LÖWIGOVY PRÁCE O FUNKCIONÁLNÍCH ROVNICÍCH

V prosinci roku 1927 obhájil Heinrich Löwig na pražské Německé univerzitě doktorskou disertaci s názvem *Über periodische Differenzengleichungen.* Přestože se práce nedochovala, můžeme o jejím obsahu získat poměrně dobrou představu z krátkého čtyřstránkového výtahu [L1] uveřejněného roku 1930 v časopise Lotos, zejména však ze dvou obsáhlých článků [L2], [L3] otištěných roku 1931 v Acta Mathematica. V úvodu k oběma článkům Löwig píše, že dohromady představují doplněnou a přepracovanou verzi původní doktorské disertace. Přestože se v názvech zmíněných prací objevuje termín „diferenční rovnice“, z pohledu současné matematiky je vhodnější hovořit o funkcionálních rovnicích.

Po tematické stránce navazují Löwigovy práce na dvoudílný článek Émila Picarda nazvaný *Sur une classe des transcendantes nouvelles* a publikovaný rovněž v časopise Acta Mathematica (viz [5], [6]). Picard studoval soustavu funkcionálních rovnic

$$f_k(z+h) = Q_k(f_1(z), \dots, f_n(z)), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

kde $Q_1, \dots, Q_n$ jsou známé a $f_1, \dots, f_n$ neznámé funkce. Tuto soustavu uvažoval v komplexním oboru, tj. z je komplexní proměnná a h je zadané nenulové komplexní číslo. Picard dokázal, že pokud jsou splněny jisté předpoklady, pak pro každé nenulové komplexní číslo ω, které není reálným násobkem h, existují ω-periodická řešení uvedené soustavy. Zobecnil tak pojem eliptické funkce, tj. funkce se dvěma lineárně nezávislými komplexními periodami h a ω.

Hlavním cílem Löwigovy disertace bylo rozšíření Picardových výsledků na případ soustavy

$$f_k(z+h) = Q_k(z, f_1(z), \dots, f_n(z)), \quad k \in \{1, \dots, n\}, \tag{1}$$

kde pravé strany rovnic závisejí nyní nejen na $f_1, \dots, f_n$, ale rovněž na proměnné z. Článek [L2] je zaměřen na lineární funkcionální rovnice, které představují důležitý speciální případ soustavy (1). Navazující práce [L3] pak získané výsledky využívá ke studiu obecné nelineární soustavy (1). V tomto textu stručně shrneme obsah obou Löwigových článků.

1. Lineární rovnice

Práce [L2] je z velké části věnována studiu soustavy lineárních funkcionálních rovnic

$$f_k(z+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l(z) + B_k(z), \quad k \in \{1, \dots, n\}, \tag{2}$$

kde q_{kl}, k, $l \in \{1,\dots,n\}$ a B_k, $k \in \{1,\dots,n\}$, jsou zadané funkce a f_k, $k \in \{1,\dots,n\}$, jsou neznámé funkce. Tato soustava je speciálním případem obecné nelineární soustavy (1). Opět pracujeme v komplexním oboru, tj. z je komplexní proměnná a h je zadané nenulové komplexní číslo. Löwig dále předpokládá, že všechny funkce q_{kl} a B_k jsou ω-periodické, kde ω je nenulové komplexní číslo, které není reálným násobkem h. Hlavní výsledky práce [L2] se týkají existence a jednoznačnosti ω-periodických řešení soustavy (2) a dále existence ω-periodického fundamentálního systému řešení příslušné homogenní soustavy

$$f_k(z+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l(z), \quad k \in \{1,\dots,n\}. \tag{3}$$

Připomeňme nejprve některá fakta z teorie funkcí komplexní proměnné. Je-li dáno nenulové číslo $\omega \in \mathbb{C}$ a dvojice čísel a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, označme

$$T_\omega(a,b) = \left\{ z \in \mathbb{C};\ a < \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\omega}\right) < b \right\}.$$

Tedy $T_1(a,b)$ je rovinný pás ohraničený přímkami $y = a$, $y = b$. Dále platí $z \in T_1(a,b)$ právě tehdy, když $\omega z \in T_\omega(a,b)$, neboli

$$T_\omega(a,b) = \{\omega z;\ z \in T_1(a,b)\}.$$

Odtud je zřejmý geometrický význam $T_\omega(a,b)$; chápeme-li ω jako vektor v komplexní rovině, pak $T_\omega(a,b)$ je rovinný pás ohraničený přímkami rovnoběžnými s ω. V dalším textu budeme připouštět také případy, kdy $a = -\infty$ nebo $b = \infty$. Příslušná množina $T_\omega(a,b)$ pak vyplní polorovinu, případně celou komplexní rovinu. Povšimněme si, že pokud $z \in T_\omega(a,b)$, pak také $z+\omega \in T_\omega(a,b)$; množiny $T_\omega(a,b)$ se proto často vyskytují jako definiční obory ω-periodických funkcí.

