ZUR LEHRE

der

PARALLELPROJECTION und der FLÄCHEN.

Von

Prof. Dr. Wilhelm Matzka,

ordentl. Mitgliede der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften.

Mit 13 Holzschnitten.

PRAG.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.

1874.

GEOMETRIE

Stručný nástin historie geometrie

První geometrické zkušenosti lidé získávali v souvislosti s činnostmi a potřebami všedních dnů. Při budování cest a vodních příkopů, vyměřování polí, stavbě chrámů a obydlí uplatňovali elementární geometrické vztahy. Zpočátku jistě spíše nevědomky, s postupem času začali užívat první logické úvahy.

Na vysokou míru abstrakce dospělo studium geometrie v antickém Řecku. V tomto období vznikla také jedna z nejvýznamnějších geometrických prací – *Základy* (asi 300 př. n. l.), v nichž Eukleides z Alexandrie (asi 340 až 280 př. n. l.) podal souhrnný přehled většiny tehdejších matematických výsledků.[103] Vyšel ze systému definic, postulátů a axiomů a užitím dedukce vyvodil řadu matematických tvrzení. Geometrie obsažená v *Základech* je dnes označována jako eukleidovská. Jako jediná známá geometrie byla prakticky až do 17. století v centru zájmu celé řady matematiků a dodnes tvoří základ výuky na základních a středních školách.

Z dalších významných výsledků a problémů antického období připomeňme objev nesouměřitelnosti úseček, Eudoxovu teorii proporcí, Eukleidův postulát o rovnoběžkách či klasické problémy antické matematiky (duplikace krychle, trisekce úhlu, rektifikace kružnice, kvadratura kruhu), které významně ovlivnily vývoj geometrie.

Spolu s astronomií a geometrií se rozvíjela rovněž sférická a rovinná trigonometrie. Již v období starověku a středověku se objevovaly první krátké trigonometrické práce a rozsáhlé tabulky. Sepsání první samostatné (na astronomii nezávislé) učebnice trigonometrie spadá v Evropě až do 15. století. Německý matematik a astronom Johannes Müller von Königsberg (1436–1476), zvaný Regiomontanus, podal v díle nazvaném *De triangulis omnimodus* (1464) ucelený přehled většiny tehdejších výsledků, představující systematický úvod do studia základů trigonometrie. Významným dílem moderní trigonometrie se stal spis *Introductio in Analysin Infinitorum* (Lausanne, 1748), v němž ji Leonhard Euler (1707–1783) zavedl jako nauku o goniometrických funkcích ve smyslu, jak ji chápeme dnes.

Od 17. století se postupně objevovaly nové přístupy ke studiu geometrie. Aplikace algebry na eukleidovskou geometrii umožňovala nejen vyjádření metrických vztahů a vlastností geometrických objektů, ale také vizualizaci algebraických situací. Takový přístup podpořil vznik a rozvoj analytické geometrie. Její hlavní myšlenky přinesli nezávisle na sobě dva francouzští matematici: René Descartes (1596–1650) v dodatku spisu *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Paris, 1637) nazvaném

---

[103] O Eukleidových *Základech* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) od jejich prvního vydání až po poslední kritické tisky vydané v průběhu 19. a 20. století, stejně jako o českých překladech, podrobně pojednává monografie [Be2]. Anglický překlad *Základů* doplněný kritickým komentářem viz [Hea].

La Géometrie a Pierre de Fermat (1601–1665) v pojednání *Ad locos planos et solidos isagoge* (sepsáno před rokem 1636, publikováno 1679).

Významná změna charakteru geometrického zkoumání se projevila na přelomu 18. a 19. století. Vznikaly a rozvíjely se nové metody motivované zejména potřebou technické praxe. Ve spise nazvaném *Géométrie descriptive* (Paris, 1799) popsal francouzský matematik Gaspard Monge (1746–1818) zásady zobrazování trojrozměrných objektů na dvojrozměrnou nákresnu a vysvětlil tak základní principy deskriptivní geometrie. První myšlenky projektivní geometrie naznačil francouzský architekt a inženýr Girard Desargues (1591–1661) již v první polovině 17. století ve spise *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres d'une cone avec un plan* (Paris, 1639). Nevyvolaly však ve své době větší zájem a jejich význam se plně projevil až v průběhu 19. století. Za zakladatele projektivní geometrie je tak považován francouzský matematik a inženýr Jean Victor Poncelet (1788–1867). Ve spise *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822) zavedl důležité pojmy a vyložil hlavní myšlenky projektivní geometrie (nevlastní bod, přímka a rovina, dvojpoměr, princip duality, projektivnost a perspektivnost atd.) a sepsal tak systematický úvod do jejího studia. K dalšímu rozvoji této disciplíny významným způsobem přispěli též němečtí matematikové August Ferdinand Möbius (1790–1868), který do projektivní geometrie zavedl homogenní souřadnice, Julius Plücker (1801–1868) a Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867).

Velký zvrat ve vývoji geometrie nastal na počátku 19. století v podobě zrodu zcela nového typu geometrie – neeukleidovské geometrie – v níž neplatí Eukleidův postulát o rovnoběžkách. Otázka jeho nezávislosti na ostatních postulátech zaměstnávala matematiky od dob antiky. Někteří přicházeli se zdánlivými důkazy jeho nezávislosti; výsledkem jejich snah však byla jen celá řada vět, které jsou s pátým postulátem ekvivalentní. Objevovaly se také pokusy dokázat jej sporem, které vedly k prvním myšlenkám neeukleidovské geometrie.[104]

Patrně jako první byl o nezávislosti pátého postulátu, stejně jako o existenci jiných typů geometrie, než je geometrie eukleidovská, pevně přesvědčen německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855); své myšlenky však během života nepublikoval. První práce o neeukleidovské geometrii vydali ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) pod názvem *Exposition succincte des principles de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des paralèlles* (1826) a maďarský důstojník János Bolyai (1802–

[104] Ze známějších prací, v nichž se objevuje myšlenka důkazu postulátu o rovnoběžkách sporem, jmenujme např. spis Girolama Saccheriho (1667–1733) nadepsaný *Euclides ab ommni naevo vindicatus*, Milan, 1733; pojednání Johanna Heinricha Lamberta (1728–1777), které bylo sepsáno již v roce 1766, ale uveřejněno až posmrtně roku 1786 pod názvem *Theorie der Parallellinien* v časopise *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik*, viz I(1786), str. 137–164 a str. 325–358; nebo dílo Adriena Maria Legendreho (1752–1833) nazvané *Éléments de géométrie*, Paris, 1794. Neúspěšné pokusy o důkaz nezávislosti pátého Eukleidova postulátu a příčiny nesprávných úvah, stejně jako vznik a vývoj neeukleidovských geometrií podrobně popisují [Gb], [Hei], [Kut], [McC], [Mlw], [Pav], [Raš], [Ros], [ScSr] a [Vop].

