheta, \varphi] \in E_2$ je rovnicemi (2) přiřazen bod $[x, y, z] \in E_3$ - viz obr. 34). Zobrazení z E_k do E_k (táž dimense!) se užívá při zavádění nového systému souřadnic. Víte např., že je často užitečné charakterisovat bod v rovině tzv. polárními souřadnicemi ρ, φ, jež jsou s pravoúhlými souřadnicemi x, y vázány vztahy

$$x = \rho \cos\varphi , \quad y = \rho \sin\varphi .$$

Tedy každé dvojici $[\rho, \varphi]$ je přiřazena dvojice $[x, y]$ - tedy jde o zobrazení z E_2 do E_2. Nebudu se pouštět do detailů; jde mně jenom o to, ukázat, že se zobrazení z E_k do E_s často vyskytují (podobně se ovšem vyskytují také obecněji zobrazení z jednoho metrického prostoru do druhého).

Definujme nyní spojitost zobrazení.

Definice. Budiž $M \subset E_k$, $c \in M$, f zobrazení z E_k do E_s. Říkáme, že zobrazení f je spojité v bodě c vzhledem k množině M, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{U}^k_\delta(c) \cap M$ je $d(f(x), f(c)) < \varepsilon$ (neboli $f(x) \in \mathcal{U}^s_\varepsilon(f(c))$).

Uvážíte-li, že při označení (1) znamená $d(f(x), f(c)) < \varepsilon$ totéž jako

$|f_1(x) - f_1(c)| < \varepsilon$, ..., $|f_s(x) - f_s(c)| < \varepsilon$, vidíte toto: Zobrazení f je spojité v c vzhledem k M tehdy a jen tehdy, jsou-li všechny reálné funkce $f_1, \ldots, f_s$ spojité v c vzhledem k M. Zároveň je vidět, že pro $s = 1$ je naše definice v souladu s definicí v kap. III, § 4. Jestliže zobrazení f je v každém bodě množiny M spojité vzhledem k M, říkáme krátce, že f je spojité v M. Dokážeme větu o spojitosti složených zobrazení:

*Věta 69. Nechť f je zobrazení z E_r do E_s, spojité v M. Nechť g je zobrazení z E_s do E_p, spojité v N. Nechť $f(M) \subset N$. Potom zobrazení h, definované pro $x \in M$ rovnicí $h(x) = g(f(x))$, je spojité v M.

*Důkaz. Symbol $g(f(x))$ má zřejmě smysl pro každé $x \in M$. Budiž $c \in M$; máme dokázat, že h je spojité v c vzhledem k M. Označme $f(c) = \gamma$; je ovšem $\gamma \in N$. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje $\eta > 0$ tak, že pro všechna $y \in U^s_\eta(\gamma) \cap N$ je

$$(3) \qquad g(y) \in U^p_\varepsilon(g(\gamma)) .$$

K číslu η existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in U^r_\delta(c) \cap M$ je

$$f(x) \in U^s_\eta(f(c)) = U^s_\eta(\gamma) ,$$

a ovšem $f(x) \in N$.

Pro každé $x \in U^r_\delta(c) \cap M$ smíme tedy do (3) dosadit $y = f(x)$ a máme

$$g(f(x)) \in U^p_\varepsilon(g(\gamma)) = U^p_\varepsilon(g(f(c))) ,$$

neboli $h(x) \in U^p_\varepsilon(h(c))$; to platí pro všechna $x \in U^r_\delta(c) \cap M$; tedy vskutku zobrazení h je spojité v bodě c vzhledem k M.

Ukážeme nyní, že spojitost zobrazení lze převést na pojem limity posloupnosti.

*Věta 70. Budiž $M \subset E_r$, $c \in M$, f zobrazení z E_r do E_s. Potom f je spojité v c vzhledem k M tehdy a jen tehdy, jestliže je splněna tato podmínka: Pro každou posloupnost bodů $x_1, x_2, \ldots$, vyhovující podmínkám

$$(4) \qquad x_n \in M , \lim_{n\to\infty} x_n = c ,$$

je

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c) .$$

*Důkaz: 1) Nechť f je spojité v c vzhledem k M a nechť $x_1, x_2, \ldots$ splňují podmínku (4). Budiž $\varepsilon > 0$; existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in U^r_\delta(c) \cap M$ je $d(f(x), f(c)) < \varepsilon$. K tomuto δ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je $d(x_n, c) < \delta$ a ovšem $x_n \in M$, tedy $x_n \in U_\delta^h(c) \cap M$, tedy $d(f(x_n), f(c)) < \varepsilon$.

