OSTATNÍ PRÁCE KARLA ZAHRADNÍKA

V této kapitole stručně popíšeme tematiku, obsah, metody zpracování a prezentování výsledků a naznačíme význam Zahradníkových metodických, didaktických a popularizačních prací věnovaných elementární, analytické a syntetické geometrii, trigonometrii a základům matematické analýzy, jež napsal od počátku sedmdesátých let 19. století do prvního dvacetiletí 20. století. Jedná se o 29 příspěvků.

Články obvykle obsahovaly různé zajímavé pohledy na elementární matematické poznatky, drobná vylepšení a zjednodušení důkazů, netradiční motivační příklady, různé aplikace determinantů a diferenciálního počtu v analytické geometrii.[1] Karel Zahradník je sepisoval pro talentované studenty a učitele, aby je motivoval k dalšímu studiu a především aby poukázal na neobvyklé souvislosti. Články mnohdy měly dvě i tři jazykové verze (českou a chorvatskou, českou a německou, resp. českou, německou a chorvatskou), které se od sebe většinou téměř nelišily. Je zajímavé, že články psané pro studenty neobsahovaly úplná, detailní odvození či důkazy, ale jen předpoklady, náznaky postupu a výsledky. Odvození, důkazy, výpočty, konstrukce či náčrtky ponechával Karel Zahradník čtenářům. Jeho články byly proto náročnější než články jeho kolegů, neboť vyžadovaly nemalou samostatnou práci čtenáře.

Analytická geometrie

Analytickou geometrií se Karel Zahradník na různých úrovních zabýval celý svůj aktivní život.[2]

Klasický příklad z geometrie kuželoseček řešil již ve své prvotině nazvané *Jaké jest geometrické místo průseků tečen jedné kůželosečky s polarami bodů dotyčných vzhledem ke kůželosečce druhé?* [Z1], která byla roku 1872 otištěna v prvním ročníku *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky*, a jejíž název plně charakterizuje její obsah.

Úloha je vlastně velmi jednoduchá a lze ji zodpovědět téměř zpaměti. Označme dané kuželosečky K a L, bod na kuželosečce K písmenem B. Potom rovnice tečny ke kuželosečce K v bodě B a poláry bodu B vůči kuželosečce L jsou lineární a homogenní (v homogenních souřadnicích). Elementárním výpočtem z rovnice tečny a poláry dostaneme poměr souřadnic ξ a dosadíme jej do rovnice kuželosečky K. Získaný výsledek je odpovědí na Zahradníkovu otázku.

Předložený problém řešitelný na základě elementárních geometrických znalostí mohl být podnětný pro středoškolské studenty i tím, že neuváděl všechny kroky řešení, ale pouze nejdůležitější mezivýsledky a závěrečný výsledek.

---

[1] Stručné hodnocení některých Zahradníkových prací je obsaženo v [Be1], [Be3], [Be4], [Be5], [Le], [Ma], [Sj] a [Vo1].

[2] Krátká zamyšlení nad Zahradníkovými výsledky v analytické geometrie lze najít v [Be1], [Be3], [Be5] a [Vo1].

V letech 1873 a 1874 vycházela na pokračování v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* Zahradníkova téměř padesátistránková studie nazvaná *O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení* [Z3], kterou sepsal jako materiál rozšiřující základní kurz analytické geometrie. Věnoval se především pečlivému výkladu geometrie bodu, přímky, svazku přímek a řady bodů. Práce se skládala ze čtyř částí, které se dále dělily na paragrafy.

V první části (11 paragrafů) Karel Zahradník podrobně vyložil základy analytické geometrie přímky v rovině. Nejprve uvedl tzv. obecnou rovnici přímky ($ax+by+c=0$), normální rovnici ($x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$) a úsekovou rovnici ($ux+vy+1=0$) a vyložil význam koeficientů v jednotlivých analytických předpisech.

Co se tkne významu koefficientů v rovnici druhé a třetí, jest p délka kolmice spuštěné s počátku na přímku, α značí úhel, jejž uzavírá přímka s osou úseček, u, v jsou převratné negativní hodnoty úseků na ose x a y.[3]

Pak ukázal vzájemný vztah výše uvedených rovnic a odvození jedné rovnice ze druhé. Na závěr prvního paragrafu zavedl jednoduché symbolické značení: $A=0$ (obecná rovnice přímky), $P=0$ (normální rovnice přímky), $U=0$ (úseková rovnice přímky), $P_k=0\equiv x\cos\alpha_k+y\sin\alpha_k=p_k$ (systém k přímek), což mu umožnilo značné zkrácení dalších zápisů.

V druhém paragrafu definoval vzdálenost bodu od přímky v rovině. V třetím zavedl bod jako průsečík dvojice přímek $P_1=0$ a $P_2=0$, dále definoval *svazek paprsků*, který prochází průsečíkem výše uvedených přímek.[4]

… Souřadnice bodu průsečného, nevyhovují pouze rovnicím

$$P_1=0,\quad P_2=0,$$

nýbrž každé ze přímek, vyjádřených rovnicí

$$P_1-\lambda P_2=0,$$

kde značí λ libovolný koefficient. Značí nám tedy rovnice poslední soujem přímek procházejících průsečíkem přímek $P_1=0$ a $P_2=0$, tedy svazek paprskový, jehož vrchol jest průsečík

$$(P_1P_2)=t.$$

Ve čtvrtém paragrafu z analytického vyjádření svazku paprsků $P_1-\lambda P_2=0$ definovaného přímkami $P_1=0$ a $P_2=0$ a třetího paprsku Q_1, který přísluší dané hodnotě $\lambda_1=\lambda$, tj. $P_1-\lambda_1P_2=0=Q_1$, objasnil geometrický význam koeficientu λ_1:

Za tou příčinou volme na přímce Q_1 bod libovolný m. Vzdálenost jeho od přímky P_1 budiž K_1, od přímky P_2 pak K_2, takže podle věty ve článku 2.

$$K_1=P_1'=\xi\cos\alpha_1+\eta\sin\alpha_1-p_1,$$

[3] [Z3], str. 172.
[4] [Z3], str. 174.

$$K_2 = P_2' = \xi \cos \alpha_2 + \eta \sin \alpha_2 - p_2,$$

jest tedy

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{P_1'}{P_2'} = \frac{\xi \cos \alpha_1 + \eta \sin \alpha_1 - p_1}{\xi \cos \alpha_2 + \eta \sin \alpha_2 - p_2};$$

vedle toho rovná se pak též

$$K_1 = tm \cdot \sin(P_1 Q_1), \quad K_2 = tm \cdot \sin(P_2 Q_1)$$

pročež

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{P_1'}{P_2'} = \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)},$$

neb

$$P_1' - \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} P_2' = 0,$$

aneb přejdeme-li k označení souřadnic bodu proměnného na přímce $Q_1 = 0$ *kladouce* x, y *místo* ξ, η *obdržíme:*

$$P_1 - \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} P_2 = 0.$$

Jest tedy

$$\lambda_1 = \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} = \frac{K_1}{K_2}$$

čímž geometrický význam patrný.

I nazýváme λ_1 *poměrem paprsků* Q_1 *k paprskům* P_1 *a* P_2*. Pro* $\lambda = 0$ *přejde* Q_1 *v paprsek* P_1*, pro* $\lambda = \infty$ *sjednotí se opět paprsek* Q_1 *s paprskem* P_2*.*[5]

V pátém paragrafu definoval dvojpoměr dvou paprsků ke dvěma základním paprskům P_1 a P_2:[6]

… Jsou-li základní paprsky P_1, P_2, Q_1 *pak sdruženým poměrem* λ_1, Q_2 *poměrem* λ_2*, tu označuje poměr poměrů* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ *či dvojpoměr*

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = q = \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} : \frac{\sin(P_1 Q_2)}{\sin(P_2 Q_2)};$$

symboly oněch čtyř paprsků dávají se do závorky, i jest tudíž

$$(P_1 P_2 Q_1 Q_2) = \frac{\sin(P_1 Q_1)}{\sin(P_2 Q_1)} : \frac{\sin(P_1 Q_2)}{\sin(P_2 Q_2)} = q.$$

Dále zavedl tzv. harmonický svazek,[7] tj. svazek čtyř paprsků, pro něž je dvojpoměr roven mínus jedné a předložil příklad takovéhoto svazku. Pak

[5] [Z3], str. 175–176.

[6] [Z3], str. 176.

[7] Termín svazek není adekvátní; správně by se mělo mluvit o harmonické čtveřici, neboť svazek je označení množiny všech přímek incidujících s jedním bodem.

dokázal, že dvojpoměr čtyř přímek svazku nezávisí ani na poloze základních paprsků, ani na použitém tvaru analytického vyjádření paprsků, neboli

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = q.$$

Závěr paragrafu zakončil následujícím přehledným shrnutím:

Dané-li dva svazky přímek

$$R_1 - \lambda R_2 = 0, \qquad S_1 - \lambda S_2 = 0,$$

bude vždy dvojpoměr čtyř paprsků jednoho svazku roveň dvojpoměru čtyř příslušných paprsků svazku druhého. Dva svazky v také poloze nazýváme promítavými. I vysvítá z uvedeného, že dán-li dvojpoměr a tři paprsky, že čtvrtý paprsek jednoznačně určiti můžeme a že tři páry příslušných paprsků dva promítavé svazky úplně určují.[8]

Poznamenejme, že v Zahradníkově popisu chybí přiřazení:

$$R_1 \to S_1, \qquad R_2 \to S_2,$$

$$(R_1 - \lambda R_2) \to (S_1 - \lambda S_2).$$

Pak dvojpoměr čtyř přímek prvního svazku určených po řadě parametry κ, μ, ν, ϱ a dvojpoměr čtyř přímek druhého svazku určených po řadě týmiž parametry jsou vzájemně rovny. Nedostatek Zahradníkova zadání svazku je v nehomogenitě koeficientů. Přímku $R_2 = 0$ nelze dostat žádnou volbou koeficientu λ. Korektní projektivní zadání je pomocí dvou homogenních koeficientů λ_1 a λ_2:

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = 0, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0), \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \sim (t\lambda_1, t\lambda_2), \quad t \neq 0.$$

Pak

$$(1,0) \to R_1 = 0, \qquad (0,1) \to R_2 = 0.$$

Zahradníkova definice projetivnosti dvou svazků přímek je z pohledu dnešních nároků na exaktnost formulace nepostačující, nebyla však postačující ani na tehdejší úrovni.

V šestém paragrafu řešil otázku, jak vypadá pár přímek, který harmonicky dělí dva jiné páry přímek téhož svazku. Dva páry přímek označil

$$P_1 - \lambda_1 P_2 = 0, \qquad P_1 - \lambda_2 P_2 = 0,$$

$$P_1 - \lambda_3 P_2 = 0, \qquad P_1 - \lambda_4 P_2 = 0,$$

a tudíž rovnici hledaného páru mohl zapsat ve tvaru

$$P_1 - l_1 P_2 = 0, \qquad P_1 - l_2 P_2 = 0.$$

[8] [Z3], str. 178.