1860) pod názvem *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* (1832). N. I. Lobačevskij i J. Bolyai předpokládali nezávislost Eukleidova pátého postulátu a vytvořili geometrii spočívající na jiném axiomu, podle něhož lze k dané přímce daným bodem, který na ní neleží, vést alespoň dvě různé rovnoběžky. Myšlenky neeukleidovské geometrie zůstaly ve své době nepochopeny, byly dokonce vůdčími matematiky odmítány. K jejich obecnému uznání došlo až v druhé polovině 19. století v souvislosti s pracemi Felixe Kleina (1849–1925) a Georga Friedricha Bernharda Riemanna (1826–1866).[105]

Občasné pokusy o důkaz postulátu o rovnoběžkách přetrvávaly u matematiků působících v českých zemích až do začátku druhé poloviny 19. století.[106] Zajímavé studie sepsali například Bernard Bolzano (1781–1848), Christian Andreas Doppler (1803–1853), W. Matzka (viz [M18]) či Jakub Filip Kulik (1793–1863).[107] S touto otázkou se potýkala také řada středoškolských profesorů. Někteří se jí aktivně zabývali ve stručných odborných pojednáních, jiní na komplikovanost axiomu rovnoběžnosti poukazovali v geometrických učebnicích.

Jak již bylo zmíněno, eukleidovská geometrie tvoří dodnes základ výuky geometrie na základních a středních školách. V souvislosti s praktickými potřebami průmyslu se od poloviny 19. století vyučovala deskriptivní a projektivní geometrie na technikách a univerzitách, později také na vyšších reálkách a gymnáziích. Od konce 19. století byla do univerzitních přednášek zařazována též témata neeukleidovské geometrie.[108]

Geometrie v Matzkově díle

Geometrické a trigonometrické partie hrály v 19. století ve středoškolské i vysokoškolské výuce matematiky významnou roli. W. Matzka jim věnoval značnou pozornost v přednáškách pro frekventanty sborové školy vídeňského sboru bombardýrů (v letech 1832 až 1837) a při výuce na filozofické škole v Tarnově (v letech 1837 až 1849). V bombardýrské sborové škole byla geometrie náplní druhého ročníku. Zahrnovala výuku planimetrie, stereometrie, analytické geometrie, rovinné a sférické trigonometrie, při níž byl důraz kladen na aplikaci poznatků při řešení praktických měřických úloh. V závěru geometrické části byli studenti seznámeni ještě s naukou o rovinných křivkách. Veškeré učivo bylo prohloubeno ve třetím a čtvrtém ročníku v aplikacích infinitezimálního počtu.

[105] Viz Klein F., *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen 4(1871), str. 573–625; Klein F., *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen 6(1873), str. 112–145; Riemann G. F. B., *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13(1867), str. 133–152.

[106] O geometrii v českých zemích viz [Fol].

[107] Viz Bolzano B., *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, Prag, 1804, 63 stran; Doppler Ch. A., *Ein Beitrag zur Parallelen-Theorie*, Jahrbuch des Kaiserlichen königlichen polytechnischen Institutes in Wien 17(1832), str. 167–171; Kulik J. F., *Über den 11. Grundsatz des Eukleides*, Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1860, str. 21–23.

[108] Detailně se různým etapám vývoje geometrie věnují [BBV], [Co1], [Či], [Ev], [Gb], [Hol], [Nad2], [Ros], [ScSr] a [Trk].

V souvislosti s výukou ve škole vídeňského sboru bombardýrů publikoval W. Matzka v roce 1838 rozsáhlou učebnici nazvanou *Vorlesungen über die Mathematik* s podtitulem *Die theoretische und praktische Geometrie, die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie, und die Infinitesimal-Rechnung* [M3] věnující se převážně geometrii, trigonometrii a infinitezimálnímu počtu.[109] W. Matzka se na ni často odkazoval také v pozdějších odborných článcích týkajících se geometrie.

V době svého krátkého působení na pražské polytechnice (1849/1850) vyučoval vedle elementární matematiky také tzv. praktickou geometrii. Geometrie zaujímala rovněž podstatnou část přednášek, jež vedl na pražské univerzitě v letech 1850 až 1871. Kromě elementární geometrie, goniometrie, rovinné trigonometrie, analytické geometrie v rovině i prostoru přednášel také některé vybrané partie, k nimž patřily např. geometrické aplikace diferenciálního počtu a teorie ploch, rovnoběžné promítání, polygonometrie či sférická trigonometrie a její užití v geografii a astronomii.

W. Matzka se v geometrii vzdělával, zajímal se o její pokroky a od počátku 40. let 19. století také publikoval vlastní články. Během více než třicetileté činnosti sepsal 19 více či méně rozsáhlých odborných statí. Většina z nich však nepřinášela původní výsledky v pravém slova smyslu. Jednalo se o témata inspirovaná převážně středoškolskou a vysokoškolskou výukou. Často byla motivována nedostatky stereometrických učebnic:[110]

Die Herleitung des Ausdrucks … wie sie in den mir bekannten Lehrbüchern gegeben wird, vermag durchaus nicht mich zufrieden zu stellen, weil die ihr zu Grunde liegende Untersuchung … überall mehr oder weniger mühselig durch allerhand particuläre Fälle und Verwandlungen sich hindurchzieht, und die Beweise … entweder nur obenhin oder gegentheilig schleppend gegeben werden. Ich will hier zeigen, wie sich diesem Mangel der Stereometrie gründlich abhelfen lässt … ([M12], str. 113)

Diese … höchst wichtige Frage habe ich noch nirgends aufgeworfen und beantwortet gefunden, wesshalb ich dies hier selbst thue. ([M32], str. 138)

… die Lehrbücher der Elementar-Mathematik noch immer zu sehr am alten Herkommen hangen, ihren Lehrstoff nicht den Bedürfnissen der höheren und angewandten Mathematik anpassend erweitern … In meinen Lehrvorträgen habe ich diese Fehler zu vermeiden gestrebt, und namentlich die Flächen von den Körpern gesondert behandelt, ungefähr nach dem Muster der analytischen und descriptiven Geometrie (zu denen doch die elementare vorbereiten soll), jedoch stets und streng in rein geometrischer oder synthetischer Weise. ([M28], str. 438)

---

109 O učebnici *Vorlesungen über die Mathematik* je podrobně pojednáno v samostatné kapitole *Učebnice*.

110 W. Matzka často zdůrazňoval, že „není učebnice, jež by mu byla známa“, která by zahrnovala předloženou metodu výkladu či způsob provedení důkazu. Prioritně se tak snažil o vyzdvihnutí originality a pokrokovosti prezentovaného přístupu, až poté (v některých případech) o poukázání na „zastaralost“ učebnic (ne však konkrétních) elementární a vyšší geometrie.

