W. G. HORNER'S

eigentliche Auflösungsweise

algebraischer Ziffergleichungen.

Eine literärgeschichtliche Studie

zu deren Verdeutlichung und Würdigung.

Von

Dr. WILH. MATZKA,

jubil. ord. Prof. der Mathematik an der Prager Hochschule, ordentl. Mitglied der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften.

(Aus den Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissensch. VI. Folge. 5. Band.)

PRAG.

Verlag der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Eduard Grégr.

1871.

OSTATNÍ MATEMATICKÉ PRÁCE

V této kapitole se pokusíme zhodnotit Matzkovy práce z teorie čísel (3), algebry (1+1), matematické analýzy (3+1), logické výstavby matematiky (1) a statistiky (1). Jedná se vesměs o kratší pojednání, která sepsal v průběhu mnohaleté učitelské kariéry. Hodnoceny jsou také dva obsáhlejší spisy [M38] a [M61]. Většina analyzovaných prací byla otištěna v časopise *Archiv der Mathematik und Physik*, některé vyšly v *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* nebo v *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.* V závěru kapitoly jsou popsány dva Matzkovy matematické rukopisy, které jsou uloženy v Národní knihovně České republiky.

Teorie čísel

V roce 1844 začal W. Matzka aktivně přispívat do časopisu *Archiv der Mathematik und Physik.* Uvedl se čtveřicí kratších pojednání z teorie čísel, matematické analýzy, geometrie a fyziky ([M8] až [M11]), v nichž převážně komentoval, doplňoval a rozšiřoval články uveřejněné v *Archivu* v předchozích letech.[167] V poznámce nazvané *Bemerkungen zu dem Aufsatze auf Seite 57 im ersten Theile des Archivs* [M8] nejprve stručně komentoval zmíněný článek pojednávající o způsobech důkazů matematických vět.[168] Poté dokázal, že každé přirozené číslo $n = m_0 + m_1a + m_2a^2 + \cdots + m_ra^r$ lze zapsat ve tvaru $n = m_0 + n_1a$, kde $n_1 = m_1 + m_2a + \cdots + m_ra^{r-1}$ představuje výsledek dělení $n|a$ (tzv. částečný podíl) a m_0 nejmenší možný zbytek dělení $n|a$.[169]

Rovněž k pojednání nadepsanému *Beweis und Berichtigung des im 4. Bande des Archivs, 3. Heft, S. 332, Nr. XXXV, Sazt 2, vorgelegten Lehrsatzes* [M14] byl W. Matzka inspirován článkem z předchozího čísla časopisu.[170] Zabýval se tvrzením: *Eine dekadische Zahl* $D = 10N + A$ *ist durch eine eben solche* $d = 10n \pm a$ *theilbar, wenn* $An \mp aN$ *dadurch theilbar ist.* Jako reakci na nedostatky citovaného článku ukázal případy, kdy dané tvrzení neplatí a formuloval doplňující podmínku tak, aby věta platila ve zcela obecném případě: *. . . wofern a und n keinen Theiler gemeinschaftlich haben.*

[167] Práce z teorie čísel [M8] a matematické analýzy [M9] jsou hodnoceny v příslušných částech této kapitoly. Pojednání z fyziky [M10] a geometrie [M11] jsou popsána samostatně v kapitolách *Ostatní práce – Fyzika* a *Geometrie.*

[168] Jedná se o poznámku k článku: Stern M., *Neue Beweise einiger Sätze und allgemeine Bemerkungen über eine in der Analysis in gewissen Fällen gebräuchliche Art der Beweisführung*, Archiv der Mathematik und Physik 1(1841), str. 57–59.

[169] Připomeňme úzkou souvislost uvedeného tvrzení s Eukleidovým algoritmem pro dělení polynomů, příp. pro nalezení největšího společného dělitele dvou, resp. tří přirozených čísel. Tento algoritmus uvedl Eukleides z Alexandrie (asi 340 až 280 př. n. l.) v 7. knize svého stěžejního díla *Základy* (asi 300 př. n. l.). Stručný rozbor obsahu 7. knihy Eukleidových *Základů* je uveden v [Be2]; anglický překlad původního znění včetně kritického komentáře viz [Hea], volume II, str. 277–344.

[170] Viz Pross F., *Uebungen für Schüler. Ein geometrischer und ein arithmetischer Satz*, Archiv der Mathematik und Physik 4(1844), str. 332.

