Georg Freyherrn von Vega,

Landes-Mitstands des Herzogthums Krain, Ritters des militär. M. Th. Ordens, Oberstlieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitglieds der gelehrten Gesellschaften der Wissenschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

Vorlesungen

über die

Mathematik

sowohl

überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps.

Zweyter Band,

die

theoretische und practische Geometrie,

die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie, und die Infinitesimal-Rechnung enthaltend.

Siebente Auflage.

Durchgesehen, verbessert und vermehrt von

Wilhelm Matzka,

Unterlieutenant und Lehrer der höheren Mathematik im k. k. Bombardier-Corps.

Mit 16 Kupfertafeln.

Wien, 1835.

Verlag von F. Tendler, Buchhändler.

UČEBNICE – Vorlesungen über die Mathematik

V této kapitole se pokusíme zhodnotit Matzkovy učebnice algebry a analýzy, které sepsal pro výuku ve škole vídeňského sboru bombardýrů i dalších vojenských školách a uveřejnil v letech 1835 až 1850 pod názvem *Vorlesungen über die Mathematik*.

Roku 1786 byla ve Vídni pro výchovu a vzdělávání frekventantů sboru bombardýrů zřízena c. k. bombardýrská sborová škola (die k. k. Bombardier-Corpsschule). Výuka na ní se soustředila na vojenství, přírodovědu a zejména na matematiku. V počátcích se škola potýkala s různými problémy; chyběly jí nejen kvalifikované síly, ale také vhodné učebnice pro výuku hlavních předmětů.[97]

Tento nedostatek se pokusil napravit profesor matematiky Georg Freiherr von Vega (1754–1802), který pro výuku v bombardýrské sborové škole sepsal v letech 1782 až 1800 čtyřdílnou knihu nazvanou *Vorlesungen über die Mathematik*.[98] Jeho učebnice srozumitelně uváděly do studia matematiky (1. a 2. díl) a fyziky (3. a 4. díl), proto byly používány jako základní učební text a do roku 1850 byly několikrát přepracovány a opakovaně vydávány. Autorem posledních vydání *Vorlesungen über die Mathematik* byl právě W. Matzka, který dvakrát přepracoval první a druhý díl (po řadě [M4] a [M3]).

První díl

Na novém zpracování prvního dílu Vegovy učebnice matematiky *Vorlesungen über die Mathematik* s podtitulem *Rechenkunst und Algebra* [M4] začal W. Matzka pracovat ještě jako podporučík ve vídeňském sboru bombardýrů. V pořadí šesté (vylepšené a rozšířené) vydání knihy bylo publikováno pod jeho jménem ve Vídni roku 1838. Učebnice je rozdělena do sedmi kapitol.

První kapitolu W. Matzka věnoval aritmetice přirozených čísel a základům algebry. V úvodu čtenáře seznámil s pojmem čísla a obecným dělením matematiky (čistá a aplikovaná, elementární a vyšší matematika apod.) jako vědy, která zkoumá vlastnosti čísel. Po přiblížení číselných systémů vysvětlil základní vlastnosti operací sčítání, odčítání, násobení a dělení přirozených čísel. Následným zobecněním uvedl čtenáře do algebry a počítání s mnohočleny. V závěru

[97] O vídeňském sboru bombardýrů a výuce ve sborové škole podrobně viz samostatná kapitola *Wilhelm Matzka – V armádě ve Vídni*.

[98] Vega G., *Vorlesungen über die Mathematik. Erster Band, welcher die allgemeine Rechenkunst enthält.* Wien, 1782, 354 stran; *Vorlesungen über die Mathematik. Zweiter Band, welcher die theoretische Geometrie, die ebene und sphärische Trigonometrie, die Anfangsgründe der praktischen Geometrie, eine Abhandlung von den krummen Linien, und die Differezial- und Integralrechnung enthält.* Wien, 1784, 507 stran + 15 tabulek; *Vorlesungen über die Mathematik. Dritter Band, welcher die Mechanik der festen Körper enthält.* Wien, 1788, 528 stran + 11 tabulek; *Vorlesungen über die Mathematik. Sowohl überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des kais. königl. Artillerie-Corps. Vierter Band die Grundlehren der Hydrostatik, Aerostatik, Hydraulik, und der Bewegung fester Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel enthaltend.* Wien, 1800, 368 stran + 9 tabulek.

kapitoly pojednal o dělitelnosti (pravidla dělitelnosti, rozklad na prvočísla, největší společný dělitel, Eukleidův algoritmus apod.).

Obwohl man durch die Ziffern oder Zahlzeichen jede Menge einer jeden Gattung von Größen vorstellen kann, so sind sie doch noch zu eingeschränkt, um damit allgemeine Rechnungen anlegen zu können, die für jeden ähnlichen Fall gelten … Man war deßwegen auf allgemeinere Zeichen bedacht, durch welche man nicht nur jede Gattung der Größen, sondern auch jede Menge der Einheiten sich vorstellen kann; und man hat hiezu das kleine lateinische Alphabet gewählt, weil es den meisten Völkern in Europa bekannt ist … Die Wissenschaft mit Buchstaben, oder vielmehr mit allgemeinen durch Buchstaben vorgestellten Zahlen zu rechnen, wird die allgemeine Rechenkunst, oder die Algebra genannt. ([M4], 1838, str. 43–44)

Ve druhé kapitole se zabýval počítáním se zlomky. Po uvedení základních pravidel pro počítání se zlomky (porovnávání a krácení zlomků, výpočet nejmenšího společného jmenovatele, základní aritmetické operace apod.) zavedl také desetinná čísla. Podrobně rozpracoval část týkající se řetězových zlomků, kterou doplnil nejen příklady, ale také (oproti jiným částem nezvyklým) množstvím teorie.

