2. Atiyah a Singer získali Abelovu cenu za rok 2004

Michal Křížek, Martin Markl

2.1. Úvod

Norská Akademie věd se rozhodla udělit Abelovu cenu za rok 2004 Siru Michaelu Francisi Atiyahovi z Uviversity of Edinburgh a Isadoru M. Singerovi z Massachusetts Institute of Technology. Cenu získali „*za objev a důkaz věty o indexu, která uvádí do souvislosti topologii, geometrii a analýzu, a za svou významnou roli při budování nových mostů mezi matematikou a teoretickou fyzikou*“. V komisi pro výběr kandidátů na Abelovu cenu za rok 2004 byli David Mumford, Jacob Palis, Erling Størmer (předseda), Gilbert Strang a Don Zagier.

Atiyahova-Singerova věta o indexu je jedním z velkých mezníků matematiky dvacátého století, který hluboce ovlivnil pokrok v nejdůležitějších oblastech topologie, diferenciální geometrie a kvantové teorie pole. Oběma autorům se podařilo společně i individuálně zaplnit mezeru mezi světem čisté matematiky a teoretickou částicovou fyzikou. Ve svých oborech se začali vzájemně obohacovat a jejich spolupráce se

Sir Michael Francis Atiyah   Isadore Manuel Singer stala jednou z nejvíce fascinujících výzkumných činností několika posledních desetiletí. S formulací věty o indexu se seznámíme v kap. 2.4. Atiyah a Singer společně s Patodim zavedli v [2] invariant, kterému se dnes běžně říká Atiyahův-Patodiho-Singerův η invariant.

Atiyah a Singer se původně zabývali různými oblastmi matematiky: Atiyah se věnoval algebraické geometrii a Singer matematické analýze. Jejich hlavní výsledky v těchto oborech se též vysoce cení. Jako příklad uveďme Atiyahovu ranou práci o meromorfních formách na algebraických varietách a jeho článek [1] o Thomových komplexech z roku 1961. Atiyahovo pionýrské dílo s Friedrichem Hirzebruchem o rozvoji topologické obdoby Grothendieckovy K-teorie[1] mělo řadu aplikací v klasických problémech topologie a později se ukázalo, že je těsně spjato s větou o indexu.

Singer společně s Richardem V. Kadisonem inicioval výzkum v oblasti trojúhelníkových operátorových algeber (angl. triangular operator algebras). Jeho jméno je spojováno i s Ambroseovou-Singerovou větou o holonomii a Rayovým-Singerovým torzním invariantem. Společně s Henrym P. McKeanem upozornil Singer na důležitou geometrickou informaci ukrytou v tzv. „tepelných jádrech"[2] (angl. heat kernels). I tento objev měl velký dopad.

2.2. Stručná biografie Michaela F. Atiyaha

Michael F. Atiyah[3] se narodil v Londýně v roce 1929. Titul B.A. a později doktorát získal na Trinity College v Cambridge. Podstatnou část své akademické dráhy strávil v Cambridge a Oxfordu. Zastával mnoho význačných funkcí, mezi jinými vysoce prestižní Savilian Chair of Geometry v Oxfordu a Master of Trinity College v Cambridge. Byl také profesorem matematiky v Institute for Advanced Study v Princetonu.

Během svého působení v Oxfordu a Cambridge se Atiyah stal představitelem nové generace mladých matematiků. Byl vedoucí osobností při budování Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences v Cambridge a stal se jeho prvním ředitelem. Nyní je Atiyah v důchodu a je čestným profesorem na University of Edinburgh.

Během své kariéry obdržel Atiyah mnohá ocenění, včetně Fieldsovy medaile (1966). Byl zvolen řádným členem Královské společnosti v Londýně v roce 1962, když mu bylo pouhých 32 let. Od této společnosti získal Royal Medal v r. 1968 a Copley Medal v r. 1988. Prezidentem Royal Society byl v letech 1990–1995 a prezidentem London Mathematical Society v letech 1974–1976. Hrál též významnou roli při utváření dnešní Evropské matematické společnosti (European Mathematical Society).

Atiyahovou zásluhou byla založena tzv. meziakademická panelová diskuse, která svedla dohromady řadu akademií věd z celého světa. Podnítil také utvoření Association of European Academies (ALLEA). Byl prezidentem pugwashských konferencí (On Science and a World Affairs).