W. Matzka byl velkým „propagátorem“ komplexních čísel. V roce 1850 vydal monografii nazvanou *Versuch einer richtigen Lehre von der Realitaet der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra ...* [M29], v níž nejprve zavedl komplexní čísla, vyložil vlastnosti aritmetických operací s komplexními čísly, uvedl matematické aplikace a nakonec se pokusil obhájit jejich význam a získat pro ně uznání.[171] V roce 1864 uveřejnil v *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* krátký článek nazvaný *Einfache Umwandlung goniometrischer imaginärer Binome in imaginäre Exponentiellen* [M55], v němž srozumitelným způsobem odvodil vzorec pro „převod komplexních dvojčlenů v komplexní exponenty“, tedy známý Eulerův vzorec $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$, který ukazuje vztah mezi goniometrickými funkcemi a exponenciální funkcí.

Algebra

Klasická algebraická témata (např. mocninny, lineární a kvadratické rovnice, soustavy rovnic, číselné řady, logaritmy) vyložil W. Matzka v prvním díle rozsáhlé učebnice *Vorlesungen über die Mathematik* [M4], která byla určena především frekventantům vídeňského sboru bombardýrů, nebo je alespoň zčásti zapracoval do některých dalších učebnic (např. [M36]), článků (např. [M35]) a monografií (např. [M7] a [M64]).[172]

Univerzitní výuka matematiky se v 50. a 60. letech 19. století upínala především k matematické analýze a geometrii, což byla také témata, o nichž W. Matzka studentům pravidelně přednášel. Příležitostně pak vypisoval volitelné přednášky o vybraných partiích algebry, v nichž pojednával o řešení rovnic vyšších stupňů. Těm věnoval také dvě odborné práce – [M53] a [M61].

V příspěvku nazvaném *Beitrag zur Auflösung kubischer Gleichungen mittels kyklischer und hyperbolischer Functionen* [M53] předložil několik zajímavých myšlenek o řešení kubických rovnic.[173] Vyšel z obecné algebraické rovnice třetího stupně $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ a pro její řešení vyjádřené ve tvaru $x = u + v$ ukázal odvození známých Cardanových vzorců:

$$u^3 = g + \sqrt{g^2 - f^3},$$
$$v^3 = g - \sqrt{g^2 - f^3},$$

kde

$$f = \left(\frac{B}{3}\right)^2 - \frac{AC}{3},$$
$$g = \frac{AC}{2} \cdot \frac{B}{3} - \left(\frac{B}{3}\right)^3 - \frac{A^2D}{2}.$$

---

[171] Podrobný rozbor monografie [M29] (182 stran + 3 tabulky) je uveden v samostatné kapitole *Komplexní čísla*.

[172] Práce [M35] a [M36] jsou věnovány logaritmům, monografie [M7] a [M64] pojednávají po řadě o chronologii a determinantech. Jejich podrobné hodnocení je obsahem samostatných kapitol nazvaných *Logaritmy*, *Matematické aplikace – Chronologie* a *Determinanty*.

[173] Inspiroval se článkem: Gronau J. F. W., *Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Funktionen des Kreises und der Hyperbel, nebst Tafeln für die letzteren*, Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig 6(1861), IV + 68 stran + 1 tabulka, který přibližoval řešení kubických rovnic pomocí trigonometrických funkcí. O metodách řešení algebraických rovnic vyšších stupňů v historickém kontextu podrobně pojednává [B1].

Pro výraz $\sqrt{g^2 - f^3}$ diskutoval případy: $f^3 \geq g^2$ (výsledná odmocnina je imaginární) a $f^3 < g^2$ (výsledná odmocnina je reálná), a pro každý z nich vyjádřil řešení v obecném tvaru.

Naznačme, jak W. Matzka za využití výše definovaných vztahů pro f a g přistoupil k řešení případu *casus irreducibilis*:

Irreducibler Fall,

wo die $\sqrt{g^2 - f^3}$ *imaginär also* $f^3 \geq g^2$ *mithin* f *positiv ist.*

In diesem Fall setzen wir des (negativen) Radicands (positives) Gegentheil

$$f^3 - g^2 = h^2,$$

wobei wir die reelle Zahl h *für positiv ansehen wollen. Dann wird, wofern wir* $\sqrt{-1} = i$ *stellen,*

$$u^3 = g + ih,$$
$$v^3 = g - ih.$$

Nun dürfen wir bekanntlich jedwede zwei reelle Zahlen (g, h) *beziehungsweis dem Cosinus und Sinus einer Zahl* (φ)*, welche den Zahlwerth entweder eines Winkels oder eines ihm entsprechenden Kreisbogens oder auch eines ihm angehörigen Kreissectors vorstellt, proportionirt und gleichstimmig setzen; folglich, wenn wir das positive Verhältniss jeder von jenen zwei Zahlen zu ihrer Proportionellen mit* r *bezeichnen, dürfen wir aufstellen:*

$$\frac{g}{cos\,\varphi} = \frac{h}{sin\,\varphi} = r, \ \ldots$$

Wir berechnen demnach vorerst die positive Verhältnisszahl r *aus*

$$r^2 = g^2 + h^2$$

und dann die Masszahl φ *aus*

$$cos\,\varphi = \frac{g}{r} \ \ und \ \ sin\,\varphi = \frac{h}{r}$$

im Bereiche $\varphi = 0 \ldots \pi; \ \ldots$

Demgemäss … erhält man endlich den gesuchten vollständigen dreiwerthigen Ausdruck der fraglichen Unbekannten: … wenn man π *durch* $180°$ *ersetzt,*

$$\begin{aligned} x = \ \ & 2\sqrt{f} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}; \\ & -2\sqrt{f} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60°\right); \\ & -2\sqrt{f} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60°\right). \end{aligned}$$

