Michaela Chocholová

Komplexní čísla

In: Michaela Chocholová (author); Ivan Štoll (author): Wilhelm Matzka (1798–1891). (Czech). Praha: Matfyzpress, 2011. pp. 86–97.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/402188`

VERSUCH

einer richtigen

Lehre von der Realität

der

vorgeblich imaginären Grössen der Algebra,

oder einer

GRUNDLEHRE

von der

Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen,

unternommen

von

WILHELM MATZKA,

Doctor der Philosophie, k. k. öffentl. ordentl. Professor der Mathematik und praktischen Geometrie an dem k. böhm. ständischen polytechnischen Institute zu Prag, vordem Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow, emeritirtem Lieutenant und Lehrer der höheren Mathematik und Mechanik im k. k. Bombardier-Corps zu Wien, Mitglied der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.

Mit drei Figurentafeln.

PRAG, 1850.

In Commission der **J. G. Calve'**schen Buchhandlung.

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Stručný nástin historie komplexních čísel

Komplexní čísla se poprvé objevila v 16. století při řešení algebraických rovnic u italských matematiků Gerolama Cardana (1501–1576) v knize *Ars magna* (1545) a Rafaela Bombelliho (1526–1572) v knize *L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica* (1572).

V průběhu 17. a 18. století s komplexními čísly pracovalo mnoho matematiků. Zejména Albert Girard (1595–1632), známý tím, že jako jeden z prvních vyslovil tzv. základní větu algebry, René Descartes (1596–1650), který užil termínu *imaginární číslo*, Isaac Newton (1643–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Abraham de Moivre (1667–1754), Leonhard Euler (1707–1783), jenž pro $\sqrt{-1}$ zavedl symbol i, a další.[136]

Koncem 18. století již komplexní čísla v matematice a fyzice zaujímala důležitější místo. Přesto však ještě stále nebylo jasné, jak prvek $\sqrt{-1}$ chápat a jak si komplexní čísla představit. Chybělo to, čemu dnes říkáme geometrická interpretace komplexních čísel, tj. představa o komplexních číslech jako bodech roviny.

První myšlenky o vztahu komplexních čísel a bodů roviny se objevily u anglického matematika Johna Wallise (1616–1703) v knize *Treatise of algebra, both historical and practical with some additional treatises* (1685), která vyšla roku 1693 také latinsky pod názvem *De algebra tractatus*; nevzbudily však tehdy téměř žádný ohlas.

O více než sto let později norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745–1818) v knize *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg anvendt fornemmeling til plane og sphaeriske Polygoners Opløsning* (1799) věnující se řešení geodetických úloh rozpracoval vektorový počet v rovině a podal geometrickou interpretaci komplexních čísel a jejich operací jako bodů či vektorů roviny. I jeho práce zůstala bez odezvy; patrně proto, že byla otištěna v dánštině. Teprve roku 1897 byla vydána francouzsky pod názvem *Essai sur la représentation analytique de la direction*, roku 1999 vyšla anglicky pod názvem *On the Analytical Representation of Direction*.

Švýcarský matematik Jean Robert Argand (1768–1822) v knize *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806) interpretoval $\sqrt{-1}$ jako otočení roviny o $90°$; inspirován byl vztahem $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$.

K všeobecnému rozšíření a uznání komplexních čísel a jejich geometrické interpretace došlo až ve 20. a 30. letech 19. století zejména pod vlivem prací Augustina-Louise Cauchyho (1789–1857) *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* (1821) a Carla Friedricha Gausse (1777–1855) *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda* (1831), v nichž byla vybudována teorie

[136] Připomeňme, že nutným předpokladem základní věty algebry je uznání záporných a komplexních čísel.

komplexních čísel a jejich geometrické interpretace. Zcela přirozeně byla přijata také aritmetika komplexních čísel v algebraickém i goniometrickém tvaru.

Modifikaci Gaussova pojetí komplexních čísel provedl William Rowan Hamilton (1805–1865), který je považoval za dvojice reálných čísel.

Připomeňme jen, že množina komplexních čísel s operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní těleso. Imaginární jednotka i se formálně zavádí jako číslo splňující rovnici $i^2 + 1 = 0$ (tedy platí základní rovnost $i^2 = -1$). Komplexní číslo tvaru $x + yi$ je v rovině s kartézskými souřadnicemi znázorněno bodem $Z[x, y]$ nebo vektorem $\overrightarrow{OZ}$ vedeným z počátku kartézské soustavy souřadnic O do bodu Z.

