6.3 ČESKÝ PŘÍSPĚVEK KE GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

6.3.1 Emanuel Czuber

První monografii věnovanou teorii geometrické pravděpodobnosti vydal v roce 1884 český rodák Emanuel Czuber (1851–1925), který v té době působil jako středoškolský profesor v Praze (viz část 7.1). První část jeho knihy *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* [C23] obsahuje podrobný výklad výsledků, jichž dosáhli francouzští a britští matematikové, doplněný historickými poznámkami a mnoha příklady, ale také nové výsledky a zobecnění. Například Crofton v článku [62] odvodil klíčová tvrzení týkající se množin bodů a přímek v rovině a stručně nastínil zobecnění do prostoru; Czuber zde pak toto zobecnění systematicky provedl.

I když jednotlivé výsledky odvodil pro dvě nebo tři dimenze, v úvodní kapitole podal definici geometrické pravděpodobnosti jako podílu obsahů v $\mathbb{R}^n$:

$$p = \frac{\int\int \dots \int_{K'} dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\int\int \dots \int_{K} dx_1 dx_2 \dots dx_n}\,, \tag{6.22}$$

kde $K' \subseteq K \subset \mathbb{R}^n$. V návaznosti na diskusi v časopise Educational Times, o níž se na jiném místě monografie také zmiňuje, Czuber připomíná, že je často možné nalézt různá řešení téhož problému týkajícího se geometrické pravděpodobnosti, a poukazuje na to, že rozdílnost pramení z odlišných přístupů k náhodnému výběru. Tak také předjímal Bertrandovy paradoxy. Druhá část monografie potom přináší originální výklad o středních hodnotách geometrických proměnných, založený na teorii geometrické pravděpodobnosti.

Budeme-li v knize hledat praktické aplikace, nalezneme jen jednu explicitní poznámku týkající se experimentální rektifikace uzavřené konvexní křivky v rovině. Po důkazu Croftonovy formule (6.18) Czuber připomíná jiný výsledek obsažený v [62], podle něhož pravděpodobnost, že přímka zasahující uzavřenou konvexní křivku $\mathscr{L}$ délky L zasáhne také uzavřenou konvexní křivku ℓ délky l, ležící uvnitř $\mathscr{L}$, je $p = l/L$. Potom poznamenává, že na tomto výsledku je možné založit experimentální odhad délky uzavřené konvexní křivky:

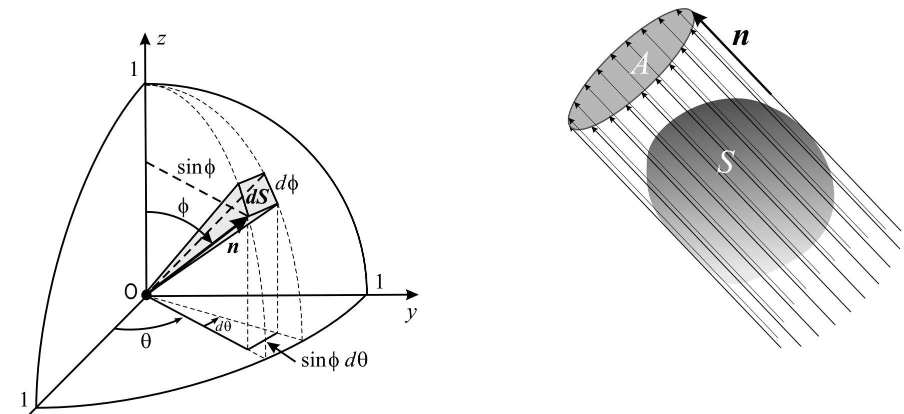
Křivka, která má být rektifikována, se obklopí jinou uzavřenou konvexní křivkou (kružnicí, mnohoúhelníkem) známé délky L, v rovině obou křivek se

narýsuje velký počet s libovolných přímek protínajících křivku L a spočítají se ty, které protínají také křivku neznámé délky l; označme jejich počet m. Čím větší je s, tím přesněji platí rovnice $m/s = l/L$, která implikuje $l = Lm/s$.
([C23], str. 116)

Z dnešního pohledu je škoda, že Czuber explicitně neuvádí i podobnou poznámku týkající se odhadu plošného obsahu. Ten však ihned plyne z věty, podle níž je míra všech přímek zasahujících uzavřenou konvexní plochu $\mathscr{S}$ přímo úměrná s konstantou úměrnosti $\pi/2$ plošnému obsahu S této plochy. Přesněji řečeno, v souladu s Croftonovým stručným nástinem Czuber v knize [C23] dokázal:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} A(\phi,\theta)\sin\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot S\,, \tag{6.23}$$

kde $A(\phi,\theta)$ je obsah projekce plochy $\mathscr{S}$ do roviny, jejíž normálový vektor je dán souřadnicemi (ϕ,θ) v pevné sférické soustavě souřadnic (viz obr. 6.11).