Ve třetí kapitole vyložil pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami (nejprve pro druhý a třetí stupeň, poté obecně), podrobně (na několika stranách) vysvětlil na konkrétních číselných příkladech „mechanický“ způsob jejich výpočtu, zavedl vzorce typu $a^n \pm b^n$ aj. Nutno podotknout, že s ohledem na potřeby studentů neuvažoval komplexní čísla.

Čtvrtou kapitolu věnoval poměrům, úměrám a užití „trojčlenky“, jejíž užitečnost zdůraznil nejen pro všechny oblasti matematiky, ale také pro příslušníky armády a život běžných občanů. Uveďme nyní na ukázku zadání tří příkladů:

Eine gewisse Anzahl Patronen wird in 8 *Tagen von* 150 *Mann verfertigt; man will aber diese Munition in* 6 *Tagen fertig haben; wie viel Mannschaft muß hiezu angestellt werden?* ([M4], 1838, str. 213)

Wenn hundert Gulden Capital jährlich $3\frac{1}{2}$ *Fl. Interessen bringen, wie groß muß das Capital sein, wovon man jährlich* 1000 *Fl. Interessen haben kann?* ([M4], 1838, str. 214)

Wenn 20 *Weber in* 8 *Wochen, indem sie wöchentlich* 5 *Tage, und täglich* 10 *Stunden arbeiten,* 100 *Stück Leinwand verfertigen, wo jedes Stück* 30 *Ellen lang, und* $1\frac{1}{4}$ *Ellen breit ist; wie viel Stück Leinwand werden* 80 *Weber in* 15 *Wochen verfertigen, wenn sie wöchentlich* 6 *Tage, und täglich* 12 *Stunden arbeiten, und jedes Stück* 40 *Ellen lang, und* 1 *Elle breit sein soll?* ([M4], 1838, str. 244)

Význam „trojčlenky“ naznačil také při převodu jednotek vah a měr užívaných v různých zemích; přitom předpokládal, že jsou známy jejich vzájemné vztahy. Následně uvedl rozsáhlý popis konkrétních jednotek řady zemí (Francie, země rakouské monarchie, Rusko aj.) a připojil převodní vztahy.

Pátou kapitolu zaměřil na praktické ovládnutí řešení rovnic prvního a druhého stupně, soustav dvou a tří lineárních rovnic o stejném počtu neznámých, výpočet aritmetického a geometrického průměru apod. Tato kapitola obsahuje nejvíce příkladů na procvičení, proto nejzajímavější z nich ocitujme:

Zwei Bombardiere werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben; der erste hatte schon 50 *Würfe gemacht, ehe der zweite zu werfen anfing, und macht* 7 *Würfe, während der zweite deren* 5 *macht; hingegen braucht der zweite zu* 2 *Würfen so viel Pulver als der erste zu* 3. *Die Frage ist, wie viel Würfe wird der zweite machen, bis er so viel Pulver verbraucht hat, als der erste?* ([M4], 1838, str. 268)

Ein Hauptmann des Bombardier-Corps wurde gefragt, wie viel er bei seiner Compagnie Oberfeuerwerker, Feuerwerker und Bombardiere habe, und wie viel jeder täglich Löhnung erhalte? Er sagte: ich habe dreimal so viel Bombardiere, und $\frac{2}{3}$ *Mal so viel Oberfeuerwerker als Feuerwerker; jeder Oberfeuerwerker hat täglich so viel Kreuzer als Feuerwerker, jeder Feuerwerker um* 4 *Kr. mehr, als Oberfeuerwerker, und jeder Bombardier nur den dritten Theil so viel Kr., als Feuerwerker sind; und die tägliche Löhnung aller dieser Leute beträgt* 52 *Fl.* 48 *Kr. Wie viel Oberfeuerwerker, Feuerwerker und Bombardiere hatte dieser Hauptmann, und wie viel Löhnung hatte jeder täglich?* ([M4], 1838, str. 275)

Eine Zahl zu finden, die aus drei Ziffern von solcher Beschaffenheit besteht, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern, ohne auf ihren Rang zu sehen, $= 104$, *das Quadrat der mittlern Ziffer um* 4 *größer sei, als das doppelte Product der beiden äußern, eindlich daß, wenn man von der gesuchten Zahl die Zahl* 594 *abzieht, die gesuchten* 3 *Ziffern, aus welchen die Zahl besteht, in verkehrter Ordnung zum Vorschein kommen. Wie heißt diese Zahl?* ([M4], 1838, str. 293)

V šesté kapitole pojednal o číselných řadách a jejich vlastnostech; zejména o aritmetických a geometrických řadách a jejich četných aplikacích v armádě. Dále vyložil základy kombinatoriky, binomickou větu, logaritmy a pravidla práce s logaritmickými tabulkami.[99]

Sedmá, nejrozsáhlejší kapitola zasahuje do analýzy a je v podstatě věnována teorii funkcí jedné reálné proměnné. V úvodu W. Matzka zavedl základní pojmy (explicitní a implicitní funkce, funkce jedné a více proměnných, „nekonečně malé“ a „nekonečně velké“ veličiny apod.), zavedl n-tou derivaci funkce. Podstatnou část kapitoly však zaměřil na řešení rovnic vyšších stupňů. Vysvětlil metody užívané při řešení rovnic („odhad“ kořenů, snížení stupně polynomu), vyložil obecný návod řešení kubických a bikvadratických rovnic apod. Dále popsal problematiku nekonečných řad (konvergence, divergence, kritéria konvergence, rozvoj řad atd.), metodu neurčitých koeficientů a její užití při rozkladu