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $d(f(x_n), f(c)) < \varepsilon$. Tedy je $\lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(c)) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$, tj. platí (5).

2) Nechť f <u>není</u> spojitá v bodě c vzhledem k M. Máme dokázat, že naše podmínka není splněna, tj. že existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots$, pro kterou platí (4), ale neplatí (5). Předpoklad je tedy:

$$non\left[\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in E_h} (x \in U_\delta^h(c) \cap M \Rightarrow d(f(x), f(c)) < \varepsilon)\right],$$

tj.

$$(6) \quad \exists_{\varepsilon>0} \left\{\forall_{\delta>0} \exists_{x\in E_h} \left[x \in U_\delta^h(c) \cap M \;\&\; (non(d(f(x), f(c)) < \varepsilon))\right]\right\} \text{ 1)}.$$

Vezměme nějaké $\varepsilon > 0$, pro něž platí výrok v $\{\ \}$, a dosazujme $\delta = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Pro každou hodnotu $\delta = \frac{1}{n}$ existuje podle (6) nějaké $x \in U_{\frac{1}{n}}^h(c) \cap M$, pro které není $d(f(x), f(c)) < \varepsilon$. Vyberme jedno takové x a označme je x_n. Potom je $d(x_n, c) < \frac{1}{n}$, tedy $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ a ovšem $x_n \in M$, takže (4) je splněno. Ale při našem ε není pro <u>žádné</u> n splněna nerovnost $d(f(x_n), f(c)) < \varepsilon$, takže nemůže platit (5). Tím je důkaz hotov.

<u>Poznámka 1.</u> V důkazu jsme užili této úvahy: Pro každé (přirozené) n je množina M_n těch bodů $x \in U_{\frac{1}{n}}^h(c) \cap M$, pro něž není $d(f(x), f(c)) < \varepsilon$ neprázdná; vyberu-li z každé množiny M_n jeden prvek x_n, dostanu posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$, kterou jsme dále vyšetřovali. "Naivně" řečeno: musili jsme provést "současně" nekonečně mnoho výběrů: x_1 z M_1, x_2 z M_2, ..., abychom dostali posloupnost $x_1, x_2, \ldots$. Tomuto úsudku se (v obecné formulaci) říká <u>axiom výběru.</u> Zní takto: Je-li dán nějaký systém $\mathfrak{A}$ neprázdných množin, potom "lze ze všech množin systému vybrat po jednom prvku"; přesněji řečeno: Existuje zobrazení f, které každé množině M systému $\mathfrak{A}$ přiřazuje jistý prvek množiny M tj. $f(M) \in M$. Matematikové dlouho užívali instinktivně tohoto způsobu uvažování; teprve při hlubokých úvahách z obecné teorie množin na počátku 20.stol. si uvědomili zvláštní charakter tohoto axiomu výběru; toto poznání přispělo k hlubokému vyšetřování základů matematiky, které se rozvinulo v našem století. Podotýkám toto: dovedu-li udat předpis, kterým každé množině M systému $\mathfrak{A}$ je jednoznačně přiřazen prvek $f(M) \in M$, je tím určitý výběr definován, a tedy axiom výběru nepotřebuji. Axiom výběru je tedy potřebný jen tehdy, nedovedu-li žádné takové zobrazení určit. Proto úvahy, užívající axiomu výběru, mají v jistém smyslu "nekonstruk-

---

1) Vztah $non\,(d(f(x), f(c)) < \varepsilon)$ znamená: buďto není definováno $f(x)$ nebo $f(c)$ nebo je $d(f(x), f(c)) \geqq \varepsilon$.

tivní charakter". Čtenář, kterého snad tato násnaková poznámka zmátla, může ji raději zapomenout. V dalším budeme v případě potřeby axiomu výběru bez respaků užívat.

