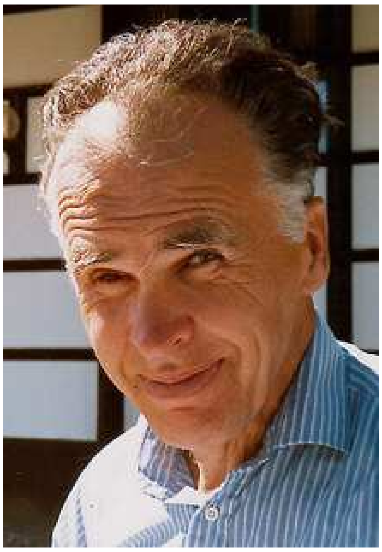
4. Abelovu cenu za rok 2006 získal Lennart Carleson

Michal Křížek

4.1. Úvod

V úterý 23. května 2006 obdržel profesor Lennart Carleson Abelovu cenu za rok 2006 z rukou Jeho Veličenstva norského krále Haralda V. na universitě v Oslo. Podle vyjádření komise pro výběr kandidátů na Abelovu cenu ji dostal za *své hluboké a fundamentální příspěvky k harmonické analýze a k teorii hladkých dynamických systémů.* Pod tímto stručným vyjádřením se skrývá zejména Carlesonův důkaz konvergence Fourierových řad funkcí integrovatelných s kvadrátem a důkaz existence podivných atraktorů Hénonova zobrazení. Podrobněji o tom pojednáme v kapitolách 4.3 a 4.4.



Lennart Carleson

4.2. Kdo je Lennart Carleson?

Lennart Axel Edvard Carleson se narodil 18. března 1928 ve Stockholmu. Studoval na univerzitě v Uppsale, kde získal doktorát pod vedením známého švédského matematika Arne Beurlinga. V období 1950–1951 Carleson působil na Harvardově univerzitě jako postdoktorand. V pouhých 26 letech se stal profesorem na univerzitě ve Stockholmu. O rok později byl jmenován profesorem v Uppsale a později byl též profesorem na kalifornské univerzitě v Los Angeles a v Královském technologickém institutu ve Stockholmu (viz [16]).

V období 1968–84 byl ředitelem Mittag-Lefflerova institutu v Djursholmu na severním okraji Stockholmu. Významný švédský matematik Gösta Mittag-Leffler (1846–1927) nechal postavit tuto majestátní budovu na konci 19. století jako rezidenci, knihovnu a místo, kde se mohla scházet kulturní a akademická elita. Carleson záhy objevil duchovní potenciál tohoto místa a zorganizoval financování a založení Mittag-Lefflerova institutu tak, jak jej dnes zná mezinárodní matematická komunita, tj. jako matematické centrum, kde se setkávají specialisté z celého světa na kratší či střednědobé pobyty.

Od roku 1956 Carleson působil 23 let ve funkci vedoucího redaktora časopisu *Acta Mathematica*, který má dlouholetou historii spojenou s Mittag-Lefflerovým institutem. Velmi se věnoval popularizaci matematiky ve Švédsku a vyučování matematice. Je autorem knihy: *Mathematics of Our Time.* Vychoval 26 Ph.D. studentů, z nichž mnozí jsou dnes již profesoři. V letech 1978–82 byl prezidentem Mezinárodní matematické unie. Tvrdě pracoval na tom, aby také Čína byla zastoupena v unii, což bylo v tehdejší době politicky dosti obtížné.

Carleson byl třikrát pozván jako hostující přednášející na Mezinárodní matematický kongres, z toho jednou měl plenární přednášku, což se považuje za jedno z nejvyšších ocenění v mezinárodní matematické komunitě. Obdržel čestný doktorát na několika univerzitách a byl zvolen členem korespondentem řady akademií a učených společností (mj. Norwegian Academy of Science and Letters, Royal Norwegian Society of Sciences and Letters). Během svého života získal celou řadu význačných ocenění za svou práci, např. v roce 1984 Steelovu cenu Americké matematické společnosti, v roce 1994 Wolfovu cenu, v roce 2002 Lomonosovovu zlatou medaili Ruské akademie věd a v roce 2003 Sylvestrovu medaili Královské společnosti v Londýně.