[99] W. Matzka v této části odkázal na Vegovy logaritmicko-trigonometrické tabulky, Vega G., *Logarithmische, trigonometrische, und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln*, Wien, 1783, a Vega G., *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch*, Leipzig, 1793, které byly pro svou úplnost a správnost vysoce ceněny a po několik desítek let opětovně vydávány. Vegovy tabulky obsahují např. hodnoty dekadických logaritmů všech přirozených čísel od 1 do 100000 (s přesností na sedm desetinných míst), tabulky přirozených logaritmů od 1 do 100000 (s přesností na osm desetinných míst) či tabulky logaritmů funkcí sinus a tanges pro rozmezí stupňů $0°$ až $6°$ a $82°$ až $89°$ s krokem po deseti sekundách (s přesností na sedm desetinných míst).

racionálně lomených funkcí na parciální zlomky, objasnil rozdílové a součtové řady a aritmetické řady vyšších řádů, figurální čísla a na závěr interpolaci, včetně využití Lagrangeova interpolačního polynomu.

Ocitujme na ukázku d'Alembertovo podílové kritérium a zavedení rozdílové řady r-tého řádu:

Von den Kennzeichen der Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen wird für unsere Zwecke nachstehendes genügen.

Eine unendliche Reihe $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots \;\; \substack{convergirt \\ divergirt}$, *wenn bei dem unendlichen Wachsen von* n *das Verhältniß* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *einer Grenze* A, *deren Zahlwerth* $\substack{kleiner \\ grösser}$ *als* 1 *ist, ohne Ende sich nähert.* ([M4], 1838, str. 499)

Zieht man in einer Reihe oder auch in einer blos willkürlichen Folge von Größen, welche durch

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots$$

bezeichnet werden mögen, jedes Glied von dem unmittelbar nachfolgenden ab; so erhält man eine Reihe von Differenzen, welche die Differenzreihe der vorgelegten Reihe genannt wird. Verfährt man mit dieser Reihe gerade so, wie mit der ersten und wiederholt dieses Verfahren beliebig oft, so gewinnt man nach und nach eine Kette von Reihen … Deutet man nun die Differenz zweier nach einander folgender Glieder dadurch an, daß man dem Subtrahend den Buchstaben Δ *vorschreibt … so erhält man in der ersten Differenzreihe die Glieder*

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, \ldots \Delta u_n, \ldots$$

… Auf dieselbe Art werden die Glieder … der r*ten Differenzreihe mit*

$$\Delta^r u_0, \Delta^r u_1, \Delta^r u_2, \Delta^r u_3, \ldots \Delta^r u_n, \ldots$$

bezeichnet, und dabei ist

$$\begin{array}{llll} \Delta u_0 = u_1 - u_0 & & \Delta^r u_0 = \Delta^{r-1} u_1 - \Delta^{r-1} u_0 & \\ \Delta u_1 = u_2 - u_1 & & \Delta^r u_1 = \Delta^{r-1} u_2 - \Delta^{r-1} u_1 & \\ \Delta u_2 = u_3 - u_2 & ,\ldots & \Delta^r u_2 = \Delta^{r-1} u_3 - \Delta^{r-1} u_2 & . \\ \ldots & & \ldots & \\ \Delta u_n = u_{n+1} - u_n & & \Delta^r u_n = \Delta^{r-1} u_{n+1} - \Delta^{r-1} u_n & \end{array}$$

([M4], 1838, str. 543–544)

Závěrečnou část knihy (dodatek) tvoří tabulky prvočinitelů přirozených čísel 1 až 16397 (vyjma čísel dělitelných 2, 3 a 5), tabulky čtvrtých až osmých mocnin přirozených čísel 1 až 100, tabulky druhých a třetích mocnin a odmocnin přirozených čísel 1 až 1000 a tabulky převodních vztahů fyzikálních jednotek. W. Matzka je proti předchozím vydáním upravil a rozšířil, porovnal s obdobnými tabulkami, pečlivě přepočítal a opravil. Takto přepracované tabulky vyšly tiskem též samostatně pod názvem *Tafel der Primfactoren der Zahlen von 1 bis 16397, Tafel der vierten bis achten Potenzen der Zahlen von 1 bis 100, Tafel* *der zweiten und dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 1000, Tafel der zweiten und dritten Wurzeln der Zahlen von 1 bis 1000, Tafel zur Verwandlung der Fuße, Zolle, Linien und Puncte des zwölftheiligen Maßes in Decimaltheile der Klafter, des Fußes und des Zolles, wie auch umgekehrt* [M5].

Učebnice v Matzkově přepracování má 612 stran. Již při prvním vydání (1782, 354 stran) byla určena především pro výuku frekventantů sboru bombardýrů, a proto byla více orientována na praktické použití matematických znalostí. Toto pojetí učebnice se velmi osvědčilo a stalo se jedním z hlavních důvodů jejích dalších vydání.

