5. Abelovu cenu za matematiku získal v roce 2007 Srinivasa Varadhan

Michal Křížek, Ivo Vrkoč

5.1. Úvod

Dne 22. května 2007 obdržel Abelovu cenu profesor Srinivasa S. R. Varadhan z Courantova ústavu matematických věd v New Yorku. V krátké historii Abelových cen, které se pravidelně udělují od roku 2003, je to již druhá cena, jež směřuje do tohoto ústavu. Připomeňme, že v roce 2005 získal Abelovu cenu matematik maďarského původu Peter Lax, který pracoval v Courantově ústavu již od svých 25 let.

Podle vyjádření výběrové komise dostal S. Varadhan Abelovu cenu ze *své fundamentální příspěvky k teorii pravděpodobnosti, zejména za vytvoření sjednocené teorie velkých odchylek.*

Srinivasa S. R. Varadhan

Komisi předsedal Kristian Seip. Abelovu cenu pak udělila Norská akademie věd. Slavnostnímu aktu v aule univerzity v Oslo byli přítomni Její Veličenstvo královna Sonja a norský ministr pro vzdělávání a výzkum Øystein Djupedal. Poté měl profesor Varadhan audienci v královském paláci, setkal se s mladými studenty matematiky, proslovil dvě odborné přednášky na univerzitách v Oslo a Trondheimu a zúčastnil se matematického cirkusu organizovaného pro děti. Abelova cena je spojena s peněžitou odměnou 6 000 000 norských korun.

5.2. Proslov prof. Varadhana při udělení Abelovy ceny

Vaše veličenstvo, vzácní členové Norské akademie věd, drazí přátelé.

Chci začít vyjádřením velkých díků norské vládě a lidem, kteří se zasloužili o zřízení Abelovy nadace, která podporuje tuto cenu. Abel ve svém velice krátkém životě učinil obrovský přínos „Matematice“ a já se cítím velice poctěn cenou, která byla zřízena na jeho památku.

Jen těžko mohu vyjádřit své emoce v tento den. Cítím se polichocen slovy, která zde o mě a o mé práci zazněla. Jsem skutečně potěšen, že jsem za tuto práci oceněn. Matematika je rozsáhlá disciplína, v níž pracuje mnoho vynikajících kolegů, kteří učinili fundamentálními objevy ve svých oborech. Měl jsem štěstí, že komise letos ocenila teorii pravděpodobnosti a moje výsledky v ní.

Teorie pravděpodobnosti má dlouhou historii. I když různé hry opírající se o náhodu se hrají již tisíciletí, teprve nedávno se tento předmět stal součástí matematiky. Teorie pravděpodobnosti má dnes mnoho rolí. Jako součást matematiky je perspektivní a slouží také jako užitečný nástroj v ostatních oblastech čisté a aplikované matematiky. Stochastické modelování je důležitou součástí mnoha odvětví přírodních a sociálních věd. Žijeme ve světě plném nejistoty, a tak se stalo nezbytným tuto nejistotu modelovat, studovat a případně ji i řídit. Jsem skutečně velice šťasten, že teorie pravděpodobnosti získala letos uznání.

Na mém formování jako osoby i jako matematika se podílelo mnoho osobností. Můj otec byl učitel a později ředitel na střední škole. Vzdělání mělo vždy vysokou prioritu v našem domově a já jsem v tomto směru měl trvalou podporu od obou svých rodičů.

Na střední škole jsem měl výborného profesora matematiky, od něhož jsem pochytil, že matematika může být i zábava jako ostatní hry. Moji učitelé v prezidentské koleji v Chennai mně poskytli solidní matematické vzdělání. Během studií v Indickém statistickém ústavu v Kalkatě mě školil Dr. C. R. Rao, který mě trvale podporoval. Můj zájem o matematiku tehdy výrazně vzrostl díky spolupráci s kolegy z ústavu. Zejména se o to zasloužil již zmíněný Ranga Rao a dále Varadarajan a Partasarathy.

Když jsem se v roce 1963 přestěhoval do New Yorku, Courantův ústav měl velké množství aktivit v řadě oblastí. V analýze jsem hodně získal v diskusích s Moserem, Nirenbergem, Laxem, Johnem a mnoha dalšími. Donsker, s nímž jsem po léta úzce spolupracoval, byl můj skvělý kolega a věrný rádce. Také Kac a McKean byli trvalými zdroji inspirace.