Popíšeme nyní analogii klasického Fourierova rozvoje pro ω-periodické holomorfní funkce komplexní proměnné. Uvažujme nejprve holomorfní funkci f, která je definována na množině $T_1(a,b)$ a má periodu 1, tj. $f(z+1) = f(z)$ pro každé $z \in T_1(a,b)$. Pomocí zobrazení $z \mapsto e^{2\pi i z}$ lze funkci f „přenést“ do mezikruží A omezeného kružnicemi se středy v bodě 0 a s poloměry $e^{-2\pi b}$ a $e^{-2\pi a}$. Dostaneme tak funkci g definovanou pro každé $w \in A$, $w = e^{2\pi i z}$ předpisem $g(w) = f(z)$. Tato definice je korektní: Je-li $w = e^{2\pi i z_1} = e^{2\pi i z_2}$, pak $z_1 - z_2$ je celé číslo, a díky 1-periodicitě máme $f(z_1) = f(z_2)$. Protože g je holomorfní v mezikruží A, můžeme ji rozvinout do Laurentovy řady

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n, \quad w \in A,$$

kde c_n jsou vhodná komplexní čísla. Odtud pak získáme

$$f(z) = g(e^{2\pi i z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}, \quad z \in T_1(a,b).$$

Obecněji, každou ω-periodickou holomorfní funkci f definovanou na množině $T_\omega(a,b)$ lze pomocí substituce převést na 1-periodickou funkci f^* definovanou na $T_1(a,b)$ předpisem $f^*(z/\omega) = f(z)$. Použitím předchozího výsledku pak obdržíme vztah

$$f(z) = f^*(z/\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z/\omega}, \quad z \in T_\omega(a,b),$$

což je slibovaná analogie Fourierova rozvoje. Jak uvidíme později, Löwig často předpokládá vyjádření ω-periodické holomorfní funkce právě v tomto tvaru. Čtenáře s hlubším zájmem o Fourierovy řady v komplexním oboru odkazujeme na knihy [2] a [7].

Po této krátké exkurzi se vraťme k Löwigově článku [L2] o lineárních funkcionálních rovnicích a popišme stručně obsah čtyř oddílů, na něž je práce rozdělena. Připomeňme, že h, ω je dvojice nenulových komplexních čísel takových, že $h/\omega \notin \mathbb{R}$. Stejně jako Löwig zaveďme označení

$$\lambda = e^{2\pi i h/\omega}$$

a všimněme si, že z předpokladu $h/\omega \notin \mathbb{R}$ plyne $|\lambda| \neq 1$.

V prvním oddílu jsou dokázána některá pomocná tvrzení. Löwig zde pracuje s Weierstrassovými funkcemi σ a ζ (viz např. [2]) a ukazuje, jak pomocí nich zkonstruovat ω-periodickou funkci f, která je meromorfní v celé komplexní rovině a vyhovuje funkcionální rovnici

$$f(z+h) = tf(z), \tag{4}$$

kde $t \in \mathbb{C}$ je pevně zvolené nenulové číslo. Dále dokazuje, že pokud f je holomorfní funkce splňující (4) a navíc $t \neq \lambda^n$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$, pak f musí být identicky nulová. Nakonec je pomocí funkce σ zkonstruována posloupnost ω-periodických meromorfních funkcí $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, které vyhovují rovnicím

$$f_0(z+h) = tf_0(z), \quad f_k(z+h) = tf_k(z) + kf_{k-1}(z), \ \ k \geq 1. \tag{5}$$

Druhý oddíl je již věnován nehomogenní soustavě lineárních funkcionálních rovnic

$$f_k(z+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l(z) + B_k(z), \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{6}$$

kde q_{kl} a B_k jsou zadané ω-periodické funkce. Předpokládá se, že q_{kl} splňují následující podmínky:

- Existuje kladné číslo R takové, že funkce q_{kl} jsou holomorfní v polorovině určené nerovností $|e^{2\pi i z/\omega}| \leq R$ a lze je rozvinout do řady

$$q_{kl}(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_{kl\alpha} e^{2\pi i \alpha z/\omega}, \quad k, l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Poznamenejme, že pro každé $w \in \mathbb{C}$ je $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$, tj.

$$|e^{2\pi i z/\omega}| = e^{\operatorname{Re}(2\pi i z/\omega)} = e^{-2\pi \operatorname{Im}(z/\omega)}.$$

Nerovnost $|e^{2\pi i z/\omega}| \leq R$ tedy popisuje polorovinu $\operatorname{Im}(z/\omega) \geq -\frac{\ln R}{2\pi}$.

- $\det\{q_{kl0}\}_{k,l=1}^n \neq 0$.
- Existuje kladné číslo $r \leq R$ takové, že

$$\det\{q_{kl}(z)\}_{k,l=1}^n \neq 0$$

pro všechna z v polorovině určené nerovností $|e^{2\pi i z/\omega}| \leq r$.

O funkcích B_k se zpočátku předpokládá, že vyhovují následující podmínce, která bude později zeslabena:

- Existuje kladné číslo ρ takové, že funkce B_k jsou holomorfní v polorovině určené nerovností $|e^{2\pi i z/\omega}| \leq \rho$ a lze je rozvinout do řady

$$B_k(z) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} B_{k\alpha} e^{2\pi i \alpha z/\omega}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

kde μ je celé číslo. Jestliže $|\lambda| > 1$, pak $\rho \leq R$, a pokud $|\lambda| < 1$, pak $\rho \leq r$.

Löwig se nyní pokouší najít ω-periodické řešení soustavy (6) metodou neurčitých koeficientů. Předpokládá, že funkce f_k lze vyjádřit ve tvaru

$$f_k(z) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha} e^{2\pi i \alpha z/\omega}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \tag{7}$$

Dosadíme-li rozvoje f_k, B_k a q_{kl} do (6) a porovnáme koeficienty na obou stranách, obdržíme pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ a $\alpha \geq \mu$ rovnici

$$a_{k\alpha} \lambda^k = \sum_{\beta=\mu}^{\alpha} \sum_{l=1}^{n} q_{kl\alpha-\beta} a_{l\beta} + B_{k\alpha}, \tag{8}$$

kterou lze ekvivalentně psát ve tvaru

$$\sum_{l=1}^{n} (q_{kl0} - \delta_{kl} \lambda^\alpha) a_{l\alpha} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta=\mu}^{\alpha-1} q_{kl\alpha-\beta} a_{l\beta} + B_{k\alpha} = 0.$$

Jestliže $\det\{q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^\alpha\}_{k,l=1}^n \neq 0$ pro každé $\alpha \geq \mu$, pak jsou koeficienty $a_{k\alpha}$ jednoznačně určeny (z poslední rovnice lze vyjádřit $a_{1\alpha}, \dots, a_{n\alpha}$ pomocí $a_{l\mu}, \dots, a_{l\alpha-1}$, $l \in \{1, \dots, n\}$). Soustava (8) však může mít řešení i v případě, kdy je některý ze zmíněných determinantů nulový.

Po nalezení koeficientů $a_{k\alpha}$ zbývá ověřit konvergenci příslušných řad v (7). Löwig dokazuje, že pokud $a_{k\alpha}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha \geq \mu$, je libovolná sada koeficientů splňujících rekurentní rovnice (8), pak nekonečné řady v (7) konvergují v polorovině $|e^{2\pi iz/\omega}| \leq \rho|\lambda|$, pokud $|\lambda| > 1$, a v polorovině $|e^{2\pi iz/\omega}| \leq \rho$, pokud $|\lambda| < 1$. Funkce $f_1, \dots, f_n$ definované vztahem (7) pak představují řešení nehomogenní soustavy (6) v příslušné polorovině.