Podívejme se nyní stručně na matematickou formulaci dvou nejdůležitějších Carlesonových výsledků.

4.3. Konvergence Fourierových řad

Problém, který Carleson vyřešil, spadá do oblasti harmonické analýzy, jejíž základy položil francouzský matematik Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) kolem roku 1807. Jde o to, zda libovolnou periodickou funkci s periodou 2π lze vyjádřit jako nekonečnou sumu funkcí $\sin mx$ a $\cos mx$ s vhodnými koeficienty, kde m jsou nezáporná čísla. Fourier byl však ve svých formulacích dosti vágní. Kolem roku 1915 (viz [6, odst. 10.4.5]) problém přesně zformuloval ruský matematik Nikolaj N. Luzin (1883–1950), ale nebyl schopen jej dokázat. Po něm byl nazván *Luzinovou domněnkou.* Více o její historii lze najít v PMFA v článku F. Štěpánka [14, s. 126–127]. V roce 1966 Luzinovu domněnku kladně vyřešil L. Carleson – viz věta uvedená níže. Nejprve si zavedeme některé pojmy.

Nechť f je reálná lebesgueovsky integrovatelná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[0, 2\pi]$ a m je celé číslo. Pak $m$tý Fourierův koeficient $\hat{f}(m)$ funkce $f = f(x)$ a $n$tý částečný součet s_n Fourierovy řady funkce f (vzhledem k systému $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$) jsou definovány takto:

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\mathrm{d}t, \quad s_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} \hat{f}(m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}.$$

Označíme-li

$$a_m = 2\mathrm{Re}\hat{f}(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \, \mathrm{d}t,$$
$$b_m = 2\mathrm{Im}\hat{f}(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin mt \, \mathrm{d}t,$$

pak $\hat{f}(m) = (a_m - \mathrm{i}b_m)/2$ a částečný součet $s_n(x)$ můžeme zapsat v reálném tvaru

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Luzinovu domněnku dokázal Carleson v práci [5]:

Věta. *Nechť f je reálná funkce na intervalu $[0, 2\pi]$, která je lebesgueovsky integrovatelná s kvadrátem. Pak s_n konverguje k f pro $n \to \infty$ skoro všude.*

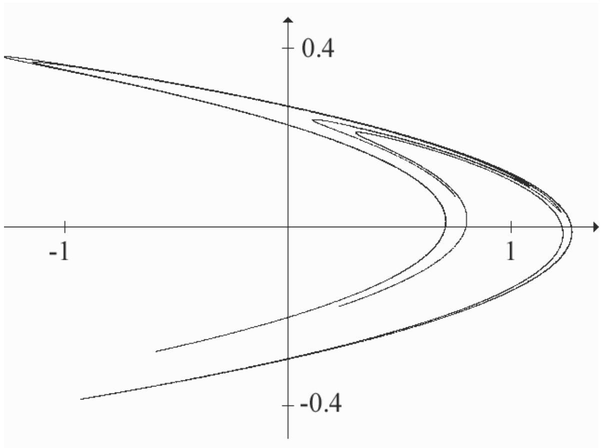
Tato věta byla později zobecněna Richardem A. Huntem na funkce integrovatelné s p-tou mocninou pro $p > 1$ – tzv. Carlesonova-Huntova věta (viz [14, s. 127]).

Fourierovy trigonometrické řady patří k základům matematické analýzy. O historii těchto řad je stručně pojednáno v [6]. Od svého objevu jsou využívány při studiu a popisu periodických dějů, např. kmitání v mechanice a elektrotechnice. Používají se ale i při řešení úloh, ve kterých a priori nejde o periodické jevy. Tak je tomu např. v [15] při rozpoznávání tvarů předmětů pomocí tzv. Fourierových deskriptorů. V [12, kap. 11] je zase řešení trojrozměrné okrajové eliptické úlohy na osově symetrické oblasti převedeno fourierovskou metodou konečných prvků na řešení posloupnosti dvojrozměrných úloh, které se pak řeší standardní metodou konečných prvků.