Vždy jsem si cenil úzké spolupráce s ostatními a hodně jsem se od nich naučil. Zejména bych rád zmínil některé z nich. Byli to mí kolegové Stroock, Papanicolaou a H. T. Yau v různých obdobích a dále Kipnis, Olla a Landim, kteří dlouhodobě navští-

vili náš ústav. Během těch let jsem měl kolem třiceti studentů. Spolupráce s nimi byla velice povzbuzující a byli to oni, kdo přispěli a obohatili můj profesionální život.

Newyorská univerzita a především Courantův ústav je báječná instituce v tom smyslu, že získává studenty k vědeckému bádání a umožňuje jim plný odborný růst.

Nakonec bych rád poděkoval své ženě Vasu za podporu, kterou mi poskytovala, a za porozumění, jehož se mi během let dostávalo. Jsem rád, že je zde s naším synem Ashokem, aby se mnou společně sdíleli radost. Lituji, že tu není Gopal[1] *a že nemůže se mnou prožívat tento okamžik.*

Končím díky adresovanými Norské akademii věd, Abelově nadaci a výběrové komisi za to, co se dnes stalo, a přeji každému dobrý den.

5.3. Stručný životopis

Srinivasa S. R. Varadhan se narodil 2. ledna 1940 v Chennai (tj. Madrasu) na jihozápadním pobřeží Indie. Titul bakaláře získal na Presidency College v Chennai v roce 1959 a Ph.D. v Indickém statistickém ústavu v Kalkatě v roce 1963. Jeho školitelem byl světoznámý indický statistik C. R. Rao. Mladý Varadhan musel během obhajoby své doktorské disertace čelit řadě zasvěcených dotazů od hosta pro něj do té doby neznámého. Později se ukázalo, že se jednalo o špičkového ruského matematika A. N. Kolmogorova.[2] Profesor Rao věděl, že přijede do Indie, a tak načasoval Varadhanovu obhajobu tak, aby mohl Kolmogorovovi představit svého vynikajícího studenta. A nutno dodat, že Kolmogorov nebyl zklamán.

S. Varadhan začal svoji akademickou kariéru v Courantově ústavu v New Yorku již jako postdoc (1963–67). V letech 1966–68 zde působil jako asistent a poté jako docent (angl. Associate Professor). V roce 1972 byl jmenován profesorem a ještě v témže roce odcestoval do švédského Mittag-Lefflerova ústavu na delší studijní pobyt. V období 1976–77 přijal nabídku pracovat na Standfordské univerzitě. V letech 1980–84 vystřídal ve funkci ředitele Courantova ústavu P. Laxe. Později (1991–92) byl také zaměstnán v prestižním Ústavu pro pokročilá studia (Institute for Advanced Study) a po návratu se stal opět ředitelem Courantova ústavu (1992–94).

I když je práce S. Varadhana motivována problémy matematické fyziky a teorií parciálních diferenciálních rovnic, zabývá se především teorií pravděpodobnosti. Když nastoupil do Courantova ústavu, nalezl zde skvělé intelektuální zázemí. Měl štěstí, že se seznámil s D. W. Stroockem. Společně koncem šedesátých let napsali působivou sérii rozsáhlých vědeckých článků (viz např. [15], [16]), kterou v roce 1979 završili monografií *Multidimensional diffusion processes* [19] obsahující velké množství původních výsledků. Tato monografie brzy získala velký světový ohlas a byla opětovně publikována v letech 1997 a 2006.

V roce 1978 byl Varadhan zvaným řečníkem na Mezinárodním matematickém kongresu a v roce 1994 zde měl plenární přednášku. Během svého plodného života prof. Varadhan získal řadu ocenění a uznání. Připomeňme například Birkhoffovu cenu (1994)

[1] *Pozn. redakce:* Gopal je Varadhanův prvorozený syn, který tragicky zahynul 11. září 2001 při teroristickém útoku v New Yorku.

[2] Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987) v roce 1933 axiomatizoval teorii pravděpodobnosti. Zavedl pravděpodobnost jako pravděpodobnostní míru s hodnotami v intervalu $[0,1]$ definovanou na σ-algebře a splňující jisté podmínky. Jeho standardní model (viz např. [12]) se dodnes používá. Opírá se o práce E. Borela (1871–1956) z teorie míry.

a Steelovu cenu (1996). V roce 1988 byl zvolen do Americké akademie umění a věd, v témže roce do Třetí světové akademie věd, v r. 1995 do Národní akademie věd, v r. 1998 do Královské společnosti a v r. 2004 do Indické akademie věd. Databáze Mathematical Reviews eviduje 135 recenzí na práce S. Varadhana. Jeho stručná vědecká biografie je uveřejněna v článku [1].