Zaveďme stejně jako Löwig označení

$$K(t) = \det\{q_{kl0} - \delta_{kl}t\}_{k,l=1}^{n}.$$

Rovnice $K(t) = 0$ se nazývá charakteristická rovnice; viděli jsme, že pro existenci a jednoznačnost řešení soustavy (6) je důležité vědět, zda charakteristická rovnice má kořeny tvaru λ^α, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Löwig dále dokazuje následující zobecnění věty z prvního oddílu: Nechť charakteristická rovnice nemá kořeny tvaru λ^α, $\alpha \in \mathbb{Z}$, a $f_1, \dots, f_n$ jsou ω-periodické funkce, které vyhovují homogenní soustavě

$$f_k(z+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l(z), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \tag{9}$$

Je-li $|\lambda| < 1$ a $f_1, \dots, f_n$ jsou holomorfní v polorovině $|e^{2\pi iz/\omega}| \leq R|\lambda|$, nebo $|\lambda| > 1$ a $f_1, \dots, f_n$ jsou holomorfní v polorovině $|e^{2\pi iz/\omega}| \leq r$, pak se jedná o identicky nulové funkce. Toto tvrzení je dokázáno indukcí podle n a v důkazu se používá již zmíněná věta z prvního oddílu.

Poté se Löwig vrací zpět k nehomogenní soustavě (6) a zkoumá existenci a jednoznačnost ω-periodického řešení v případě, že funkce B_k splňují následující slabší podmínku:

- Existují kladná čísla ρ_1, ρ_2 taková, že $\rho_1 < \rho_2$, funkce B_k jsou holomorfní v rovinném pásu určeném nerovnostmi $\rho_1 \leq |e^{2\pi iz/\omega}| \leq \rho_2$ a lze je rozvinout v řady

  $$B_k(z) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} B_{k\alpha} e^{2\pi i\alpha z/\omega}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \tag{10}$$

  Jestliže $|\lambda| > 1$, pak $\rho_1 \leq r$ a $\rho_2 \leq R$, a pokud $|\lambda| < 1$, pak $\rho_1 \leq r$ a $\rho_2 \leq r$.

Podstatný rozdíl je tedy v tom, že v rozvoji B_k nyní sčítáme přes všechna celá čísla α. Löwig nejprve ukazuje, že pokud charakteristická rovnice nemá kořeny tvaru λ^α, $\alpha \in \mathbb{Z}$, pak nehomogenní soustava (6) může mít maximálně jedno holomorfní řešení. Vezmeme-li totiž libovolná dvě řešení, pak jejich rozdíl vyhovuje homogenní soustavě (9), a pomocí výše uvedené věty o řešení homogenní soustavy lze ukázat, že uvažovaný rozdíl je identicky nulový, tj. obě řešení jsou shodná.

V důkazu existence ω-periodického řešení nehomogenní soustavy (6) nejprve Löwig uvažuje speciální případ, kdy zvolí čísla $m \in \{1, \dots, n\}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$ a položí

$$B_k(z) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ e^{2\pi i \gamma z/\omega}, & k = m. \end{cases}$$

Řešení příslušné nehomogenní soustavy, které je tvořeno n-ticí funkcí

$$f_{km\gamma}(z) = \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} b_{km\alpha\gamma} e^{2\pi i \alpha z/\omega}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

najde opět metodou neurčitých koeficientů. Přirozeným kandidátem na řešení obecné nehomogenní soustavy s funkcemi B_k ve tvaru (10) je pak n-tice funkcí

$$f_k(z) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} B_{m\gamma} f_{km\gamma}(z) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma} e^{2\pi i \alpha z/\omega}, \quad (11)$$

$k \in \{1, \dots, n\}$. Nejobtížnější část celého důkazu představuje vyšetření konvergence řady na pravé straně. Poznamenejme, že existence řešení je dokázána i pro případ, kdy charakteristická rovnice má kořeny tvaru λ^α, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Z explicitního vyjádření (11) Löwig odvozuje následující odhad: Existuje konstanta $\chi > 0$ taková, že pokud $B_1, \dots, B_n$ jsou ω-periodické a holomorfní v rovinném pásu $P = \{z \in \mathbb{C};\ \rho_1 \leq |e^{2\pi i z/\omega}| \leq \rho_2\}$ a $f_1, \dots, f_n$ představují příslušné ω-periodické řešení nehomogenní soustavy (6), pak

$$|f_k(z)| \leq \chi \cdot \max_{l=1,\dots,n} \left(\sup_{z \in P} |B_l(z)| \right), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Pokud $|\lambda| > 1$, nerovnost platí v rovinném pásu $\rho_1 \leq |e^{2\pi i z/\omega}| \leq \rho_2 |\lambda|$, pro $|\lambda| < 1$ pak v pásu $\rho_2 |\lambda| \leq |e^{2\pi i z/\omega}| \leq \rho_2$. Tvrzení je zobecněním Picardova odhadu z článku [5], který popisuje speciální případ, kdy q_{kl} jsou konstantní funkce.