W. Matzka zachoval původní koncepci učebnice, neboť měl na paměti, pro jakou skupinu studentů je určena. Již od počátku je znát jeho snaha, co nejvíce se přiblížit začátečníkům. Teoretický výklad používal především pro přirozené uvedení do studované problematiky. Nové pojmy zaváděl spíše intuitivně, bez použití definic v dnešním slova smyslu. Po (mnohdy obšírném) vysvětlení tématu následovala často shrnující věta. Text prokládal řadou příkladů, na nichž látku konkrétně vysvětlil, a připojil vzorově řešené příklady na procvičení. Klasicky volil postup od jednoduchého po složité, často povzbuzoval čtenáře k řešení dalších úloh větou *Folgende Beispiele wird ein fleißiger Anfänger nunmehr selbst leicht ausarbeiten können* či je vybízel k vlastnímu studiu slovy *Mehrere Beispiele kann sich der Anfänger selbst leicht aufgeben*.

I přes původní myšlenku vyvarovat se obšírných důkazů a zaměřit se na vysvětlení nejnutnější matematické látky, je patrné, že se W. Matzka přeci jen snažil učebnici vystavět na vyšším teoretickém a o poznání více „vědeckém“ základě. Učinil tak zejména v oblastech, které jsou určeny již pokročilejšímu čtenáři. Mnohé partie jsou v jeho podání znatelně detailněji propracované (ve srovnání s 5. vydáním, 1829, 475 stran) a doplněné množstvím příkladů i teorie (např. partie o řetězových zlomcích, odmocninách a logaritmech). Navíc do učebnice zahrnul i oblasti zcela nové (např. část věnovaná dělitelnosti), přičemž za nejvýznamnější z nich můžeme jednoznačně označit celou sedmou kapitolu pojednávající o funkcích (sedmá kapitola předchozích vydání zahrnovala pouze řešení vyšších rovnic).

Ganz neu und bedeutend ausgedehnter bearbeitete ich den Abriß der Analysis des Endlichen, und glaube mir als Verdienst anrechnen zu dürfen, daß ich das Wichtigste von Fourier's Vervollkommnung der Newton'schen Annäherungsmethode an die irrationellen Wurzeln der Zahlengleichungen der Erste ohne Differentialrechnung und ohne geometrische Betrachtungen zusammengestellt habe. ([M4], 1838, str. V)

V roce 1850, v době svého působení na pražské univerzitě, vydal W. Matzka první díl *Vorlesungen über die Mathematik* znovu ([M4], 1850, 624 stran). Proti předchozímu vydání se však nová verze obsahově výrazně neliší. Obsahuje jen nepatrné změny a vylepšení v podobě upraveného značení, doplnění názorných schémat či několika nových příkladů.

47

Druhý díl

Na potřebu zrevidovat Vegovy učebnice matematiky upozornilo vedení vídeňského sboru bombardýrů již počátkem 30. let. Jelikož od jejich prvního vydání uplynulo více než půl století a matematika za tu dobu udělala velký krok vpřed, bylo „zapotřebí knihy kriticky přezkoumat“ a vhodně upravit, aby mohly být pro výuku používány i nadále, a to se stejným úspěchem jako doposud. Nejprve se přistoupilo k revizi druhého dílu učebnice, jenž se v tomto smyslu jevil naléhavějším. Jeho kontrolou byl pověřen podporučík a profesor matematiky ve sboru bombardýrů W. Matzka. Jako sedmé, kompletně přepracované a rozšířené vydání byla učebnice věnující se zejména geometrii, trigonometrii a infinitezimálnímu počtu otištěna pod jeho jménem ve Vídni roku 1835.

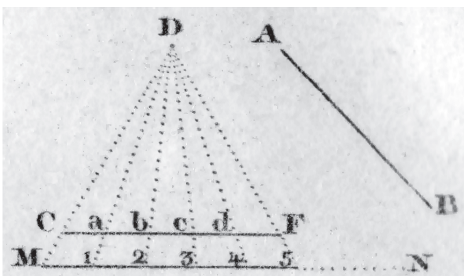
Učebnice s podtitulem *Die theoretische und praktische Geometrie, die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie, und die Infinitesimal-Rechnung* [M3] zahrnuje osm kapitol.

V první kapitole W. Matzka nejprve obecně vymezil předmět geometrie, uvedl základní pojmy (bod, přímka, plocha, těleso aj.), vztahy a vlastnosti útvarů a jednotky míry. Dále věnoval pozornost geometrii rovinných obrazců; popsal základní vlastnosti trojúhelníků a mnohoúhelníků, podobnost trojúhelníků a mnohoúhelníků (definováno pomocí poměrů), diskutoval vzájemnou polohu dvou přímek, přímky a kružnice apod. V závěru uvedl několik řešených úloh procvičujících zejména praktické rýsování (např. rozdělit úsečku v daném poměru, danou úsečku rozdělit na n stejných částí).

Ve druhé kapitole se zabýval výpočtem obsahu rovinných obrazců. Uvedl jak klasické vzorce, tak četné vzorce a postupy platné pro speciální případy. V části nazvané *Von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren* řešil úlohy typu *obrazec A převést v obrazec B tak, aby zůstal zachován jeho obsah* či *rozdělit daný obrazec na n stejných částí.* Na závěr věnoval několik stran diskuzi vzájemné polohy dvou rovin, přímky a roviny apod.

Uveďme na ukázku jeden z řešených příkladů i s názorným náčrtkem:

Ein Dreyeck CDF in n, z. B. in 5, gleiche Theile zu theilen.



... Man theile eine Seite CF des gegebenen Dreyeckes in den Puncten a, b, c, d in n gleiche Theile, verbinde diese Theilungspuncte mit dem entgegengesetzten Winkelpuncte durch gerade Linien; so wird dadurch das gegebene Dreyeck in n gleiche Theile getheilt. Denn alle n Dreyecke haben gleiche Grundlinien, und dieselbe Höhe; folglich sind sie einander am Flächeninhalte gleich.