Na závěr této kapitoly ještě připomeňme, že bez Fourierovy analýzy bychom dnes neměli např. moderní automobily, televizi, výškové budovy, formáty JPG a MP3 používané v digitálních fotoaparátech, hudebních přehrávačích a v řadě softwarových produktů.

4.4. Existence podivného atraktoru Hénonova zobrazení

V roce 1960 se americký meteorolog Edward Lorenz z Massachusetts Institute of Technology pokoušel předpovídat počasí pomocí primitivního počítače. Svůj diskrétní dynamický model omezil jen na tři parametry (viz [13]). Jednou musel v polovině výpočtu běh programu přerušit. Hodnoty tří mezivýsledků si pečlivě zapsal a druhý den



Obr. 4.1. Hénonův podivný atraktor zobrazení T v oblasti $(-1.3, 1.3) \times (-0.4, 0.4)$.

ve výpočtu pokračoval. Pro jistotu pak celý výpočet zopakoval a překvapivě zjistil, že dostal úplně jiné výsledné hodnoty, než kdyby výpočet nepřerušil. Jak se to mohlo stát? Vždyť rovnice byly stejné a počítač i program se nezměnily. Důkladnou analýzou odhalil, že při zapisování mezivýsledků došlo zaokrouhlování s relativní chybou menší než 0.00001 %. Tato nepatrná změna v jednom kroku však způsobila obrovské změny ve výsledném řešení. Lorenz tak objevil jev, kterému se dnes v meteorologii říká *efekt motýlího křídla*, tj. nepatrné mávnutí křídly motýla v březnu někde v Pekingu může způsobit v srpnu změnu směru hurikánu v Atlantickém oceánu. Nesmírně malá odchylka, která je v každém kroku mírně zvětšována, může tedy vést po mnoha krocích k naprosto nepředvídatelnému stavu.

V roce 1976 francouzský astronom Michel Hénon zjednodušil Lorenzův diskrétní systém jen na dva parametry. Přitom jeho systém měl podobné podivné chování jako Lorenzův systém. Hénon definoval zobrazení T roviny do roviny velice jednoduchým vztahem (viz [10])

$$T(x, y) = (1 + y - 1.4x^2, 0.3x).$$

Vidíme, že první složka funkční hodnoty T je kvadratická funkce, kdežto druhá složka je dokonce lineární. Odpovídající diskrétní dynamický systém pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ je pak dán rovnicemi

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2,$$
$$y_{n+1} = bx_n,$$

kde $a = 1.4$ a $b = 0.3$ jsou hodnoty parametrů, které Hénon původně navrhl.

Bod $(0, 0)$ se pomocí T zobrazí na bod $(1, 0)$, bod $(1, 0)$ se zobrazí na bod $(-0.4, 0.3)$, jenž se dále zobrazí na bod $(1.076, -0.12)$ atd. Příslušné iterace se budou hromadit poblíž tzv. *podivného atraktoru*, tj. množiny, která je znázorněna na obr. 4.1. Budou sice postupně chaoticky „skákat“ na všechny strany (zdánlivě velice nesystematicky), ale stále se budou přibližovat k této množině. Jestliže začneme z bodu $(0, 0.2918)$, dostaneme překvapivě týž atraktor. Pokud ale vystartujeme z bodu $(0, 0.2919)$, odpovídající iterace půjdou velice rychle do nekonečna. Vidíme tedy, že chování i poměrně jednoduchého nelineárního dynamického systému může být značně komplikované.