Hier sind demnach alle drei Wurzelwerthe der Gleichung … reell und die sämmtlichen $\sqrt{f}$ *hat man positiv zu nehmen.* ([M53], str. 404–407)

K řešení algebraických rovnic vyšších stupňů významně přispěl britský matematik William George Horner (1786–1837), který v článku *A New Method of Solving Numerical Equations of All Orders by Continuous Approximation* popsal „novou“ početní metodu.[174] Zvolil pro ni však příliš stručnou formu zápisu, jež komplikovala její pochopení, a tak nebyla řadu let patřičně doceněna. K jejímu uznání a rozšíření došlo až zásluhou britského matematika Johna Radforda Younga (1799–1885), který v roce 1835 uveřejnil spis nazvaný *On the Theory and Solution of Algebraical Equations*, v němž Hornerovu metodu zpřístupnil vhodně zvolenou formou výkladu a řadou názorných příkladů.[175]

Po přečtení Youngova spisu se W. Matzka začal zajímat o původní Hornerovu metodu. Po pečlivém studiu jeho originálních prací sepsal počátkem 70. let 19. století obsáhlou literárně-historickou studii nazvanou *W. G. Horner's eigentliche Auflösungsweise algebraischer Ziffergleichungen* [M61], která měla přispět k jejímu objasnění a ocenění.

Ve třech hlavních částech vyložil metodu tak, jak ji W. G. Horner s krátkým časovým odstupem rozvíjel a upravoval. Nejprve sledoval Hornerovy původní myšlenky, pak doslovně přeložil některé pasáže, přičemž kladl důraz na zachování použité symboliky, struktury schémat a způsobu výkladu. Poté přidal vlastní vysvětlení zahrnující podrobné komentáře, názorně rozpracovaná schémata a řešené příklady. Písmenem H pečlivě označil přejaté části a písmenem M vlastní poznámky. V závěru práce se věnoval historickému vývoji a přijetí metody. Poznamenal, že již François Viète (1540–1603), John Wallis (1616–1703) a Isaac Newton (1643–1727) využívali podobných způsobů řešení, referoval o spornosti Hornerova prvenství a vyzdvihl kvalitu Youngova spisu.

W. Matzka ocenil přínos Hornerových myšlenek. Za nejzajímavější, nejlépe srozumitelné a dobře aplikovatelné považoval zpracování, které se nejvíce podobá dnešní formě. Obecně však Hornerovu pojetí vytýkal přehnaně stručný způsob notace a jen zřídka se objevující vysvětlující početní příklady.

Horner's übertriebene Kürze in der Darstellung, die nur selten zureichende Erläuterung durch Zifferbeispiele, dazu seine übermässige Sparsamkeit im Anschreiben der zu Zwischen- und Hilfsrechnungen dienenden Ziffern, die sich sogar bis zum Auslassen der Decimalzeichen versteigt und vielleicht durch seine Vorliebe fürs Kopfrechnen verursacht worden ist, tragen unbestreitbar die Hauptschuld, dass selbst die britischen Mathematiker der Auflösungsweise Horner's nur wenig Aufmerksamkeit und Beachtung schenkten, und eine solche schätzenswerthe Entdeckung anffällig vernachlässigten, was Young (1835; Vorrede S. V) nachdrücklich tadelt. ([M61], str. 46)

W. Matzka ve výše uvedené studii [M61] z roku 1871 přinesl pečlivý rozbor, zdůvodnění a doplnění původních Hornerových myšlenek. Téměř okamžitě po otištění byla jeho práce příznivě hodnocena v referativních časopisech *Jahrbuch*

[174] Viz Horner W. G., *A New Method of Solving Numerical Equations of All Orders by Continuous Approximation*, Philosophical Transactions of the Royal Society 109(1819), str. 308–335.

[175] Viz Young J. R., *On the Theory and Solution of Algebraical Equations*, London, 1835.

über die Fortschritte der Mathematik a *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*.[176]

Připomeňme, že v druhé polovině 19. století patřila Hornerova metoda k oblíbeným tématům algebraické literatury. Její zobecnění přinesli například Leopold Karl Schulz von Strasznicki (1803–1852), profesor vídeňské polytechniky, v práci nazvané *Neue Methode der Auffindung der reellen Wurzeln höherer numerischer Gleichungen* (Wien, 1842) a Jakub Filip Kulik (1793–1863), profesor pražské univerzity, v učebnici matematické analýzy *Lehrbuch der höheren Analysis* (Prag, 1843).