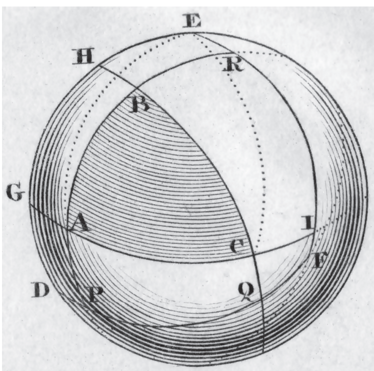
Wäre das Dreyeck in zwei Theile zu theilen, die sich wie m zu n, z. B. wie 2 zu 3, verhalten sollen; so theile man eine Seite in $m+n=2+3=5$ gleiche Theile, und verbinde den $m$ten (in unserem Falle den 2ten) Theilungspunct b mit der entgegensetzten Winkelspitze durch die Geraden bD; so ist dadurch das Dreyeck in zwey Theile CbD und DbF getheilet, die sich wie m zu n, das ist, wie 2 zu 3 verhalten. Dasselbe ist zu beobachten, wenn ein Dreyeck in mehrere Theile zu theilen wäre, die sich wie m, n, p, u. s. w. verhalten sollen. ([M3], 1835, str. 113, obr. 70)

Ve třetí kapitole definoval tělesa (včetně těles platónských), připojil jejich popis, základní vztahy a vlastnosti. Podal obecný návod na výpočet povrchu libovolného tělesa, zavedl vzorce pro výpočet objemu, popsal vztahy mezi jednotlivými tělesy a diskutoval podobnost prostorových útvarů. Vše proložil větším množstvím řešených příkladů.

Čtvrtou kapitolu věnoval trigonometrii. Nejprve připomněl základní vlastnosti trojúhelníků, pak zavedl goniometrické funkce, uvedl jejich vzájemné vztahy a popsal způsob práce s trigonometrickými tabulkami. Následně se věnoval řešení rovinného a sférického trojúhelníku. Znalosti o sférickém trojúhelníku v závěru kapitoly aplikoval na řešení několika praktických úloh z astronomie.

Z dnešního pohledu jsou úlohy o sférickém trojúhelníku (ve školské matematice) již téměř zapomenutým tématem. Věnujme proto této oblasti více pozornosti a ocitujme delší úryvek z Matzkovy učebnice, vysvětlující základní vlastnosti sférického trojúhelníku, a následně dvě řešené úlohy:

Zu jeder Seite eines sphärischen Dreyeckes ABC gehört, da sie ein Bogen von einem größten Kreise ist … eine auf ihr senkrechte Achse mit zwey Polen. Denkt man sich eine solche Seite, etwa AB, zum Vollkreise erweitert, so theilt sie die ganze Kugelfläche in zwei Halbkugeln, von denen die eine das sphärische Dreyeck ABC ganz enthält … Im sphärischen Dreyecke ist die Summe je zweyer Seiten größer als die dritte … Die Summe der Seiten des sphärischen Dreyeckes ist immer kleiner als eine größte Kreisperiphirie, oder kleiner als $360°$ … *Die Summe zweyer Winkel des sphärischen Dreieckes übersteigt den dritten Winkel um weniger als* $180°$ … *Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreyeckes liegt zwischen* 2 *und* 6 *rechten Winkeln oder zwischen* $180°$ *und* $540°$. ([M3], 1835, str. 234, 246–248, obr. 127)



* * *

Gegeben seyen: zwey Seiten A und B mit den eingeschlossenen Winkel c; gesucht werden: die dritte Seite C und die beyden andern Winkel a und b.

1. *Die dritte Seite C findet man aus der Gleichung,*

$$\cos C = \cos c \cdot \sin A \cdot \sin B \ + \cos A \cdot \cos B.$$

Um diese Gleichung für die logarithmische Behandlung einzurichten, verwandelt man sie in

$$\cos C = \cos B \,(\cos c \cdot \operatorname{tang} B \cdot \sin A + \cos A)$$

und wählet einen Winkel x so, daß,

$$\cos c \cdot \operatorname{tang} B = \operatorname{tang} x$$

ist; dieß macht

$$\cos C = \frac{\cos B \cdot \cos(A - x)}{\cos x}.$$

Man bestimmt daher zunächst x aus

$$\operatorname{tang} x = \cos c \cdot \operatorname{tang} B,$$

dann C aus

$$\cos C = \frac{\cos B \cdot \cos(A - x)}{\cos x}.$$

2. *Die beyden Winkeln a und b berechnet man am einfachsten mittelst der Neper'schen Analogie, man sucht nämlich*

$\frac{1}{2}(a + b)$ *aus*

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A - B)}{\cos\frac{1}{2}(A + B)} \cdot \cot\tfrac{1}{2}c,$$

$\frac{1}{2}(a - b)$ *aus*

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A - B)}{\sin\frac{1}{2}(A + B)} \cdot \cot\tfrac{1}{2}c.$$

Die Summe dieser Werthe gibt sofort den Winkel a, ihre Differeny aber b. ([M3], 1835, str. 256)

* * *

Soll aus zwey Seiten A, B und einem ihrer Gegenwinkel a der Flächeninhalt bestimmt werden, so suche man die beyden Winkeln b und c nach den Gleichungen