Geometrická interpretace komplexních čísel a způsob, jakým jsou komplexní čísla vytvořena z čísel reálných, tj. „zdvojením“ oboru reálných čísel, v 19. století postupně vedly k úvahám o strukturách vícesložkových čísel, kterým se začalo říkat čísla hyperkomplexní.[137]

Komplexní čísla v Matzkově díle

Aktuální problematika komplexních čísel zaujala také W. Matzku. Ten se na jaře roku 1832 prostřednictvím svého učitele a přítele Andrease von Ettingshausena (1796–1878) seznámil s výše zmíněným Gaussovým dílem *Theoria residuorum biquadraticorum*, které se pro něj stalo prvním podnětem k hlubšímu zájmu o komplexní čísla a inspirací k sepsání práce [M29]. W. Matzka se snažil některé Gaussem naznačené úvahy dále rozvést a zdůvodnit. Při psaní práce se však potýkal s různými těžkostmi (např. nedostatek odborné literatury a vážné rodinné problémy), a tak se mu ji podařilo definitivně dokončit až v prosinci roku 1847.

V práci *Versuch einer richtigen Lehre von der Realitaet der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen* [M29] vydané *Královskou českou Společností nauk* v Praze roku 1850, W. Matzka vyložil teorii komplexních čísel od jejich zavedení přes popis základních vlastností a operací až po rozmanité matematické aplikace. Kniha má 182 stran textu (předmluva, úvod a 7 kapitol) a 3 strany grafických příloh, které obsahují téměř 50 obrázků, náčrtů a schémat.

Spis začíná těmito slovy:

Der Gegenstand vorliegender Schrift, Nachweis der Realität der für imaginär erklärten, oder Erweis der Möglichkeit und Darstellbarkeit der für unmöglich ausgegebenen algebraischen Grössen, welcher schon seit mehr denn einem Jahrhundert von verschiedenen Mathematikern in Erwägung gezogen und – wenn gleich anfangs ohne allen, später mit nur geringem Erfolg – zur öffentlichen Besprechung vorgebracht worden war ... ([M29], str. 1)

Kniha byla psána a vydána v době, kdy se komplexním číslům pozvolna dostávalo širšího obecného pochopení. Byla určena nejen pro matematiky, nýbrž také pro začátečníky, studenty a přátele matematiky. Byla koncipována

[137] O historii komplexních a hyperkomplexních čísel více viz [B1], [B2], [B3], [B4], [B5], [Co2], [Fla], [Gr], [Kl], [Ma], [Wa1] a [Wa2].

podrobně, aby v ní i začátečníci a laici nalezli dostatečný výklad dané problematiky a aby znalí čtenáři mohli nadbytečné pasáže přeskočit, aniž by ztratili hlavní myšlenku.

V první kapitole W. Matzka „připravil půdu“ pro hlavní téma tím, že nejprve pojednal o kladných a záporných číslech a základních aritmetických operacích.

Druhou kapitolu věnoval „důkazu“ existence imaginárních čísel v algebře. Zajímavá je jeho snaha osobitým způsobem (pomocí „příkladů ze života“) ukázat, že se v algebře obecně vyskytují čísla stojící mimo označení $+$ a $-$, tedy ani kladná, ani záporná, a která jsou proto často označována jako něco imaginárního, pomyslného, zdánlivého či „reálně neexistujícího“.[138]

K ilustraci existence imaginárního W. Matzka použil následující příměr založený na vnímání peněz:

Ist die algebraisch zu betrachtende Grösse Geld eines gewissen Jemands, so nennen wir es nach Umständen im gewöhnlichen Leben theils Vermögen, theils Schuld, und in der algebraischen Rechnung theils positives theils negatives Geld dieses Jemands. Folgt nun daraus schon: „Alles Geld, das es gibt, das denkbar oder möglich ist, muss entweder positives oder negatives Geld, Vermögen oder Schuld dieses besondern Jemands sein?“ oder: „Ein Geld, das angeblich weder positiv noch negativ ist, also weder zum Vermögen noch zur Schuld dieses Jemands gehört, ist undenkbar oder unmöglich?“ Gibt es nicht auch noch Geld, das diesen Jemand gar nichts angeht? von dessen Existenz weder er noch irgend einer etwas weiss, z. B. vergrabenes? Und kann nicht selbst das Geld, das ihn angeht, doch immer noch ein solches sein, dass man es weder zu seinem Vermögen noch zu seiner Schuld rechnen kann? z. B. das Geld, von dem er schlafend oder wachend träumt, oder das er in einer Erbschaft zu gewinnen hofft, oder das er zu verlieren fürchtet, oder welches einem seiner nahen von ihm zu beerbenden Blutsverwandten zuwächst oder verloren geht; u. m. dgl. ([M29], str. 20)

Ve třetí kapitole zavedl komplexní čísla a vysvětlil jejich značení. Místo (dnešního) označení komplexní jednotky symbolem i, které užíval C. F. Gauss, používal W. Matzka symbol $\downarrow$.