S využitím definice harmonického svazku dospěl k soustavě rovnic

$$l_1 l_2 - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$

$$l_1 l_2 - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0.$$

Ukázal, že považujeme-li $l_1 l_2$ a $l_1 + l_2$ za nové neznámé, dostaneme po nepříliš složitých úpravách kvadratickou rovnici, jejímž řešením po jednoduchých výpočtech obdržíme hledané hodnoty l_1 a l_2. Analytické řešení zakončil následující poznámkou:

Stává tedy jednoho a to jediného páru přímek, který dva páry přímek procházejících bodem jediným harmonicky dělí.

Pár tento jest realným neb imaginárným dle, toho, jsou-li kořeny rovnice quadratické reálné neb laterálné.[9]

V sedmém paragrafu odpovídal na otázku, zda existuje pár přímek, který by současně harmonicky odděloval tři páry přímek téhož svazku. Podobnou metodou jako v předchozím paragrafu ještě s využitím determinantů dospěl k závěru, že

… pět paprsků libovolně voliti můžeme, šestý pak že již polohou jich jest určen. I volme tedy tu zvláštní polohu paprsků, by druhý pár ve přímku jedinou a rovněž třetí pár se sjednotil v přímku jedinou, což analyticky vyjádříme

$$\lambda_3 = \lambda_4 = l_1, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = l_2,$$

načež rovnice přejde v rovnici

$$l_1 l_2 - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2,$$

z čehož jde, porovnáme-li s rovnicí (6), poučka tato: Sjednotí-li se ze tří párů přímek, tvořících involuci, dva páry přímek, každý v přímku jednu, dělí třetí pár tyto dvě přímky harmonicky.[10]

V dnešní terminologii lze Zahradníkovu větu vyslovit takto: Samodružné přímky involuce ve svazku přímek oddělují každou dvojici involutorních přímek harmonicky.

V osmém, devátém a desátém paragrafu odvodil další praktická vyjádření podmínky involuce šesti paprsků. V jedenáctém paragrafu ukázal, jak vyjádřit pár přímek pomocí jediné rovnice. Napsal:

Jsou-li $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ rovnice dvou přímek, nutno jejich součin

$$P_1 P_2 = 0$$

považovati za rovnici páru přímek; neb souřadnice každého bodu, jenž na jedné neb na druhé přímce leží, vyhovují této rovnici a naopak, musí všechny body,

[9] [Z3], str. 179.
[10] [Z3], str. 179–180.

jejichž souřadnice rovnici vyhovují, buď na přímce $P_1 = 0$ *neb* $P_2 = 0$ *ležeti. Rovnici páru přímek tedy obdržíme co součin rovnic přímek tohoto páru.*[11]

V závěru první části studie přehledně vypsal nejdůležitější dříve již odvozené vztahy pomocí nové, jednoduché symboliky.

Druhá část studie se skládá ze šesti dílčích paragrafů, v nichž jsou nastíněny aplikace poznatků získaných v předchozích jedenácti paragrafech.

V dvanáctém paragrafu Karel Zahradník stanovil podmínku, kdy se tři přímky vedené vrcholy trojúhelníka protínají v jednom bodě. Elementárními úpravami základních rovností dospěl ke známé Cevově větě a následně z popsaných vztahů vyvodil čtyři známé poznatky: osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě, osy dvou vnějších úhlů a osa jednoho vnitřního úhlu se protínají v jednom bodě, výšky se protínají v jednom bodě, těžnice se protínají v jednom bodě. Podrobnějším rozborem předložených výsledků dospěl k větě, která umožňuje sestrojit šestou přímku příslušnou ke třem párům přímek tvořících involuci, je-li dáno pět z nich:

Vedeme-li z daného bodu rovnoběžky ku stranám a příčkám protínajícím se v bodě jediném, obdržíme involuci šesti přímek.[12]

Ve třináctém, čtrnáctém a patnáctém paragrafu dokázal další tři zajímavé věty popisující involutorní vztahy v trojúhelníku, resp. trojúhelnících:

Jsou-li dva trojúhelníky v také poloze, že kolmice z vrcholů jednoho trojúhelníka na strany druhého spuštěné, jediným bodem probíhají, tu probíhají též kolmice z vrcholů druhého trojúhelníka na strany prvého trojúhelníka spuštěné bodem jediným.

Známe-li tři přímky P_1, P_2, P_3, *kteréž se neprotínají v bodě jediném, můžeme vždy rovnici jiné přímky* P *vyjádřiti pomocí symbolů daných tří přímek a to tvarem:*

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

Mají-li dva trojúhelníky takovou polohu, že průsečíky příslušných stran leží na přímce, tu prochází přímky, jež spojují příslušné vrchole těchto trojúhelníků bodem jediným.[13]

Poznamenejme, že třetí věta je větou obrácenou k Desarguesově větě.

V šestnáctém paragrafu vyšel ze základního trojúhelníku, jehož vrcholy proložil přímky, které se protínají v jediném bodě. Pak vyšetřoval jejich vlastnosti. V souladu se zavedenou symbolikou všechny přímky vyjádřil pomocí přímek základního trojúhelníka a dokázal následující věty:

Vedeme-li v rovině trojúhelníka $a_1a_2a_3$ *libovolnou příčku* S, *kteráž seče strany trojúhelníku v bodech* $c_1c_2c_3$ *a stanovíme-li si na každé bod harmonicky sdružený k bodu průsečnému příčky se stranou vzhledem k vrcholům trojúhelníku, tu procházejí přímky spojující tyto harmonicky sdružené body s protilehlým vrcholem týmž bodem* O.

[11] [Z3], str. 266.
[12] [Z3], str. 269–270.
[13] [Z3], str. 270, 271, 273.

Vedeme-li v rovině trojúhelníku libovolnou příčku a volíme-li na stranách trojúhelníku dva body, které tyto strany s příčkou harmonicky dělí, pak leží tyto dva body s průsečíkem strany třetí s příčkou na téže přímce.[14]

V posledním, sedmnáctém paragrafu druhé části aplikoval získané výsledky na čtyřúhelník. Dokázal, že

... přihlížíme-li místo k trojúhelníku $a_1a_2a_3$, ku čtyřúhelníku $a_1a_2c_1c_2$, budou body a_3 a c_3 průseky diagonal, tedy body diagonálnými. Tu ihned dokázati můžeme, že paprsky diagonalnými body procházející jsou harmonické. ... Této vlastnosti úplného čtyřúhelníku upotřebuje se ku sestrojení čtvrtého harmonického paprsku, dané-li jsou tři paprsky.[15]

Třetí část studie (15 paragrafů) uvedl Karel Zahradník následující úvahou o základních elementech roviny:

Přímka a bod jsou nejjednodušší útvary geometrické v rovině; pojímáme-li tedy jednou bod, jindy přímku za prvek křivky, jeví se nám býti v případě prvním místem bodů, v druhém pak obálkou přímek. Dvě veličiny, určující jednoznačně polohu takového útvaru jednoduchého, nazýváme jeho souřadnicemi. Rovnice libovolné přímky U jest

$$ux + vy + 1 = 0; \tag{1}$$

neb každá rovnice přímky, jak jsem již dříve ukázali, může na tento tvar se převésti.[16]

Pak se zamyslel nad vztahem přímkových a bodových souřadnic, popisem bodu, resp. přímky v rovině. Uveďme pro zajímavost jeho komplexní pohled:

Mají-li u, v určité hodnoty, představuje nám rovnice (1) určitou přímku, geometrické to místo všech (xy), jichž souřadnice rovnici (1) vyhovují. V případě tomto můžeme si tedy přímku U představiti, jako by vytvořena byla pohybem proměnného bodu $m(x,y)$. Jsou-li naopak x, y stálé souřadnice pevného bodu m a u, v proměnné, tu značí nám (1) rovnici všech přímek, jejichž souřadnice (u,v) oné rovnici vyhovují. Všechny tyto přímky procházejí pevným bodem (x,y), a za tou příčinou pravíme, že v tomto případě (1) jest rovnicí bodu $m(x,y)$.[17]

V druhém paragrafu analyzoval obecnou rovnici 1. stupně $au + bv + c = 0$ definující přímku v tzv. přímkových souřadnicích a ukázal, jak lze najít rovnici bodu, známe-li jeho souřadnice:

Poznámka tato dává nám na ruku, kterak bychom utvořili rovnici bodu, známe-li souřadnice tohoto bodu: neb dělíme-li rovnici (2) stálým členem v ní obsaženým, budou koefficienty v rovnici při u a v stojící souřadnicemi bodu a naopak, jsou-li dány souřadnice bodu, násobme úsečku veličinou u, pořadnu veličinou v a položme součet těchto součinů zvětšený o jedničku rovna nulle.[18]

[14] [Z3], str. 275.
[15] [Z3], str. 276.
[16] [Z3], str. 91.
[17] [Z3], str. 92.
[18] [Z3], str. 93.

Po výše popsaném „návodu“ uvedl tři základní tvary zápisu rovnice bodu

$$U \equiv xu + yv + 1 = 0,$$

$$A \equiv au + bv + c = 0,$$

$$P \equiv u\sin(\theta - \alpha) + v\sin\alpha - p = 0.$$

Následně pak poznamenal:[19] *Rovnice tyto platí všeobecně pro koso-úhlou soustavu souřadnic; je-li však soustava pravoúhelná, tedy $\theta = 90°$, nemění se sice prvé dva tvary rovnice, třetí však přejde v jednodušší rovnici*

$$u\cos\alpha + v\sin\alpha - p = 0.$$

V třetím paragrafu s využitím přímkových i bodových souřadnic odvodil základní vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky v rovině. Ve čtvrtém paragrafu ze znalosti rovnic dvou bodů $U_1 = 0$ a $U_2 = 0$ definoval *řadu bodovou*, která je jednoznačně určena přímkou $\overline{U_1U_2}$, a následně ji popsal jednoduchou rovnicí $U_1 - \lambda U_2 = 0$. Veličinu λ nabývající všech reálných hodnot nazýval parametrem, resp. poměrem bodu. Jeho význam se pokusil objasnit, značně inspirován Hesseovými *Vorlesugen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und Kreises* (Leipzig, 1865), v pátém paragrafu. V jeho závěru napsal:

Značí nám tedy $U_1 - \lambda U_2 = 0$ rovnici bodu, jímž všechny přímky probíhají, jejichž poměr vzdálenosti od obou daných bodů rovná se λ; bod tento leží na přímce $\overline{U_1U_2}$ a poměr vzdálenosti jeho od obou pevných bodů rovná se poměru vzdálenosti těchto bodů od libovolné přímky bodem tím probíhající se rovná λ.[20]

V šestém paragrafu definoval dvojpoměr dvou bodů vzhledem ke dvěma základním bodům takto:[21]

… Jsou-li tedy dány základní a_1, a_2, dále pak body b_1, b_2 příslušné poměrům λ_1, λ_2, tu značí dvojpoměr

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = q = \frac{a_1b_1}{a_2b_1} : \frac{a_1b_2}{a_2b_2} = (a_1a_2b_1b_2).$$

Pak popsal harmonické body (tj. čtveřice kolineárních bodů, jejichž dvojpoměr je roven mínus jedné). Postupoval podobně jako v první části studie, když zavedl harmonické přímky. V sedmém paragrafu nejprve definoval involuci tří párů bodů.