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A},$$

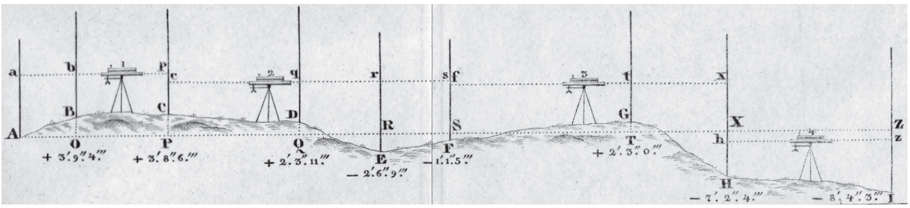
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cot\tfrac{1}{2}(a+b),$$

und setze ihre Werthe in die Gleichung

$$f = a + b + c - \pi.$$

… wird die Größe f zuerst in Graden, Minuten und Secunden berechnet, hierauf in Bogenlänge für den Halbmesser 1 *verwandelt, wornach sie den Flächeninhalt des sphärischen Dreyeckes in quadrirten Kugelhalbmessern angibt.* ([M3], 1835, str. 264)

V páté kapitole pojednal o základech praktické geometrie neboli měřictví; věty a závěry z předešlých kapitol zde aplikoval na řešení konkrétních měřických úloh. Zdůraznil, že matematika v tomto smyslu poskytuje velkou oporu, avšak je navíc nezbytně nutné velmi dobře znát a umět používat měřicí přístroje, s nimiž se při měření a zakreslení skutečných situací pracuje (např. měřický stůl, úhloměr, vodováha, nivelační přístroj, barometr).



([M3], 1835, obr. 171)

Šestou kapitolu W. Matzka věnoval rovinným křivkám. Po zavedení pravoúhlého a polárního systému souřadnic podrobně popsal kuželosečky (parabola, elipsa, hyperbola), vyložil základní pojmy a vztahy, odvodil rovnice kuželoseček (v obou systémech souřadnic) a rovnice tečen (u hyperboly také rovnice asymptot), naznačil vzorce pro výpočet obsahů ploch ohraničených elipsou nebo parabolou a přímkou, objemů rotačního paraboloidu a elipsoidu. Poměrně stručně pak podal základní vztahy, vlastnosti a rovnice některých křivek (např. logaritmická křivka, cykloida, eliptická, parabolická, hyperbolická a logaritmická spirála, konchoida).

Dvě závěrečné kapitoly (sedmá a osmá), představující téměř třetinu učebnice, pojednávaly o infinitezimálním počtu.

V sedmé kapitole se zabýval diferenciálním počtem. Nejprve připomněl a prohloubil pojem „nekonečně malé veličiny“ a zavedl diferenciál funkce. Následně podal pravidla pro derivování funkcí, výpočet parciální derivace a derivace vyšších řádů, jež doplnil řadou řešených příkladů. Dále vyložil užití diferenciálního počtu v analýze (Taylorova a Maclaurinova řada, rozvoje goniometrických funkcí, rozklad racionálně lomených funkcí na parciální zlomky, určení maxima a minima funkce apod.) a geometrii (vyšetření průběhu rovinných křivek, řešení úloh typu *dané kružnici opsat nejmenší možný trojúhelník*, *najít*

51

trojúhelník o maximálním obsahu apod.). V závěru uvedl několik úloh, jejichž řešení přenechal vlastní píli čtenáře.

Ocitujme nyní na ukázku zavedení diferenciálu funkce a jeden z řešených příkladů, v němž je vyšetřen průběh rovinné křivky:

Wenn eine veränderliche Größe x um einen unedlich kleinen Theil vergrößert wird, so heißt dieser das Differenzial von x ... Das Differenzial einer Function von einer oder mehreren veränderlichen Größen ist der Unterschied, um welchen die Function zunimmt, wenn man jede in derselben vorkommende veränderliche Größe um einen unendlich kleinen Theil vermehrt, nämlich wenn man in der Function jede veränderliche Größe um ihr Differenzial vergrößert. Daß man eine allenfallige Abnahme oder Verminderung der veränderlichen Größen und Functionen als eine negative Zunahme in der Rechnung aufzunehmen habe, bedarf wohl kaum einer Erinnerung. ([M3], 1835, str. 452–453)

* * *

Aus der Gleichung der Cycloide[100]

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + a \cdot \operatorname{arc\,sinv} \frac{x}{a}$$

folgt

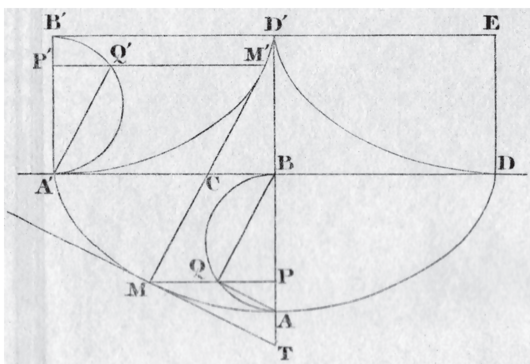
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} + \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{2a - x}{\sqrt{(2ax - x)x}},$$

nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}};$$

somit ist

$$\operatorname{tang} \omega = \sqrt{\frac{2a - x}{x}}.$$



[100] Rovnici cykloidy W. Matzka vyjádřil pomocí funkce *sinus versus*, která je definována jako $\operatorname{sinv} x = 1 - \cos x$ a v dnešní trigonometrii se již prakticky nevyskytuje.

V současné matematické teorii je rovnice cykloidy pro $x \in \langle 0, 2a \rangle$ vyjádřena vztahem $y = \sqrt{2ax - x^2} + a \arcsin \frac{x-a}{a}$, jehož první derivaci po úpravě odpovídá $y' = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$.