Z mnoha cen, které mu byly uděleny, jmenujme Feltrinelli Prize (Accademia Nazzionale dei Lincei, 1981) a King Faisal International Prize for Science (1987). V roce 1983 byl Atiyah pasován na rytíře a v roce 1992 byl zvolen členem Order of Merit.

---

[1] K-teorie je moderní forma teorie reprezentací grup, viz PMFA *48* (2003), 177–192.

[2] Tato jádra jsou charakterizována fundamentálním řešením rovnice pro vedení tepla.

[3] S názory M. Atiyaha na matematiku ve 20. století je možno se seznámit v článcích PMFA *31* (1986), 154–168 a *48* (2003), 177–192.

2.3. Stručná biografie Isadora M. Singera

Isadore Manuel Singer se narodil v roce 1924 v Detroitu a v roce 1944 ukončil studia na University of Michigan. Po získání doktorátu (Ph.D.) na University of Chicago v roce 1950, přešel na Massachusetts Institute of Technology (MIT). Zde strávil většinu svého profesionálního života a v současné době je zde profesorem (Institute Professor).

Singer je členem American Academy of Arts and Sciences, American Philosphical Society a National Academy of Sciences (NAS). Působil v Radě NAS, v Řídicí správě Úřadu pro národní výzkum (Governing Board of the National Research Council) a ve Vědecké radě Bílého domu (White House Science Council). V letech 1970–1972 byl viceprezidentem Americké matematické společnosti (viz Notices AMS *51* (2004), 649).

V roce 1992 získal Singer cenu Americké matematické společnosti Award for Distinguished Public Service. V odůvodnění se uznává „vynikající příspěvek k jeho profesi, vědě v širším smyslu a veřejným věcem."

Mezi další jeho ocenění patří Böcher Prize (1969) a Steele Prize (2000) za celoživotní úspěchy. Obě dostal od Americké matematické společnosti. Dále obdržel Eugene Wigner Medal (1988) a National Medal of Science (1983).

V poděkování po získání Steelovy Ceny (Notices AMS, April 2000) Singer prohlásil: „Školní třída je pro mě důležitý protějšek výzkumu. Moc se mi líbilo učit postgraduální studenty na všech stupních. Od mnohých z nich jsem se naučil více, než jsem je naučil já." Singerovými vynikajícími učebními texty byly inspirovány generace matematiků.

2.4. Atiyahova-Singerova věta o indexu

Věta o indexu pojednává o eliptických diferenciálních operátorech. Zopakujme nejdříve základní definice. *Diferenciální operátor* na prostoru $\mathcal{C}(U)$ hladkých komplexních funkcí na otevřené podmnožině U eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ se souřadnicemi $(x_1, \ldots, x_n)$ je operátor tvaru

$$D = \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} F_{i_1,\ldots,i_n}(x_1,\ldots,x_n) \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}, \tag{2.1}$$

kde pouze konečně mnoho koeficientů $F_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathcal{C}(U)$ je nenulových. Jinými slovy, D náleží okruhu $\mathcal{C}(U)[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$ polynomů v proměnných $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ s koeficienty v $\mathcal{C}(U)$. *Řád operátoru* D je číslo

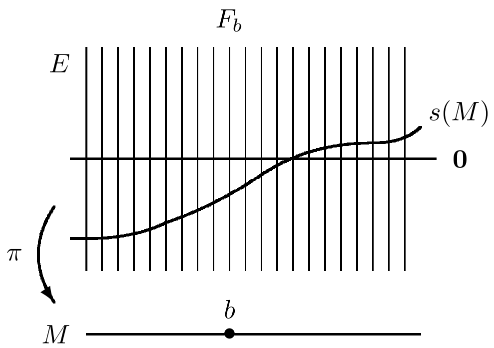
$$\mathrm{rk}(D) := \max\{i_1 + \cdots + i_n \mid F_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0\}.$$

Symbol operátoru D řádu k je polynom $\sigma(D) \in \mathcal{C}(U)[t_1, \ldots, t_n]$ definovaný předpisem

$$\sigma(D)(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) := \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} F_{i_1,\ldots,i_n}(x_1,\ldots,x_n) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}.$$

Operátor D je *eliptický*, jestliže $\sigma(D)(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) \neq 0$, kdykoliv $t_a \neq 0$ pro nějaké $a \in \{1,\ldots,n\}$. Příkladem je laplacián

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{2.2}$$



Obr. 2.1. Představa fíbrace jako spojité rodiny vektorových prostorů.

jehož symbol je $t_1^2 + \cdots + t_n^2$. Naproti tomu vlnový operátor

$$\Box := -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{2.3}$$

eliptický není.