Matematická analýza

Matematické analýze se W. Matzka věnoval od počátku své učitelské dráhy. Jako podporučík a učitel matematiky ve vídeňském sboru bombardýrů přednášel v letech 1832 až 1834 o teorii funkcí jedné reálné proměnné, nekonečných řadách, diferenciálním a integrálním počtu, což byla náplň třetího a čtvrtého ročníku základního pětiletého kurzu. Zmíněné oblasti matematické analýzy rozpracoval v rozsáhlé dvoudílné učebnici *Vorlesungen über die Mathematik* ([M4] a [M3]) vydané ve Vídni v letech 1835 a 1838.[177]

Přednášky z matematické analýzy, zejména o diferenciálním a integrálním počtu, konal v letech 1850 až 1871 (s výjimkou několika málo semestrů) na pražské univerzitě. Tato témata tvořila podstatnou část náplně výuky matematiky. Kromě klasického výkladu teorie infinitezimálního počtu, který vedl

[176] V referativním časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (viz 4(1872), str. 44) referent F. W. Netto z Berlína práci [M61] hodnotil takto: *Die Horner'schen Methoden werden theils in wortgetreuen Uebersetzungen, theils in Auszügen vorgetragen, und die äusserst knapp gehaltenen Vorschriften derselben durch Zusätze und Beispiele erläutert.* V referativním časopise *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* (viz 6-I(1874), str. 106–107) byla otištěna rozsáhlejší, pozitivně vyznívající recenze: *Méthode propre de W. G. Horner, pour la résolution des équations numériques algébriques. Étude historique pour l'éclaircissement et l'appréciation de cette méthode. (47 p.) Horner a publié, vers 1819, dans les Philosophical Transactions et dans le Leybourn's Repository, sa découverte d'une nouvelle méthode pour la résolution numérique des équations algébriques. Cette méthode, adoptée maintenant par les géomètres anglais et allemands, n'a été généralement connue que par l'exposition qui en a été faite, en 1835, par J. R. Young. Mais ce n'est pas là, à proprement parler, la méthode primitive, exposée et pratiquée par Horner lui-même; c'en est une modification, indiquée en passant comme moyen de faciliter les calculs, mais à laquelle Horner, doué d'une prodigieuse facilité pour les calculs de tête, préférait des procédés plus pénibles, mais plus directs. W. Matzka, en se livrant à l'étude assez laborieuse, des travaux originaux de Horner, a reconnu que son premier procédé, qu'a fait oublier le perfectionnement développé par Young, fournit, avec une étonnante rapidité, un nombre considérable de chiffres. Il présente, avec étendue et clarté, les trois méthodes d'approximation données successivement par Horner, et les discute au double point de vue de l'originalité et des avantages pratiques.*

Matzkovy práce [M53] a [M61] jsou citovány také ve slavné učebnici algebry L. Matthiessena nazvané *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* [Mat]; [M53] viz str. 999, [M61] viz str. 997.

[177] V prvním díle učebnice pojednal o teorii funkcí jedné reálné proměnné a nekonečných řadách (viz [M4]), v druhém díle o diferenciálním a integrálním počtu (viz [M3]). Podrobná analýza učebnice *Vorlesungen über die Mathematik* je náplní kapitoly *Učebnice*.

v duchu Cauchyho zásad, kladl velký důraz na analytické, geometrické a algebraické aplikace. Vypsané přednášky charakterizoval například: *Algebr. Analysis in Cauchy's Manier*, *Integralrechnung mit analytischen und geometrischen Anwendungen* nebo *Theorie und Auflösung der höheren algebraischen Gleichungen, mit Benützung der Differenzialrechnung*.

W. Matzka velmi dobře znal díla francouzského matematika a průkopníka matematické analýzy Augustina-Louise Cauchyho (1789–1857), stejně jako mnohé odborné práce a vysokoškolské učebnice psané profesory předních evropských univerzit. Čerpal v nich inspiraci, často z nich citoval, odkazoval na ně a doporučoval jejich studium.

Matzkovu publikační činnost v matematické analýze charakterizují tři kratší články [M9], [M15] a [M66] a jedno rozsáhlejší pojednání [M38]. Jedná se v nich o připomenutí zajímavých výsledků a drobná vylepšení důkazů známých tvrzení v podobě názorných odvození, ne však o původní výsledky.