Víme, že posloupnost je vlastně funkce, jejímž oborem je velmi jednoduchá množina, totiž množina všech přirozených čísel. Poslední věta nám umožňuje převést studium spojitosti jakékoliv funkce na studium posloupnosti $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ... Toto zjednodušení je ovšem vyváženo na druhé straně jistou komplikací: nestačí vyšetřovat jednu takovou posloupnost, nýbrž je nutno vzít v úvahu všechny posloupnosti $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., kde x_1, x_2, ... vyhovují podmínce (4). Přesto je věta 70 často užitečná.

Odvodíme nyní několik vět o spojitých zobrazeních kompaktních množin.

*<u>Věta 71.</u> Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina. Podrobně: Budiž f zobrazení z E_k do E_h, spojité v kompaktní množině $M \subset E_k$. Potom $f(M)$ je kompaktní množina.

*<u>Důkaz.</u> Budiž $y_n \in f(M)$ pro $n = 1, 2, \ldots$; máme dokázat, že posloupnost

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

obsahuje konvergentní vybranou posloupnost, jejíž limita leží v $f(M)$. Ježto $y_n \in f(M)$, lze vybrat takové $x_n \in M$, že $y_n = f(x_n)$. Tím dostáváme posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z M. Ježto M je kompaktní, existuje vybraná posloupnost

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots \quad \text{tak, že} \lim_{n \to \infty} x_{k_n} = x, \; x \in M .$$

Ježto f je spojité v M, platí podle věty 70

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = f(x) \; ; \quad \text{ovšem } f(x) \in f(M) .$$

Ale $f(x_{k_n}) = y_{k_n}$. Tedy existuje $\lim_{n \to \infty} y_{k_n} = f(x) \in f(M)$.

Odvoďme z této věty snadný důsledek; ale napřed proveďme jednoduchou pomocnou úvahu. Budiž M neprázdná, shora omezená množina reálných čísel; označme $G = \sup M$. Tvrdím, že $G \in H(M)$ (jestliže tedy M je uzavřená, je $G \in M$, tj. G je největším číslem množiny M). Důkaz: Budiž $\delta > 0$; δ-okolí bodu G je interval $(G - \delta, G + \delta)$. Tento interval obsahuje body z $E_1 - M$ (to jsou např. všechna čísla intervalu $(G, G + \delta)$). Dále $G - \delta < G$, tedy existuje aspoň jeden bod $x \in M$ takový, že $x > G - \delta$ a ovšem $x \leqq G$, takže $x \in (G - \delta, G + \delta)$. Tedy vskutku $G \in H(M)$.

*<u>Důsledek věty 71.</u> Budiž f reálná funkce, spojitá v kompaktní neprázdné množině $M \subset E_k$. Potom mezi hodnotami $f(x)$, $x \in M$, je jedna největší a jedna nejmenší.

*Důkaz. $f(M)$ je kompaktní množina reálných čísel, tedy omezená, uzavřená a ovšem neprázdná. Tedy její supremum G leží v $f(M)$, tj. existuje $c \in M$ tak, že $f(c) = G$, tj. $f(c)$ je největší ze všech hodnot funkce f v množině M. Podobně pro nejmenší hodnotu.

*Věta 72. Budiž f prosté zobrazení kompaktní množiny $M \subset E_k$ na množinu $f(M) = N \subset E_h$. Budiž f spojité v M. Potom inverzní zobrazení φ je spojité v N.

*Důkaz: Předpokládejme, že v jistém bodě $\eta \in N$ není φ spojité vzhledem k N; z toho máme odvodit spor. Položme $\xi = \varphi(\eta)$, načež $\eta = f(\xi)$. Podle věty 70 existuje posloupnost $y_1, y_2, \dots$ tak, že je $y_n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$, ale není $\lim \varphi(y_n) = \varphi(\eta)$. Položme $x_n = \varphi(y_n)$; tedy není $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. Podle věty 61 existuje $\varepsilon > 0$ a vybraná posloupnost

(7) $\qquad x_{k_1}, x_{k_2}, \dots$ tak, že pro všechna n je

(8) $\qquad d(x_{k_n}, \xi) > \varepsilon$.

Ale body x_{k_n} leží v kompaktní množině M; tedy existuje v posloupnosti (7) vybraná posloupnost

(9) $\qquad x_{p_1}, x_{p_2}, \dots$

která má limitu v M:

(10) $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi' \in M$.

Podle (8) však musí být $\xi' \neq \xi$.