Tři páry bodů téže řady bodové tvoří involuci šesti bodů, existuje-li pár bodů, jenž by současně všechny tři páry bodů harmonicky dělil.[22]

[19] [Z3], str. 93.
[20] [Z3], str. 96.
[21] [Z3], str. 153.
[22] [Z3], str. 154.

Pak jednoduše ukázal, že pět bodů na přímce lze zvolit zcela libovolně, ale šestý je již jejich polohou určen jednoznačně. Vyložil také různé přístupy a vyšetřování involuce šesti bodů tak, jak je užívali ve svých dílech M. Chasles, Em. Weyr a Ed. Weyr.

V osmém a devátém paragrafu objasnil základní vlastnosti a vztahy involuce bodů. Mimo jiné dokázal dvě následující věty:[23]

Máme-li tři body $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, *ležící na téže přímce, tu vždy můžeme tři činitele* λ_1, λ_2, λ_3 *určiti tak, že identicky jest*

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 \equiv 0.$$

... Známe-li čtyři body $U_k = 0$, $(k = 0, 2, 3, 4)$ *neležící na téže přímce, tu vždy můžeme nalezti čtyři činitele* λ, *že bude identicky*

$$\sum \lambda_k U_k \equiv \lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 \equiv 0.$$

Velmi zajímavý byl krátký, desátý paragraf, který naznačil dualitu bodu a přímky, resp. reciprocitu dříve dokázaných tvrzení.

Porovnáme-li toto vyvinování s oným, jež jsme provedli při souřadnicích bodových, tu shledáváme, že každý vzorec uvedený dvojnásob čísti můžeme dle toho pojímáme-li proměnné co souřadnice bodové neb přímkové. Tato poznámka mohla nahraditi celé toto vyšetřování, jeví nám takto úplně zákon reciprocity bodu a přímky v rovině, jejž v plné jeho všeobecnosti dokážeme později.[24]

Připomeňme, že se jedná o klasický princip duality.

V jedenáctém paragrafu ukázal Desarguesův, Chaslesův a Weyrův přístup k involuci a uvedl několik historických poznámek.

Dvanáctý paragraf věnoval popisu páru bodů, ve třináctém odvodil vzorec pro výpočet vzdálenosti dvou bodů, které jsou zadány symbolickými rovnicemi $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, tj. $U_1 \cdot U_2 = 0$, tj. rovnicí $a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0$, a vztah pro výpočet úhlu páru přímek.

Ve čtrnáctém paragrafu ukázal transformaci přímkových souřadnic pro přechod od jedné kosoúhlé soustavy souřadnic k jiné kosoúhlé soustavě souřadnic. Vyšel ze známých transformačních vztahů užívaných pro bodové (tj. rovnoběžné) souřadnice. Vyvrcholením popisu vlastností involuce bodů byl patnáctý paragraf obsahující netradičně formulovanou Pappovu větu:

Budiž bod v vrchol svazku paprskového $P_1 - \lambda P_2 = 0$; *a mimo něj přímka* $A = 0$. *Svazek tento zkrátka znakem* (v) *označíme, paprsek příslušný hodnotě* $\lambda = \lambda_k$ *písmenem* B_k *a rovnici jeho* $B_k = 0$. *Každý paprsek svazku* (v) *protíná přímku* A *a naopak každým bodem přímky* A, *pojímáme-li ji za řadu bodovou, probíhá jediný jen paprsek daného svazku. Svazek* (v) *a řada bodová* A *jsou*

[23] [Z3], str. 156, 157.
[24] [Z3], str. 157.

tudíž ve vztahu jednoznačném a ihned dokážeme, že dvojpoměr libovolných čtyř paprsků svazku (v) *rovná se dvojpoměru příslušných čtyř bodů přímky* A.[25]

Názorný důkaz doplnil rozsáhlejší historickou poznámkou a základní literaturou (Pappův spis a Chaslesova práce), jejíž prostudování doporučoval pro lepší pochopení Pappovy věty a především pro hlubší poznání jejích aplikací v teorii křivek. V závěru patnáctého paragrafu uvedl výsledky bezprostředně plynoucí z Pappovy věty, které opět zdůrazňovaly reciprocitu bodové řady a svazku přímek. Karel Zahradník formuloval následující věty:

Libovolná přímka protíná svazek harmonický čtyř přímek v bodech harmonických.

Libovolná přímka protíná involuci paprskovou v involuci bodové.[26]

Je zřejmé, že uvedené věty neplatí pro přímky incidující se středem svazku přímek.

Připojil také jejich reciproké varianty:

Spojíme-li s libovolným bodem čtyři harmonické body, obdržíme svazek harmonický čtyř přímek.

Involuce bodová promítá se z libovolného bodu v involuci paprskové.[27]

Poslední, čtvrtá část (paragrafy 16 až 23) obsahovala základní klasické aplikace přímkových souřadnic a bodových řad. V šestnáctém paragrafu Karel Zahradník stanovil podmínku, kdy jsou tři body ležící na stranách trojúhelníka kolineární. Elementární aplikací dříve dokázaných vlastností bodových řad dospěl k Menelaově větě, kterou zapsal následovně:

… Rozdělují-li tři body b_1, b_2, b_3 *strany* a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 *daného trojúhelníku* $a_1a_2a_3$, *tak že součiny úseků nesbíhajících se rovnají, leží také body na přímce.*[28]

V sedmnáctém paragrafu dokázal dvě věty, které doplnily jeho dřívější popis harmonicky sdružených bodů trojúhelníku vzhledem k jeho vrcholům. Formuloval je takto:

Protneme-li strany daného trojúhelníku $a_1a_2a_3$ *přímkou* P *v bodech* b_1, b_2, b_3 *a sestrojíme-li ku dvěma bodům průsečným na př.* b_2, b_3 *jejich harmonicky sdružené body* b_2', b_3' *vzhledem k vrcholům trojúhelníku, leží tyto body s třetím průsečíkem* b_1 *na přímce.*

… Protneme-li příčkou strany trojúhelníku $a_1a_2a_3$ *v bodech* b_3, b_1, b_2 *a sestrojíme-li k bodům těmto vzhledem k vrcholům trojúhelníku body harmonicky sdružené* b_3', b_1', b_2', *tu prochází přímky spojující body tyto s protilehlými vrcholy trojúhelníka, bodem jediným.*[29]

---

[25] [Z3], str. 162–163. Poznamenejme, že Karel Zahradník v poznámce pod čarou uvedl i klasické znění Pappovy věty: *Prochází-li bodem čtyři přímky, tvoří tyto na příčce v rovině oněch přímek vedené čtyři úseky, jež jsou v určitém stálém poměru, ať již je vedena příčka jakkoliv.*

[26] [Z3], str. 164.

[27] [Z3], str. 164.

[28] [Z3], str. 199–200.

[29] [Z3], str. 200, 201.

V osmnáctém paragrafu rozšířil popis harmonických vlastností bodů na čtyřúhelník. V následujících třech paragrafech pojednal o těžišti a těžnicích, výškách a jejich průsečíku, středu kružnice trojúhelníku vepsané. Uveďme pro zajímavost Zahradníkovo chápání kružnice trojúhelníku vepsané:

... Kruhů v trojúhelník vepsaných (totiž takých kruhů, jež by se dotýkaly stran daného trojúhelníku) máme čtvero. Zmíněný bod l jest střed kruhu trojúhelníku uvnitř vepsaného, ostatní tři jsou opsány zevně. Rozpolovací přímky vždy dva zevnější úhly a jeden úhel vnitřní prochází středem takého kruhu.[30]

V dvacátém druhém paragrafu dokázal elementární větu, totiž, že přímky spojující středy protilehlých stran daného čtyřúhelníku se protínají v bodě, jehož souřadnice jsou $[\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_1+y_3+y_4}{4}]$. V posledním, dvacátém třetím paragrafu objasnil, že jsou-li dány čtyři přímky, z nichž každé tři tvoří trojúhelník, průsečíky výšek těchto čtyř trojúhelníků jsou kolineární.

Výstižné hodnocení výše popsané Zahradníkovy práce *O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení* [Z3] podal Emil Weyr v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*:

Des Verfassers Absicht ist, die Hauptsätze der neueren Geometrie nach der Plücker'schen Symbolik möglichst kurz und deutlich zu entwickeln. Der vorliegende erste Abschnitt der Abhandlung zerfällt in zwei Theile, von denen der erste Theil über harmonische und involutorische Strahlenbüschel handelt, und der zweite Theil die Anwendung des ersten auf verschiedene zwar bekannte Aufgaben vorführt, doch bietet Art der Beweisführung einzelner Aufgaben manches Neue.[31]

Es werden die bekannten Formeln der analytischen Geometrie in Liniencoordinaten entwickelt, in denen die abgekürzte (symbolische) Bezeichnungsweise zur Anwendung gelangt.[32]

Poznamenejme na závěr, že Karel Zahradník byl při sepisování této studie inspirován učebnicí českých geometrů Em. a Ed. Weyra *Základové vyšší geometrie* (1. díl, 1871), dále cizojazyčnými monografiemi, studiemi a odbornými články, které sepsali G. Desargues, W. Fiedler, O. L. Hesse, M. Chasles, A. F. Möbius, L. Painvin, J. Plücker, J. V. Poncelet, G. Salmon, J. Steiner aj.