V krátké poznámce nazvané *Feststellung und Würdigung des in dem Archive … über eine Stelle in Cauchy's Begründung der Differential-Rechnung ausgesprochenen Tadels* [M9] ocenil a stručně doplnil příspěvek, v němž Johann August Grunert (1797–1872) obhajoval a objasňoval Cauchyho výsledek:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

V odstavci nazvaném *Herleitung des Differentialquotienten* $\frac{d\cdot x^n}{dx} = nx^{n-1}$, *ohne Unterscheidung der Art des reellen Exponenten* n [M15] odvodil s využitím limity funkce vzorce pro výpočet derivace mocninné funkce s reálným exponentem $f(x) = x^n$.

Inspirován výsledky A.-L. Cauchyho a jeho pokračovatelů W. Matzka sepsal pojednání, které bylo pod názvem *Zur gründlichen Richtigstellung des Ausdruckes für das Integral* $\int \frac{dx}{x}$ [M38] (41 stran + 1 tabulka) publikováno v roce 1853 v časopise *Archiv der Mathematik und Physik*.[178]

Vyšel z tradičního vyjádření $\int \frac{1}{x}dx = lx+C$, kde l značí přirozený logaritmus pro kladné hodnoty x, a „nového" Cauchyho tvrzení $\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}l(x^2)+C$ uvažovaného pro x kladné i záporné. Naznačil, jak tento výsledek pojali a zpracovali další matematici a autoři univerzitních učebnic – J. A. Grunert, Oscar Xavier Schlömilch (1823–1901) a François Napoléon Marie Moigno (1804–1884).[179]

Dále se W. Matzka zaměřil na důkaz správnosti Cauchyho výsledku. Různými metodami integrace (pomocí neurčitých koeficientů, substitucí) funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ dospěl k výrazu $\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}l(x^2)+C$. Poté přešel k určitému integrálu a diskutoval výsledky integrace v závislosti na zvolených mezích. Ukázal, že hodnota

[178] Na stejné téma proslovil dne 23. června 1851 přednášku na zasedání *Královské české Společnosti nauk*, jejíž stručný výtah byl otištěn v Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, V. Folge, 7(1851–1852), str. 36.

[179] Viz Cauchy A.-L., *Résumé de leçons sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823; Grunert J. A., *Elemente der Differential- und Integralrechnung, zweiter Theil, Integralrechnung*, Leipzig, 1837; Schlömilch O. X., *Handbuch der Differential- und Integralrechnung, zweiter Theil, Integralrechnung*, Greifswald, 1847; Moigno F. N. M., *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, Tome 2, Calcul intégral*, Paris, 1844.

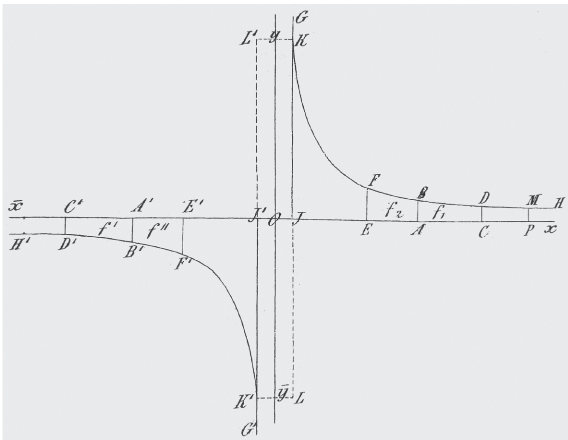
tohoto určitého integrálu závisí pouze na absolutních hodnotách krajních bodů intervalu.[180] Platí tedy:

$$\int\limits_{+a}^{+b} \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_{-a}^{+b} \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_{+a}^{-b} \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_{-a}^{-b} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2} l \left(\frac{b}{a}\right)^2 .$$

Názorně tak předvedl platnost rovnosti pro integrál uvažovaný na počátku a dále ukázal:

$$\int\limits_{-a}^{+a} \frac{1}{x}\,dx = 0.$$

Na závěr uvedl zajímavou aplikaci výše uvedeného integrálu v geometrii, když s ohledem na volbu znaménka integračních mezí podrobně analyzoval řešení úlohy:



... lassen wir in dem bekannten allgemeinen Integralausdrucke des Flächeninhaltes einer von einem ebenen Curvenbogen und den rechtwinkligen Coordinaten seiner Grenzpunkte begrenzten Figur

$$f = \int\limits_{x_0}^{X} y\,dx$$

diese Curve eine gleichaxige Hyperbel $GHH'G'$ (Taf. I. Fig. 1.) von der sogenannten Potenz k^2, folglich, für $OP = x$ und $PM = y$,

$$y = \frac{k^2}{x}$$

[180] Matzkovo odvození neodpovídá modernímu pojetí matematické analýzy, které je založeno na limitním procesu. Jeho výklad se opírá o názorné (geometrické) představy, což je však plně v souladu s přístupem, který byl používán v Matzkově době.

sein, wonach allgemein

$$f = k^2 \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x}$$

erfolgt. ([M38], str. 33–34, obr. 1, tab. I)