Zieht man nun die Sehne AQ, so wird

$$\operatorname{tang} PAQ = \frac{PQ}{AP} = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

demnach ist

$$PAQ = \omega = MTP,$$

woraus erhellet, daß in der Cycloide die Tangente MT mit der entsprechenden Sehne AQ des über die Achse verzeichneten Erzeugungskreises parallel läuft.

Ferner ist

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{2a - x}{x}\right)} = \sqrt{\frac{2a}{x}},$$

$$t = y\sqrt{\frac{x}{2a - x}}, \quad n = y\sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

$$T = y\sqrt{\frac{2a}{2a - x}}, \quad N = y\sqrt{\frac{2a}{x}}.$$

([M3], 1835, str. 526–527, obr. 197)

V osmé kapitole pojednal o integrálním počtu. Nejprve objasnil podstatu integrování, podal základní pravidla a uvedl „tabulkové“ integrály elementárních funkcí. Následně přiblížil integraci transcendentních funkcí a rozvoj integrálů v řady, integrování funkcí více proměnných a řešení obyčejných diferenciálních rovnic. V závěru na konkrétních příkladech ukázal aplikaci integrálního počtu při výpočtu obsahu rovinných obrazců omezených křivkami, rektifikaci křivek, výpočtu povrchů a objemů rotačních těles.

Učebnice obsahuje dodatek tvořený seznamem vzorců, vztahů a tabulkových hodnot (ve stupních i obloukové míře) goniometrických funkcí a rozvoji některých funkcí v řady.

Závěr knihy tvoří obrazová příloha, která na 16 stranách uvádí více než 200 názorných obrázků a grafických schémat (číslovaných), na něž je průběžně v textu odkazováno.[101]

Učebnice má 712 stran. W. Matzka vyšel z předchozích vydání (první vydání, 1784, 507 stran + 15 tabulek, ... , páté vydání, 1822, 663 stran + 15 tabulek), jež pečlivě pročetl, kriticky zhodnotil a podle potřeby vylepšil a doplnil jednotlivosti či kompletně přepracoval celé odstavce, paragrafy a kapitoly (např. části o rovinné a sférické trigonometrii, diferenciálním a integrálním počtu). Podmínkou vydavatele bylo sice podrobit učebnici důkladné revizi, přitom však zachovat jejího „ducha“ a cenu, tj. výrazně nenavýšit počet

[101] V názvu knihy [M3] je uvedeno *Mit 16 Kupfertafeln*, tedy obsahující 16 tabulek, tj. 16 stran obrazových příloh. Pravděpodobně nedopatřením však v sedmém ([M3], 1835) i osmém ([M3], 1848) vydání chybí tabulka číslo 7, vypadly tedy obrázky 109 až 120.

stran a v podstatě zachovat původní grafickou přílohu. Těmito požadavky se W. Matzka cítil poněkud svázán a učinil o tom poznámku v předmluvě knihy.

Dabey sah ich mich jedoch an vielen Puncten genöthiget, manche wesentliche Verbesserungen und Vermehrungen aufzugeben, theils weil sie sich mit den in dem Lehrbuche vorherrschenden Ansichten nicht in Einklang bringen ließen – weder die Bogenzahl ansehnlich vergrößert, noch die Kupfertafeln bedeutend abgeändert werden durften. ([M3], 1835, str. IV)

Přepracování druhého dílu učebnice *Vorlesungen über die Mathematik* se W. Matzkovi velice zdařilo a způsobilo tak, že učebnice byla i v dalších letech úspěšně používána pro výuku ve škole vídeňského sboru bombardýrů i v ostatních rakouských vojenských školách. V roce 1848, jako profesor na filozofické škole v Tarnově, W. Matzka vydal druhý díl této učebnice znovu ([M3], 1848, 660 stran + 16 tabulek). Plně zachoval jeho obsah, provedl pouze drobná vylepšení a opravy v podobě změny značení a odstranění tiskových chyb.

Shrnutí

Matzkova přepracovaná a rozšířená vydání prvního a druhého dílu učebnice *Vorlesungen über die Mathematik* řadu let úspěšně pokrývala výuku matematiky v prvních čtyřech ročnících nižšího kurzu vídeňské c. k. bombardýrské sborové školy. Oba díly na sebe plynule navazovaly a vzájemně na sebe odkazovaly.

Podle prvního dílu bylo vyučováno v prvním a třetím ročníku, tedy základy aritmetiky, algebry a úvodní část vyšší matematiky, která zahrnovala nauku o funkcích. Druhý díl pokrýval učivo druhého a čtvrtého ročníku, zahrnoval geometrické patrie a druhou část vyšší matematiky uvádějící do teorie diferenciálního a integrálního počtu.

V úvodu [M4] W. Matzka napsal:

Gelingt es mir, durch die nunmehr bewirkte Ueberarbeitung der, die reine Mathematik umfassenden, zwei ersten Bände von Vega's Vorlesungen über Mathematik, überhaupt zur Verbreitung des mathematischen Wissens und insbesondere zur Ausbildung der Zöglinge der k. k. Artillerie-Schulen und dadurch mittelbar zur Aufrechthaltung des Ruhmes einer Waffe, unter der durch achtzehn Jahre gedient zu haben ich mir stets zur Ehre rechnen werde, vortheilhaft mitzuwirken, so ist einer der sehnlichsten meiner Wünsche erfüllt. ([M4], 1838, str. V–VI)

Poukažme ještě v závěru důrazně na rozsah učiva, které tyto dva díly učebnice pojímají: začínají sčítáním a odčítáním přirozených čísel a končí aplikovanými úlohami z infinitezimálního počtu. Z dnešního pohledu tedy zahrnují matematické učivo od základního po vysokoškolské.