Der Buchstabe i wird wie das Pfeilzeichen $\downarrow$ auch mit zwei Federstrichen geschrieben, bietet also in der Schnelligkeit des Schreibens keinen Vortheil vor diesem. ([M29], str. 45)

Základní rovnost $i^2 = -1$ řádně nedefinoval; zavedl obecná pravidla pro práci s komplexními čísly, z nichž rovnost intuitivně vyplývá.

Alle Positivzeichen $+$ übergeht man gänzlich, oder wirft sie weg, gleichsam als nichts bestimmend.

---

[138] F. Riecke hodnotí Matzkův přístup k „důkazu“ existence imaginárního jako původní a velmi záslužný. *Das Eigenthümliche und Verdienstliche bei Matzka besteht aber, neben dem stofflichen Reichthum seiner Schrift, besonders in dem Bestreben, gleich von vorn herein nachzuweisen, wie in der Algebra überhaupt (ohne alle Rücksicht auf Raumgrössen) neben dem Gegensatz von $+$ und $-$ abweichende Beziehungen aller Art vorkommen, man also nicht berechtigt sey, Zahlen, die weder positiv noch negativ sind, schon desshalb als etwas Imaginäres, nicht Existierendes zu bezeichnen.* ([Ri], str. 166)

Die Transversivzeichen $\downarrow$ zieht man paarweise (je zwei und zwei) in ein Negativzeichen $-$ zusammen, und notirt nur ein etwa allein noch übrig bleibendes $\downarrow$ unmittelbar vor dem Producte.

Die so erhaltenen und die schon ursprünglich vorhandenen Negativzeichen $-$ wirft man paarweise weg, weil ein solches Paar durch ein $+$ zu ersetzen wäre, das wegzuwerfen ist; nur ein etwa allein übrig bleibendes $-$ wird dem Producte vorgeschrieben, entweder unmittelbar vor selbes oder vor das ihm schon vorgesetzte $\downarrow$. ([M29], str. 47–48)

Algebraický tvar komplexního čísla zavedl v duchu přístupu A.-L. Cauchyho a C. F. Gausse:

Ein solches Aggregat oder Binom $A + \downarrow B$, aus einer direct und aus einer transversiv beziehlichen Grösse bestehend, pflegt man nach Gauss und Cauchy eine complexe Grösse oder Zahl, und die aggregirten Grössen A und $\downarrow B$ die Glieder, Aggreganden, Antheile derselben zu nennen. ([M29], str. 51)

Následně definoval algebraický tvar komplexních čísel, popsal jejich vlastnosti a zavedl operace s nimi (sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnění v podobě druhé a třetí mocniny dvojčlenu).

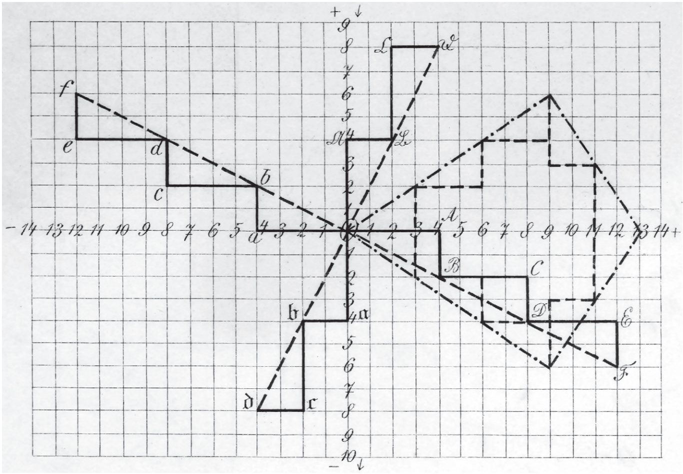
Ve čtvrté kapitole zavedl goniometrický tvar komplexního čísla a vysvětlil operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru. Pro lepší pochopení nejprve zopakoval základní vlastnosti goniometrických funkcí, ukázal aproximaci Ludolfova čísla π a uvedl Moivreovu větu pro výpočet n-té mocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru.