Základním otázkám infinitezimálního počtu W. Matzka věnoval také článek *Über fundamentale Functions-Grenzen der Analysis* [M66], který byl koncem 80. let 19. století otištěn v *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.*[181] Zabýval se v něm odvozením limity a derivace trojice elementárních funkcí – mocninné, exponenciální a logaritmické funkce. Po připomenutí základních pojmů (diference, diferenciál a derivace funkce) zavedl pro mocninnou funkci $f(x) = x^n$ derivaci ve tvaru $f'(x) = x^{n-1} \frac{u^n-1}{u-1}$ a ukázal, že limita $\lim_{u\to 1} \frac{u^n-1}{u-1} = n$ platí pro všechny hodnoty exponentu n ($n \in R, n \neq 0$). S využitím limit a vzájemných vztahů mocninné, exponenciální a logaritmické funkce pak odvodil derivace těchto funkcí.[182]

Logická výstavba matematiky

Pojednání nazvané *Betrachtungen einiger Gegenstände der Logik, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Mathematik* [M13] otištěné v časopise *Archiv der Mathematik und Physik* v roce 1845 sepsal W. Matzka zejména pro učitele vyšších škol. Poukázal na nedávný významný rozvoj logiky a zdůraznil naléhavost jejího užívání při výuce vyšší matematiky pro lepší uspořádání matematických vět a názornější způsob jejich důkazů.[183] Stávající situaci komentoval slovy:

[181] Článek *Über fundamentale Functions-Grenzen der Analysis* [M66] byl krátce po svém vydání hodnocen v referativním časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (viz 11(1879), str. 199). Recenzent F. Müller z Berlína jeho obsah shrnul takto: *Die Ermittelung der Grenzwerthe von Functionen, besonders der Potenz, der Exponentialfunction und des Logarithmus, welche gewöhnlich ein einleitendes Capitel der Differentialrechnung ausmacht, geschieht ohne inneren Zusammenhang und für jede der genannten Functionen gesondert, obwohl diese Functionen aus einander hervorgehen. Diesem systemwidrigen Mangel soll durch den vorliegenden Aufsatz abgeholfen werden. Zunächst wird gezeigt, dass die Grenzgleichung* $\lim_{u=1} \frac{u^n-1}{u-1} = n$ *für jede Zahl* u *und für jeden Werth des Exponenten* n *gilt. Aus dieser folgt die Grenzgleichung* $\lim_{\alpha=0} \frac{(1+\alpha)^n-1}{\alpha} = n$*; für solche* α*, die von Null verschieden sind, wird unter Benutzung eines ausgleichenden Factors* ϑ, $(1+\alpha)^n = 1+\vartheta\cdot n\alpha$ *gefunden. Mit Hülfe solcher ausgleichenden Factoren und Exponenten wird der Uebergang von Grenzgleichungen zu allgemein gültigen Gleichungen bewerkstelligt. Auf diesem Hülfsmittel beruht die Methode, die der Herr Verfasser bereits seit 1859 in seinen Vorträgen über algebraische Analysis und Differentialrechnung bei der Grenzbestimmung der drei Functionsgattungen benutzt.* O rok později byla práce [M66] citována také v referativním časopise *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* (viz 15-II(1880), str. 131). „Recenze“ však obsahuje jen odkaz na práci a překlad jejího názvu do francouzštiny: *Sur les limites de fonctions fondamentales en analyse.*

[182] Obdobná cvičení jsou dnes součástí základního kurzu matematické analýzy, viz např. [Vsl2], 1. díl.

[183] W. Matzka zároveň odkázal na některé významné práce věnující se „moderní“ logice, např. Drobisch M. W., *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachen Verhältnissen; nebst einem logisch-mathematischen Anhange*, Leipzig, 1836; Hauber F. C., *Scholae logico-mathematicae*, Stuttgart, 1829.

Allgemein erkennt man an … dass die Logik durch die Bemühungen der neueren meist deutschen Philosophen seit Kant, einen sehr hohen Aufschwung in ihrer Ausbildung genommen hat. Dessungeachtet folgen diejenigen Schriftsteller und Lehrer der Mathematik, welche ihre Lehrgegenstände ausführlich begründen, mit sehr geringer Ausnahme, noch immer der Weise Euklid's in den zwar für seine Zeit ganz vorzüglichen aber doch nicht unverbesserlichen Elementen der Geometrie; was um so weniger zu billigen zu sein scheint, als heut zu Tage besonders an gelehrten Schulen der Zögling schon eine höhere wissenschaftliche Vorbildung als vordem mitbringt und als man durch den ungeheuren Umfang, den die theoretische Mathematik schon erlangt hat, hauptsächlich auf übersichtliche und gedrängte Darstellung des Lerhgangen, jedoch ohne dabei die Deutlichkeit und Gründlichkeit ausser Acht zu lassen, hinzuarbeiten sich gedrungen sieht. ([M13], str. 353)

Podrobně se věnoval různým způsobům důkazů podle vhodnosti jejich užití v různých oblastech matematiky (algebra, trigonometrie, geometrie, analytická geometrie) a dalších přírodních vědách (mechanika, fyzika, astronomie). Pojednal o obráceném a opačném tvrzení, přímém a nepřímém důkazu a důkazu matematickou indukcí. Do výkladu zahrnul obecnou strukturu důkazů, výhody a nevýhody jejich použití a připojil názorná řešení konkrétních situací.