Roku 1876 vyšla na pokračování v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* Zahradníkova pětačtyřicetistránková studie nazvaná *Geometrie kruhu* s podtitulem *Pro žáky středních škol sestavil ...* [Z18], která ve čtyřiadvaceti paragrafech velmi důkladně vyložila základní i rozšiřující partie z analytické geometrie kružnice.[33]

V prvním paragrafu Karel Zahradník uvedl základní definici kružnice (geometrické místo bodů s danou vlastností), zavedl normální, středovou a obecnou rovnici kružnice v kartézské soustavě souřadnic, rovnici kružnice v polární

[30] [Z3], str. 204.
[31] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 5(1873), str. 414.
[32] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 6(1874), str. 406.
[33] Karel Zahradník důsledně užíval termín *kruh* místo dnešního termínu *kružnice*.

soustavě souřadnic a připojil i vrcholovou rovnici (ale jen pro speciální polohu kružnice vzhledem k souřadnicovým osám). V druhém paragrafu provedl rozbor obecné rovnice druhého stupně $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ a uvedl podmínky, kdy reprezentuje rovnici kružnice. Ve třetím paragrafu popsal vzájemnou polohu přímky a kružnice. Podrobný rozbor provedl jen pro nejjednodušší případ $x^2 + y^2 = r^2$, $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$. Objasnil také pojmy tětiva a délka tětivy; jeho výklad je však z dnešního hlediska trochu kuriózní:

$$\overline{AB} = 2\sqrt{r^2 - p^2}$$

K znaménku odmocniny zde přihlížeti nemusíme, neb se nám jedná o absolutní délku tětivy (znaménku – odpovídala by totiž tětiva $\overline{BA}$ t. j. tatáž tětiva v opačném smyslu vzata).[34]

Ve čtvrtém paragrafu se věnoval netradiční látce, která se obvykle středoškolákům nevykládala, totiž *bodům kruhovým v nekonečnu*, jež zavedl takto:

Rovnici kruhu

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$$

můžeme učiniti stejnoměrnou (homogen.), položíme-li $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ za x, y. Bude tu

$$x^2 + y^2 - 2axz - 2byz + c^2z^2 = 0.$$

Rovnice přímky úběžné (nekonečně vzdálené) jest

$$z = 0,$$

tudíž jsou body kruhové, které leží na přímce úběžné, dané rovnicemi

$$x^2 + y^2 = 0,$$

$$z = 0. \tag{1}$$

Prvá z těchto rovnic značí nám kruh o nekonečně malém poloměru, aneb dvě přímky imaginárné, jejichž rovnice obdržíme, rozložíme-li rovnici toho kruhu na dva činitele, sice

$$(y - x\sqrt{-1})(y + x\sqrt{-1}) = 0. \tag{2}$$

I shledáváme, že rovnice, které nám určují body kruhu ležící na přímce úběžné, nezávislé jsou na veličinách a, b, c^2, z čehož plyne:

„Všechny kruhy v jedné rovině procházejí dvěma pevnými imaginárními body v nekonečnu. Body tyto všem kruhům společné nazývají se body kruhové v nekonečnu.“[35]

V pátém, šestém a sedmém paragrafu odvodil pro kružnici popsanou rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$ rovnici tečny a normály z bodu kružnice, resp. vnějšího, resp.

[34] [Z18], str. 15.
[35] [Z18], str. 15–16.

vnitřního bodu. V osmém paragrafu ukázal také nalezení rovnice tečny pro kružnici zadanou rovnicí $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c^2 = 0$. Poznamenejme, že v případě vnitřního bodu hovořil o tzv. *pomyslných* (imaginárních) *tečnách*. V desátém paragrafu vyložil mocnost bodu ke kružnici a v jedenáctém pojednal o pólu a poláře. Nejprve poláru zavedl standardní cestou, tj. jako spojnici bodů dotyku tečen vedených z bodu A ležícího vně kružnice. Pak uvedl druhý, méně obvyklý přístup, a to že poláru bodu A lze chápat jako množinu bodů harmonicky sdružených s bodem A vzhledem k dané kružnici. V dalších paragrafech se zabýval základními vlastnostmi polár. Nejprve popsal dvě elementární geometrické konstrukce odpovídající výše zmíněným přístupům k poláře, pak dokázal tři věty:

Prochází-li polára bodu A bodem B, prochází polára bodu B bodem A. Body A, B takové vlastnosti nazýváme harmonickými póly.

Každému bodu M na přímce $\overline{AB}$ odpovídá určitá polára procházející průsekem polár P_a, P_b a pohybuje-li se bod M na přímce $\overline{AB}$, otáčí se polára jeho kolem bodu (P_aP_b), průseku to polár P_a, P_b, jenž jest pólem přímky $\overline{AB}$.

Poměr vzdálenosti dvou bodů od středu kruhu rovná se poměru vzdálenosti těchto bodů od jich nestejnojmenných polár.[36]

Třináctý, čtrnáctý a patnáctý paragraf věnoval tzv. *sdruženému trojúhelníku* a objasnění jeho základních vlastností. Sdružený trojúhelník definoval takto:

Dán-li trojúhelník ABC, odpovídá jemu vzhledem ke kruhu nový trojúhelník $A'B'C'$, jenž má tu vlastnost, že vrchol A' polem jest strany BC atd. Trojúhelník $A'B'C'$ jmenujeme sdruženým trojúhelníku ABC. Takové dva trojúhelníky mají tu vlastnost, že spojivé přímky AA', BB', CC' probíhají týmž bodem.[37]

S využitím determinantů pak odvodil vztah mezi obsahy dvou sdružených trojúhelníků; nejprve pro obecný trojúhelník, potom pro trojúhelník vepsaný do kružnice a na závěr pro rovnostranný trojúhelník vepsaný do kružnice.

V patnáctém paragrafu ze znalosti souřadnic tří nekolineárních bodů a s využitím determinantů našel analytické vyjádření kružnice procházející těmito body. V dalších dvou paragrafech odvodil podmínku, kterou musí splňovat čtyři body, aby ležely na jedné kružnici. Vlastně tak analyticky, resp. s využitím determinantů dokázal známou Ptolemaiovu větu.

Další čtyři poměrně rozsáhlé paragrafy věnoval popisu *svazku kružnic*, tj. látce, která se na současných středních školách obvykle nevyučuje. Svazek kružnic definoval takto:

Shledali jsme, že kruh třemi body úplně jest určen a že čtvrtý bod již určité podmínce vyhověti musí, má-li ležeti na kruhu, tedy že čtyřmi body kruh obecně neprochází. Dány-li jsou pouze dva body, opět kruh úplně určen není, neb dvěma body prochází kruhů celá řada a souhrn všech kruhů, jež dvěma body procházejí, nazýváme svazek kruhů.

---

[36] [Z18], str. 73, 74, 75.
[37] [Z18], str. 75.

Rovnice takového svazku najdeme takto:
Budiž $K_1 = 0$ zkrátka psaná rovnice kruhu

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1^2 = 0 \tag{1}$$

a podobně $K_2 = 0$ rovnice druhého kruhu

$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2^2 = 0. \tag{2}$$

Tu značí

$$K_1 - \lambda K_2 = 0$$

opět rovnici kruhu, který prochází oběma průseky M, N kruhů K_1 a K_2, neb body průsečné leží i na jednom kruhu i na druhém kruhu ...[38]

Dále podal základní charakteristiku svazku kružnic, tj. uvedl analytické vyjádření souřadnic středů a délky poloměrů. Pak dokázal, že geometrickým místem všech středů kružnic procházejících dvěma body je přímka neboli *centrála*, která prochází středy kružnic K_1 a K_2.

V dalším paragrafu vyšetřoval tři speciální případy, kdy $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ a $\lambda = 1$. V prvních dvou případech dostal původní kružnice K_1 a K_2, ve třetím případu dospěl přirozenou cestou k chordále:

... místo všech bodů, jejichž tečny vzhledem ke dvěma pevným kruhům se rovnají, jest přímka, jiož nazýváme chordálou.[39]

V závěru tohoto paragrafu analyzoval dva speciální případy – kružnice K_1 a K_2 procházejí dvěma imaginárními body v nekonečnu, resp. kružnice K_1 a K_2 jsou soustředné. V dalším paragrafu hledal bod polárně sdružený k danému bodu vzhledem ke svazku kružnic. Svazek kružnic označil $K_1 - \lambda K_2 = 0$, bod B, stanovil poláru P_1 bodu B vzhledem ke kružnici K_1, poláru P_2 bodu B vzhledem ke kružnici K_2 a poláru $P_1 - \lambda P_2 = 0$ bodu B vzhledem k libovolné kružnici svazku $K_1 - \lambda K_2 = 0$. Pak dokázal tvrzení:

Poláry daného bodu vzhledem ke všech kruhům svazku potínají se v jednom bodě.[40]

Čtenáři doporučil, aby sám vyšetřil případ pro tečny svazku kružnic.

V posledním paragrafu věnovaném svazku kružnic ukázal jeho další vlastnosti a poodhalil hlubší souvislosti dříve odvozených vztahů. Pro zjednodušení a větší názornost volil speciální soustavu souřadnic; chordálu zvolil za osu y a centrálu (tj. spojnici středů dvou kružnic určujících daný svazek) za osu x, tak získal jednoduché analytické vyjádření svazku kružnic $x^2 + y^2 - 2\lambda x + k = 0$, kde k je pro daný svazek pevné číslo a λ je proměnné číslo (určuje libovolnou kružnici svazku). Pak hledal tzv. *základní body svazku*, tj. body, v nichž chordála protíná svazek kružnic (neboli $[0, \sqrt{k}]$ a $[0, -\sqrt{k}]$), a *mezné body*

[38] [Z18], str. 215–216.
[39] [Z18], str. 218.
[40] [Z18], str. 220.

svazku, tj. kružnice svazku, pro něž platí $\lambda = \pm\sqrt{k}$, neboli kružnice s nulovým poloměrem. Ukázal, kdy jsou základní, resp. mezné body reálné a kdy imaginární. Dospěl k závěru:

… jsou-li základní body svazku kruhů reálné, jsou mezné body imaginárné a naopak.[41]

Dále vyšetřoval mocnost počátku soustavy souřadnic, resp. libovolného bodu chordály vzhledem ke svazku kružnic a dokázal následující větu:

Vedeme-li z libovolného bodu na chordále tečny ku všem kruhům svazku, leží všechny body styku na kruhu, majícím za střed zmíněný bod; kruh tento probíhá meznými body L a L', a protíná kolmo všechny kruhy svazku.[42]

Pak přešel k popisu vlastností polár svazku kružnic. Nejprve si všímal polár mezných bodů svazku kružnice; následně formuloval a dokázal větu:

Polára jednoho mezného bodu jest vzhledem ke všem kruhům svazku rovnoběžná k chordále svazku a prochází druhým mezným svazkem.[43]

Studoval také vlastnosti obecných polár svazku a získal výsledek:

Dán budiž pevný bod B_1 v rovině kruhu, poláry jeho vzhledem k těmto kruhům procházejí pevným bodem B' a naopak, poláry bodu B' procházejí bodem B_1.[44]

Vyvrcholením popisu vlastností polár svazku kružnic byl důkaz věty:

Spojivá přímka dvou bodů B_1 a B' majících vlastnost reciprokou (poláry jednoho vzhledem ku kruhům svazku procházející bodem druhým a naopak) je tečnou společnou k dvěma kruhům svazku.[45]