Obr. 6.11 Ilustrace k rovnici (6.23)

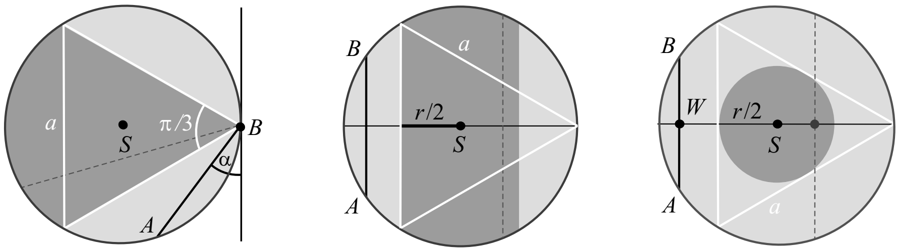
Další originální výsledky týkající se geometrických středních hodnot v trojrozměrném prostoru jsou obsaženy v článku *Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten* [C24], otištěném rovněž v roce 1884. Jako příklad zde uveďme vzorec $V = (1/4)\cdot S\overline{C}$, kde $\overline{C}$ je střední délka tětivy konvexní oblasti o objemu V, ohraničené uzavřenou konvexní plochou $\mathscr{S}$ o obsahu S.

Czuber se ke geometrické pravděpodobnosti vrátil také v pozdějších publikacích, například v rozsáhlém pojednání *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen* [C34], věnovaném historii teorie pravděpodobnosti a jejích aplikací, nebo v knize *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung* [C37], obsahující výklad teorie pravděpodobnosti a jejích aplikací v oblasti životního pojištění; poznamenejme, že v druhém vydání z roku 1908 je kapitola týkající se geometrické pravděpodobnosti obohacena o diskusi teorie množin a jejího využití v teorii pravděpodobnosti, čímž se systematicky zabýval Rudolph Lämmel (1879–1962) v doktorské disertaci [205]. V uvedeném vydání [C44] se Czuber také vrací k tzv. Bertrandovu paradoxu o tětivě.

Bertrandův paradox

Připomeňme, že v úvodu ke knize *Calcul des probabilités* [36] zformuloval Joseph Bertrand (1822–1900)[26] několik paradoxů týkajících se náhodných výběrů z nekonečných populací, jimiž varoval před neopatrným zacházením s nekonečnem a s principem indiference. Asi nejznámější z nich se týká tří různých způsobů výběru tětiv v kruhu, které vedou ke třem různým odpovědím na otázku, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná tětiva v kruhu bude delší než strana a vepsaného rovnostranného trojúhelníku:[27]

V prvním případě je jeden z koncových bodů tětivy (bod B na obr. 6.12 vlevo) považován za známý (ze symetrie plyne, že tato znalost by neměla změnit výsledek) a náhodně je zvolen směr tětivy, určený úhlem α od tečny ve zvoleném koncovém bodě B; tětiva je delší než a pro $\alpha \in (\pi/3, 2\pi/3)$, požadovaná pravděpodobnost je proto $P_1 = 1/3$ (uvědomme si, že stejný výsledek bychom získali i v případě, že by se volily nezávisle na sobě koncové body s rovnoměrným rozdělením na obvodu kruhu). V druhém případě je za známý považován směr tětivy a náhodně se volí její vzdálenost od středu kruhu (viz obr. 6.12 uprostřed); tětiva je delší než a, je-li uvedená vzdálenost menší než polovina poloměru kruhu r, což dává $P_2 = 1/2$. Konečně v třetím případě je náhodně zvolen střed tětivy; ta je delší než a právě tehdy, když její střed leží uvnitř soustředného kruhu o poloměru $r/2$ (viz obr. 6.12 vpravo). Hledaná pravděpodobnost je nyní rovna podílu obsahů kruhů, tj. $P_3 = 1/4$.