5.4. Od teorie pravděpodobnosti k teorii velkých odchylek

Teorie pravděpodobnosti má dlouholetou historii. Její kořeny sahají až do 13. století, kdy úlohu o hodech třemi kostkami (viz [14, s. 57]) řešil Richard de Fournival v básni De vetula (O vědmě). V první polovině 17. století Fermat, Galileo, Huygens a Pascal vyšetřovali jednoduché úlohy na pravděpodobnost a zavedli pojem střední hodnoty. Zabývali se nejvíce matematickým řešením hazardních her, u kterých výhru, resp. prohru podmiňují náhodné jevy [17]. Zejména vyšetřovali hry, u nichž mají všichni hráči stejné matematické naděje na výhru a množina možných výsledků je konečná (např. při házení mincí a kostkou nebo různé karetní hry). Jako příklad uveďme jednu takovou úlohu z té doby, kterou lze nalézt v korespondenci Pierra de Fermata s Balaisem Pascalem [18]:

Dva hráči A a B hrají několik her o určitou částku C. Tuto částku dostane hráč, který vyhraje jako první k her. Hry jsou přerušeny ve chvíli, kdy jednomu z hráčů chybí do vítězství ℓ her, druhému m her. Jak bude částka C spravedlivě rozdělena?

Zvolme např. $\ell = 2$ a $m = 3$. V tomto případě bude $k \geq 3$ libovolné. Fermat si uvědomil, že stačí prověřit jen 16 níže uvedených možností:

$$aaaa,\ baaa,\ abaa,\ aaba,\ aaab,\ bbaa,\ abba,\ aabb,\ baba,\ abab,\ baab,$$
$$abbb,\quad babb,\quad bbab,\quad bbba,\quad bbbb,$$

kde a, resp. b znamená vítězství hráče A, resp. B. Odtud je již patrné, že částka C bude spravedlivě rozdělena v poměru 11:5, neboť 11 možností na prvním řádku odpovídá výhře hráče A, zatímco zbývajících 5 možností na řádku druhém odpovídá výhře hráče B. Pro obecné ℓ a m lze postupovat analogicky.

Teorie pravděpodobnosti se pak dále rozvíjela. Studoval se zejména problém, co se stane, když budeme nějaký experiment s náhodným výsledkem opakovat stále dokola. Jak bude vypadat příslušný limitní stav? Tak Jakob Bernoulli přišel koncem 17. století na *zákon velkých čísel,* který lze zhruba vyjádřit takto:

Jestliže se jev vedoucí k náhodnému jevu s pravděpodobností P opakuje n-krát, blíží se poměr počtu jevů skutečně vzniklých k úhrnnému počtu všech jevů tomuto číslu P tím více, čím větší je n.

Když vyhodíme minci do výšky, padne panna nebo orel. Pravděpodobnost obou jevů je zřejmě 50%. Pokud vyhodíme minci například milionkrát, nepadne sice orel právě 500 000krát, ale relativní četnost tohoto náhodného jevu $\frac{p}{10^6}$, kde p udává počet, kolikrát padl orel, se bude jen velice málo lišit od pravděpodobnosti $\frac{1}{2}$.

A. N. Kolmogorov vyjádřil zákon velkých čísel následující matematickou větou:

Nechť $X_1, X_2, \dots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou μ a konečným rozptylem.[3] *Pak*

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\mu\right)=1.$$

Další důležitou roli při rozvoji teorie pravděpodobnosti sehrála také centrální limitní věta, kterou za jistých omezujících předpokladů používal v první polovině 18. století Abraham De Moivre, tj. mnohem dříve než se Gauss narodil. I když De Moivre tuto větu nedokázal, její samotná formulace byla velice významná. Centrální limitní věta nám říká, že statistické vlastnosti, které závisejí na velkém množství nezávislých činitelů, mají rozdělení připomínající svým tvarem zvon. Takové rozdělení se nazývá *Gaussovo* (nebo též *Gaussovo-Laplaceovo) normální rozdělení* a je charakterizováno jen dvěma parametry: střední hodnotou $\mu \in (-\infty, \infty)$ a rozptylem $\sigma^2 > 0$ (viz [14]),

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\quad x\in(-\infty,\infty).$$

Pokud si kupříkladu budete zakreslovat do diagramu kolik vojáků má velikost 175 cm, kolik jich má velikost 176 cm atp., pak výsledný graf bude mít přibližně tvar jako funkce f pro vhodné parametry.