Hloubka a rozsah vyložené látky, stejně jako (mnohdy „násilný“) přístup k důkazům některých vět a vlastností W. Matzku neuspokojovaly. Návrhem nových metod důkazů, originálních způsobů odvození a novým či podrobnějším zpracováním určitých částí tématu se snažil přispět k odstranění nedostatků a zprostředkovat čtenářům rozšíření geometrických znalostí a souvislostí. Geometrické práce tohoto zaměření publikoval německy v časopise *Archiv der Mathematik und Physik* (založen roku 1840), jenž se orientoval na studenty a učitele vyšších tříd gymnázií, lyceí, polytechnických a vojenských škol a jehož cílem bylo předkládat nové (vědecké) poznatky co nejsrozumitelnějším způsobem tak, aby se čtenáři mohli co nejpohodlnější cestou dále samostatně vzdělávat.

Klasickým stereometrickým tématům zpracovaným z pohledu dnešní matematiky se W. Matzka věnoval v pětici prací [M11], [M12], [M24], [M27] a [M28].

V krátké stati s názvem *Neuer Beweis der Gleichheit von Parallelepipeden* [M11] se zabýval „novým“ důkazem rovnosti objemu rovnoběžnostěnů za podmínky stejného obsahu podstavy a výšky. Využil ji také v pojednání *Berechnung des Körperinhaltes der Prismen* [M12], v němž po předložení a dokázání pravidel podobnosti a shodnosti hranolů odvodil známý vzorec pro výpočet objemu hranolu. Nejprve intuitivně pomocí příčného řezu hranolu a jeho strany, potom v obvyklém vyjádření jako součin obsahu podstavy a výšky hranolu.

V práci *Nachweis der Möglichkeit oder Erzeugung eines Obelisken* [M24] W. Matzka navázal na článek Johanna Augusta Grunerta (1797–1872), profesora matematiky na univerzitě v Greifswaldu a zakladatele časopisu *Archiv der Mathematik und Physik*, nazvaný *Ueber die Entstehung der Obelisken und eine geometrische Aufgabe*, který přinášel objasnění postupu analytické konstrukce komolého jehlanu.[111] W. Matzka v pojednání [M24] předložil syntetické řešení postupu konstrukce komolého jehlanu, jenž byl zadán nejprve pomocí podstavy a k ní příslušné rovnoběžné roviny, poté pomocí bočních hran, a navíc ještě doplnil analytické řešení uvedené J. A. Grunertem.

Následně v článku *Ueber die Möglichkeit, einer Pyramidenstumpfe ein Prisma ein- oder umzuschreiben* [M27] diskutoval podmínky ovlivňující možnost vepsat a opsat danému komolému jehlanu hranol; s ohledem na vzájemnou polohu bodů dolní a horní podstavy uvažovaného komolého jehlanu.

Na další z Grunertových prací reagoval krátkým příspěvkem s názvem *Ueber die Berechnung der Mantelfläche jeglichen Cylinders* [M28]. V článku *Ueber den Brinkley'schen Satz vom Mantel des schiefen Cylinders* se J. A. Grunert zabýval stanovením obsahu pláště kosého válce.[112] W. Matzka vyšel z tvrzení, podle něhož je obsah pláště kosého hranolu roven součinu délky jeho boční hrany a obvodu průřezu kolmého k dané hraně, a navrhl jeho zobecnění pro výpočet obsahu pláště (kolmého nebo kosého) válce s libovolnou podstavou:

[111] Viz Grunert J. A., *Ueber die Entstehung der Obelisken und eine geometrische Aufgabe*, Archiv der Mathematik und Physik 9(1847), str. 87–95.

[112] Viz Grunert J. A., *Ueber den Brinkley'schen Satz vom Mantel des schiefen Cylinders*, Archiv der Mathematik und Physik 10(1847), str. 222–224.

Die Mantelfläche jedes (senkrechten oder schiefen) Cylinders – mag seine Grundebene von einer krummen oder gemischten Linie begrenzt sein – gleicht dem Producte aus seiner Seite (oder Axe) in den Umfang des (auf der Seite oder Axe senkrechten) Querschnittes. ([M28], str. 437)

V úvodu této kapitoly již bylo zmíněno, že myšlenky neeukleidovské geometrie zůstávaly matematiky nepochopeny a odmítány až do druhé poloviny 19. století. V zemích Rakouska-Uherska se její přijetí projevilo ještě později, totiž až v posledních desetiletích 19. století.[113] Do té doby neeukleidovská geometrie nebyla známá, a tak se v pracích našich matematiků čas od času vyskytovaly pokusy o důkaz postulátu o rovnoběžkách. W. Matzka sepsal roku 1846 zajímavé pojednání nazvané *Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie* [M18], v němž se postulát rovnoběžnosti pokusil dokázat pomocí přísně logických zásad.

V úvodních odstavcích zdůraznil nezbytnost logicky přesného vyjadřování při zavádění (elementárních) matematických tvrzení. Uvedl, že „ledabylé“ vysvětlení pojmu rovnoběžnosti (paralelnosti) jako „vedle sebe ležící a od sebe oddělené“ a „zachovávající vzájemnou vzdálenost dvou geometrických útvarů“ může vést ke zmatkům již v úplném počátku.

Allein weder jenes Neben-einander-liegen oder Von-einander-geschieden-sein, noch diese Gleichabständigkeit erschöpft, einzeln für sich genommen, den mit dem Worte „Parallel“ nicht etymologisch, sondern von den Geometern eigentlich verbundenen Begriff. Denn – wie schon Tacquet gegen Euklid bemerkt – gibt es Linien, von denen jede auf blos Einer Seite der anderen liegt, die also in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends zusammentreffen, wie z. B. die Hyperbel oder die Conchois, und ihre gerade Asymptote, zwei Parabeln mit einerlei Brennpunkt und Axe, u. m. a.; und doch nennt sie der Geometer nicht parallel ... Desswegen däucht es mir der strengeren Wissenschaftlichkeit der Geometrie angemessener zu sein, von jeglichen zwei solchen mit einander zu betrachtenden räumlichen Gegenständen vorerst zu erweisen, dass ihr Getrenntsein und ihre Gleichabständigkeit sich gegenseitig bedingen, und nachher erst desswegen sie parallel zu nennen. ([M18], str. 321)