Věta o indexu se ovšem týká obecnějších diferenciálních operátorů pusobících na řezech hladkých vektorových fibrací.[4] Opět připomeňme základní pojmy. *Komplexní vektorová fibrace* (krátce vektorová fibrace) je zobrazení topologických prostorů $\pi : E \to M$ takové, že $F_b := \pi^{-1}(b)$ (tzn. *fíbr* nad bodem b) je pro každé $b \in M$ konečněrozměrný komplexní vektorový prostor. Dále požadujeme *lokální trivialitu*, tedy aby pro každý bod $b \in M$ existovalo otevřené okolí $U \ni b$, číslo k a homeomorfizmus

$$\phi : U \times \mathbb{C}^k \to \pi^{-1}(U)$$

takový, že

(i) $(\pi\phi)(x, v) = x$ pro každé $(x, v) \in U \times \mathbb{C}^k$ a

(ii) pro každé $x \in U$ je zobrazení $v \mapsto \phi(x, v)$ izomorfizmem komplexních vektorových prostorů $\mathbb{C}^k$ a F_x.

Podmínka (i) vyjadřuje komutativitu diagramu

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{C}^k \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[d, "p_1"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "="] & U \arrow[r, hook] & M \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

v němž p_1 je projekce na první faktor. Prostory M, resp. E, se nazývají *báze*, resp. *totální prostor* fíbrace $\pi : E \to M$. Na zobrazení π se budeme odkazovat jako na *fíbrující zobrazení*.

[4] Anglicky *smooth vector bundle*.

Volně řečeno, vektorová fíbrace je rodina vektorových prostorů $\{F_b\}_{b\in M}$ spojitě parametrizovaná bází M, což schematicky vyjadřuje obrázek 2.1. Příklad fíbrace je samozřejmě projekce $p_1 : U\times\mathbb{C}^k \to U$ na otevřenou podmnožinu $U \subset \mathbb{R}^n$. Tato tzv. *triviální fíbrace* má bázi U a totální prostor $U\times\mathbb{C}^k$.

Restrikce vektorové fíbrace $\pi : E \to M$ na podmnožinu $U \subset M$ je vektorová fíbrace $\pi : E|_U \to U$ s bází U a totálním prostorem $E|_U := \pi^{-1}(U)$. Diagram (2.4) říká, že restrikce vektorové fíbrace na dostatečně malé otevřené podmnožiny báze jsou triviální.

Vektorová fíbrace $\pi : E \to M$ je *hladká*, jestliže π je hladké zobrazení hladkých variet.[5] V dalším textu budeme hladkost předpokládat automaticky. *Řez* fíbrace $\pi : E \to M$ je pravá inverze fíbrujícího zobrazení, tedy hladké zobrazení $s : M \to E$, pro něž πs je identita. Řez s je určen svým grafem $s(M)$ vloženým do totálního prostoru E, viz opět obrázek 2.1. Množina $\Gamma(E, M)$ všech řezů je komplexní vektorový prostor s nulovým elementem $\mathbf{0}$, což je řez pro který $\mathbf{0}(b) := 0 \in F_b$ pro všechna $b \in M$. Součet $s' + s''$ řezů s' a s'' je definován ‚po fíbrech', tedy vzorcem $(s' + s'')(b) := s'(b) + s''(b)$, $b \in M$.

Snadno ověříme, že prostor řezů $\Gamma(U\times\mathbb{C}^k, U)$ triviální fíbrace tvoří k-tice $(f_1, \ldots, f_k)$ funkcí z $\mathcal{C}(U)$. Speciálně tedy $\Gamma(U\times\mathbb{C}, U) = \mathcal{C}(U)$. Operátory Δ a $\Box$ připomenuté v (2.2), resp. (2.3) můžeme nyní chápat jako lineární zobrazení $\Gamma(U\times\mathbb{C}, U) \to \Gamma(U\times\mathbb{C}, U)$.