Dvacátý druhý paragraf nazval *Stanovení úhlu dvou přímek nezávislé na jakosti souřadnic* a pokusil se v něm najít jednoduché analytické vyjádření $\operatorname{tg}\varphi$ (kde φ je velikost úhlu dvou přímek) nezávislé na volbě soustavy souřadnic. Poznamenejme, že to byl a je zcela netradiční přístup k dané problematice z hlediska výuky středoškolské analytické geometrie. Naznačme stručně Zahradníkův postup, který mohl být pro čtenáře motivací k dalšímu studiu analytické a syntetické geometrie. Nejprve uvedl analytické vyjádření dvou přímek v homogenních souřadnicích

$$P := ax + by + cz = 0, \quad P_1 := a_1x + b_1y + c_1z = 0.$$

Pak označil průsečíky přímek P a P_1 s úběžnou přímkou $z = 0$, tj. bod p, pro který platí $ax + by = 0$ a $z = 0$, resp. bod p_1, pro který platí $a_1x + b_1y = 0$ a $z = 0$. Popsal imaginární body kruhové v nekonečnu, tj. body k a k_1, pro něž platí $x^2 + y^2 = 0$ a $z = 0$ (neboli $k := x + \mathrm{i}y = 0$ a $z = 0$, resp. $k_1 := x - \mathrm{i}y = 0$ a $z = 0$), a dvojpoměr této čtveřice bodů ležících na úběžné přímce označil q. Pak ukázal, že čtveřice bodů k, k_1, p a p_1, jsou průsečíky přímek

$$x + \mathrm{i}y = 0,$$

41 [Z18], str. 253.
42 [Z18], str. 254.
43 [Z18], str. 254.
44 [Z18], str. 255.
45 [Z18], str. 256.

$$x + \mathrm{i}y = 0,$$

$$ax + by = 0,$$

$$a_1x + b_1y = 0,$$

s úběžnou přímkou $z = 0$, a tudíž i dvojpoměr těchto přímek se musí rovnat q. Po jednoduchých algebraických úpravách dospěl k vyjádření

$$q = \frac{aa_1 + bb_1 - (ab_1 - a_1b)\mathrm{i}}{aa_1 + bb_1 + (ab_1 - a_1b)\mathrm{i}}.$$

A jelikož víme, že $ab_1 - a_1b = (aa_1 + bb_1)\operatorname{tg}\varphi$, je

$$q = \frac{1 - \mathrm{i}\operatorname{tg}\varphi}{1 + \mathrm{i}\operatorname{tg}\varphi} = e^{-2\mathrm{i}\varphi},$$

a tedy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{q-1}{q+1}\cdot \mathrm{i},$$

neboli

$$\varphi = \frac{\mathrm{i}}{2}\ln q.$$

Poznamenejme, že se jedná o pokus o tzv. Laguerrovu projektivní definici (velikosti) úhlu dvou přímek.[46] V Zahradníkově výkladu to ovšem přesná projektivní definice není.

Také dvacátý třetí paragraf nazvaný *Rovnice kruhu v souřadnicích přímkových čili tangentiální rovnice kruhu* byl výraznou nadstavbou výuky analytické geometrie, a to i na našich středních školách v 19. století. Středoškolskému studentu *tangentiální rovnici* kružnice objasňoval takto:

Při bodové rovnici kruhu brali jsme bod za prvek kruhu, jejž jsme jeho souřadnicemi určili. Podobně můžeme tečnu kruhu za prvek pojímati a určiti ji jejími souřadnicemi, totiž úseky jejími na osách. Tu obdobně ku článku 1. obdržíme následující výměr kruhu:

„Přímky dané roviny, které od pevného bodu téže roviny stejně vzdálené jsou, tvoří kruh, an jest jejich obálkou.“

Značí-li u, v souřadnice libovolné přímky, která jak patrno bude tečnou kruhu, a, b souřadnice bodové středu jeho C, r jeho poloměr, a předpokládáme-li pravoúhlé souřadnice, což na věci nic nemění, bude

$$ux + vy + 1 = 0$$

rovnice také tečny a vzdálenost její od středu C bude

$$\frac{ua + vb + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = r. \tag{1}$$

[46] Viz J. Čižmár: *Grupy geometrických transformací*, Bratislava, 1984.

Rovnice tato vyjadřuje, že tečna (u, v) *od bodu pevného* (ab) *středu to kruhu danou vzdálenost má. Jsou-li u, v proměnné, vyjadřuje rovnice (1) relaci mezi souřadnicemi libovolné tečny kruhu a stálými a, b, r, t. j. rovnici kruhu, již též psáti můžeme*

$$(ua + vb + 1)^2 = r^2(u^2 + v^2).$$

Rovnice tato podává nám normálný tvar rovnice kruhu v souřadnicích přímkových ...[47]

Poslední paragraf rozsáhlé Zahradníkovy studie o geometrii kružnice analyzoval obecnou rovnici druhého stupně v přímkových souřadnicích, tj. rovnici

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0$$

a uvedl podmínky, kdy reprezentuje kružnici.

Na závěr Karel Zahradník napsal, jak chce ve studii pokračovat. Ocitujme záverečný odstavec z jeho práce [Z18]:

Podobně jako v souřadnicích bodových mohli bychom v souřadnicích tečnových (přímkových) geometrii kruhu odvoditi; místo bodu nastoupila by tečna kruhu co prvek jeho, a tak bychom obdobně ku předcházejícímu celou řadu vět odvoditi mohli pomocí souřadnic přímkových, jak jsme to již o přímce a bodu zevrubně byli provedli, pročež zde přestáváme na dvou článcích 42. a 43. a odvození samo zůstavuje se co cvičení. Znění jejich podává zákon duality, o němž svým místem učiněna byla zmínka. Složitější věty vztahující se k jednomu a více kruhům, mimo jiné zvlášť o středech a osách podobnosti, o problému Apollonia, o kruhu devíti bodů pro příští ročník si ponecháváme.[48]

Vzhledem k náročné práci, která před ním vyvstala po příchodu na univerzitu v chorvatském Záhřebu, se již k uvedené tematice nevrátil. Podrobně ji znovu rozpracoval ve vysokoškolské učebnici *Analytická geometrie. Svazek I. Geometrie bodu, přímky a kuželoseček* [Z96] z roku 1907.

Poznamenejme, že Karel Zahradník tuto rozsáhlou studii považoval za doplňkovou pomůcku pro talentované středoškolské studenty, která měla rozšířit a posílit jejich znalosti analytické geometrie, ukázat souvislosti mezi analytickou a syntetickou geometrií a motivovat je k dalšímu studiu odborné literatury. Základní text doplnil pečlivě provedenými názornými obrázky a úkoly, v nichž měl čtenář dokázat jednoduchá tvrzení, nakreslit doprovodné obrázky, provést jednoduché geometrické konstrukce nebo prostudovat náročnější partie v doporučené rozšiřující literatuře. Proto uváděl odkazy na dostupnou, nejčastěji česky psanou literaturu. Doporučoval například odborné geometrické práce Emila Weyra uveřejněné v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* a ve *Zprávách Jednoty českých mathematiků*, studie o determinantech Františka Josefa Studničky uveřejněné v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky*, první díl třídílné, dosti náročné monografie *Základové vyšší geometrie* bratří

[47] [Z18], str. 258–259.
[48] [Z18], str. 260.

Emila a Eduarda Weyra, učebnici Richarda Balzera *Theorie und Anwendung der Determinanten* a zejména pak svoji rozsáhlou studii *O symbolech analytické geometrie a jich upotřebení* [Z3], která měla obdobný charakter a zaměření jako studie *Geometrie kruhu* [Z18].

Roku 1877 publikoval v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* šestistránkový článek nazvaný *Transformace souřadnic pravoúhelných* [Z26], který sepsal pro středoškolské studenty a kandidáty učitelství. Pro případ roviny objasnil pojem lineární transformace, popsal její význam pro analytickou geometrii a uvedl její základní geometrické vlastnosti. Nejprve zavedl obecnou lineární transformaci, pak přešel k transformaci pravoúhlé soustavy souřadnic, následně detailněji vyložil dva speciální případy – posunutí (*pošinutí*) a otočení (*pootočení*). Výklad doplnil řadou názorných obrázků a základní literaturou, kterou čtenář mohl použít k rozšíření a doplnění znalostí.[49]

F. J. Studnička v recenzi uveřejněné v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* o Zahradníkově práci [Z26] výstižně napsal:

Das Problem der Coordinatentransformation wird auf eine formell neue Weise durchgeführt, und namentlich auf das Wesen desselben, sowie dessen Verhältniss in Betreff der Ebene und des Raumes hingewiesen.[50]

Roku 1878 otiskl *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky* Zahradníkův metodický výklad řešení dvou středoškolských příkladů nazvaný *Z analytické geometrie roviny* [Z38], který byl uveden tímto odstavcem:

V následujících řádkách uvádíme řešení dvou známých úloh geometrie prostorné s několika poznámkami, jež snad počátečníkovi budou vhodným cvičením.[51]

S využitím determinantů, propojením souvislostí analytické a syntetické geometrie získal jednoduché a názorné řešení následujících úloh:

Dané jsou dvě mimoběžky P, P_1; máme určiti rovinu, kteráž jdouc přímkou jednou, je rovnoběžná s přímkou druhou.[52]

Roviny, jež půlí vnitřní úhly čtyřstěnu, protínají se v bodě jediném.[53]

Zájemcům o hlubší porozumění problémům doporučil studovat Studničkovy oblíbené a rozšířené vysokoškolské učebnice základů analytické geometrie a sférické trigonometrie.[54] Zahradníkovou snahou nebylo pouze předložit názorné, jednoduché a bohatě komentované řešení, ale poukázat především na

[49] Karel Zahradník doporučoval dvě základní učebnice – F. J. Studnička: *Úvod do analytické geometrie v prostoru*, Nakladatel Fr. A. Urbánek, Tisk Dr. Ed. Grégr, Praha, 1874, 116 stran, F. J. Studnička: *O determinatech*, Tiskem Ed. Grégra, Praha, 1870, 64 stran.

[50] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 9(1877), str. 467.

[51] [Z38], str. 248.

[52] [Z38], str. 248.

[53] [Z38], str. 250.

[54] F. J. Studnička: *Úvod do analytické geometrie v prostoru*, Nakladatel Fr. A. Urbánek, Tisk Dr. Ed. Grégr, Praha, 1874, 116 stran, F. J. Studnička: *Základové sférické trigonometrie*, Tiskem Ed. Grégra, Praha, 1865, 68 stran.

souvislosti, výhody a nevýhody čistě analytického a čistě syntetického přístupu k řešení výše uvedených úloh.