W. Matzka pokládal za nutné změnit přístup k vyučování vyšší matematiky, oprostit se od (až na výjimky) přetrvávajícího eukleidovského pojetí důkazů matematických tvrzení a přijmout modernější vědecké metody. Logicky provázaná struktura vět a důkazů v rámci jednotlivých oblastí měla studentům ulehčit pochopení vzájemných souvislostí.[184]

Durch einen solchen Vorgang drängt man nicht nur den Lehrgegenstand mehr zusammen – was bei dem gegenwärtigen Umfange der zu lehrenden Wissenschaften schon höchst Noth thut – sondern man verschafft auch dem Lernenden einen helleren Blick in die Natur des Lehrgegenstandes und in den Zusammenhang seiner Wahrheiten. ([M13], str. 355)

Z vyložených pravidel W. Matzka vyšel též v práci *Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie* [M18], v níž se za pomoci přísně logických zásad pokusil dokázat postulát rovnoběžnosti.[185]

Statistika

W. Matzka publikoval rovněž jeden článek o statistické problematice. Souvisel s rozvíjející se metodou nejmenších čtverců a byl otištěn pod názvem *Beweis des obersten Grundsatzes der Methode der kleinsten Quadrate* [M23] v roce 1848 v časopise *Archiv der Mathematik und Physik.*[186]

[184] Připomeňme, že problém logické výstavby matematiky a zejména její výuka jsou stále aktuálními otázkami didaktiky matematiky. Blíže se axiomatickou výstavbou matematiky a způsoby dokazování matematických vět v rámci středoškolské a vysokoškolské výuky zabývají [Kat] a [Sed].

[185] O práci [M18] je blíže pojednáno v kapitole *Geometrie*.

[186] K metodě nejmenších čtverců nezávisle na sobě počátkem 19. století dospěli německý

Vyšetřoval v něm tvrzení, o které se opírá metoda nejmenších čtverců: *Für eine zu bestimmende Grösse, welche x heissen mag, habe man durch Beobachtungen die Werthe a, b, c, … gefunden; man verlangt aus diesen Beobachtungswerthen die Grösse x selbst zu berechnen … Ist dann n die Anzahl dieser beobachteten Werthe, so ist der gesuchten Grösse wahrscheinlichster Werth*

$$= \frac{a+b+c+\dots}{n}$$

d. i. das arithmetische Mittel der Beobachtungswerthe. ([M23], str. 369–370, 375)

S využitím matematické analýzy dokázal, že nejpravděpodobnější výslednou hodnotou x několika stejně přesně provedených pozorování $a, b, c, \dots$ je jejich aritmetický průměr. Zájemce o hlubší studium metody nejmenších čtverců odkázal na práci *Über die Methode der kleinsten Quadrate* (1834), v níž Johann Franz Encke (1791–1865) ukázal (viz str. 260–262), že takový výraz musí platit již pro dvě pozorované hodnoty, tedy že $x = \frac{a+b}{2}$.[187]

Na Matzkův článek *Beweis des obersten Grundsatzes der Methode der kleinsten Quadrate* [M23] poukázal koncem 19. století významný matematik Emanuel Czuber (1851–1925), jehož odborná činnost v teorii pravděpodobnosti a statistice dosáhla evropské úrovně. Zmínil jej v práci pojednávající o aritmetickém průměru – *Zum Satze vom arithmetischen Mittel* [Cu2], v níž poznamenal:[188]

Versuche, die Hypothese des arithmetischen Mittels, auf welche Gauss seine erste Begründung der Methode der kleinsten Quadratsummen gestützt, auf einfachere Annahmen zurückzuführen, sind schon wiederholt unternommen worden … Es ist daher nicht ohne Interesse zu bemerken, dass auch Dr. W. Matzka schon im XI. Bande des »Archiv der Mathematik und Physik« von Grunert, (1848) … einen »Beweis des obersten Grundsatzes der Methode der kleinsten Quadrate« gegeben hat … ([Cu2], str. 305)

Rukopisy

V Národní knihovně České republiky je uložen rukopis nadepsaný *Sammlung von mathematischen Formeln* [Mr3], který pochází z Matzkova pera. Jelikož neuvádí místo a rok sepsání, lze se na základě obsahu jen domnívat, že souvisí

---

matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855) a francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Tato matematická metoda se používá ke statistickému zpracování dat s cílem nalézt vhodnou aproximační funkci pro dané empiricky zjištěné hodnoty (proložením naměřených dat přímkou, parabolou, polynomem předem daného stupně aj.), opírá se přitom o kritérium $S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = min$, kde x_i jsou naměřené hodnoty a $\overline{x}$ je jejich aritmetický průměr. O metodě nejmenších čtverců, jejím objevu a historickém vývoji viz [Kot].