Obě výše zmíněné limitní věty (zákon velkých čísel i centrální limitní věta) jsou důležité v mnoha praktických situacích, kdy pracujeme s obrovským množstvím statistických dat. Například pojišťovací společnosti se příliš nezajímají o jednotlivá auta, ale spíše je zajímá kolik nehod budou mít všechna jimi pojištěná auta za rok. Pokud budete stavět telefonní síť, pak vás nebudou zajímat jednotliví zákazníci, ale spíše pravděpodobnost, že příliš mnoho z nich bude současně telefonovat během večerní špičky nebo v případě nějaké katastrofy. Limitní věty nám umožňují takovéto úlohy řešit, ale nelze je použít k řešení problému tzv. *velkých odchylek*.

Abychom si přiblížili tento problém, vraťme se k úloze házení mince. Pokud ji vyhodíme jen stokrát, pak existuje velice malá pravděpodobnost, že padne alespoň 75 orlů a nejvýše 25 panen. Umění „velkých odchylek“ spočívá právě ve výpočtu pravděpodobnosti vzniku takových řídkých případů.

Velké odchylky byly prvně studovány velkým švédským statistikem a pojišťovacím matematikem Haraldem Cramérem (1893–1985) kolem roku 1930. Snadno nahlédneme, že tento problém zajímá zejména matematiky pracující v pojišťovací matematice. Částka, kterou platíte za pojištění auta, se odvíjí od statistiky z předchozích let. Pojišťovací společnost totiž musí vybrat dostatečné množství peněz, aby mohla pokrýt nehody všech řidičů, kteří havarovali. Co ale dělat, pokud se v některém roce stane mnohem více nehod (v důsledku nějaké nepředvídatelné příčiny) než v předchozích letech? Má-li pojišťovna zaplatit více peněz, než vybrala, pak bude mít samozřejmě potíže.

Bohužel neexistuje žádná cesta, jak se tomuto problému zcela vyhnout. Pokud byste nasadili cenu za pojištění příliš vysokou, abyste se vyhnuli velkým odchylkám, pak si

[3] Poznamenejme, že se může stát, že střední hodnota náhodných veličin X_i vůbec nemusí existovat (např. pro Cauchyovo rozdělení). Pak je ale s pravděpodobností 1 posloupnost náhodných veličin $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ neohraničená [13].

vaše pojištění nikdo nekoupí. Přitom taková velká odchylka nastane jen velmi zřídka. Pojišťovací společnost proto potřebuje spočítat pravděpodobnost velkých odchylek různých velikostí, aby nalezla rozumnou míru rizika. Podobně je třeba stavět telefonní sítě předimenzované, abychom se vyhnuli přetížení v důsledku zřídka se vyskytujících velkých odchylek. Zcela výjimečně se také stane, že Zemi zasáhne velký asteroid, že nestačí protipovodňové zábrany při pětisetleté vodě nebo že velká kasina jsou finančně zruinována, když padne například červená patnáctkrát za sebou.

5.5. Varadhanův princip velkých odchylek

Jeden z velkých Varadhanových příspěvků k teorii pravděpodobnosti je použití techniky velkých odchylek jako silného a mnohostranného nástroje v mnoha oblastech matematicko-fyzikálních věd, které se od sebe zdánlivě velice liší (např. statistická fyzika, populační dynamika, ekonometrie, komunikační technologie). Tento výzkum prováděl Varadhan zejména se svým kolegou Monroe Donskerem. Dohromady publikovali přes 20 prací (viz např. [2]–[10]).

Mnoho fyzikálních teorií má statistickou povahu [9], protože nepopisují chování jednotlivých atomů či molekul, ale soustřeďují se na statistické chování všech částic v makroskopických veličinách, jako je tlak, teplota, tok apod. Ale i zde se občas mohou vyskytnout nepředvídatelné fluktuace, které pak vedou např. k tunelovému jevu či k lokálnímu snížení entropie.