Vyšel z tvrzení, podle něhož se dvě přímky, jež třetí přímka protíná pod stejnými střídavými úhly, nikdy neprotnou: *Zwei gerade Linien, welche von einer dritten in zwei Punkten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, treffen sich nirgends*, doplnil jej krátkým komentářem a podrobným slovním „důkazem“ s názorným obrázkem. Ve stejném duchu zpracoval též tvrzení k této větě opačné: *Zwei zusammentreffende Geraden werden von jeder dritten, die sie in zwei Punkten trifft, unter ungleichen Wechselwinkeln geschnitten*, a obrácené: *Zwei gerade Linien, welche nirgends zusammentreffen, werden von jeder dritten Geraden, die sie beide trifft, unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten.* Na závěr poznamenal, že z „dokázaných“ tvrzení přímo vyplývá postulát rovnoběžnosti: *Zwei gerade Linien, die von einer dritten in zwei Punkten unter ungleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, treffen sich; und zwar*

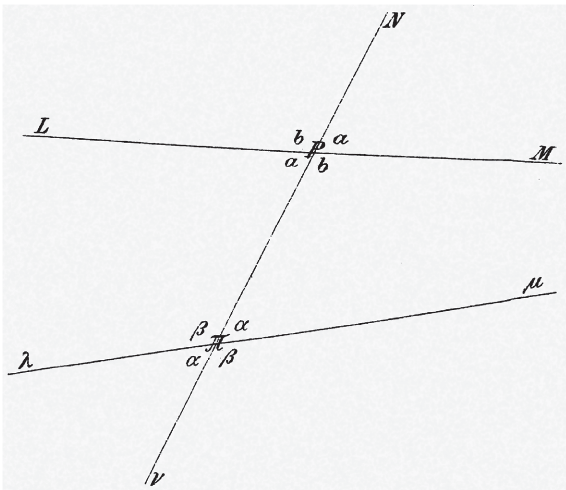
[113] První práce o neeukleidovské geometrii vznikající na území Rakouska-Uherska a první přednášky na významných evropských univerzitách cituje [Mun].

auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher jeder äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel ist, und die inneren Gegenwinkel zusammen weniger als einen gestreckten Winkel ausmachen. ([M18], str. 331–334)

Pro demonstraci Matzkova přístupu naznačme nyní jednu část předloženého „důkazu“:

Hauptlehrsatz: Zwei gerade Linien, welche von einer dritten in zwei Punkten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, treffen sich nirgends.

Wenn nemlich die Geraden LM und $\lambda\mu$ … von der $N\nu$ unter gleichen Wechselwinkeln, $a = \alpha$, $b = \beta$, geschnitten werden, so treffen sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung nirgends.



Beweis (nach de Veley). Die Gerade $N\nu$ zertheilt die Ebene, in der sich die Geraden LM und $\lambda\mu$ befinden, in zwei Abtheilungen. Diese lassen sich nun so auf einander legen, dass die Figur $LP\pi\lambda$ auf $\mu\pi PM$ dergestalt zu liegen kommt, dass $P\pi$ in verwendeter Lage sich selbst deckt, daher auch die Winkel a und β die ihnen gleichen α und b decken; folglich PL auf $\pi\mu$ und $\pi\lambda$ auf PM fällt. Könnte nun eines der zwei Paar halber Geraden PL, $\pi\lambda$ und $\pi\mu$, PM sich schneiden; so müsste auch das andere Paar sich schneiden, weil beide Paare auf einander liegen. Die Geraden LM und $\lambda\mu$ träfen sich aber dann in zwei Punkten, was unmöglich ist. Mithin treffen sich diese Geraden weder diesseits noch jenseits der $N\nu$, also gar nirgends. ([M18], str. 331–332, obr. 4, tab. IV.)

W. Matzka při „důkazu“ postupoval deduktivním způsobem; dopustil se však chyby tzv. důkazu kruhem, když při dokazování použil tvrzení, která jsou s 5. Eukleidovým postulátem ekvivalentní.

V práci pojmenované *Elementare Darstellung einer höchst einfachen Berechnung des Kreisverhältnisses* [M20] ukázal dvě metody geometrické aproximace Ludolfova čísla π. Obě vycházely ze známého Archimedova výpočtu π pomocí stanovení obvodů pravidelných mnohoúhelníků vepsaných a opsaných danému kruhu, zdůrazňovaly názornost geometrického pojetí a pro „finální“

určení čísla π (v závislosti na počtu stran mnohoúhelníku) odkazovaly na užití logaritmických tabulek.[114]

V pojednání *Ueber die natürliche Winkeleinheit in der analytischen Goniometrie und über die Ausmerzung des Kreisbogens aus den wissenschaftlich-geometrischen Erforschungen der Winkel* [M17] W. Matzka vybízel, aby byla stupňová míra v goniometrii zcela nahrazena obloukovou mírou, která lépe vyhovuje potřebám vyšší matematiky, praktického měřictví i astronomických a geodetických aplikací.

Nejprve použil limitu funkce k vymezení úhlu Γ ve vztahu ke goniometrickým funkcím sinus a tangens:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} \geq \Gamma \geq \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Hraniční úhel Γ dále označil jako „střední ostrý úhel“ (ležící v rozmezí $\frac{1}{2}R < \Gamma < \frac{2}{3}R$, kde R značí pravý úhel) a zavedl pro něj speciální pojmenování v podobě staroněmeckého názvu *der Gehren*.[115] Úhel Γ poté vyjádřil pomocí přímého úhlu G nerovností

$$p < \frac{\Gamma}{G} < q, \text{ ve které platí} \quad p = \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} : G,\ q = \frac{\alpha}{\sin\alpha} : G.$$

Užitím aritmetické a geometrické posloupnosti, aritmetického a geometrického průměru a aplikací logaritmů definoval úhel Γ jako jednotku obloukové míry (v současné terminologii odpovídající jednotce *radián*), pro niž platí:

$$\Gamma \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Již zmíněný poměr $\frac{\Gamma}{G}$ pak určuje Ludolfovo číslo π a mezi stupňovou a obloukovou mírou platí vztah $G = \pi\Gamma$.

---

[114] První metoda odpovídá postupu uvedenému v krátkém pojednání Schwab J., *Éléments de Géométrie*, Nancy, 1813. Na druhou W. Matzku v roce 1838 upozornil jeho přítel, profesor vídeňské polytechniky Andreas von Ettingshausen (1796–1878); W. Matzka o tom napsal: *Hiebei nehme ich zugleich Gelegenheit, obige Beziehungsgleichungen zwischen den Vielecks-halbmessern nach einem Verfahren abzuleiten … wie mir mein verehrter Freund, Herr Professor und Regierungsrath von Ettingshausen, im Juli 1838 erzählte, sein damaliger Adjunct, nunmehriger Professor der Physik zu Innsbruck, Herr Baumgarten, in einem alten Buche gefunden habe.* ([M20], str. 80) Archimedův přístup k výpočtu konstanty π, která figuruje ve vzorcích pro výpočet obvodu a obsahu kruhu, přibližuje [BŠ].