V závěru druhého oddílu se Löwig zabývá nehomogenní soustavou (6) v případě, kdy funkce B_k nejsou ω-periodické; pozornost věnuje zejména funkcionální rovnici $f(z+h) - f(z) = z$.

Třetí oddíl se opět týká homogenní soustavy

$$f_k(z+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l(z), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (12)$$

Hlavním výsledkem je důkaz existence ω-periodických meromorfních funkcí, které tvoří fundamentální systém řešení soustavy (12). Pro $|\lambda| > 1$ jsou tyto funkce definovány v polorovině $|e^{2\pi i z/\omega}| \leq R|\lambda|$, pro $|\lambda| < 1$ pak v polorovině $|e^{2\pi i z/\omega}| \leq r$.

Terminologie je zde podobná jako u soustav obyčejných diferenciálních rovnic; říkáme, že $f_1^i, \dots, f_n^i$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, tvoří fundamentální systém řešení, jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ funkce $f_1^i, \dots, f_n^i$ vyhovují soustavě (12), a navíc lze každé řešení $f_1, \dots, f_n$ soustavy (12) jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$f_k(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i(z) f_k^i(z), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

kde $a_1, \dots, a_n$ jsou jisté ω-periodické funkce. Každé řešení nehomogenní soustavy (6) pak lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$f_k(z) = f_k^0(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i(z) f_k^i(z), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

kde $f_1^0, \dots, f_n^0$ je jedno pevně zvolené (partikulární) řešení nehomogenní soustavy (6) a $a_1, \dots, a_n$ jsou opět vhodné ω-periodické funkce. Existenci zmíněného fundamentálního systému dokazuje Löwig indukcí vzhledem k n.

V případě, kdy podíl libovolných dvou kořenů charakteristické rovnice je různý od λ^α, kde α je nenulové celé číslo, podává Löwig podrobnější popis fundamentálního systému řešení homogenní soustavy. Využívá přitom informace o násobnostech kořenů $t_1, \dots, t_j$ charakteristické rovnice a elementárních dělitelích matice $\{q_{kl0} - \delta_{kl} t_i\}_{k,l=1}^n$, $i \in \{1, \dots, j\}$. Je zde též použita věta z prvního oddílu o existenci funkcí vyhovujících soustavě (5). Výsledky získané v této části jsou po technické stránce dosti složité (samotná formulace věty v článku [L2] zabírá dvě strany) a nebudeme je proto podrobněji rozebírat.

Závěrečný čtvrtý oddíl práce pojednává o funkcionální rovnici n-tého řádu

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(z) f(z + lh) = A(z), \tag{13}$$

kde $p_n(z) = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Snadno se zjistí, že tato rovnice je ekvivalentní se soustavou funkcionálních rovnic prvního řádu

$$f_1(z+h) = f_2(z),\ f_2(z+h) = f_3(z), \dots,\ f_{n-1}(z+h) = f_n(z),$$

$$f_n(z+h) = -\sum_{l=1}^{n} p_{l-1}(z) f_l(z) + A(z).$$

Informace o existenci a jednoznačnosti ω-periodického řešení rovnice (13) a k ní příslušné homogenní rovnice

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(z) f(z + lh) = 0 \tag{14}$$

tedy snadno získáme použitím dříve odvozených výsledků. Löwig předpokládá splnění následujících podmínek:

- Existuje kladné číslo R takové, že každou z funkcí $p_0, \dots, p_n$ lze v polorovině určené nerovností $|e^{2\pi i z/\omega}| \le R$ rozvinout do řady
$$p_k(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} p_{k\alpha} e^{2\pi i \alpha z/\omega}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$
(Zřejmě platí $p_{n0} = 1$ a $p_{n\alpha} = 0$ pro $\alpha \ge 1$.)
- $p_{00} \ne 0$.
- Existuje kladné číslo $r \le R$ takové, že $p_0(z) \ne 0$ pro všechna z v polorovině určené nerovností $|e^{2\pi i z/\omega}| \le r$.
- Existují kladná čísla ρ_1, ρ_2 taková, že $\rho_1 < \rho_2$ a funkci A lze v rovinném pásu určeném nerovnostmi $\rho_1 \le |e^{2\pi i z/\omega}| \le \rho_2$ rozvinout do řady
$$A(z) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} A_\alpha e^{2\pi i \alpha z/\omega}.$$

Tyto podmínky zajišťují, že soustava získaná z rovnice n-tého řádu splňuje předpoklady vět z předchozích oddílů; jejich použitím pak dostáváme existenci ω-periodického řešení nehomogenní rovnice (13), existenci fundamentálního systému homogenní rovnice (14) tvořeného ω-periodickými meromorfními funkcemi apod.