Na vektorové fibrace lze ‚po fíbrech' aplikovat stejné operace jako na vektorové prostory. Každá vektorová fíbrace $E \to M$ má proto svuj *duál* $E^* \to M$, jehož fíbr F_b^* nad $b \in M$ je lineární duál fíbru F_b puvodní fíbrace.[6] Podobně můžeme utvořit *součet*

$$E' \oplus E'' \to B \tag{2.5}$$

fíbrací $E' \to B$ a $E'' \to B$ se stejnou bází B. Fíbry součtu (2.5) tvoří přímé součty $F_b' \oplus F_b''$ fíbrů jednotlivých konstituentů.

Ve formulaci věty o indexu upotřebíme i následující konstrukci. Pro hladké zobrazení $p : B \to M$ a fíbraci $\pi : E \to M$ definujeme *indukovanou* fíbraci[7] $p^*E \to M$ fíbrace π podél zobrazení p jako fíbraci s totálním prostorem

$$p^*E := \big\{(b, e) \in B\times E \mid p(b) = \pi(e)\big\}.$$

Fíbrující zobrazení $p^*E \to B$ je projekce na první faktor. Indukovaná fíbrace tvoří komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} p^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

s obvyklou univerzální vlastností kategoriálních kartézských čtverců.

Vraťme se nyní k definici diferenciálních operátorů v potřebné obecnosti. Uvažujme vektorové fibrace $\pi' : E' \to M$ a $\pi'' : E'' \to M$ nad stejnou bází. Diferenciální

[5]O hladkých varietách pojednáme též v kap. 9.3.

[6]Pokud není třeba, vynecháváme symbol pro fíbrující zobrazení.

[7]Anglicky *pullback*.

operátor je lineární zobrazení $D : \Gamma(E', M) \to \Gamma(E'', M)$ lokálně reprezentované maticí diferenciálních operátorů (2.1). Tím rozumíme toto. Víme, že vektorové fibrace jsou lokálně modelovány triviálními fibracemi. Restrikce prostorů řezů na dostatečně malé otevřené podmnožiny báze M jsou tedy tvořeny k-ticemi (resp. l-ticemi) hladkých komplexních funkcí z $\mathcal{C}(U)$ pro nějaká k a l. Vyžadujeme, aby na těchto restrikcích byl operátor D dán předpisem

$$D(f_1, \ldots, f_k) = \big(\sum_{1 \le i \le k} D_1^i(f_i), \ldots, \sum_{1 \le i \le k} D_l^i(f_i) \big),$$

kde D_j^i jsou ‚klasické' diferenciální operátory jako v (2.1). Takový operátor D se nazývá eliptický, jestliže je příslušná matice symbolů

$$\big| \sigma(D_j^i)(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) \big|, \ 1 \le i \le k, \ 1 \le j \le l,$$

regulární, kdykoliv $(t_1, \ldots, t_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Elipticita nutně implikuje $k = l$.

Příklad 1. Pro $i = 0, 1, 2, \ldots$ označme $\bigwedge_{\mathbb{C}}^i(M)$ komplexifikovanou i-tou vnější (Grassmannovu) mocninu kotečné fibrace T^*M variety M.[8] Její řezy

$$\Omega^i(M) := \Gamma\big(\bigwedge\nolimits_{\mathbb{C}}^i(M), M\big)$$

jsou (komplexní) *de Rhamovy formy* stupně i. Ty, spolu s *de Rhamovým diferenciálem* $d^i : \Omega^i(M) \to \Omega^{i+1}(M)$, tvoří (komplexifikovaný) de Rhamův komplex $(\Omega(M), d)$ variety M. Jeho kohomologie $H\big(\Omega(M), d\big)$ jsou shodné s kohomologiemi $H(M; \mathbb{C})$ variety M s komplexními koeficienty.

Pomocí Riemannovy metriky lze sestrojit operátor $d^{i^*} : \Omega^{i+1}(M) \to \Omega^i(M)$ *sdružený* k operátoru d^i. Operátory d^i a d^{i^*} jsou příklady diferenciálních operátorů na řezech fibrace $\bigwedge_{\mathbb{C}}^i(M)$ s hodnotami v řezech fibrace $\bigwedge_{\mathbb{C}}^{i+1}(M)$, resp. $\bigwedge_{\mathbb{C}}^{i-1}(M)$. Označme

$$E' := \bigoplus_{j \ge 0} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{C}}^{2j}(M), \quad \text{resp. } E'' := \bigoplus_{j \ge 0} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{C}}^{2j+1}(M),$$

přímé součty sudých, resp. lichých vnějších mocnin kotečné fibrace. Operátory d^i a d^{i^*} se skládají do operátorů

$$d := \sum_{j \ge 0} d^{2j} : \Gamma(E', M) \to \Gamma(E'', M) \ \text{ a } d^* := \sum_{j \ge 0} d^{2j+1^*} : \Gamma(E', M) \to \Gamma(E'', M),$$

jejichž součet $D := d + d^* : \Gamma(E', M) \to \Gamma(E'', M)$ je eliptický diferenciální operátor.