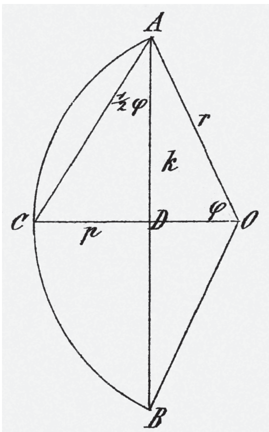
[115] Staroněmecké slovo *der Gehren* bylo označením pro špičatý nástroj (např. šíp, kopí, oštěp); obecně významově podobné se slovy *klínek* či *vsadka*. Slovesný tvar *gehren* zastupuje také odborný termín pro *šikmě seříznout*. W. Matzka se k volbě tohoto názvu v práci [M17] vyjádřil následovně: *Darum schlage ich vor, ihm den kurzen altdeutschen Namen „der Gehren“ zu geben. Denn dieser Winkel ist, wie wir so eben nachgewiesen haben, ein mittlerer spitziger, und der Gehren heisst (landschaftlich) ein spitziges Werkzeug, besonders ein Pfeil, Spiess, Speer, ferner ein spitz zulaufendes Stück Land, ein keilförmiger Streifen Zeug, Keil in Hemden, Zwickel in Strümpfen (franz. le chanteau, engl. goar); daher auch das Gehrmass oder -holz, bei Holzarbeitern ein Richtscheit mit einem nach einem Winkel von 45 Graden abgeschrägten Querbrettchen zum Vorzeichnen einer schrägen Richtung, die sie eine Gehre oder Gehrung nennen.* ([M17], str. 406)

V závěru práce stručně naznačil aplikaci obloukové míry při základních výpočtech (např. určení obvodu a obsahu kruhu, délky kruhového oblouku, obsahu kruhové výseče).

Obloukovou míru využil k řešení goniometrických otázek také ve dvou kratších pojednáních [M26] a [M32].

V článku nazvaném *Mit welcher Genauigkeit lassen sich die Länge eines Kreisbogens, sein Sinus und seine Tangente einander gleich stellen?* [M32] zkoumal, s jakou přesností je možné porovnat délku (malého) kruhového oblouku, jeho sinus a tangens, a výsledky shrnul do přehledných tabulek.[116]

V kratší poznámce nadepsané *Reihe zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreisabschnittes aus seiner Sehne und Sagitte* [M26] W. Matzka vypočítal obsah kruhové úseče f ze znalosti délky její tětivy $2k$ a výšky příslušného kruhového oblouku p.



Nejprve ukázal řešení problému cestou klasické geometrie, poté vyložil další způsob řešení za užití analýzy. Pro výpočet obsahu kruhové úseče $ABCA$ ([M26], obr. 5, tab. VIII.) sestavil řadu, která pro dostatečně velké k (vzhledem k výšce p) rychle konverguje:

$$f = \underbrace{\frac{4kp}{3}}_{I} + \underbrace{\frac{I}{5}\left(\frac{p}{k}\right)^2}_{II} - \underbrace{\frac{1 \cdot II}{7}\left(\frac{p}{k}\right)^2}_{III} + \underbrace{\frac{3 \cdot III}{9}\left(\frac{p}{k}\right)^2}_{IV} - \underbrace{\frac{5 \cdot IV}{11}\left(\frac{p}{k}\right)^2}_{V} \cdots$$

V další čtveřici geometricky zaměřených prací [M25], [M31], [M34] a [M43] otištěných rovněž v časopise *Archiv der Mathematik und Physik* se W. Matzka zaměřil především na základy rovinné a sférické trigonometrie.

Diskuzi podmínek konstruovatelnosti sférického trojúhelníku (daného třemi prvky, z nichž pouze dva jsou stejného „druhu") věnoval pojednání nazvané *Ueber die Bestimmbarkeit eines sphärischen Dreieckes durch drei Stücke, von*

[116] O historickém vývoji rektifikace křivky, od prvních úvah ve starověku až po moderní přístup matematické analýzy, pojednává [Kou].

denen zwei einander gegenüber liegen [M25]. Nejprve uvažoval zadání sférického trojúhelníku pomocí dvou stran a, b a úhlu α, kde $a, b, \alpha \in (0°, 180°)$, $a, b, \alpha \neq 90°$, $a \neq b$. Na základě sinové a kosinové věty a dalších vztahů sférické trigonometrie dopočítal zbývající parametry určující daný trojúhelník (po řadě úhel β, stranu c, úhel γ), diskutoval podmínky jeho konstruovatelnosti a popsal názorný postup konstrukce. V závěrečném odstavci naznačil „řešení sférického trojúhelníku" zadaného jednou stranou a a dvěma úhly α, β převedením na předchozí variantu.

V práci *Zwei bemerkenswerth einfache Herleitungen der Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie* [M34] předložil dva způsoby odvození již zmíněných základních vztahů sférické trigonometrie v podobě sinové a kosinové věty.[117] Oba za využití goniometrických vztahů a pravidel pravoúhlého promítání.

V krátké poznámce *Bemerkung … betreffend den Satz von der Flächengleichheit eines sphärischen Dreiecks und seines symmetrischen Scheiteldreiecks* [M43] k článku profesora J. A. Grunerta, jenž se týkal důkazu věty o rovnosti obsahů sférického trojúhelníku a k němu symetrického vrcholového trojúhelníku, odkázal W. Matzka na vlastní obdobně provedený důkaz téže věty otištěný (o několik let dříve) v druhém díle učebnice *Vorlesungen über die Mathematik* [M3] a stručně naznačil jeho hlavní myšlenku.[118]

Stať nazvanou *Betrachtung zweier besonderen Arten von Gleichungen und ihre Anwendung zur Herleitung der Hauptgleichungen der ebenen Trigonometrie* [M31] věnoval rovinné trigonometrii. Uvažoval obecný rovinný trojúhelník o stránách a, b, c, vnitřních úhlech α, β, γ; z věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku a sinové věty odvodil nejprve kosinovou větu (tedy rozšířenou Pythagorovu větu na obecný trojúhelník).[119] Poté pojednal o řešení soustav dvou a tří lineárních homogenních rovnic o třech neznámých. Na jejich základě a za využití vztahů pro strany a úhly obecného trojúhelníku odvodil zpět výchozí rovnice (tedy větu o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku a sinovou větu).