Pro libovolné reálné parametry a a b nazveme funkci T definovanou vztahem $T(x, y) = (1 + y - ax^2, bx)$ *Hénonovým zobrazením.* Snadno lze ověřit, že T má dva pevné body pro $a \neq 0$:

$$x_n = \frac{1}{2a}\left(b - 1 \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}\right),$$
$$y_n = bx_n.$$

tj. body, pro něž $x_{n+1} = x_n$ a současně $y_{n+1} = y_n$. Pro $a = 1.4$ a $b = 0.3$ má jeden z těchto pevných bodů souřadnice $x_n \doteq 0.63135$ a $y_n \doteq 0.18941$ a druhý $x_n \doteq -1.13135$ a $y_n \doteq -0.33941$. Oba pevné body jsou ale nestabilní, neboť libovolně malá perturbace odkloní příslušné iterace k podivnému atraktoru.[1]

Carleson společně se svým krajanem Benedicksem dokázali jako první existenci podivného atraktoru pro Hénonovo zobrazení a jeho fraktální charakter (viz [1]). Tento atraktor má napříč „trajektorií z obr. 4.1“ strukturu jako Cantorova množina. Numerické testy ukazují, že jeho Hausdorffova dimenze je 1.26 ± 0.003. S populárním výkladem o neceločíselné dimenzi se může čtenář seznámit v článku Jiřího Fialy [9].

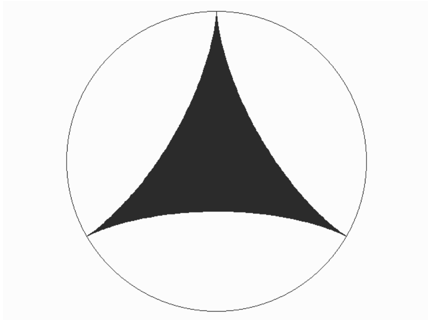
4.5. Závěrečné poznámky

Lennart Carleson přispěl k řešení mnoha dalších problémů. V roce 1917 japonský matematik Sôichi Kakeya zformuloval následující úlohu. Namočme jehlu do inkoustu a položme ji na list papíru. Jehlu je třeba otočit o 180° aniž bychom ji nadzvedli. Přitom jí můžeme jakkoliv posunovat dopředu i dozadu tak, jako když se snažíme zaparkovat auto. Navíc předpokládáme, že jehla má nulovou tloušťku. Otázka zní: *Jak velká je obarvená plocha a jaký je nejlepší dolní odhad velikosti této plochy?*

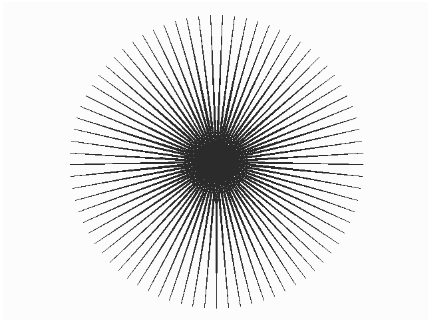
Můžeme si rovněž klást otázky: *Jak posunovat a otáčet jehlou tak, aby obarvená plocha byla minimální? Existuje vůbec taková plocha o minimálním obsahu?* Uvidíme, že na poslední dvě otázky existuje negativní odpověď.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jehla má délku 1. Pokud bychom jehlu otočili o 180° kolem její špičky, měla by obarvená plocha zřejmě velikost $\pi/2 \doteq 1.57$. Pokud bychom jí rotovali kolem jejího středu, získáme plochu o poloviční velikosti $\pi/4 \doteq 0.78$. To ovšem jistě není nejmenší plocha, protože jehlu můžeme také posouvat a otáčet o 180° uvnitř rovnostranného trojúhelníka s jednotkovou výškou a plochou $1/\sqrt{3} \doteq 0.58$. Ještě menší plochu dostaneme, když se s jehlou budeme pohybovat uvnitř Steinerovy hypocykloidy, tj. křivky, kterou opisuje bod na kružnici o poloměru $1/4$, jež se kotálí zevnitř po obvodu kružnice o poloměru $3/4$. Tímto způsobem lze získat plochu o obsahu přibližně 0.39, o které se Kakeya domníval, že je minimální (viz obr. 4.2). V roce 1928 ale ruský matematik Abram S. Bezikovič (1891–1970) překvapivě dokázal,

[1] Již před 100 lety se francouzský matematik Pierre Fatou [7] zabýval hledáním pevných bodů zobrazení T (viz též [8]). Složky tohoto zobrazení mohly být dokonce racionální funkce. Také Gaston Julia [11] studoval množiny všech počátečních podmínek, pro něž je posloupnost (x_n, y_n) omezená. Tehdy ale nebyly k dispozici žádné elektronické počítače, které by umožňovaly nakreslit příslušné fraktální množiny.