Obr. 6.12 Bertrandův paradox: různé způsoby volby tětivy

Bertrand uzavírá: *Která z těchto tří odpovědí je ta správná? Žádná z nich není nesprávná, žádná není správná, otázka je špatně položená.*

V části 6.2.3 byl zmíněn podobný problém, zformulovaný v článku [125] H. Godfraye, a odpovědi W. S. B. Woolhouse a W. M. Croftona. Bertrandovy otázky pak vyvolaly další diskusi o základech teorie geometrické pravděpodobnosti. Henri Poincaré (1854–1912) se tímto tématem zabýval v knize [280]; zavedl pojem hustoty pravděpodobnosti, odvodil její tvar pro první dva případy uvažované Bertrandem a prohlásil, že problém plyne ze skutečnosti, že se tyto hustoty liší.

[26] J. Bertrand studoval na École polytechnique a École des mines. Potom vyučoval na různých školách, nejdéle na École polytechnique (1844–1895; od roku 1856 jako profesor analýzy) a na Collège de France (1848–1900; od roku 1862 jako profesor fyziky). V roce 1856 se stal členem pařížské akademie věd, v roce 1884 byl zvolen do Francouzské akademie. Podrobněji viz [185] a [334].

[27] Bertrand se ptal na pravděpodobnost, že tětiva bude kratší než strana a, v řešení však již hovořil o případech, kdy je tětiva delší.

V souladu se svým konvencionalismem uzavřel, že obecně neznáme povahu hustoty pravděpodobnosti, která může být libovolná, a musíme ji stanovit na začátku našich úvah nějakou smysluplnou konvencí. V další části se Poincaré zabývá zobecněnou úlohou o jehle; říká, že pravděpodobnost, že daný rovinný obrazec $\mathscr{F}$ splňuje určité podmínky týkající se jeho pozice, je přímo úměrná integrálu $\int\int\int dx dy d\omega$, kde (x, y) jsou kartézské souřadnice pevného bodu M obrazce $\mathscr{F}$ a ω je úhel, který svírá osa x s přímkou procházející bodem M a pevně spojenou s $\mathscr{F}$, protože – jak ukazuje – tento integrál je nezávislý na rotaci a translaci. Přijme-li se tato nezávislost jako konvence a náhodná tětiva se bude považovat za část jedné z ekvidistantních rovnoběžných přímek vedených ve vzdálenostech $d \leq 2r$, na které je daný kruh o poloměru r „vržen“, pak bude tětiva delší než strana vepsaného rovnostranného trojúhelníku, jestliže přímka, na níž leží, zasáhne také soustředný kruh o poloměru $r/2$; protože pravděpodobnost tohoto jevu je rovna poměru obvodů těchto dvou kruhů, obdržíme $P_2 = 1/2$.

Czuber ve zmíněném druhém vydání knihy [C37] uvedl další tři možnosti: na obvodu kruhu je dán koncový bod tětivy a pak je zvolen další bod uvnitř kruhu; nezávisle jsou zvoleny dva koncové body tětivy, a to s rovnoměrným rozdělením na obvodu kruhu (zde se snadno ukáže, že tento přístup je ekvivalentní s první možností, kde $P_1 = 1/3$); nezávisle jsou zvoleny dva body uvnitř kruhu. Pro jednotlivé případy Czuber vypočítal odpovídající pravděpodobnosti a poukázal na to, že pouze druhá z Bertrandových alternativ, která vede k hodnotě $P_2 = 1/2$, odpovídá pojmu náhodně zvolené přímky v rovině tak, jak jej zavedl W. M. Crofton. Považujeme-li tedy náhodně zvolenou tětivu za část náhodně zvolené přímky protínající daný kruh, obdržíme pravděpodobnost $P_2 = 1/2$. Již jsme viděli, že toto řešení rovněž splňuje požadavek pohybové invariance, který je nyní v teorii geometrické pravděpodobnosti všeobecně přijímán. Přece jen však nezodpovídá všechny filosofické otázky, které jsou v pozadí. Například Louis Marinoff v článku [230] ukazuje, že Bertrandova řešení jsou ve skutečnosti odpověďmi na tři různé otázky: náhodná tětiva je generována buď procesem na obvodu kruhu, vnější procedurou, anebo procedurou uvnitř kruhu (srov. [394]). Kritizuje dřívější literaturu za to, že dostatečně nerozpoznala tento rozdíl, a demonstruje, že jasně zformulované variace vedou k různým, ale teoreticky a empiricky konzistentním řešením. Podrobněji viz například [334], [335], [279] a didakticky zaměřenou studii [46].