Zajímavou prací z analytické geometrie je pojednání s názvem *Lösung zweier Aufgaben über Berechnung der Flächeninhalte verschiedentlich bestimmter Ellipsen* [M58], v němž W. Matzka předložil řešení dvou úloh o výpočtu obsahu

[117] V obecném sférickém trojúhelníku ABC s vnitřními úhly $\alpha, \beta, \gamma \in (0°, 180°)$ a stranami $a, b, c \in (0°, 180°)$ lze zapsat sinovou větu: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$, cyklickou záměnou kosinovou větu pro strany trojúhelníku: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$ a kosinovou větu pro úhly trojúhelníku: $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$.

[118] Jedná se o poznámku k článku Grunert J. A., *Ueber den Satz, dass ein sphärisches Dreieck und sein symmetrisch liegendes Scheiteldreieck gleiche Flächenräume haben*, Archiv der Mathematik und Physik 32(1859), str. 118–120. Symetrickým vrcholovým trojúhelníkem se rozumí trojúhelník, který je souměrný podle některého z vrcholových úhlů zadaného trojúhelníku.

[119] W. Matzka v poznámce uvedl, že se již před ním řada matematiků inspirovala základními rovnicemi $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ a $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ k odvození významných trigonometrických vět; zmínil např. práci Lazare Carnota (1753–1823) nazvanou *Géométrie de position*, Paris, 1803, či dílo Augustina-Louise Cauchyho (1789–1857) *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Paris, 1821.

plochy ohraničené elipsou. V prvním případě postupoval od obecné rovnice elipsy přes rovnici v polárních souřadnicích a určení středu elipsy a dospěl k vyjádření délek jejích poloos a, b. Na jejich základě formuloval známý vzorec určující obsah elipsy. Druhé řešení pojal mnohem šířeji. Uvažoval libovolnou elipsu (vzniklou jako průnik roviny a kosého kužele s kruhovou podstavou), kterou nejprve umístil do vhodně zvolené kartézské soustavy souřadnic; následně zavedl polární souřadnice a odvodil obsah plochy ohraničené takovou elipsou. S využitím integrálního počtu poté diskutoval podmínky, za nichž bude obsah dané elipsy maximální, resp. minimální.

Publikační činnost na poli geometrie W. Matzka završil dvojicí rozsáhlejších prací otištěných v *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* [M60] a [M63], které věnoval geometrickým zobrazením. Nejvíce se přitom zaměřil na rovnoběžné promítání, o jehož základní principy se opíraly také články [M19], [M34] a [M56].

V pojednání *Ueber geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie* [M19] se pokusil na základě axiomu o rovnoběžkách, úměry a principů rovnoběžného promítání názorným způsobem odvodit Pythagorovu větu a vztahy definující goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku.

Nachbildung des Pythagoräischen Lehrsatzes: Die zweite Potenz (des Zahlwerths) jeder Strecke r gleicht der Summe der zweiten Potenzen (der Zahlwerthe) ihrer Projectionen a und b auf jegliche zwei winkelrechte Axen. ([M19], str. 371)

Stammfunctionen: Cosinus und Sinus: Aus der projicirten Strecke [r] *entspringen zunächst gleichzeitig ihre Haupt- und Nebenprojection, daher auch deren Verhältnisse zur Projicirten, genannt Cosinus und Sinus des Winkels, die goniometrischen Stammfunctionen ...*

Zugleich geht in der natürlichen Abfolge der Erzeugung die Hauptprojection der Nebenprojection, also auch der Cosinus dem Sinus voran ... Daher sind ...

a) Haupt-Stammfunction: *b) Neben-Stammfunction:*

der Cosinus, *der Sinus,*

d. i. das Verhältniss

der Hauptprojection a *der Nebenprojection b*

zur Projicirten r;

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha, \qquad \frac{b}{r} = \sin\alpha.$$

([M19], str. 373–374)

V krátké poznámce *Betrachtung einiger gebrochenen Linien mit Paaren gleichlanger paralleler Seiten, deren algebraische Parallel-Projectionen auf Achsen summirt sich aufheben* [M56] naznačil několik myšlenek o rovnoběžném promítání lomených čar, speciálně o projekci stran rovnoramenného a rovnostranného trojúhelníku.

Motivován geometrickou interpretací komplexních čísel se v práci nazvané *Beiträge zur Lehre der universellen Summirung von Strecken, d. i. ihrer Aneinanderfügung mittels Parallelverschiebung* [M60] zaměřil na objasnění skládání úseček na základě posunutí. Po vysvětlení základních pojmů (odchylka dvou přímek, směr a délka úsečky, opačná úsečka apod.) neobyčejně podrobně vyložil skládání a „rozkládání" úseček s ohledem na jejich délku a směr. V souvislosti s rovnoběžným promítáním aplikoval své výsledky na odvození vztahů mezi goniometrickými funkcemi (definice pomocí pravoúhlého trojúhelníku, sinová a kosinová věta, součtové vzorce apod.).[120] Následně zavedl transformační rovnice pro kartézské a polární souřadnice a naznačil četné aplikace nejen v geometrii (např. rovnice přímky, kulové plochy, průsečnice elipsoidu a koule), ale také ve fyzice (statika a dynamika).

Poslední práci s geometrickým námětem uveřejnil W. Matzka v polovině 70. let 19. století v *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* pod názvem *Zur Lehre der Parallelprojection und der Flächen* [M63] a věnoval ji nauce o rovnoběžném promítání a analytické geometrii. Nejprve důkladně a velice srozumitelně (s pomocí názorných schémat) vyložil základy rovnoběžného promítání v rovině a prostoru. Obdobně jako v pojednáních [M19] a [M60] naznačil konstrukci pravoúhlého průmětu úsečky. Pythagorovu větu použil pro přechod k determinantům, když rovnici $d^2 = a^2 + b^2$ vyjádřil ve tvaru:

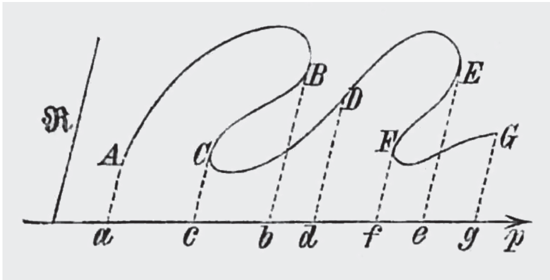
$$d^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

S využitím determinantů poté rozpracoval analytickou geometrii v rovině i prostoru.[121] Pomocí klasického analytického vyjádření a ve formě determinantů zavedl rovnice přímky a roviny, diskutoval jejich vzájemnou polohu atd. Na závěr ve stejném duchu uvedl rovnice rotačních ploch (např. kulová, válcová, kuželová, eliptická, hyperbolická, parabolická).

Ocitujme úryvek o rovnoběžném promítání rovinné křivky vyplývající z názorného obrázku a následnou algebraickou interpretaci tak, jak je obsažena v práci [M63]:

[120] Obdobným způsobem za použití pravidel pravoúhlého promítání např. odvodil Pythagorovu větu a vztahy definující goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku v pojednání [M19] nebo dokázal sinovou a kosinovou větu pro sférický trojúhelník v práci [M34].