Dále se soustředíme na vektorové fibrace nad *kompaktními orientovanými uzavřenými* varietami.[9] Ukazuje se, že eliptické operátory jsou *Fredholmovy*, tedy mají konečněrozměrná jádra i kojádra.[10] Můžeme tedy definovat *analytický index* operátoru D jako

$$Ind_A(D) := \dim Ker(D) - \dim coKer(D), \tag{2.6}$$

kde $Ker(D)$, resp. $coKer(D)$, značí jádro, resp. kojádro, lineárního zobrazení D.

[8] Velmi snadno se ověří, že $\bigwedge_{\mathbb{C}}^i(M) = 0$ pro $i > \dim(M)$.

[9] Význam těchto pojmů i nádherný úvod do charakteristických tříd čtenář nalezne v [3].

[10] Kojádro lineárního zobrazení $L : A \to B$ je podíl $B/L(A)$.

Druhým pojmem figurujícím ve větě o indexu je *topologický index* operátoru D definovaný vzorcem

$$Ind_T(D) := ch(D)\mathscr{T}(M)[M]. \tag{2.7}$$

Jeho úplné vysvětlení přesahuje možnosti tohoto článku, proto jenom naznačíme definice jednotlivých členů bez nároků na úplnou přesnost, na detaily odkazujeme čtenáře k [4]. Začněmě s veličinou $ch(D)$.

Množina všech (nikoliv nutně hladkých) vektorových fíbrací s danou bází B je komutativní pologrupa[11] $\mathcal{E}(B)$ s operací + danou součtem (2.5) a neutrálním prvkem 0 tvořeným identitou $B \to B$. Jako každou komutativní pologrupu lze $\mathcal{E}(B)$ zúplnit Grothendieckovou konstrukcí do komutativní grupy $K(X)$. Tím získáme (komplexní) *K-grupu* prostoru X.

Hladká varieta M má *tečnou fíbraci* $TM \to M$ a duální *kotečnou fíbraci* $p: T^*M \to M$. V totálním prostoru kotečné fíbrace vezměme podprostor $B(M) \subset T^*M$ vektorů délky nepřesahující 1 a sestrojme indukované fíbrace

$$\begin{array}{ccc} p^*E' & \longrightarrow & E' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ B(M) & \xrightarrow{p} & M \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{ccc} p^*E'' & \longrightarrow & E'' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi''} \\ B(M) & \xrightarrow{p} & M. \end{array}$$

Ukazuje se, že symbol $\sigma(D)$ operátoru D lze interpretovat jako zobrazení

$$\sigma(D) : p^*E'|_{S(M)} \to p^*E''|_{S(M)} \tag{2.8}$$

restrikcí indukovaných fíbrací p^*E', resp. p^*E'' na podprostor $S(M) \subset B(M)$ vektorů délky 1. Operátor D je eliptický, právě když je toto zobrazení isomorfismus. Indukované fíbrace p^*E' resp. p^*E'' náleží pologrupě $\mathcal{E}\big(B(M)\big)$, můžeme proto vzít jejich rozdíl

$$p^*E' - p^*E'' \in K\big(B(M)\big).$$

Lze ukázat, že s použitím izomorfizmu (2.8) určí prvek $p^*E' - p^*E''$ *rozdílový element* $d(D) \in K\big(B(M)/S(M)\big)$ v K-grupě podílu $B(M)/S(M)$.

Uveďme následující posloupnost tvořenou standardními objekty algebraické topologie:

$$K\big(B(M)/S(M)\big) \xrightarrow{ch} H\big(B(M)/S(M);\mathbb{Q}\big) \xrightarrow{t} H(M;\mathbb{Q}). \tag{2.9}$$

První člen je již zmíněná K-grupa podílu $B(M)/S(M)$, druhý a třetí člen jsou racionální kohomologické okruhy podílu $B(M)/S(M)$, resp. variety M.