Z počátku 30. let 19. století pochází rovněž učebnice Adama Burga (1797–1882), profesora vyšší matematiky na vídeňské polytechnice, nazvaná *Ausführliches Lehrbuch der höheren Mathematik* ([Bu1] až [Bu3]). A. Burg v rozsáhlém třídílném spise podrobně zpracoval nauku o funkcích, vyšších rovnicích a nekonečných řadách (viz [Bu1]), analytickou geometrii v rovině i prostoru (viz

[Bu2]), infinitezimální počet, včetně jeho užití ve vyšší analýze a v geometrii, a základy variačního počtu (viz [Bu3]). Ač Matzkovy a Burgovy učebnice vykládaly obdobné oblasti matematiky, byly psány pro jinou cílovou skupinu studentů, a proto se přirozeně do určité míry lišila i úroveň jejich zpracování. A. Burg u studentů předpokládal výborné ovládnutí elementární matematiky, a tudíž tyto partie (na rozdíl od W. Matzky) do svých učebnic ani v náznacích nezahrnul. Co však učebnice obou autorů spojuje, je orientace na praktickou aplikaci získaných znalostí. Zatímco se W. Matzka zaměřoval na užití matematiky ve vojenství a v běžném životě, A. Burg kladl důraz na souvislosti vyšší matematiky s fyzikou, geodézií a stavitelstvím.

Na třídílnou učebnici *Ausführliches Lehrbuch der höheren Mathematik* navázal A. Burg o tři roky později vydáním kompendia vyšší matematiky *Compendium der höhern Mathematik* [Bu4], jehož cílem bylo předložit studentům učivo jen v rozsahu odpovídajícího jednoletého přednáškového kurzu na polytechnice. Jako úvodní kapitolu přidal rovinnou a sférickou trigonometrii; dále pokračoval ve zkrácené formě obsahem původních tří dílů učebnice vyšší matematiky ([Bu1] až [Bu3]).

Z dalších učebnic z první poloviny 19. století, které srozumitelně pojednávaly o partiích vyšší matematiky pro univerzitní studenty, zmiňme ještě velmi rozšířenou dvoudílnou učebnici Andrease von Ettingshausena (1796–1878), profesora vyšší matematiky na vídeňské univerzitě, nazvanou *Vorlesungen über die höhere Mathematik* [Ett] nebo pozdější učebnici Jakuba Filipa Kulika (1793–1863), profesora vyšší matematiky na pražské univerzitě, vydanou pod názvem *Lehrbuch der höheren Analysis* [Ku2].[102] Oba autoři u čtenářů předpokládali výbornou znalost elementárních partií a soustředili se tak pouze na podrobný výklad vyšší matematiky, která zahrnovala infinitezimální počet a analytickou geometrii. S ohledem na skupinu studentů, pro niž byly učebnice určeny, již není třeba zdůrazňovat (ve srovnání s Matzkovou učebnicí [M3] a [M4]) větší hloubku výkladu, vyšší míru abstrakce a odlišnou aplikaci získaných znalostí, která je přirozeně „zúžena“ na aplikace ve vyšší matematice (součty řad, variační počet) a mechanice (viz [Ett]).

* * * * *

Literatura

[Be1] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.

[Bu1] Burg A., *Ausführliches Lehrbuch der höhern Mathematik. Mit besonderer Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens. Erster Band. Enthaltend: Die Lehre von den Functionen, höhern Gleichungen, unendlichen Reihen u. s. w., endlichen Differenzen und Summen*, Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold, Wien, 1832, 478 stran.

[102] Stručný rozbor obsahu učebnice [Ku2] je uveden v [Be1] a [Mor2].

[Bu2] Burg A., *Ausführliches Lehrbuch der höhern Mathematik. Mit besonderer Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens. Zweiter Band. Enthaltend: Anwendung der Algebra auf die Geometrie, als Einleitung; die analytische Geometrie in der Ebene, als erster Abschnitt; und die analytische Geometrie im Raume, als zweiten Abschnitt*, Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold, Wien, 1833, 464 stran + 7 tabulek.

[Bu3] Burg A., *Ausführliches Lehrbuch der höhern Mathematik. Mit besonderer Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens. Dritter Band. Enthaltend: Die Differentialrechnung nebst ihrer Anwendung auf Gegenstände der höhern Analysis und Geometrie, als ersten Abschnitt; die Integralrechnung mit gleicher Anwendung, als zweiten Abschnitt; und die Elemente der Variationsrechnung, als Anhang*, Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold, Wien, 1833, 592 stran + 5 tabulek.

[Bu4] Burg A., *Compendium der höhern Mathematik*, Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold, Wien, 1836, 552 stran + 4 tabulky.

[Ett] Ettingshausen A., *Vorlesungen über die höhere Mathematik. Erster Band. Vorlesungen über die Analysis. Zweiter Band. Vorlesungen über die analytische Geometrie und Mechanik*, Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold, Wien, 1827, 443 a 495 stran + 1 tabulka.

[Ku2] Kulik J. F., *Lehrbuch der höheren Analysis*, Prag, 1831, 470 stran + 3 tabulky.

[Mor2] Moravec L., *Seznámení s Jakubem Filipem Kulikem*, in Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2009, 156–163.