[121] Od 40. let 19. století se determinantům postupně dostávalo obecného uznání a rozšíření (podrobně viz samostatná kapitola *Determinanty*). V druhé polovině 19. století a začátkem 20. století se jejich aplikace v řadě matematických oblastí (analytická geometrie, matematická analýza, teorie čísel aj.) těšila velké oblibě rovněž v našich zemích. Čtenářům, kteří nebyli s teorií determinantů dosud (dostatečně) obeznámeni, W. Matzka doporučoval ke studiu Studničkovu učebnici *Einleitung in die Theorie der Determinanten*, Prag, 1871, nebo německé přepracování Salmonových monografií v podání Wilhelma Fiedlera *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, Leipzig, 1873, a *Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen*, Leipzig, 1863.



... sind auf der Projectionsaxe p *die den projicirten Linien* AG, AB, DE *entsprechenden Projectionen* ag, ab, de *positiv; dagegen gehören den Linien* BC, EF, GD *die negativen Projectionen* bc, ef, gd *an.*

...

Die algebraische Projection einer (sei es bereits natürlich oder erst willkürlich) untergetheilten begrenzten Linie, $ABCDEFG$, *auf eine Axe,* p, *gleicht der (algebraischen) Summe der Projectionen aller ihrer nach einander folgenden Stücke,* $AB, BC, \ldots FG$ *... es ist nemlich*

$$\begin{aligned} Proj.^p ABCDEFG &= Proj.^p AB + Proj.^p BC + Proj.^p CD + \\ &+ Proj.^p DE + Proj.^p EF + Proj.^p FG = \\ &= ab + (bc = -cb) + cd + de + (ef = -fe) + fg. \end{aligned}$$

([M63], str. 8, obr. 4)

Pro lepší představu o Matzkově přístupu k užití determinantů v analytické geometrii v pojednání [M63] uveďme ještě jeho odvození obecné rovnice roviny určené třemi body:

Ebene irgend dreier – wenn nur nicht in einer Geraden befindlichen – Punkte, abc, $a'b'c'$ *und* $a''b''c''$. *Hier können wir ... berücksichtigen, dass die Richtungen der aus* abc *zu* xyz, $a'b'c'$ *und* $a''b''c''$ *hin gehenden drei Strecken auf der Normale der geforderten Ebene zugleich senkrecht seien ... Demnach haben wir für die Ebene der drei Punkte die Gleichung*

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a'-a & b'-b & c'-c \\ a''-a & b''-b & c''-c \end{vmatrix} = 0 \quad (1) \quad \textit{oder}\ldots \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a' & b' & c' & 1 \\ a'' & b'' & c'' & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2).$$

In der Form (1) *lässt dieselbe leicht erkennen, dass sie in* $0 = 0$ *übergehen, also inhalts- und ausdruckslos würde, wenn die zweite und dritte Zeile proportional wären, also die angewiesenen drei Punkte der Ebene in gerader Linie lägen.* ([M63], str. 53)

Shrnutí Matzkových výsledků

W. Matzka se geometrii věnoval v průběhu více než třiceti let. Vyučoval ji v bombardýrské sborové škole, na filozofické škole, na polytechnice, dlouhá léta vedl přednášky na univerzitě. Zajímal se o její vývoj, nové přístupy a metody. Velmi dobře znal klasické i nové monografie, středoškolské a vysokoškolské učebnice, stejně jako statě v odborných časopisech, v nichž nacházel inspiraci nebo na ně přímo navazoval (např. [M24], [M28]). Důvěrně byl seznámen zejména s články časopisu *Archiv der Mathematik und Physik*, v němž sám pravidelně publikoval a do kterého s obdobně zaměřenými pracemi přispívala řada profesorů předních univerzit, mezi nimi např. J. A. Grunert, Wilhelm Schell (1826–1904), Oscar Xavier Schlömilch (1823–1901), Leopold Karl Schulz von Strasznicki (1803–1852) a Theodor Ludwig Wittstein (1816–1894), stejně jako mnozí učitelé gymnázií, lyceí a odborných středních škol.[122]

W. Matzka v pojednáních přinesl mnoho originálních důkazů a odvození elementárních geometrických vlastností (např. [M12], [M25], [M28]), často také využíval pro řešení „klasických úloh" metody vyšší matematiky (např. [M26], [M31], [M58]) nebo se soustředil na srozumitelné zpracování nového tématu (např. [M60], [M63]). Jeho hlavním zájmem a snahou bylo vzbudit zájem čtenáře o elementární geometrii a obohatit rozhled univerzitních a středoškolských studentů i profesorů.

W. Matzka velmi dbal na srozumitelnost a názornost, výklad doplňoval četnými obrázky, grafickými schématy a konkrétními příklady. Někdy též s dobrým úmyslem „nechat vyniknout jednoduchost" vysvětlovaného tématu zaváděl speciální symboliku (např. [M60]). Dnešnímu čtenáři by však naopak neobvyklost značení spíše způsobovala problémy pochopit vysvětlovanou látku.

Poznamenejme, že dvě poslední geometrické práce související s rovnoběžným promítáním, [M60] a [M63], byly jen krátkou dobu po jejich vydání hodnoceny v referativních časopisech *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* a *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques.* Zatímco práci [M60] bylo jejím referentem vytknuto nadbytečné zavedení speciální symboliky, na pojednání [M63] bylo ceněno podrobné zpracování tématu a zejména propojení analytické geometrie s determinanty.[123]

---

[122] Z geometricky orientovaných prací autorů publikujících v *Archiv der Mathematik und Physik* zmiňme např. článek T. L. Wittsteina nazvaný *Zur Rechtfertigung des Pythagoräischen Lehrsatzes* (viz 11(1848), str. 152–158) nebo kratší poznámku J. A. Grunerta nadepsanou *Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes* (viz 20(1853), str. 480), které uváděly různé metody důkazu Pythagorovy věty; nebo další pojednání J. A. Grunerta uveřejněné pod názvem *Elementare Bestimmung des Inhalts der Fässer* (viz 23(1854), str. 207–216) či práci W. Schella *Ueber Mantefläche und Volumen cylindrisch-hufartigen Körper* (viz 19(1852), str. 70–79) popisující způsoby výpočtu objemů „speciálních" těles, případně ještě Strasznického práci z analytické geometrie s titulem *Ueber die praktische Verzeichnung von Ellipsen* (viz 11(1848), str. 109–111).