Zobrazení ch je *Chernuv charakter*, což je určitý multiplikativní homomorfizmus z komplexní K-teorie do racionálních kohomologií definovaný s použitím Chernových tříd komplexních vektorových fíbrací. Zobrazení t je *Thomuv izomorfizmus* kotečné fíbrace T^*M. Faktor $ch(D)$ v (2.7) je obraz prvku $d(D)$ kompozicí zobrazení v (2.9), tedy

$$ch(D) := t\big(ch(d(D))\big) \in H^*(M;\mathbb{Q}).$$

[11] To je množina s komutativní asociativní operací + a neutrálním prvkem 0.

Symbol $\mathscr{T}(M)$ v (2.7) značí *Todduv rod* variety M, tedy mocninou řadu

$$\mathscr{T}(M) = 1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2 + c_1^2}{12} + \frac{c_1 c_2}{24} + \frac{-c_1^4 + 4c_2c_1^2 + 3c_2^2 + c_3c_1 - c_4}{720} + \dots \in H(M;\mathbb{Q}),$$

ve které $c_1, c_2, c_3, \ldots \in H^*(M;\mathbb{Q})$ jsou Chernovy třídy komplexifikované tečné fíbrace variety M. Topologický index (2.7) je racionální číslo dané evaluací součinu $ch(D)\mathscr{T}(M) \in H(M;\mathbb{Q})$ na fundamentální třídě $[M]$ variety M. Nyní již máme všechny potřebné definice.

Věta o indexu. *Analytický index eliptického diferenciálního operátoru na kompaktní hladké orientované uzavřené varietě je roven jeho topologickemu indexu, tedy*

$$Ind_A(D) = Ind_T(D).$$

Hloubka věty je v porovnávání veličin rozdílného charakteru. Zatímco analytický index je celé číslo sestrojené prostředky funkcionální analýzy, topologický index je geometrická veličina. Okamžitý dusledek je, že $Ind_T(D)$ je také celé číslo, zatímco jeho definice říká pouze, že je to číslo racionální – povšimněmě si, že vzorec pro Todduv rod obsahuje racionální koeficienty![12] To je samo o sobě velice silný výsledek.

Ani analytický, ani topologický index nemusí být definován, pokud operátor D není eliptický. V takovém případě nemusí být rozdíl (2.6) definující $Ind_A(D)$ konečný a (protože (2.8) není izomorfizmus) nelze sestrojit ani rozdílový element $d(D)$ potřebný pro definici $Ind_T(D)$.

Příklad 2. Analytický index operátoru D z příkladu 1 je roven *Eulerově charakteristice* variety M, tedy

$$Ind_A(D) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(M,\mathbb{Q}).$$

Jeho topologický index získáme evaluací *Eulerovy třídy* $\chi(M)$ tečné fíbrace variety M na její fundamentální třídě $[M]$,

$$Ind_T(D) = \chi(M)[M].$$

Věta o indexu pro operátor D vyjadřuje klasickou Gaussovu-Bonnetovu větu (viz kap. 7.3).

Příklad 3. Na varietě s komplexní strukturou můžeme místo operátoru D z předchozího příkladu vzít operátor $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ pusobící na komplexních formách typu $(0,i)$. Věta o indexu v tomto případě vyústí v Riemannovu-Rochovu větu (viz [4, kap. XIX]).

L i t e r a t u r a

[1] Atiyah, M.: *Thom complexes.* Proc. London Math. Soc. *11* (1961), 291–310.

[2] Atiyah, M. F., Patodi, V. K., Singer, I. M.: *Spectral asymmetry and Riemannian Geometry.* Bull. London Math. Soc. *5* (1973), 229–234.

[3] Milnor, J., Stasheff, J.: *Characteristic classes.* Ann. of Math. Stud., vol. *76*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1974.

[4] Palais, R. S. (ed.): *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.* With contributions by M. F. Atiyah, A. Borel, E. E. Floyd, R. T. Seeley, W. Shih, and R. Solovay. Ann. of Math. Stud., vol. *57*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1965 (ruský překlad Mir, Moskva, 1970).

[12] Stejná poznámka platí i pro Chernuv charakter, jež je v podstatě exponenciání funkcí Chernových tříd.