Jak jsme ukázali v rozboru předchozích článků i v kapitole analyzující učebnice, měl Karel Zahradník i jako univerzitní profesor v Záhřebu zájem o kvalitní výuku analytické geometrie na středních školách. Roku 1879 publikoval v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* krátký článek nazvaný *Příspěvek k upotřebení determinantů* [Z43], v němž s využitím determinantů ukázal nápadité odvození dvou známých planimetrických vztahů. Nejprve pomocí determinantu zapsal podmínku, aby tři body $A_k[x_k, y_k]$ pro $k = 1, 2, 3$ ležely na téže přímce, tj.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jednoduchou úpravou obdržel vztah

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pak označil symbolem $P_t(a_m a_n)$ projekci délky $\overline{a_m a_n}$ na osu t, a to mu umožnilo převést předchozí determinant na tvar

$$\begin{vmatrix} P_x(a_1 a_2) & P_y(a_1 a_2) \\ P_x(a_2 a_3) & P_y(a_2 a_3) \end{vmatrix} = 0,$$

což je elegantní zápis známé planimetrické věty, kterou Karel Zahradník formuloval takto:

Vedeme-li bodem uhlopříčky daného obdélníku rovnoběžky se stranami, obdržíme dva obdélníky, jimiž ona uhlopříčka neprochází, a jež se plochou sobě rovnají.[55]

Umocněním rovnice

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = 0$$

a její následnou úpravou odvodil rovnost

$$\overline{a_1 a_2} \cdot \overline{a_2 a_3} = P_x(a_1 a_2) P_x(a_2 a_3) + P_y(a_1 a_2) P_y(a_2 a_3), \tag{4}$$

kterou komentoval slovy:

Jelikož můžeme $P_x(a_m a_n)$, $P_y(a_m a_n)$ považovati co složky délky $a_m a_n$, můžeme i rovnici (4) vyjádřiti následovně:

Součin dvou délek téhož směru se společným bodem rovná se součtu součinů jejich složek pravoúhlých.

[55] [Z43], str. 33.

Je-li

$$a_1a_2 = a_2a_3$$

plyne ze vzorce (4)

$$\overline{a_1a_2}^2 = \left[P_x(a_1a_2)\right]^2 + \left[P_y(a_1a_2)\right]^2, \tag{5}$$

což nám podává známou větu Pythagorovu.[56]

Na závěr článku zadal čtenáři úkol, aby ukázal, jak souvisí rovnice (4) s Ptolemaiovou větou.[57]

V roce 1893 začal vycházet nový chorvatský časopis nazvaný *Nastavni vjestnik (časopis za srednje škole)*, který byl primárně určen pro středoškolské učitele, středoškolské a vysokoškolské studenty, zájemce o matematiku, vyučování a všeobecné problémy vzdělávání.[58] V jeho druhém čísle Karel Zahradník uveřejnil čtyřstránkový příspěvek nazvaný *O hiperboličkoj transformaciji* [Z66], v němž podrobněji objasnil zajímavé vlastnosti asymptot a polár hyperboly.

Hyperbolu popsal rovnicí $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, její asymptoty rovnicemi $a_1 = bx - ay = 0$ a $a_2 = bx + ay = 0$, zvolil bod $P[\xi, \eta]$, který neležel na hyperbole. Asymptoty a_1, a_2 a polára p bodu $P[\xi, \eta]$ vytvořily trojúhelník A_1A_2P s těžištěm T (viz obrázek 1).

V první části článku s využitím analytické geometrie a trigonometrie vypočítal obsah trojúhelníku A_1A_2P, a to pro dva případy, kdy bod P neleží na hyperbole, resp. leží na hyperbole. Pak hledal geometrické místo bodů P, pro něž je obsah trojúhelníku A_1A_2P konstantní, a ukázal, že se jedná o hyperbolu s poloosami $a' = a\sqrt{\frac{ab}{S}}$ a $b' = b\sqrt{\frac{ab}{S}}$, kde S je obsah trojúhelníku A_1A_2P, která je koncentrická s původní hyperbolou. Pak naznačil, že každému bodu $P[\xi, \eta]$ odpovídá právě jediný bod T a že tyto body jsou v tzv. racionálním kvadratickém vztahu, neboli souřadnice bodu T jsou

$$x' = \frac{2}{3}\frac{a^2b^2\xi}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2},$$

[56] [Z43], str. 33.

[57] Souvislost rovnice s Ptolemaiovou větou a její názorný elementární důkaz uvedl již roku 1874 v německy psaném dvoustránkovém příspěvku *Welches ist die Bedingungsgleichung, unter welcher vier Punkte in einem Kreise liegen?* [Z12], který uveřejnil v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* v rubrice *Miscellen.* Poznamenejme, že Karel Zahradník v článku [Z12] neuvedl odkaz na žádnou literaturu, ačkoliv otázku, zda lze obrátit Ptolemaiovu větu, vyslovil již W. A. Förstemann v časopisu Journal für die reine und angewandte Mathematik (viz jeho problémová úloha uveřejněná ve výše uvedeném časopise 8(1832), str. 320). Do té doby se obrácená Ptolemaiova věta užívala jako samozřejmost. Nepřipojil ani informaci o prvních jejích pěkných a elementárních důkazech (viz např. W. A. Förstemann: *Umkehrung des Ptolomäischen Satzes*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 13(1835), str. 233–236; A. Möbius: *Die Theorie der Kreisverwandtschaft ...*, Abhandlungen der math.-phys. Classe der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 2(1885), str. 529–595 (o obrácené Ptolemaiově větě je na straně)). Ze Zahradníkových prací není zřejmé, zda výše uvedené práce znal, ale necitoval, nebo zda o jejich existenci nevěděl.

[58] Viz [Ma] a [Sj].

$$y' = \frac{2}{3}\frac{a^2b^2\eta}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2},$$

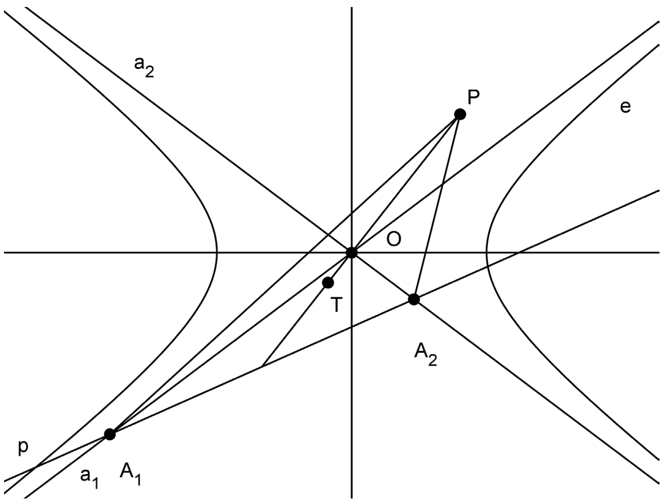
kde $P[\xi, \eta]$. A obráceně souřadnice bodu $P[\xi, \eta]$ jsou

$$\xi = \frac{2}{3}\frac{a^2b^2x'}{b^2x'^2 - a^2y'^2},$$

$$y' = \frac{2}{3}\frac{a^2b^2y'}{b^2x'^2 - a^2y'^2},$$

kde $T[x', y']$. Tedy vztah mezi souřadnicemi bodů P a T lze zapsat rovnicí

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y'}{x'}.$$



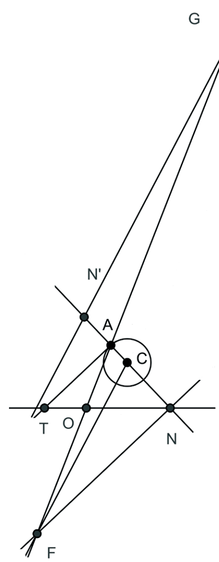
Obrázek 1. Náčrtek Zahradníkovy konstrukce v [Z66]

Zájemcům o hlubší porozumění problematice racionálního kvadratického vztahu doporučil prostudovat svoji více než třicetistránkovou práci *Vlastitosti nekih trojina točaka na cisoidi* [Z51] uveřejněnou v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.*[59]

V dalších čtyřech částech článku vyšetřoval geometrická místa bodů T pro speciální případy splňující předem zadané podmínky (konstantní obsah trojúhelníku A_1A_2P, pohyb bodu P po přímce neprocházející, resp. procházející středem hyperboly, konstantní vzdálenost bodů P a T apod.) a naznačil podstatu hyperbolické a eliptické transformace a kruhové inverze.

[59] Viz Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu 61(1882), str. 69–102. O tomto časopisu viz [Ma] a [Sj].

Zahradníkův článek byl pro čtenáře dosti náročný, neboť neobsahoval žádný ilustrační obrázek a navíc jednotlivá odvození nebyla detailně provedena. Byly pouze uvedeny základní výchozí vztahy, nejdůležitější mezivýsledky a výsledky. Pečlivá odvození, provedení výpočtů a promyšlení uváděných vztahů a souvislostí ponechal čtenáři. Pro pokročilejší nebo talentované studenty byl jistě tento přístup inspirativní a přínosný, ale pro začátečníky, a takových byla většina čtenářů, se však příliš nehodil.



Obrázek 2. Náčrtek Zahradníkovy konstrukce v [Z67]

Roku 1893 se Karel Zahradník inspirován článkem Husquina de Rhévillea[60] v krátké poznámce nazvané *Geometrijski značaj izraza* $d^2r/d\varphi^2$, $d^2\varphi/dr^2$ [Z67] uveřejněné v časopisu *Nastavni vjestnik (časopis za srednje škole)* pokusil vyložit geometrický význam $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$, resp. $\frac{d^2\varphi}{dr^2}$, kde $r = f(\varphi)$ je rovinná křivka zadaná v polárních souřadnicích. Vyšel ze zajímavé konstrukce[61] a pomocí podobnosti trojúhelníků dokázal, že

$$OG = -\frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

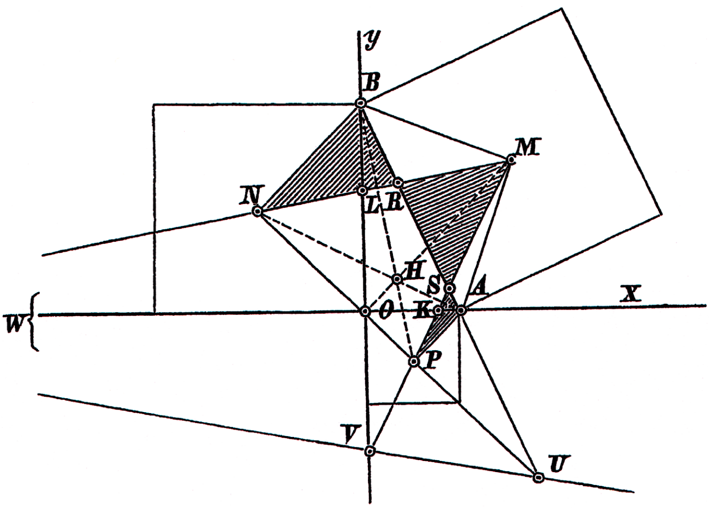
[60] Husquin de Rhéville: *Construction géométrique du centre de courbure en un point d'une courbe rapportée á des coordonnées polaires*, Nouvelles annales de mathématiques, 3. série, 10(1891), str. 411–416.