Je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$, $\eta = f(\xi)$, $y_n = f(x_n)$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$.
Na druhé straně je $\lim x_{p_n} = \xi' \in M$, tedy podle věty 70 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{p_n}) = f(\xi')$, ale (vybraná posloupnost) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{p_n}) = f(\xi)$, tedy $f(\xi) = f(\xi')$, ačkoliv $\xi \neq \xi'$. To je ve sporu s předpokladem, že f je prostá.

Zaveďme ještě pojem stejnoměrné spojitosti. Budiž f zobrazení z E_k do E_h, definované v množině $M \subset E_k$. Výrok "f je spojitá v M" znamená: Pro každé $c \in M$ je f spojitá v c vzhledem k M.

To tedy znamená: Vezmu-li jakékoliv $c \in M$, a potom jakékoliv $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\forall_{x \in E_k} \left[(x \in M \;\&\; d(x, c) < \delta) \Rightarrow d(f(x), f(c)) < \varepsilon \right].$$

Je vidět, že δ závisí, obecně vzato, na ε a na c. Jestliže lze δ volit - při daném $\varepsilon > 0$ - nezávisle na c (tj. totéž pro všechna $c \in M$), říkáme, že f je <u>stejnoměrně spojité v M</u>. Vyslovme to obšírně (píšice pro větší symetrii x' místo v).

<u>Definice.</u> Zobrazení f z E_k do E_b se nazývá <u>stejnoměrně spojité v $M \subset E_k$</u>, jestliže platí toto: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s touto vlastností: Pro každou dvojici bodů $x \in M$, $x' \in M$, splňující podmínku $d(x, x') < \delta$, je $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. V symbolech:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in E_k}{\forall}\ \underset{x'\in E_k}{\forall}\ [(x \in M \mathrel{\&} x' \in M \mathrel{\&} d(x, x') < \delta) \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon].$$

Snadno nahlédnete: Přesunete-li kvantifikátor $\underset{x'\in E_k}{\forall}$ na první místo, dostanete definici spojitosti v M (a ne stejnoměrné spojitosti).

Není pravda, že by každé zobrazení spojité v M bylo stejnoměrně spojité v M. Např. funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá v $(0, 1)$, ale není tam stejnoměrně spojitá, jak snadno nahlédnete[2]. Ale pro <u>kompaktní</u> M taková věta platí:

*<u>Věta 73.</u> Budiž f zobrazení z E_k do E_b. Budiž $M \subset E_k$ kompaktní, f spojité v M. Potom je f stejnoměrně spojité v M.

*<u>Důkaz.</u> Předpokládejme, že f je spojité v M, ale není stejnoměrně spojité v M. Z toho odvodíme spor. Platí negace výroku z definice, tj.

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\left\{\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{x\in E_k}{\exists}\ \underset{x'\in E_k}{\exists}\ (x \in M \mathrel{\&} x' \in M \mathrel{\&} d(x, x') < \delta \mathrel{\&} d(f(x), f(x')) \geqq \varepsilon)\right\}$$

(ježto pro $x \in M$, $x' \in M$ je $d(f(x), f(x'))$ definováno a nemá být $< \varepsilon$, je $\geqq \varepsilon$). Vezměme tedy nějaké $\varepsilon > 0$, pro které platí výrok v $\{\ \}$. Dosazujeme postupně $\delta = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. K číslu $\delta = \frac{1}{n}$ existují x_n, x'_n tak, že

(11) $\quad x_n \in M, \ x'_n \in M, \ d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}, \ d(f(x_n), f(x'_n)) \geqq \varepsilon$.

Když pro každé přirozené n jeden takový pár x_n, x'_n vybereme, dostaneme dvě posloupnosti bodů z M:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots; \qquad x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$$

Ježto M je kompaktní, existuje vybraná posloupnost $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$, pro kterou existuje limita

---

2) Názorně: Je-li $x > 0$ "velmi malé", $x' = \frac{1}{2}x$, je $d(x, x') = |x - \frac{1}{2}x| = \frac{1}{2}x$ "velmi malé", $d(f(x), f(x')) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right| = \frac{1}{x}$ "velmi velké". Proveďte odtud formálně důkaz toho, že spojitost v $(0, 1)$ není stejnoměrná.