V době, kdy W. Matzka psal tento spis, se geometrická konstrukce „imaginárního“ stále potýkala s jistou nedůvěrou. Proto zaměřil celou pátou kapitolu, která tvoří téměř třetinu knihy, právě na geometrickou aplikaci Gaussových myšlenek. Po uvedení základních principů analytické geometrie a souvislostí s komplexními čísly (zobrazování v rovině a prostoru, pravoúhlé a polární souřadnice, posunutí a otočení os souřadnic, výpočet vzdálenosti bodů, rovnice kuželoseček atd.) podrobně vysvětlil geometrické znázornění komplexních čísel a jejich operací (grafické sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnění a odmocňování) v rovině. Uvedl obecně platná pravidla; často užíval propojení algebry a geometrie, nejprve provedl aritmetický výpočet a poté graficky znázornil výsledek. Vše navíc ukázal na kokrétních příkladech a názorných schématech. Ocitujme nyní Matzkův popis grafického znázornění komplexního čísla $4 - 2i$ a konstrukce jeho trojnásobku.

Ist eine complexe Anzahl, z. B. $+\,4 - \downarrow 2$, *mit einer absoluten, z. B.* 3, *zu multipliciren, so heisst diess, man solle gerade so, wie man* $+\,4 - \downarrow 2$ *zählte, nämlich* 4 *vorwärts und* 2 *rechts, von da an, wo man stehen geblieben war, noch weiter ein* 2^{tes} *und ein* 3^{tes} *Mal zählen. Es ist also das Product*

$$(4 - \downarrow 2)\cdot 3 = (4 - \downarrow 2) + \overline{(4 - \downarrow 2)} + \overline{(4 - \downarrow 2)} = 4\cdot 3 - \downarrow 2\cdot 3 = 12 - \downarrow 6 = \overline{OAB}\cdot 3 = \overline{OAB} + \overline{BCD} + \overline{DEF} = \overline{O(12)} - \downarrow \overline{(12)F} = \overline{O(12)F},$$ *in Fig. 23.*

Anstatt 4 *vorwärts* $(+\,4)$ *von O bis A, und* 2 *rechts* $(-\downarrow 2)$ *von A bis B zu zählen, kann man auch schräg von O nach B zählen. Folglich kann man anstatt* *jene rechtbrüchige Zählweise* 3*mal auszuführen, diese schräge, nach ihrer Richtung* OB, 3*mal vollziehen. Auch so schräg zählend kommt man wieder nach* F. ([M29], str. 111, obr. 23)



Na posledních 17 stranách páté kapitoly podal historický přehled matematických prací, které byly dosud věnovány geometrické interpretaci imaginárních čísel, a s nimiž byl W. Matzka patrně dobře seznámen. Po řadě jsou uvedeni: Heinrich Kühn (1690–1769), Adrien-Quentin Buée (1748–1826), C. V. Mourey, John Warren (1796–1852), C. F. Gauss a někteří jeho pokračovatelé. V závěru W. Matzka upozornil ještě na Hamiltonovy práce o kvaternionech, tj. oboru čtyřsložkových čísel rozšiřujícím obor komplexních čísel, z let 1844–1846.[139] Nejen v této části, ale v průběhu celé knihy W. Matzka pečlivě citoval zdroje a odkazoval na práce jiných matematiků, což v jeho době nebylo příliš typické.

V šesté kapitole se zabýval geometrickým „důkazem" základní věty algebry, která v té době inspirovala matematiky ke studiu algebry, hledání nových důkazů (viz C. F. Gauss) apod. V úvodu vyložil několik způsobů geometrického zobrazení funkcí jedné proměnné, jež následně použil. „Důkazy" základní věty algebry naznačil tři. První dva velmi podrobně. Byl k nim inspirován pojednáními uveřejněnými v matematických časopisech *Archiv für Mathematik und Physik* a *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.[140] Uvedené

[139] F. Riecke kladně hodnotí pečlivost a důkladnost, s níž W. Matzka uvedený přehled zpracoval, a poznamenává, že některé z jeho poznámek převzal do svého spisu. *Mit besonderer Sorgfalt und Ausführlichkeit findet sich bei Matzka auch das Geschichtliche des Gegenstandes und mehrere der obigen literarischen Notizen sind von mir dieser Schrift entnommen.* ([Ri], str. 166–167)