Charakteristická rovnice má nyní tvar
$$\sum_{l=0}^{n} p_{l0} t^l = 0.$$
Nemá-li tato rovnice kořeny tvaru λ^α, $\alpha \in \mathbb{Z}$, pak rovnice (13) má vždy právě jedno holomorfní řešení.

2. Nelineární rovnice

Navazující článek [L3] je věnován soustavám nelineárních funkcionálních rovnic tvaru
$$f_k(z + h) = Q_k(z, f_1(z), \dots, f_n(z)), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \tag{15}$$
Löwiga opět zajímá existence ω-periodických řešení této soustavy. Přitom předpokládá, že funkce $Q_1, \dots, Q_n$ jsou ω-periodické v první proměnné, pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí $Q_k(z, 0, \dots, 0) = 0$, a pro každé z náležící do rovinného pásu $\rho_1 \le |e^{2\pi i z/\omega}| \le \rho_2$ lze Q_k jakožto funkci proměnných $f_1, \dots, f_n$ rozvinout v okolí bodu $(0, \dots, 0)$ do Taylorovy řady
$$Q_k(z, f_1, \dots, f_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l + \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \ge 2} G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(z) f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}.$$

Aniž bychom podrobně popisovali všechny detaily, nastíníme hlavní myšlenku důkazu existence ω-periodických řešení soustavy (15). Označíme-li

$$B_k(z, f_1, \dots, f_n) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \geq 2} G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(z) f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n},$$

platí

$$Q_k(z, f_1, \dots, f_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l + B_k(z, f_1, \dots, f_n), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Löwig nejprve uvažuje homogenní lineární soustavu

$$f_k(z+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l(z), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Víme, že při splnění jistých předpokladů má tato soustava fundamentální systém řešení tvořený funkcemi $f_1^i, \dots, f_n^i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, které jsou meromorfní a ω-periodické. Pro každou n-tici reálných čísel $c_1, \dots, c_n$ definujme

$$f_k^{(0)}(z, c_1, \dots, c_n) = \sum_{s=1}^{n} c_s f_k^s(z, c_1, \dots, c_n), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Pro každé $\nu \in \mathbb{N}$ a každou n-tici dostatečně malých čísel $c_1, \dots, c_n$ pak Löwig definuje funkce $f_k^{(\nu)}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, jako ω-periodická řešení nehomogenní soustavy

$$f_k^{(\nu)}(z+h, c_1, \dots, c_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l^{(\nu)}(z, c_1, \dots, c_n) +$$

$$+ B_k(z, f_1^{(\nu-1)}(z, c_1, \dots, c_n), \dots, f_n^{(\nu-1)}(z, c_1, \dots, c_n)).$$

Nakonec dokáže, že existují limity

$$f_k(z, c_1, \dots, c_n) = \lim_{\nu \to \infty} f_k^{(\nu)}(z, c_1, \dots, c_n), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Funkce $z \mapsto f_k(z, c_1, \dots, c_n)$, kde $c_1, \dots, c_n$ je libovolná pevně zvolená n-tice dostatečně malých čísel, jsou ω-periodické a vyhovují soustavě (15).

Vidíme tedy, že Löwig ve skutečnosti dokázal existenci nekonečně mnoha řešení soustavy (15). Význam parametrů $c_1, \dots, c_n$ spočívá v tom, že platí

$$\frac{\partial f_k}{\partial c_s}(z, 0, \dots, 0) = f_k^s(z), \quad k, s \in \{1, \dots, n\}.$$