(12) $$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \xi\ ,\quad \xi \in M\ .$$

Ježto $d(x'_{k_n}, \xi) \leq d(x'_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, \xi)$ a ježto pravá strana má pro $n \to \infty$ podle (11), (12) limitu 0, je také

(13) $$\lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = \xi\ .$$

Podle věty 70 je tedy (ježto f je spojitá v bodě ξ vzhledem k M)

(14) $$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\xi)\ ,\quad \lim_{n\to\infty} f(x'_{k_n}) = f(\xi)\ ;$$

ale $d(f(x_{k_n}), f(x'_{k_n})) \leq d(f(x_{k_n}), f(\xi)) + d(f(\xi), f(x'_{k_n}))$,

a tedy podle (14)

$$\lim_{n\to\infty} d(f(x_{k_n}), f(x'_{k_n})) = 0\ .$$

Ale to je ve sporu s poslední nerovností v (11), podle které je $d(f(x_{k_n}), f(x'_{k_n})) \geq \varepsilon$ pro všechna přirozená n .

§ 4. Regulární sobrazení.

Budiž nyní f sobrazení otevřené množiny $M \subset E_r$ do E_r (táž dimense!); tedy pro $x = [x_1, \ldots, x_r] \in M$ je

(1) $$f(x) = [f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_r)]\ ^{1)}\ ,$$

kde $f_1, \ldots, f_r$ jsou reálné funkce v M . Předpokládejme, že pro každé $x \in M$ existují parciální derivace $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$ $(j, k = 1, \ldots, r)$.

Potom Jacobián

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

---

[1] Podobně píši dále $g(y) = [g_1(y_1, \ldots, y_r), \ldots, g_r(y_1, \ldots, y_r)]$ atd.

nazýváme determinantem zobrazení f a označujeme jej D_f (je to reálná funkce r proměnných, její hodnotu v bodě x značíme tedy $D_f(x)$).

Předpokládejme, že zobrazení f (z E_k do E_r) má v otevřené množině M spojité parciální derivace $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ a že zobrazení g (z E_k do E_r) má v otevřené množině N také spojité parciální derivace. Nechť $f(M) \subset N$.

Sestrojme "složené zobrazení" h:

$$h(x) = g(f(x)) = [g_1(f(x)), \ldots, g_k(f(x))] \quad \text{pro} \quad x \in M .$$

Píši-li obšírně

$$g_1(y) = g_1(y_1, \ldots, y_k) ,$$

je tedy

$$h(x) = [g_1(y_1, \ldots, y_k), \ldots, g_k(y_1, \ldots, y_k)] ,$$

kde

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, y_k = f_k(x_1, \ldots, x_r) .$$

Píši-li tedy opět $h(x) = [h_1(x), \ldots, h_k(x)]$, je

$$h_j(x) = g_j(y_1, \ldots, y_k) , \quad \text{kde} \quad y_m = f_m(x_1, \ldots, x_r) .$$

Odtud podle pravidla o derivování složených funkcí dostáváme

$$\frac{\partial h_j(x)}{\partial x_k} = \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial g_j(y_1, \ldots, y_k)}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f_m(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_k} . \tag{2}$$

Odtud je podle pravidla o násobení determinantů vidět, že pro složené zobrazení h platí

$$D_h(x) = D_g(y) \cdot D_f(x) , \quad \text{kde} \quad y = f(x) \tag{3}$$

(tedy totéž pravidlo jako pro derivování složené funkce jedné proměnné). Zároveň je vidět z (2) a z věty 69 o spojitosti složených funkcí, že $\frac{\partial h_j}{\partial x_k}$ jsou spojité v M.

Pamatujme: když $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ jsou spojité v otevřené množině M, když $\frac{\partial g_j}{\partial y_m}$ jsou spojité v otevřené množině N, a když $f(M) \subset N$, potom $\frac{\partial h_j}{\partial x_k}$ jsou spojité v M a platí (3).

Poznamenejme ještě, že pro identické zobrazení f otevřené množiny M (tj. $f(x_1, \ldots, x_r) = [x_1, \ldots, x_r]$) je

$$D_f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (\text{pro } x \in M) .$$

Zobrazení f z E_k do E_k nazýváme regulární v $M \subset E_k$, když platí:

1. M je otevřená.
2. $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ jsou spojité v M.
3. $Df(x) \neq 0$ pro všechna $x \in M$.