[61] *Neka je C središte krivosti krivulje u točki A, AN polarna normala; u N konstruirajmo okomicu na AN do presjecišta F s provodnicom. Nacrtajmo točku N' simetričku s N s obzirom na C, istosmjernica $N'G$ s CF neka presijeca provodnicu OA u točki G tako, da je* $OG = -\frac{d^2r}{d\varphi^2}$. ([Z67], str. 364) Volný překlad popisu konstrukce zní: Nechť C je střed křivosti křivky v bodě A, AN je polární normála; sestrojme v bodě N kolmici na AN a nalezněme její průsečík s průvodičem bodu A. Sestrojme bod N' symetricky k bodu N podle středu C, rovnoběžka $N'G$ s FC protíná průvodič OA v bodě G, pro nějž platí $OG = -\frac{d^2r}{d\varphi^2}$. Viz obrázek 2.

V první části poznámky uvedl jednoduchou konstrukci umožňující nalezení středu křivosti křivky $r = f(\varphi)$ v bodě A s využitím znalosti délky OG. V druhé části podobným způsobem vyložil geometrický význam $d^2\varphi/dr^2$.

Poznamenejme, že svůj příspěvek [Z67] bezesporu napsal pro čtenáře již pokročilejšího v matematice, neboť záměrně neuvedl obrázek,[62] nepřipojil zdůvodnění základních užívaných vztahů a ani nenaznačil odvození výsledků. Jeho výklad byl pro středoškolské i vysokoškolské studenty, resp. jejich učitele a další zájemce o matematiku hůře srozumitelný.

Roku 1895 Karel Zahradník uveřejnil v chorvatském časopisu *Nastavni vjesnik* v rubrice *Različne bilješke* třístránkový článek *Izvodi iz Pitagorina poučka* [Z68], který v následujícím roce vyšel v německé verzi v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* v rubrice *Miscellen* pod názvem *Zum Pythagoräischen Lehrsatze* [Z72] a v české verzi v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* pod názvem *K větě Pythagorově* [Z73]. Jak je z označení rubrik patrné, jednalo se o inspirativní drobnost předkládající zajímavá, ale nepříliš obtížná matematická tvrzení, která mohla zaujmout učitele matematiky nebo talentovanější středoškolské studenty. Karel Zahradník vyšel z pravoúhlého trojúhelníku OAB s odvěsnami $OA = a$, $OB = b$ a přeponou AB, kde O byl počátek kartézské soustavy souřadnic. Sestrojil čtverce nad přeponou AB a oběma odvěsnami OB a OA, stanovil jejich středy, tj. body M, N, P, jejichž souřadnice vzhledem k volbě soustavy souřadnic jsou $M = [\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}]$, $N = [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ a $P = [\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}]$. Obdržel nový trojúhelník MNP a vyšetřoval jeho vztah k původnímu trojúhelníku OAB (viz obrázek 3).



Obrázek 3. Zahradníkův doprovodný náčrt – Pythagorova věta[63]

[62] V poznámce pod čarou K. Zahradník napsal: *Dotični lik lasnoće čitatelj sam načiniti.* ([Z67], str. 364)

[63] Obrázek je převzat ze Zahradníkovy práce [Z73].

S využitím Pythagorovy věty, základů analytické a projektivní geometrie v první polovině článku dokázal a v jeho závěru přehledně formuloval čtyři základní výsledky:

1. Trojúhelníky MNP a OAB mají společné těžiště.

2. Spojnice $\overline{OM}$, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ protínají se v jednom bodě …

3. Trojúhelníky OAB, MNP jsou perspektivické, homologické strany protínají se v bodech téže přímky Π.

4. Kuželosečka jdoucí body $RLOKS$ dotýká se přímky NP v bodě O; tím je $RLOOKS$ Pascalův šestiúhelník a Π *přímka jeho Pascalova přímka.*[64]

V druhé části článku předložil náročnější úvahy. Nejprve řešil případ, kdy se přepona pravoúhlého trojúhelníku pohybuje tak, že splňuje předem stanovenou podmínku $\varphi(a,b) = 0$, a uvedl, jak vypadá obálka přímky Π. Dále popsal speciální případ, kdy se přepona AB otáčí okolo bodu A (tj. a je konstantní a b proměnné). Poznamenal, že při tomto pohybu dostaneme řadu pravoúhlých trojúhelníků OAB, ke každému z nich přísluší kuželosečka, středy všech takto získaných kuželoseček tvoří opět kuželosečku a řadě těchto trojúhelníků přísluší řada přímek Π, které obalují hyperbolu $x(y-a) = (\frac{a}{2})^2$. Žádný důkaz svého tvrzení, ani podrobnější popis situace neuvedl.

Analyzoval také případ, kdy a je konstantní a bod (ξ,η) je libovolným bodem roviny. Naznačil, že při této volbě bodem (ξ,η) procházejí dvě různé nebo splývající kuželosečky a že příslušné hodnoty b lze stanovit z rovnice

$$b^2\Big[\xi^2 + a(\xi+\eta)\Big] + a\Big[2\xi^2 - \xi\eta + 2\xi\eta^2 + a(\xi+\eta)\Big]b + a^2\eta^2 = 0.$$

Uvedl, že pokud bod (ξ,η) vyhovuje podmínce $2\xi^2 - \xi\eta + 2\eta^2 + a(\xi+\eta) = 0$ (tj. leží na elipse), obdržíme dva pravoúhlé trojúhelníky, které jsou souměrně sdružené podle osy x a jsou reálné v případě, že $\xi^2 + a(\xi+\eta) < 0$, tedy leží-li bod (ξ,η) ještě uvnitř paraboly $\xi^2 + a(\xi+\eta) = 0$. Nakonec stanovil podmínku pro polohu bodu (ξ,η) tak, aby obě kuželosečky splynuly, tj. aby existovalo jen jediné b.[65]

Na závěr poznamenal, že popsané výsledky by bylo možno zobecnit na případ, kdy nad přeponou a odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku OAB sestrojíme pravidelné n-úhelníky a budeme podobně pracovat s jejich středy.

Roku 1896 byl v chorvatském časopisu *Nastavni vjestnik* otištěn Zahradníkův článek nazvaný *Izvodi iz Pappusova poučka* [Z74], který vyšel o tři roky později také česky v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* pod názvem *O větě Pappusově* [Z81] a německy v časopisu *Archiv der Mathematik und*

---

[64] [Z73], str. 264–265. Poznamenejme, že Karel Zahradník odvodil rovnici kuželosečky ve tvaru $(2a+b)bx^2 - abxy + (a+2b)ay^2 + ab(a+b)(x+y) = 0$.

[65] V tomto případě bod (ξ,η) leží na křivce popsané rovnicí $[2\xi^2 - \xi\eta + 2\eta^2 + a(\xi+\eta)]^2 - \eta^2[\xi^2 + a(\xi+\eta)] = 0$.

Physik pod názvem *Zum Pappus'schen Lehrsatz* [Z82].[66] Dvanáctistránkový příspěvek se věnoval Pappově větě, Pappovu trojúhelníku a jeho vlastnostem a základům racionálních kvadratických reciprokých příbuzností a bikvadratických reciprokých příbuzností (tj. v dnešní terminologii biracionální kvadratické (bikvadratické) korespondenci).

V první, krátké části článku uvedl nestandardní tvar Pappovy věty,[67] dokázal ji planimetricky i trigonometricky a poukázal na její souvislost s Pythagorovou větou. V úvodu napsal:

Pošineme-li trojúhelník ABC do polohy $A'B'C'$ (obr. 1.), opíšou strany trojúhelníka rovnoběžníky; součet ploch jejich rovná se nulle. Znásobíme-li totiž

$$AB + BC + CA \doteq 0$$

relací

$$AA' \doteq BB',$$

obdržíme

$$AB \cdot AA' + BC \cdot BB' + CA \cdot AA' \doteq 0. \tag{1}$$

Dle Grassmanna jest

$$\overline{AB} \cdot \overline{AA'} = \overline{AB} \cdot \overline{AA'} \sin BAA'$$

vnější součin přímek AB i AA' a jest roven ploše rovnoběžníka $ABB'A'$; můžeme nyní vztah (1) psáti:

$$ABB'A' + BCC'B' + CAA'C' \doteq 0$$

aneb

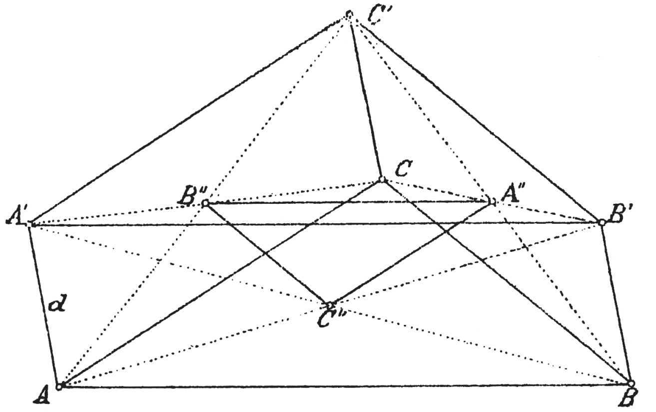
$$ABB'A' = ACC'A' + CBB'C'.$$

Vztah (1) vyjadřuje Pappusovu větu obecně.[68]

[66] Karel Zahradník poprvé Pappovu větu s využitím analytické a projektivní geometrie dokazoval roku 1874 v první části článku *Ein geometrischer Lehrsatz* [Z11], v jehož úvodu napsal: *Wenn sich zwei Ecken eines Dreieckes auf zwei festen Geraden bewegen, und dessen Seiten sich um drei feste in einer Geraden liegende Punkte drehen, so beschreibt auch die dritte Ecke eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der zwei festen Geraden hindurchgeht. Bei dieser Bewegung beschreibt der Schwerpunkt des veränderlichen Dreieckes eine rationale Curve dritter Ordnung mit drei reellen Asymptoten.* ([Z11], str. 11)

[67] Od Pappa pochází několik vět. Jeho nejvýznamnější výsledek, uváděný jako Pappův axiom, charakterizuje pappovskou projektivní rovinu; zní: Jsou-li A, B, C po dvojicích různé body přímky p, A', B', C' po dvojicích různé body přímky p' různé od přímky p a žádný z bodů A, B, C, A', B', C' není společným bodem přímek p a p', potom jsou průsečíky $\leftrightarrow AB' \cap \leftrightarrow A'B$, $\leftrightarrow AC' \cap \leftrightarrow A'C$ a $\leftrightarrow BC' \cap \leftrightarrow B'C$ kolineární.

[68] [Z81], str. 111–112.