V závěru práce [L3] jsou získané výsledky opět přeformulovány pro nelineární funkcionální rovnici n-tého řádu ve tvaru

$$f(z+nh) = P(z, f(z), f(z+h), \dots, f(z+(n-1)h)),$$

která je zřejmě ekvivalentní se soustavou rovnic prvního řádu

$$f_1(z+h) = f_2(z),\ f_2(z+h) = f_3(z), \dots,\ f_{n-1}(z+h) = f_n(z),$$

$$f_n(z+h) = P(z, f_1(z), \dots, f_n(z)).$$

3. Závěr

I z našeho stručného přehledu je patrné, že Löwigovy práce o funkcionálních rovnicích jsou po technické stránce dosti složité. Dokazované věty mají mnoho předpokladů a není výjimkou, že znění věty přesahuje jednu tištěnou stranu (věta 13 v článku [L2] dokonce zabírá tři strany). Částečně je to způsobeno nutností neustále rozlišovat případy $|\lambda| > 1$ a $|\lambda| < 1$; i důkazy vět jsou pro oba případy často odlišné.

Některá tvrzení by bylo možné vyjádřit poněkud stručněji použitím vektorového a maticového zápisu, např. nehomogenní soustavu

$$f_k(z+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l(z) + B_k(z), \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

lze elegantněji psát ve tvaru $f(z+h) = Q(z)f(z) + B(z)$, kde f, B jsou vektorové funkce a Q je maticová funkce. V době, kdy Löwigovy práce vznikaly, však tento způsob zápisu nebyl ještě zcela běžný ani u jiných matematiků.

Článek [L2] je svým rozsahem 101 stran poněkud neobvyklý, ne však zcela výjimečný; v časopise Acta Mathematica vyšly ve 30. letech 20. století i jiné srovnatelně dlouhé práce. Také v současnosti tento časopis publikuje i velmi rozsáhlé práce předních světových matematiků.

Důkaz existence ω-periodických řešení nelineární soustavy je založen na známé Picardově metodě postupných aproximací. Přestože Löwig prokazuje výbornou znalost reálné i komplexní analýzy, dá se říci, že důkazy vět v obou článcích jsou vesměs elementární a nenajdeme v nich žádné převratně nové nápady nebo metody. Pokud si však uvědomíme, že [L2], [L3] představují pouze mírně přepracovanou a doplněnou verzi disertační práce, můžeme konstatovat, že měla velmi dobrou úroveň.

Zdá, že Löwigovy práce o funkcionálních rovnicích příliš neovlivnily další bádání v této oblasti. Jeho výsledky však nebyly zcela zapomenuty, o čemž svědčí např. citace v monografii [3] nebo v článcích [1], [4] a [8].

LITERATURA

[L1] Löwig H., *Über periodische Differenzengleichungen*, Lotos **78** (1930), 1–4.

[L2] Löwig H., *Lineare Differenzengleichungen mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode*, Acta Mathematica **57** (1931), 101–201.

[L3] Löwig H., *Zur Theorie der nicht linearen Differenzengleichungen*, Acta Mathematica **57** (1931), 293–340.

* * * * *

[1] Berenstein C. A., Sebbar A., *Monodromic differential equations and Riemann theta functions*, Forum Mathematicum **6** (1994), 153–181.

[2] Freitag E., Busam R., *Complex Analysis*, Springer-Verlag, 2005.

[3] Kuczma M., *Functional equations in a single variable*, PWN – Polish Scientific Publishers, 1968.

[4] Naftalevich A., Gylys A., *On meromorphic solutions of a linear differential-difference equation with constant coefficients*, The Michigan Mathematical Journal **27**, Issue 2 (1980), 195–213.

[5] Picard É., *Sur une classe des transcendantes nouvelles (Premier mémoire)*, Acta Mathematica **18** (1894), 133–154.

[6] Picard É., *Sur une classe des transcendantes nouvelles (Second mémoire)*, Acta Mathematica **23** (1899), 333–337.

[7] Remmert R., *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, 1998.

[8] Stephens C. F., *Nonlinear difference equations analytic in a parameter*, Transactions of the American Mathematical Society **64** (1948), 268–282.

Functional analysis arose in the early twentieth century and gradually, conquering one stronghold after another, became a nearly universal mathematical doctrine, not merely a new area of mathematics, but a new mathematical world view. Its appearance was the inevitable consequence of the evolution of all of nineteenth-century mathematics, in particular classical analysis and mathematical physics. Its original basis was formed by Cantor's theory of sets and linear algebra. Its existence answered the question of how to state general principles of a broadly interpreted analysis in a way suitable for the most diverse situations.

A. M. Vershik ([Ve], str. 438; [Mc], str. vii)