Varadhanův princip velkých odchylek si objasníme na jednoduchém případu z článku [2]. Uvažujme Brownův pohyb startující v bodě x a okamžiku 0. Položme

$$L(t,\omega(.),y)=\frac{1}{t}\lambda\{s: 0\le s\le t,\, \omega(s)\le y\},$$

kde λ je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^1$, $\omega(.)$ je realizace Brownova pohybu. Hodnota $L(t,\omega(.),y)$ tedy vyjadřuje relativní dobu, po kterou realizace $\omega(.)$ bude menší nebo rovna y do okamžiku t. Dále nechť P_x je pravděpodobnost indukovaná tímto procesem. Problém vyšetřovaný Donskerem a Varadhanem je zaměřen na nalezení limit typu

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log E_x\left[\exp\{-t\Phi(L(t,\omega(.),.))\}\right],$$

kde E_x je střední hodnota odpovídající pravděpodobnosti P_x, Φ je funkcionál definovaný na množině distribučních funkcí na $\mathbb{R}^1$ a splňující jisté podmínky. Tato limita dává informaci o asymptotickém průběhu $L(t,\omega(.),y)$. V tomto případě byla limita nalezena jako extremní hodnota konkrétně daného výrazu. Výsledky jsou v článcích [2]–[7] zobecněny na markovské procesy s diskrétním i spojitým časem, na procesy, jejichž hodnoty jsou ve velmi obecných prostorech a dále na limes superior a limes inferior výrazů

$$\frac{1}{t}\log Q_{x,t}(C)=\frac{1}{t}P_x\{\omega: S_t(\omega,.)\in C\},$$

kde C je podmnožina pravděpodobnostních měr, L_t je definována vztahem

$$S_t(\omega,A)=\frac{1}{t}\lambda\{\sigma:\omega(\sigma)\in A,\, 0\le\sigma\le t\}$$

a A je množina ze stavového prostoru markovského procesu. V případech těchto limit se výše uvedené výrazy a jejich zobecnění porovnávají s entropií vyšetřovaných procesů (blíže o tom v [6]).

Uvedené výsledky mají důležité aplikace. Uveďme jen některé. Autoři rozřešili důležitý polaronový problém a také problém formulovaný Pekarem [7]. Oba tyto problémy mají význam ve statistické fyzice. Jmenujme ještě analýzu chování nábojů na kružnici, jejichž pohyb je dán složením deterministického vlivu s vlivem daným Brownovým pohybem (viz [10]).

5.6. Další výsledky S. Varadhana

V roce 1905 se Albert Einstein proslavil svou prací, v níž vysvětlil příčinu Brownova pohybu. V příslušných matematických modelech je tento pohyb popsán funkcí, která má nekonečnou variaci (což paradoxně odpovídá nekonečné rychlosti částic). V článcích [15] a [16] Stroock a Varadhan studují difúzní proces v $\mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, \dots\}$, který je popsán evoluční parabolickou parciální diferenciální rovnicí

$$-\frac{\partial u}{\partial s}(s,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(s,x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(s,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(s,x), \tag{5.1}$$

kde koeficienty difúze a_{ij} jsou spojité a omezené funkce a koeficienty b_i jsou měřitelné.

Rovnice (5.1) má úzký vztah k markovským procesům.[4] Takové procesy lze vyjádřit pomocí Itoovy rovnice (viz [11])

$$d\xi(t,\omega) = \sigma(t, \xi(t,\omega))dw(t,\omega) + b(t, \xi(t,\omega))dt, \tag{5.2}$$

kde $w(t,\omega)$ je Brownův pohyb, $\xi(t,\omega)$ je hledaný proces, $a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma(t,x)^\top$ je tzv. matice difúzních koeficientů a_{ij} a $b(t,x)$ je tzv. vektorový drift (trend). Pokud koeficienty a, b jsou dostatečně regulární, pak existují jednoznačná řešení rovnic (5.1) i (5.2) za jistých dodatečných podmínek na řešení a $\xi(t)$ je markovským procesem. Označme $P(s,x,t,\Gamma)$ pravděpodobnost, že markovský proces ξ padne do množiny Γ v okamžiku t, jestliže v okamžiku s byl v bodě x. Funkce P proměnných s, x je řešením rovnice (5.1) s určitými koncovými podmínkami – v tomto kontextu nazvaná zpětnou Kolmogorovovou rovnicí. Výsledky tohoto druhu se již považují za klasické, pokud koeficienty a, b jsou hölderovské. Důkazy obdobných tvrzení v případě méně regulárních koeficientů dlouho odolávaly. Tvrdým oříškem byla jednoznačnost řešení. Autoři však zvolili jinou cestu. Uvědomili si, že problém daný rovnicí (5.2) lze transformovat na hledání pravděpodobnostní míry P tak, aby procesy