Nás budou hlavně zajímat zobrazení regulární a prostá v M (tj. pro $x \in M$, $x' \in M$, $x \neq x'$ je $f(x) \neq f(x')$). Ježto nás zajímají jen body $x \in M$, budeme (bez újmy obecnosti) předpokládat, že M je definičním oborem zobrazení f, tj. že f je zobrazení množiny $M \subset E_k$ do E_k. Je-li f zobrazení množiny $M \subset E_k$, regulární a prosté v M, a je-li g zobrazení množiny $N = f(M)$, regulární a prosté v N, je složené zobrazení h ($h(x) = g(f(x))$) regulární a prosté v M. To je zřejmé z (2), (3) a z toho, že složením prostých zobrazení vzniká prosté zobrazení.

Věta 74. Budiž f zobrazení množiny $M \subset E_k$ do E_k, které je regulární a prosté v M. Potom inversní zobrazení φ je regulární a prosté v $N = f(M)$. Platí pak

(4) $$Df(x) \cdot D\varphi(y) = 1, \quad \text{kde } x \in M, \ y = f(x)$$
$$(\text{neboli } y \in N, \ x = \varphi(y)).$$

Důkaz: Pišme zase

$$f(x_1, \ldots, x_k) = [f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_k)],$$
$$\varphi(y_1, \ldots, y_k) = [\varphi_1(y_1, \ldots, y_k), \ldots, \varphi_k(y_1, \ldots, y_k)].$$

Víme, že φ je prosté zobrazení N na M.

Rovnice $y = f(x)$ $(x \in M)$ značí totéž jako

(5)
$$f_1(x_1, \ldots, x_k) - y_1 = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$f_k(x_1, \ldots, x_k) - y_k = 0.$$

To však značí totéž jako $x = \varphi(y)$ $(y \in N)$ tj. totéž jako

(6)
$$x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_k),$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_k = \varphi_k(y_1, \ldots, y_k).$$

Máme dokázat: 1) že N je otevřená,

2) že $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k}$ jsou spojité v N,

3) že $D\varphi(y) \neq 0$ pro všechna $y \in N$,

4) že platí (4).

Zvolme libovolný bod $b \in N$; položme $a = \varphi(b)$, tj. $b = f(a)$ ($b_1 = f_1(a_1, \ldots, a_k), \ldots, b_k = f_k(a_1, \ldots, a_k)$). Rovnice (5) jsou tedy splněny v bodě $[a, b]$. Dále mají levé strany v (5) v okolí bodu $[a, b]$ spojité parciální derivace podle všech proměnných $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$. Konečně Jacobián levých stran podle $x_1, \ldots, x_k$ je

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)} = Df(x) \neq 0 \quad \text{pro } x \in M .$$

Podle věty 19 o implicitních funkcích (pozor! úloha písmen x, y je vyměněna) existují dvě čísla $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ s těmito vlastnostmi: Ke každému bodu $y = [y_1, \ldots, y_k] \in U^k_\delta(b)$ existuje v okolí $U^k_{\delta_1}(a)$ právě jeden bod $x = [x_1, \ldots, x_k]$, pro který jsou splněny rovnice (5); souřadnice $x_1, \ldots, x_k$ tohoto bodu jsou tedy jisté funkce proměnných $y_1, \ldots, y_k$, o nichž podle věty o implicitních funkcích víme, že mají v $U^k_\delta(b)$ spojité parciální derivace 1. řádu. Protože však (5) jsou splněny jen tehdy, když platí (6), jsou tyto funkce v $U^k_\delta(b)$ totožné s funkcemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Tedy máme tyto výsledky:

Bod b byl libovolný bod z N a zjistili jsme, že ke každému $y \in U^k_\delta(b)$ existuje x tak, že platí (5) tj. $y = f(x)$. Tedy $U^k_\delta(b) \subset f(M) = N$. Tedy je b vnitřní bod N - tedy je N otevřená. Dále jsme zjistili, že parciální derivace 1.řádu funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ jsou spojité v $U^k_\delta(b)$, tedy speciálně v bodě b, tj. v každém bodě množiny N. Dále je $\varphi(f(x)) = x$ pro každé $x \in M$, tedy $D\varphi(y) \cdot Df(x) = 1$, kde $y = f(x)$ (neboli $x = \varphi(y)$); to je vzorec (4). Odtud plyne $D\varphi(y) \neq 0$ pro každé $y \in N$. Tím je věta úplně dokázána.