[140] Wittstein T., *Geometrischer Beweis des Satzes, dass jeder allgebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann*, Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten 6(1845), str. 225–238. Ullherr J. C., *Zwei Beweise für die Existenz der Wurzeln der höhern algebraischen Gleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 31(1846), str. 231–234.

důkazy upravil, doplnil a komentoval. Třetí důkaz výše uvedené věty pouze naznačil a připojil odkaz na jeho plné provedení v Gaussově disertační práci.[141]

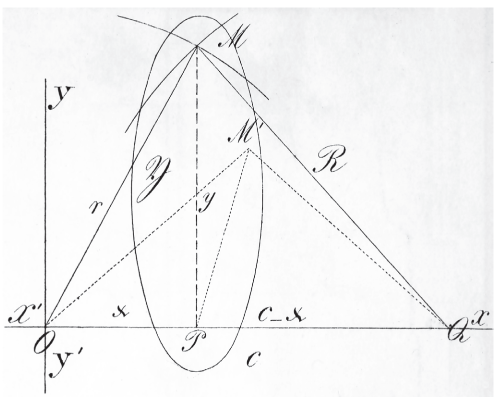
Die so eben erörterte Lehre von der Abbildung des stetigen Laufes der Veränderung zweier zusammenhängenden Veränderlichen findet eine hochwichtige Anwendung bei dem geometrischen Erweise folgenden Fundamentalsatzes der Lehre von den höheren algebraischen Gleichungen.

Jede algebraische Gleichung mit Einer Unbekannten hat überhaupt wenigstens Einen complexen – ablenkend beziehlichen – Wurzelwerth.

Ist nämlich $y = f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x + A_n = 0$ *die gegebene Gleichung, mögen ihre Coefficienten* $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$*, reell oder complex – direct oder ablenkend beziehlich – sein: so muss es gewiss einen complexen – ablenkend beziehlichen – Werth für x geben, welcher der Bedingung* $f(x) = 0$ *Genüge leistet.* ([M29], str. 159)

Závěrečnou sedmou kapitolu tvoří dvě části. V první z nich W. Matzka rozpracoval čtyři úlohy, které již v zadání záměrně obsahují nápadnou početní chybu nebo mylný úsudek. Tyto problémy poté studoval z různých úhlů a podrobil je (mnohdy až rozvláčné) diskuzi. Jejich smyslem a přínosem mělo být doplnění a upřesnění geometrické konstrukce imaginárních čísel a plné proniknutí do této problematiky. Druhou část věnoval analýze obecného řešení algebraických slovních úloh (sestavení a řešení algebraické rovnice, závěrečná diskuze řešení).

Pro ilustraci stručně naznačme rozbor čtvrté z prezentovaných úloh (str. 168–169, obr. 46) zabývající se tvrzením, že *přímka určená průsečíky dvou kružnic v rovině je reálná i za předpokladu, že vzájemná vzdálenost středů těchto kružnic je větší než součet jejich poloměrů.*



[141] C. F. Gauss ve své disertační práci *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Univerzita Helmstedt, 1799) jako první podal matematický důkaz základní věty algebry. Pravděpodobně kvůli jeho nepříliš příznivému přijetí přišel během svého života ještě s třemi dalšími; poslední z roku 1849 je z pohledu dnešní matematiky považován za matematicky zcela rigorózní.

Pro rovnice kružnic $x^2 + y^2 = r^2$ a $(c-x)^2 + y^2 = R^2$, kde r a R jsou poloměry kružnic a c je vzdálenost jejich středů, diskutoval podmínky určující jejich průsečík

$$x = \frac{c^2 + r^2 - R^2}{2c},\ y = \pm\frac{1}{2c}\sqrt{(c+r+R)(c+r-R)(c+R-r)(R+r-c)},$$

přičemž existence dvou reálných průsečíků, tedy existence reálné přímky tyto průsečíky spojující, je podmíněna splněním trojúhelníkové nerovnosti pro parametry r, R, c. Je-li $c > R + r$, vyjde souřadnice y jako komplexní číslo atd.[142]

W. Matzka doufal v uznání a rozšíření svého spisu a v zařazení jím uvedených myšlenek do budoucích učebnic algebry a geometrie. O práci napsal:

Die Behandlung und Darstellung meiner Lehre betreffend war ich sorgfältigst bemüht, alle Grundbegriffe durch gerechtfertigte Erklärungen vollkommen festzustellen, die auf sie gestützten Lehrsätze folgerecht zu reihen, sämmtliche Beweise mit strengster Gründlichkeit zu führen, und jeden nur einiger Massen schwierigen und strittigen Gegenstand aufs umständlichste zu erörtern. Zugleich leitete ich das Ganze so ein, dass die eigentliche Lehre von der Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen, das Potenziren nach ablenkend beziehlichen Exponenten mit der von ihr bedingten analytischen Goniometrie, und die auf letztere gestützte vollständige Lehre von den höheren algebraischen Gleichungen in die Lehrbücher der Algebra, wohin sie doch eigentlich gehören; dagegen die Lehre von der räumlichen Darstellung der ablenkenden Grössenbeziehungen in die Lehrbücher der Geometrie aufgenommen werden können; wenn dereinst diese neuen Ansichten – wie ich wünsche und hoffe – genug Beifall und Verbreitung sich errungen haben werden. ([M29], str. 4–5)

Odborná hodnocení a citace Matzkova díla

Matzkova práce [M29] byla citována a kladně hodnocena již krátce po svém vydání. Roku 1854 na ni nacházíme (v souvislosti s vývojem komplexních čísel) odkaz ve spisech *Londýnské Královské Společnosti* (*The Royal Society of London*).[143]

Friedrich Riecke (1794–1876), profesor matematiky v Hohenheimu, roku 1856 uveřejnil poměrně obsáhlou učebnici komplexních čísel [Ri], která navíc

---

[142] Výše uvedený vztah platí také pro $c < |R - r|$, což však W. Matzka neuvedl.

[143] Viz Abstracts of the papers communicated to the Royal Society of London VI(1850–1854), London, 1854, str. 259. V odstavci věnovaném životu a dílu Johna Warrena (1796–1852) jsou v souvislosti s vývojem komplexních čísel zmíněni i další matematikové a je odkázáno na Matzkův spis, v němž podal historický přehled matematických prací věnovaných geometrické interpretaci komplexních čísel. *The names of Buée, Warren, and Mourey are generally associated as having taken the lead in a department of mathematics, which in the present day (... An account of several recent works upon this subject may be found in Wilhelm Matzka, Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra, 132–139, 4to, Prag, 1850.) has received remarkable elucidations, developments and accessions at the hands of Gauss, Sir W. R. Hamilton, Professors Peacock, the late D. F. Gregory, De Morgan, C. Graves, and others.*

obsahovala zajímavý dodatek s přehledem prací dosud věnovaných této tématice. Právě v něm je hodnocen Matzkův spis, jehož historická část byla pro autora inspirací k sepsání výše zmíněného dodatku.[144]

Stručná recenze naznačující základní ideu a obsah spisu [M29] byla otištěna roku 1872 ve francouzském matematickém časopise *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques.*[145]

Alexander Macfarlane (1851–1913), generální tajemník *International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics* (rovněž *The Quaternion Society*), uveřejnil v roce 1904 bibliografický přehled všech dosavadních odborných prací o kvaternionech a příbuzných matematických oblastech [Ma], který uvádí i Matzkovu práci [M29] (viz str. 54).

Julian Lowell Coolidge (1873–1954), profesor matematiky v Harvardu, vydal roku 1924 monografii věnovanou geometrii komplexního oboru [Co2]. V první kapitole se zabýval vývojem komplexních čísel a odkázal též na cennou historickou část spisu [M29].[146]

Odkazy na Matzkův spis [M29] nalézáme v souvislosti s analýzou historie prací o komplexních číslech také v současné literatuře. Roku 2003 Dominique Flament publikoval rozsáhlou francouzsky psanou monografii o historii komplexních čísel [Fla], v níž je W. Matzka několikrát citován. Odkazováno však není na matematické výsledky jeho spisu, nýbrž opět jen na část páté kapitoly s historickým přehledem prací o komplexních číslech.

J. Houël, dans Théorie élémentaire des quantités complexes, s'inspira de l'étude faite par W. Matzka pour analyser les bases sur lesquelles reposaient les explications de Kühn. ([Fla], str. 104)

Zdůrazněme fakt, že v době, kdy W. Matzka sepisoval knihu o komplexních číslech [M29], nebyla mnohá, dnes již klasická díla obecně známa, rozšířena či uznávána; tak W. Matzka kupříkladu nebyl seznámen s prací J. R. Arganda, na což poukazuje D. Flament.

C'est une telle considération qui permet de comprendre qu'un Mourey ou un Warren réinventent en 1828 la représentation géométrique de ≪Wessel-

[144] F. Rieckeho hodnocení Matzkovy práce viz poznámky číslo 138 a 139.