$$X_\theta^s(t, x(.)) = \exp\{\langle\theta, x(t) - x(s)\rangle - \frac{1}{2}\int_s^t \langle\theta, a(u, x(u))\theta\rangle du - \int_s^t \langle\theta, b(u, x(u))\rangle du\},$$

kde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je skalární součin v $\mathbb{R}^d$, byly martingaly pro všechna $\theta \in \mathbb{R}^d$. Nalezená míra P se nazývá řešením martingalového problému. Poznamenejme, že proces $X(t)$ se nazývá

[4] Andrej Andrejevič Markov (1856–1922) položil základy teorie náhodných procesů jako posloupností pokusů, když pravděpodobnost budoucích stavů závisí na přítomnosti, ale nezávisí na dříve provedených pokusech [12].

martingal vůči pravděpodobnosti P a σ-algebrám $\mathcal{F}_s$, jestliže $E^P\{X(t_s)|\mathcal{F}_s\} = X(s)$ pro $t \geq s$, přičemž $E^P\{X(t_s)|\mathcal{F}\}$ je podmíněná střední hodnota vzhledem k σ-algebře $\mathcal{F}$. Martingaly hrají ústřední roli v teorii stochastických her. Pro své výhodné vlastnosti se používají v teorii markovských procesů apod.

Za předpokladů, že $a_{ij}(t,x)$ jsou spojité a omezené, matice $a(t,x)$ je pozitivně definitní v každém bodě, $b_i(t,x)$ jsou měřitelné a omezené autoři dokázali existenci zobecněného řešení a jednoznačnost martingalového problému (viz [19]). Odtud plyne i jednoznačnost ve smyslu semigrup. Navíc přechodová funkce $P(s,x,t,\Gamma)$ daná martingalovým problémem je ekvivalentní s odpovídající funkcí danou rovnicí (5.2).

Literatura

[1] Athreya, K. B.: *Professor Srinivasa R. S. Varadhan.* Current Sci. *78* (2000), 1151–1152.

[2] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I.* Commun. Pure Appl. Math. *28* (1975), 1–47.

[3] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, II.* Commun. Pure Appl. Math. *28* (1975), 279–301.

[4] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Asymptotics for the Wiener Sausage.* Commun. Pure Appl. Math. *28* (1975), 525–565.

[5] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, III.* Commun. Pure Appl. Math. *29* (1976), 389–461.

[6] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, IV.* Commun. Pure Appl. Math. *36* (1983), 183–219.

[7] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Asymptotics for the Polaron.* Commun. Pure Appl. Math. *36* (1983), 505–528.

[8] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Large deviations for stationary Gaussian processes.* Commun. Math. Phys. *97* (1985), 187–210.

[9] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Large deviations for noninteracting infinite-particle systems.* J. Stat. Phys. *46* (1987), 1195–1232.

[10] Donsker, M. D., Varadhan, S. R. S.: *Large deviations from hydrodynamic scaling limit.* Commun. Pure Appl. Math. *42* (1989), 243–270.

[11] Ito, K.: *On stochastic differential equations.* Mem. Amer. Math. Soc. *4* (1951), 51.

[12] Navara, M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Skripta FEL ČVUT, Praha 2007.

[13] Rektorys, K., a kol.: *Přehled užité matematiky II.* Prometheus, Praha 1995.

[14] Riečan, B., Lamoš, F., Lenárt, C.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika.* Alfa, SVTL, Bratislava 1984.

[15] Stroock, D. W., Varadhan, S. R. S.: *Diffusion processes with continuous coefficients, Part I.* Commun. Pure Appl. Math. *22* (1969), 345–400.

[16] Stroock, D. W., Varadhan, S. R. S.: *Diffusion processes with continuous coefficients, Part II.* Commun. Pure Appl. Math. *22* (1969), 479–530.

[17] Šofr, B.: *Populárne o počte pravdepodobnosti.* SVTL, Bratislava 1967.

[18] Šolcová, A.: *Fermatův odkaz.* Cahiers du CEFRES *28* (2002), 173–202.

[19] Varadhan, S. R. S., Stroock, D. W.: *Multidimensional diffusion processes.* Springer, New York 1979, 1997, 2006.