[123] V referativním časopise *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (viz 1(1868), str. 150) hodnotil Matzkovu práci [M60] H. Schumann z Berlína následovně: *Nach ungemein ausführlicher Erörterung der Summirung von Strecken in Rücksicht auf Länge und Richtung werden die Relationen, welche die analytische Geometrie zwischen den verschiedenen, die Lage von Punkten des Raumes bestimmenden Grössen giebt, in dem Verfasser eigenthümlichen Zeichen ausgedrückt, die einfachsten Curven und Flächen in diesen Symbolen dargestellt, die Elemente der analytischen Mechanik in diese eingekleidet, ohne dass aus der umfangreichen Arbeit ersichtlich ist, welche Vortheile diese ungewöhnlichen Darstellungs-*

Osobité rozpracování úloh elementární geometrie a trigonometrie nacházelo zalíbení rovněž u řady českých matematiků. Přicházeli taktéž se zajímavými způsoby důkazů známých geometrických vlastností nebo s jejich odvozeními pomocí vyšší matematiky (využívali zejména analytickou geometrii, vyšší analýzu, determinanty apod.). Takto zaměřené práce vycházely v průběhu druhé poloviny 19. století v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky*; mezi jejich autory patřili Gabriel Blažek (1842–1910), Augustin Pánek (1843–1908), František Josef Studnička (1836–1903), Karel Zahradník (1848–1916) a další.[124]

* * * * *

Literatura

[BBV] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H., *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 23, Prometheus, Praha, 2003.

[BŠ] Bečvář J., Štoll I., *Archimedes – největší vědec starověku*, edice Velké postavy vědeckého nebe, sv. 11, Prometheus, Praha, 2005.

[Be2] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 20, Prometheus, Praha, 2002.

[Co1] Coolidge J. L., *A history of geometrical methods*, Clarendon Press, Oxford, 1947.

[Či] Čižmár J., *Geometria na prahu 21. storočia z pohľadu jej pättisícročného vývoja*, in Fuchs E. (ed.), Matematika v proměnách věků IV, edice Dějiny matematiky, svazek č. 32, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2007, 123–161.

[Ev] Eves H. W., *An introduction to the history of mathematics*, Holt, New York, Fourth edition, 1976.

---

formen gewähren. Referativní časopis *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* (viz 3-I(1872), str. 170) uváděl pouze odkaz na práci [M60] v *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* a překlad jejího názvu do francouzštiny.

Obsah pojednání [M63] posoudil v *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (viz 7(1875), str. 344) J. Scholz z Berlína takto: *Die Abhandlung besteht in einer ausführlichen Darstellung der ersten Elemente der Parallelprojection und der Anfangsgründe der analytischen Geometrie des Raumes unter Benutzung schiefwinkeliger Coordinatenaxen. Nach einer Erörterung der Projection von Punkten, Strecken parallel einer gegebenen Richtung auf eine oder mehrere Axen derselben Ebene oder im Raume und der dabei auftretenden Verhältnisse, ferner der Gleichung zwischen den Richtungscosinus einer Geraden gegen drei beliebige Axen, des Winkels zweier Geraden folgt die Aufstellung der Gleichungen der geraden Linie im Raume, der Ebene, der Kugel, der Cylinder-, Kegel- und einfacher Rotations-Flächen und der übrigen Flächen zweiten Grades. Dabei ist ausgedehnter Gebrauch von Determinanten gemacht, so dass auch die einfachsten Ausdrücke und Gleichungen in diese Form gebracht sind.*

[124] Z prací otištěných v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky*, jež se volbou tématu a jeho zpracováním podobaly Matzkovým pojednáním, zmiňme např. článek F. J. Studničky nazvaný *Odvození základních vzorců sférické trigonometrie pomocí některých pouček determinantních* (viz 4(1875), str. 49–57), v němž pomocí analytické geometrie a determinantů odvodil sinovou větu, kosinovou větu pro strany a kosinovou větu pro úhly sférického trojúhelníku; nebo práci K. Zahradníka nadepsanou *Příspěvek ke trigonometrii* (viz 7(1878), str. 245–248) odvozující v podobném duchu sinovou a kosinovou větu pro obecný rovinný trojúhelník; případně ještě příspěvky z klasické geometrie sepsané F. J. Studničkou *O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí stran jeho* (viz 1(1872), str. 253–255) a G. Blažkem *Dva vzorce pro krychlový obsah čtyřstěnu* (viz 3(1874), str. 272–274).

[Fol1] Folta J., *Česká geometrická škola: historická analýza*, Studie ČSAV, Academia, Praha, 1982.

[Gb] Greenberg M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, Freeman, New York, Fourth edition, 2008.

[Hea] Heath T. L., *The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary*, volume I–III, 2. edition, Dover Publications, New York, 1956.

[Hei] Heilbron J. L., *Geometry Civilized: History, Culture and Technique*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[Hol] Holme A., *Geometry: Our Cultural Heritage*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.

[Kou] Koudela L., *Problém rektifikace ve vývoji analýzy*, in Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), Matematika v proměnách věků VI, edice Dějiny matematiky, svazek č. 45, Matfyzpress, Praha, 2010, 141–174.

[Kut] Kutuzov B. V., *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie*, ČSAV, Praha, 1953; z ruského originálu *Geometrija Lobačevskogo i elementy osnovanij geometrii* přeložili V. Macháček a R. Zelinka.

[McC] McCleary J., *Geometry from a differentiable viewpoint*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[Mlw] Mlodinow L., *Eukleidovo okno: Příběh geometrie od rovnoběžek k hyperprostoru*, Slovart, Praha, 2007.

[Mun] Munkacsy K., *The Reception of Bolyai's Geometry in the Austro-Hungarian Empire*, in Bečvářová M., Binder Ch. (eds.), Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire, Proceedings of a Symposium held in Budapest on August 1, 2009 during the XXIII ICHST, History of Mathematics, volume 41, Matfyzpress, Prague, 2010, 103–107.

[Nad2] Nádeník Z., *Geometrie v 16. a 17. století*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.), Matematika v 16. a 17. století, edice Dějiny matematiky, svazek č. 12, Prometheus, Praha, 1999, 108–160.

[Pav] Pavlíček J. B., *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953.

[Raš] Raševskij P. K., *Geometrie a její axiomatika*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **5** (1960), 520–537.

[Ros] Rosenfeld B. A., *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Studies in the History of Mathematics and Physical Science **12**, Springer, New York, 1988.

[ScSr] Scriba C. J., Schreiber P., *5000 Jahre Geometrie*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2005.

[Trk] Trkovská D., *Erlangenský program*, in Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), Matematika v proměnách věků V, edice Dějiny matematiky, svazek č. 33, Matfyzpress, Praha, 2007, 66–82.

[Vop] Vopěnka P., *Rozpravy s geometrií – Otevření neeukleidovských geometrických světů*, Vesmír, Praha, 1995.