[145] Viz Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 3(1872), str. 170. *W. Matzka a publié, en 1850, dans les Mémoires de la Société des Sciences de Bohéme, un long Mémoire sur la Théorie géométrique des quantités prétendues imaginaires* ([M29]). *Il revient ici sur le même sujet, en prenant pour point de départ le principe de la séparation d'une équation hétérogène en deux équations homogènes, qui correspond, dans le langage habituel, à la séparation du réel et de l'imaginaire. Après avoir exposé les principes de la Théorie des sommes géométriques, il les applique à la Géométrie et à la Mécanique, en traitant d'abord des systèmes plans, puis des systèmes dans l'espace.*

[146] *The best historical account of the subject-matter of the present chapter is that of Ramorino, "Gli elementi imaginarii nella geometrica", Battaglini's Giornale di matematica, vols. xxxv and xxxvi, 1897 and 1898. See also Beaman, "A Chapter in the History of Mathematics", Proceedings American Association for the Advancement of Sciences, vol. xlvi, 1897, and Matzka, Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen, Prag, 1850, pp. 137–47; Hankel, Vorlesungen über complexe Zahlen, Leipzig, 1869, p. 19.* ([Co2], str. 13)

Argand ≫, ou qu'un Matzka ignore tout simplement, en 1850, alors qu'il fait l'historique de ce sujet, l'existence d'Argand. ([Fla], str. 165)

W. Matzka dans son ouvrage, ([M29]), *alors qu'il n'attache pas d'intérêt à l'Essai d'Argand, fait une étude plus détaillée du travail de Mourey que de celui de Gauss.* ([Fla], str. 231)

Shrnutí Matzkových výsledků

Matzkova práce [M29] (Praha, 1850) byla ve své době jedinečná a výjimečná z hlediska volby i zpracování tématu. Odborné práce o komplexních číslech se v polovině 19. století u našich matematiků prakticky nevyskytovaly. Teprve koncem 70. let sepsal Jan Plašil (1844–1930), profesor na reálce v Litomyšli, krátký příspěvek o jejich významu ve fyzice (viz [Pla]) a počátkem 90. let uveřejnil Matyáš Lerch (1860–1922), soukromý docent na české technice v Praze, článek o didaktice komplexních čísel (viz [Le]). Zmiňme také aktivity Františka Josefa Studničky (1836–1903), profesora matematiky na pražské univerzitě, který se ve druhé polovině 19. století věnoval kvaternionům. V průběhu 70. až 90. let o nich publikoval 9 více či méně rozsáhlých česky a německy psaných článků. Veškeré výsledky pak shrnul v knize nazvané *O kvaternionech* (Praha, 1894), která byla první samostatnou česky psanou publikací pojednávající o tomto tématu.[147]

Po všeobecném přijetí a rozšíření užívání komplexních čísel v našich domácích matematických kruzích se jim přirozeně dostalo prostoru také ve školách. Komplexní čísla se vyučovala nejen na univerzitě, ale od roku 1849, podle Exner-Bonitzova programu, rovněž na vyšším stupni středních škol.[148] Problematika komplexních čísel se v různém rozsahu vyučuje na většině středních škol dodnes.

Zavedení komplexních čísel do učebních osnov se stalo impulsem k zařazení tohoto tématu do učebnic algebry, početních sbírek a k sepisování specializovaných učebnic (viz např. [M29] a [Ri]). V následujících desetiletích vznikla celá řada takových knih. Zaměřme se na učebnice algebry vydané na našem území. V 50. a 60. letech 19. století byla komplexní čísla zpravidla součástí kapitoly o mocninách a odmocninách, v níž byla jako „sudá odmocnina ze záporného čísla" zavedena tzv. čísla *nemožná* nebo *pomyslná*. Výklad obvykle zahrnoval pouze algebraický tvar komplexního čísla a základní aritmetické operace.[149] S postupem času byl komplexním číslům věnován větší prostor, výklad byl však stále omezen jen na jejich algebraický tvar.[150] Od 80. let 19. století se v učebnicích algebry objevovaly samostatné rozsáhlé kapitoly, v nichž bylo o komplexních číslech pojednáno způsobem, jaký je obvyklý dnes. Zmiňme učebnice

[147] Studničkovy aktivity v teorii kvaternionů hodnotí [Be3].

[148] Více o nové organizaci středních škol a náplni vyučovaných předmětů viz Bonitz H., Exner F. F., *Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Oesterreich*, Wien, 1849; o vyučování komplexním číslům na středních školách viz [Nem].