Dodejme, že požadavek pohybové invariance nezávisle zformuloval rovněž Élie Cartan (1869–1951) v článku [51], věnovaném výhradně teorii integrálů (o geometrické pravděpodobnosti a jejích představitelích se nikde nezmiňuje). Cartan studoval vícenásobné integrály přes systémy přímek v rovině a systémy přímek a rovin v prostoru. O mírách, které pro takovéto systémy zavedl, přitom dokázal, že jsou nezávislé na translaci a rotaci; tyto míry se zároveň shodují s mírami zavedenými Croftonem a Czuberem. Cartan také odvodil vztah (6.18) a další vzorce integrální geometrie. V rámci geometrické pravděpodobnosti se tímto tématem zabýval Georg Pólya (1887–1985) v článku [288], kde ukázal (bez odkazu na Cartana či Poincarého), že míry množin přímek a rovin, na nichž Crofton a Czuber založili teorii geometrické pravděpodobnosti, jsou jediné legitimní – a důvodem byla opět pohybová invariance.

6.3.2 Bohuslav Hostinský

Na počátku 20. století představil zajímavé příspěvky k teorii geometrické pravděpodobnosti Bohuslav Hostinský (1884–1951).[28] V článku *Nové řešení úlohy o jehle* [144] a v jeho francouzské verzi [145] kritizoval tradiční řešení uvedené Buffonovy úlohy kvůli tomu, že je založeno na nerealistickém předpokladu, že rovnoběžky jsou narýsovány na neomezené desce a že pravděpodobnost, že střed jehly zasáhne oblast o určitém obsahu, je přímo úměrná tomuto obsahu a nezávisí na poloze oblasti. Hostinský zdůraznil, že žádný reálný experiment nemůže takové předpoklady splňovat, a nahradil je mnohem realističtějšími. Předpokládal, že rovnoběžky jsou narýsovány na čtvercové desce a při pokusu se požaduje, aby jehla dopadla na tuto desku. Nyní je pravděpodobnost, že střed jehly zasáhne čtverec daného obsahu poblíž okraje stolu, menší než pravděpodobnost, že zasáhne stejně velký čtverec poblíž středu.

Při řešení tohoto problému Hostinský zobecnil metodu libovolných funkcí, kterou představil H. Poincaré v práci [280].[29] Předpokládal, že pravděpodobnost, že střed jehly dopadne do oblasti M uvnitř čtverce C (stolu), je přímo úměrná integrálu $\int\int \varphi(x,y)dxdy$, kde $\varphi(x,y)$ je libovolná funkce se spojitými parciálními derivacemi v C s tou vlastností, že pro nějakou konstantu K platí: $|\varphi'_x(x,y)| < K,\ |\varphi'_y(x,y)| < K$. V limitním případě, kde počet rovnoběžek roste do nekonečna, pak Hostinského řešení odpovídá původnímu Buffonovu výsledku.

Hostinský diskutoval o francouzské verzi článku [145] v korespondenci s Mauricem Fréchetem, což mohlo podnítit Fréchetův zájem o teorii pravděpodobnosti (viz [138]). Fréchet doplnil Hostinského myšlenky v pojednání [113] a v knize [114]. V roce 1925 Hostinský publikoval francouzskou knížku *Sur les probabilités géométriques* [146], v níž rozšířil příspěvky Croftona a Czubera ([62], [C23], [C24]) na plochy v prostoru. Kromě dalších výsledků zde Hostinský dokázal analogii výše zmíněné Crofton-Hostinského formule (6.20), což je patrně důvodem, proč je jeho jméno v této souvislosti připojováno ke jménu Croftonovu. Pro danou uzavřenou konvexní plochu $\mathscr{S}$ o obsahu S a objemu vnitřní oblasti V Hostinský dokázal, že střední hodnota čtvrtých mocnin délky tětivy C je

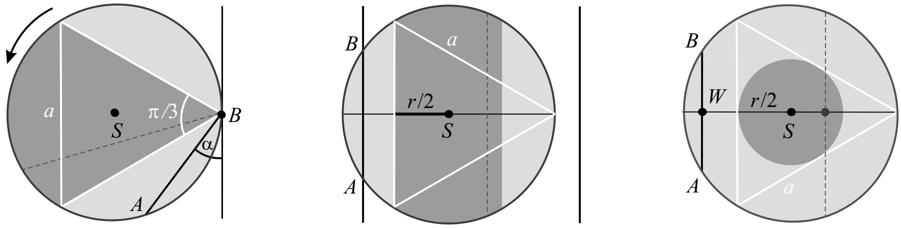
$$\overline{C^4} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{V^2}{S}\,. \tag{6.24}$$

V následujícím roce Hostinský vydal *Geometrické pravděpodobnosti* [147], první a na dlouho jedinou českou knihu věnovanou této teorii. Postupoval zde od množin bodů přes množiny přímek v rovině až po množiny přímek a rovin v prostoru a studoval jejich interakce s různými křivkami a plochami.