[187] Metodě nejmenších čtverců se německý astronom J. F. Encke podrobně věnoval v trojici na sebe navazujících statí otištěných pod souhrnným názvem *Über die Methode der kleinsten Quadrate* v časopise *Astronomisches Jahrbuch*; tj. *Erste Abtheilung*, 59(1834), str. 249–304, *Zweite Abtheilung*, 60(1835), str. 253–320, *Beschluss*, 61(1836), str. 253–308.

[188] Pojednání [M23] E. Czuber uvedl také v přehledu literatury v rozsáhlé studii nazvané *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendung* [Cu1] (1899), v níž se věnoval teorii pravděpodobnosti v historickém kontextu.

s Matzkovým působením na pražské univerzitě. V tom případě se mohlo jednat o „zápisník“ poznámek k výuce a probírané učební látce. Obsah rukopisu je tématicky rozdělen do tří základních skupin – algebra a analýza, geometrie, sférická trigonometrie.[189]

Největší prostor W. Matzka věnoval vzorcům a větám z algebry a analýzy. Zaznamenal si např. vzorce pro rozklad mnohočlenů, pravidla pro počítání s aritmetickou a geometrickou řadou, rovnice pro obecné zápisy figurálních čísel, zásady kombinatoriky, základní pravidla integrálního počtu (rozvoj funkcí v řady, rozklad na parciální zlomky), podrobný výklad a užití binomické věty nebo metody řešení rovnic vyšších stupňů. Dále v krátkosti poznamenal některé vlastnosti elementárních geometrických útvarů (vztahy pro úhly a strany trojúhelníku, n-úhelníku apod.). Pokračoval přehledem vět a vztahů sférické trigonometrie, který doplnil výčtem nejužívanějších vzorců.

Další dochovaný matematický rukopis, jenž je uložený v Národní knihovně České republiky, je nadepsaný *Zweyter Theil, Die Integral-Rechnung* [Mr7]. V tomto případě se jedná o souvisle psaný text vypadající jako opis knihy.[190] Obsáhlý 135 stránkový text podává podrobný výklad teorie integrálního počtu jedné reálné proměnné; je pečlivě strukturován, dělen na kapitoly, oddíly a paragrafy, doplněn vzorci, názornými obrázky a souborem řešených úloh, demonstrujících užití integrálního počtu v geometrii.

* * * * *

Literatura

[B1] Bečvář J., *Algebra v 16. a 17. století*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.), Matematika v 16. a 17. století, edice Dějiny matematiky, svazek č. 12, Prometheus, Praha, 1999, 161–232.

[Be2] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 20, Prometheus, Praha, 2002.

[Cu1] Czuber E., *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **7** (1899), 271 stran.

[Cu2] Czuber E., *Zum Satze vom arithmetischen Mittel*, Astronomische Nachrichten **114** (1886), 305–307.

[Hea] Heath T. L., *The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary*, volume I–III, 2. edition, Dover Publications, New York, 1956.

[Ka] Kalousek J., *Děje král. české společnosti náuk spolu s kritickým přehledem publikací jejích z oboru filosofie, historie a jazykovědy*, Praha, 1885.

[Kot] Kotoučková H., *Historie robustních matematicko-statistických metod*, disertační práce, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2009.

[189] Rukopis [Mr3] je „sešit“ o 230 stranách; strany 1 až 58 a 67 až 69 jsou věnovány algebře a analýze, strany 91 až 94 geometrii, strany 186 až 189 a 206 až 221 sférické trigonometrii; mezi jednotlivými tématy jsou vynechány prázdné listy.

[190] Obsah rukopisu [Mr7] byl porovnán s řadou učebnic matematiky, které byly v průběhu 19. století užívány pro výuku infinitezimálního počtu; možnou předlohu Matzkova opisu se však nepodařilo zjistit.

[Mat] Matthiessen L., *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1878, 1001 stran.

[Sed] Sedláčková J., *Rozvíjení myšlení žáků ve vyučování matematice; vybrané partie z didaktiky matematiky*, Univerzita Palackého v Olomouci – Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 1993.

[Vsl2] Veselý J., *Matematická analýza pro učitele*, 1. a 2. díl, Matfyzpress, Praha, 1997, 452 stran.