[149] Viz učebnice Christiana Dopplera (1803–1853) [Dop], Josefa Fleischera (?–1882) [Fle] a Václava Šimerky (1819–1887) [Ši].

[150] Viz učebnice Josefa Smolíka (1832–1915) [Smo].

Františka Machovce (1855–1892) [MaF] a F. J. Studničky [Stu1], v nichž byla komplexní čísla zavedena v algebraickém i goniometrickém tvaru, vyloženy operace s nimi (včetně n-té mocniny) a vysvětleno jejich geometrické znázornění v rovině.

Matzkova práce [M29] z dnešního pohledu obsahově (až na některé paragrafy) významně nepřesahuje učivo zahrnuté v současných středoškolských učebnicích. Ve srovnání s nimi se však vyznačuje odlišnou prezentací, podrobnějším rozpracováním tématu a znatelným důrazem na vzájemné souvislosti matematického učiva. Díky historickému přehledu prací o komplexních číslech (viz pátá kapitola) byla navíc v matematické komunitě velmi dobře známa a často citována. Poznamenejme, že roku 2010 byla po 160 letech znovu vydána, což ukazuje její odborný a historický význam.[151]

* * * * *

Literatura

[B1] Bečvář J., *Algebra v 16. a 17. století*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.), Matematika v 16. a 17. století, edice Dějiny matematiky, svazek č. 12, Prometheus, Praha, 1999, 161–232.

[B2] Bečvář J., *Normované algebry a součty čtverců*, in Fuchs E. a kol., Světonázorové problémy matematiky IV, SPN, Praha, 1987, 17–30.

[B3] Bečvář J., *Teorie algeber*, in Folta J. (ed.), Filozofické a vývojové problémy matematiky 2, Praha, 1988, 93–111.

[B4] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 35, Matfyzpress, Praha, 2007.

[B5] Bečvář J., *150 let od objevu kvaternionů*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **38** (1993), 305–317.

[Be3] Bečvářová-Němcová M., *František Josef Studnička (1836–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha, 1998.

[Co2] Coolidge J. L., *The geometry of the complex domain*, The Clarendon Press, Oxford, 1924.

[Dop] Doppler Ch., *Arithmetik und Algebra. Mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des praktischen Lebens und der technischen Wissenschaften. Nebst einem Anhange von 450 Aufgaben*, 1. vydání, Wien, 1844, 322 stran.

[Fla] Flament D., *Histoire des nombres complexes*, Paris, 2003.

[Fle] Fleischer J., *Mathematika. Učební kniha pro vyšší reální školy a gymnasia. První díl Algebra*, Brno, 1862, 388 stran.

[Gr] Green D. R., *The historical development of complex numbers*, The Mathematical Gazette **60** (1976), 99–107.

[Kl] Kline M., *Quaternions, Vectors, and Linear Associative Algebras*, in Kline M., Mathematical Thought from Ancient to modern times, Oxford University Press, New York, 1972, 772–794.

[Le] Lerch M., *K didaktice veličin komplexních*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **20** (1891), 265–269, 302–308.

[Ma] Macfarlane A., *Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics*, Dublin, 1904.

[MaF] Machovec F., *Algebra pro vyšší třídy škol středních. Vydání pro reálky*, Praha, 1886, 423 stran.

[151] Reprint, Nabu Press, 2010, 192 stran.

[Nem] Němečková M., *Vývoj vyučování komplexním číslům na českých středních školách od Exner-Bonitzova programu (1849)*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2002.

[Pla] Plašil J., *Fysikální příspěvek k nauce o veličinách imaginárních*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **7** (1878), 173–175.

[Ri] Riecke F., *Die Rechnung mit Richtungszahlen oder die geometrische Behandlung imaginärer Grössen*, Stuttgart, 1856, 170 stran.

[Smo] Smolík J., *Algebra pro střední školy*, Nákladem kněhkupectví I. L. Kober, Praha, 1870, 287 stran.

[Stu1] Studnička F. J., *Algebra pro vyšší třídy škol středních*, Praha, 1877, 192 stran.

[Ši] Šimerka V., *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia*, Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra, Praha, 1863, 169 stran.

[Wa1] van der Waerden B. L., *A History of Algebra, From al-Khwárizmí to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[Wa2] van der Waerden B. L., *Hamilton's discovery of quaternions*, Mathematics Magazine **49** (1976), 227–234.