Obr. 4.2. Černě je obarvena oblast ohraničená Steinerovou hypocykloidou uvnitř kružnice o poloměru 3/4.



Obr. 4.3. Plocha složená z mnoha dlouhých a úzkých trojúhelníků.

že obarvenou plochu můžeme udělat libovolně malou (viz [2, 3]). Jeho plocha se skládá z velkého množství úzkých trojúhelníků podobných jehličkám na vánočním stromečku (viz obr. 4.3).

Carleson a jeho student Per Sjölin se zabývali zobecněním této úlohy, což později použili v teorii Fourierových multiplikátorů jako standardní prostředek.

Další japonský matematik S. Kakutani na počátku 40. let minulého století zformuloval tzv. problém koróny (angl. corona problem), který se týká jisté třídy omezených analytických funkcí definovaných na jednotkovém kruhu v komplexní rovině. Otázka zní, co lze říci o chování těchto funkcí na hranici, jestliže víme, jak se chovají uvnitř kruhu. Jde tedy o čistě matematický problém, i když slovo koróna běžně označuje prstenec světla, který je vidět kolem Slunce při jeho úplném zatmění. Carleson problém koróny vyřešil v článku [4] z roku 1962. Zavádí zde speciální míru, která byla po něm později nazvána *Carlesonova míra.* Dnes se běžně používá v komplexní i harmonické analýze.

Komise pro výběr kandidátů na Abelovu cenu tedy právem ocenila Carlesonovy zásluhy o rozvoj matematiky, jeho široký záběr i organizační schopnosti. Z jejích závěrů citujme alespoň tuto větu: *Lennart Carleson is a brilliant scientist with a broad vision for mathematics and for the role of mathematics in the global community.*

L i t e r a t u r a

[1] BENEDICKS, M., CARLESON, L.: *The dynamics of the Hénon map.* Ann. of Math. *133* (1991), 73–169.

[2] BESICOVITCH, A. S.: *On Kakeya's problem and a similar one.* Math. Z. *27* (1927), 312–320.

[3] BESICOVITCH, A. S.: *The Kakeya problem.* Amer. Math. Mothly *70* (1963), 697–706.

[4] CARLESON, L.: *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem.* Ann. of Math. *76* (1962), 547–559.

[5] CARLESON, L.: *On convergence and growth of partial sums of Fourier series.* Acta Math. *116* (1966), 135–157.

[6] EDWARDS, R. E.: *Fourier series. A modern introduction, vol. 1.* Springer-Verlag, New York 1979.

[7] FATOU, P.: *Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles.* C. R. Acad. Sci. Paris *143* (1906), 546–548.

[8] FATOU, P.: *Sur les équations fonctionnelles.* Bull. Soc. Math. France *47* (1919), 161–271, *48* (1920), 33–94, 208–314.

[9] FIALA, J.: *Jedenapůlrozměrný prostor.* Vesmír *84* (2005), 734–739.

[10] HÉNON, M.: *A two dimensional mapping with a strange attractor.* Comm. Math. Phys. *50* (1976), 69–77.

[11] JULIA, G.: *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles.* J. Math. Pures Appl. *4 (7)*, (1918), 47–245.

[12] KOUKAL, S., KŘÍŽEK, M., POTŮČEK, R.: *Fourierovy trigonometrické řady a metoda konečných prvků v komplexním oboru.* Academia, Praha 2002.

[13] LORENZ, E. N.: *Deterministic non-periodic flow.* J. Atmos. Sci. *20* (1963), 130–141.

[14] ŠTĚPÁNEK, F.: *130 let divergentních trigonometrických řad (2. část).* PMFA *49* (2004), 122–128.

[15] ZAHN, C. T., ROSKIES, R. Z.: *Fourier description for plane closed curves.* IEEE Trans. Comput. *C-21* (1972), 269–281.

[16] *Carleson receives 2006 Abel Prize.* Notices Amer. Math. Soc. *53* (2006), 679–680.