[28] B. Hostinský studoval matematiku a fyziku na filosofické fakultě pražské univerzity, kde v roce 1907 získal doktorát filosofie. Potom působil jako suplující učitel na gymnáziu v Novém Bydžově, Roudnici a Praze (v Křemencově ulici), v roce 1910 se stal profesorem na reálce v pražských Vršovicích. Ve školním roce 1908/09 studoval na univerzitě v Paříži, v roce 1912 byl jmenován soukromým docentem pro vyšší matematiku na pražské univerzitě. O osm let později se stal řádným profesorem na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kde zavedl a 31 let řídil Ústav teoretické fyziky. Hostinský byl členem řady učených společností v Čechách i ve Francii – např. ČAVU, KČSN, JČMF, Société mathématique de France, Société française de physique, Assotiation française pour l'avancement des sciences.

[29] Hostinský odkazoval na druhé a podstatně upravené vydání z roku 1912.

Míry příslušných množin přitom zavedl explicitně na základě pojmu invariance vzhledem k translaci a rotaci. Hostinský se rovněž zastavil u Bertrandova paradoxu; tvrdil, že rozumný výpočet pravděpodobnosti může být uskutečněn jen ve vztahu k experimentálním podmínkám, za nichž se volba náhodné tětivy provádí. Upozorňuje na to, že každá možnost má své opodstatnění a každá z nich odpovídá jinému experimentu. V prvním případě uvažuje pevnou přímku AB a představuje si, že se kotouč roztočí kolem bodu B. V druhém případě uvažuje vrh kotouče na rovinu s ekvidistantními rovnoběžkami a ve třetím uvažuje semínko, které je vrženo na daný kruh – kam padne, tam bude střed tětivy.



Obr. 6.13 Bertrandův paradox: experimenty B. Hostinského

Josef Baťa

O rok později jeden z Hostinského studentů, Josef Baťa (1894–1929),[30] publikoval dnes téměř neznámou knížku [14], kde nastínil historii Bertrandova paradoxu o tětivě včetně příspěvků Poincarého a Czubera, odvodil hustotu pravděpodobnosti pro všech šest možností a potom podal zprávu o pokusech, které uskutečnil na základě Hostinského návrhu.

V jednom pokusu používal pět průsvitných disků se zakreslenými soustřednými kružnicemi k, k' a k'' o průměru 60, 30 a 15 mm, které opakovaně (celkem 10 000 krát) házel na velký list papíru se dvěma navzájem kolmými systémy ekvidistantních rovnoběžek ve vzdálenostech 60 mm (k vždy zasáhne některou z přímek). Pro každý kruh pak Baťa zaznamenal počet průsečíků s některou rovnoběžkou určitého směru a také počet mřížových bodů, které kruh překryl. Odhad pravděpodobnosti P_2 získal jako poměr počtu přímek zasahujících k' (resp. k'') ku počtu přímek zasahujících k (resp. k'), který mu vyšel $[P_2] = 0,502$ (resp. $[P_2] = 0,4985$). Podíl počtu mřížových bodů, které padly do k' (resp. k''), ku počtu těch, které padly do k (resp. k'), udává odhad $[P_3] = 0,2426$ (resp. $[P_3] = 0,2502$). Odhad pravděpodobnosti P_1 pak Baťa získal tak, že nakreslil na list papíru dvě soustředné kružnice k, k' a do jednoho bodu kružnice k připevnil připínáčkem střed transparentního kruhového disku, obsahujícího kružnici k s narýsovaným průměrem. Disk roztočil a (po několika technických vylepšeních) nalezl poměr počtu případů, kdy průměr zasáhl k', ku počtu všech zásahů k; tak obdržel odhad $[P_1] = 0,3347$.

[30] Josef Baťa se narodil 21. 9. 1894 ve Skutíčku, v roce 1913 absolvoval Učitelský ústav v Poličce, potom působil jako učitel ve Skutíčku. V akademickém roce 1926/27 studoval v obou semestrech jako mimořádný posluchač na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, v obou semestrech následujícího roku byl zapsán jako mimořádný posluchač na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Zemřel předčasně dne 23. 2. 1929.