Obrázek 4. Zahradníkův doprovodný náčrt – Pappova věta[69]

Poznamenejme, že zájemcům o hlubší porozumění souvislostí doporučil k samostatnému studiu náročnou Grassmannovu monografii,[70] Bellavitisovu monografii,[71] Libického studii[72] a oblíbenou německou učebnici základů geometrie autorů J. Henriciho a P. Treutleina.[73]

Ve druhé části článku definoval tzv. *Pappův trojúhelník*, kterým rozuměl trojúhelník $A''B''C''$, kde bod A'' je těžištěm rovnoběžníku $BCC'B'$, bod B'', resp. C'' rovnoběžníku $ACC'A'$, resp. $ABB'A'$. Ve třetí části uvedl bez důkazu jeho základní vlastnosti:

α) Strany jeho nejsou závisly ani na velikosti pošinutí d, ani na směru pošinutí Θ. Platí totiž

$$A''B'' = \frac{AB}{2}, \quad B''C'' = \frac{BC}{2}, \quad C''A'' = \frac{CA}{2}.$$

β) Strany daného trojúhelníka jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníka Pappusova.

γ) Následkem β) jest $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$; poměr podobnosti jest $\frac{1}{2}$.

δ) Trojúhelník Pappusův má čtyřnásobnou plochu daného trojúhelníka.

ε) Trojúhelníky ABC, $A''B''C''$ jsou v poloze perspektivné.

ξ) Je-li d konstantou, jest geom. místo (T'') těžišť Pappusových trojúhelníků kruh, jehož poloměr je $\frac{d}{2}$ a jehož střed leží v těžišti T trojúhelníka ABC.

---

[69] Obrázek je převzat ze Zahradníkovy práce [Z81].

[70] H. Grassmann: *Die lineale Ausdehnungslehre …*, 2. vydání, Wigand, Leipzig, 1878.

[71] G. Bellavitis: *Methoda equipollencí čili rovnic geometrických*, český překlad K. Zahradníka, Jednota českých mathematiků, Praha, 1874. Viz [Z110].

[72] A. Libický: *Základové geometrického počtu Grassmannova*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 25(1896), str. 187–198, 265–284, 321–341.

[73] J. Henrici, P. Treutlein: *Lehrbuch der Elementar-Geometrie I.*, Teubner, Leipzig, 1881.

η) Je-li Θ konstantou, jest geom. místo (T'') těžišť Pappusových trojúhelníků přímka, jež jde těžištěm T daného trojúhelníka ABC, majíc daný směr Θ, tudíž

$$y - \frac{\eta}{3} = \tan\Theta\Big(x - \frac{c+\xi}{3}\Big).$$

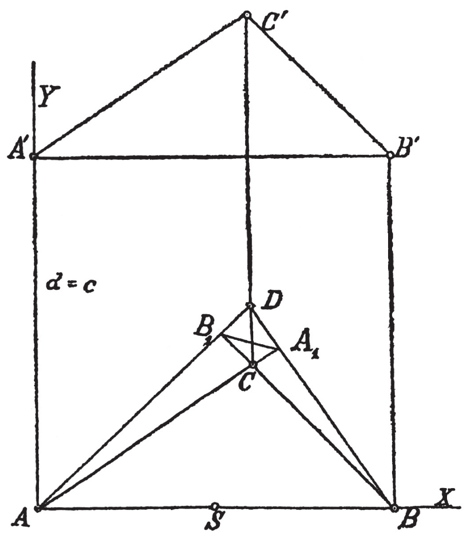
ϑ) Opisují-li A', B', C' kruhy, mající poloměr d a středy postupně A, B, C, opisují A'', B'', C'' kruhy o poloměru $\frac{d}{2}$ a o středech $\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\Big)$, $\Big(\frac{\xi}{2}, \frac{\eta}{2}\Big)$, $\Big(\frac{c}{2}, 0\Big)$, a těžiště T'' opisuje kruh o poloměru $\frac{d}{3}$ a středu $\Big(\frac{\xi+c}{3}, \frac{\eta}{3}\Big)$, t. j. kruh mající těžiště trojúhelníka daného za svůj střed.

ι) Je-li T' těžiště trojúhelníka $A'B'C'$, bude

$$TT'' = T''T',$$

t. j. T'' střed délky TT'.[74]

Ve čtvrté části vyložil princip involutorní biracionální kvadratické příbuznosti. Vyšel z trojúhelníku ABC (o stranách a, b a c), který posunul o délku $d = AA' = c$ ve směru $\Theta = BAA'$. Pak sestrojil přímku BA_1 kolmou na AC a přímku AB_1 kolmou na BC a jejich společný průsečík (tj. průsečík dvou výšek trojúhelníku ABC) označil D a naznačil, že danému bodu C odpovídá právě jeden bod D a obráceně. (Viz obrázek 5.)



Obrázek 5. Involutorní biracionální kvadratická příbuznost[75]

Za předpokladu, že A je počátek kartézské soustavy souřadnic, AB leží na ose x, $A = [0, 0]$, $B = [c, 0]$ a $C = [\xi, \eta]$ a s využitím základů analytické geometrie nalezl souřadnice bodu D ($D = [x, y] = [\xi, \frac{\xi(c-\xi)}{\eta}]$), z nichž jednoduchou

[74] [Z81], str. 115–116.
[75] Obrázek je převzat ze Zahradníkovy práce [Z81].

úpravou získal, že pro souřadnice bodu C platí: $\xi = x$, $\eta = \frac{x(c-x)}{y}$. Neboli, jak napsal:

> *... Body C i D nalézají se tudíž v příbuznosti involutorní, biracionální i ... kvadratické. ... Hlavní body obou soustav bodů (C) i (D) jsou bod A, bod B a úběžný bod osy Y.*[76]

Zahradníkova terminologie nesouhlasí s pozdější terminologií. Připomeňme, že bod se nazývá *fundamentálním* v biracionální korespondenci, nemá-li (jednoznačně) definovaný obraz. Bod se nazývá *hlavním* v biracionální korespondenci, je-li jeho obrazem fundamentální bod. Podle toho body A, B, Y_∞ jsou fundamentální.

Dále naznačil, že pokud se bod C pohybuje po přímce Π, která neprochází hlavním bodem, je sdruženou křivkou hyperbola procházející body A a B, která má jednu asymptotu kolmou na přímku AB a druhou na přímku Π. Křivka sdružená s přímkou, která prochází bodem A, se rozpadá na osu y a přímku procházející bodem B, která je kolmá na původní přímku. Jednotlivá tvrzení opět nedokázal, zájemce odkázal na práce T. A. Hirsta[77] a A. Strnada.[78] V závěru této části popsal některé zajímavé vlastnosti kvadratické transformace.

V páté části nazvané *O racionalné příbuznosti kvadratické reciproké* vyšel z popsané biracionální kvadratické reciproké příbuznosti bodu $D = [x, y]$ (průsečík výšek trojúhelníku ABC) a vrcholu $C = [\xi, \eta]$ a připomněl, že pohybuje-li se bod C po přímce $\Pi(u, v)$, pak sdružený bod D opíše hyperbolu

$$H \equiv x(uy - vx) + cvx + y = 0,$$

která prochází hlavními body soustav (C) a (D), jedna její asymptota je rovnoběžná s osou y a druhá je kolmá na přímku Π. Pak vypočítal souřadnice středu hyperboly, tj. $S' = [\frac{-1}{u}, \frac{-(2+cu)v}{u^2}]$; odtud plyne, že bod S' leží na přímce kolmé k ose x v jejím průsečíků s přímkou Π. A obráceně, zvolíme-li libovolný bod S' jako střed hyperboly H, je jím hyperbola určena (neboť známe tři její body a její střed) a platí

$$u = \Big[\frac{-1}{x'}, \frac{-y'}{(2x' - c)x'}\Big],$$

neboli: *Přímka $\Pi(u, v)$ a bod $S'(x', y')$ jsou dle toho v příbuznosti kvadratické reciproké.*[79]

---

[76] [Z81], str. 116–117.

[77] T. A. Hirst: *On the quadric inversion of plane curves*, London, 1865, a *Sull' inversione quadratica delle curve piane*, Annali di matematica pura ed applicata 7(1865), str. 49–65 (do italštiny přeložil L. Cremona).

[78] A. Strnad: *Úvod do theorie kvadratických transformací rovinných*, Program vyšší realky v Králové Hradci, 1886/1887.

[79] [Z81], str. 119.

V další části článku nejprve dokázal větu: *Křivka n-ho stupně, která nejde hlavními body, transformuje se na křivku $2n$-té třídy a naopak: Křivka n-té třídy, která se nedotýká hlavních přímek, transformuje se na křivku $2n$-tého stupně.*[80] Pak vyšetřil případ, kdy se přímka Π otáčí kolem svého libovolného bodu $[x_0, y_0]$, a přitom platí $x_0u + y_0v + 1 = 0$. Naznačil, že střed $S'(x', y')$ sdružené hyperboly se pohybuje po parabole $2x'^2 - (2x_0 + c)x' - y_0y' + cx_0 = 0$, neboli: *Otáčí-li se přímka* Π *kolem svého bodu* (x_0, y_0)*, mění sdružený střed* S' *své místo na parabole* P *dané rovnicí ..., t. j. svazku paprsků* (x_0, y_0) *sdružena je parabola* P*, která probíhá hlavními body transformace.*[81]

Pak hledal ještě souřadnice vrcholu paraboly odpovídající danému svazku přímek (x_0, y_0) a ukázal, že vrcholu T svazku paprsků odpovídá vrchol jedné paraboly V a obráceně, a že jsou tyto body v příbuznosti biracionální a kvadratické (tj. Cremonově).

Na závěr popsal geometrické místo bodů S', které mají od sdružené přímky konstantní vzdálenost d, tj. uvedl křivku čtvrtého stupně

$$C^4 \equiv y'^4 - d^2\left[(2x' - c)^2 + y'^2\right] = 0,$$

a obálku přímek Π, které mají od sdruženého bodu stálou vzdálenost d, tj. uvedl křivku šesté třídy

$$C_6 \equiv u^4(u^2 + v^2)d^2 - (2 + cu)^2v^4 = 0.$$

Poznamenejme, že chorvatský časopis, v němž se tento Zahradníkův článek poprvé roku 1896 objevil, byl určen zejména pro středoškolské studenty. Svoji náročností i tematikou však zaměření časopisu příliš nevyhovoval, neboť výrazně přesahoval úroveň znalostí i tehdejších nejlepších studentů. Daleko lépe se hodil do německého časopisu *Archiv der Mathematik und Physik*, kde zaujal profesora matematiky H. C. H. Schuberta (1848–1911) z Hamburgu, který ve své recenzi napsal:

Verschiebt man ein Dreieck ABC *in eine neue Lage* $A'B'C'$*, so dass die Lage jeder Seite ihrer Anfangslage parallel bleibt, so nennt Verf. Pappus'sches Dreieck von* ABC *das Dreieck* $A''B''C''$*, wo der Schwerpunkt des Parallelogramms* $BCB'C'$ *u. s. w. ist. Nach Besprechung der Eigenschaften der Pappus'schen Dreiecke bringt Verf. seine Betrachtungen mit der involutorisch-quadratischen und der rationalen quadratisch-reciproken Verwandtschaft in Zusammenhang.*[82]

Roku 1910 uveřejnil Karel Zahradník v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* zajímavý a podnětný, ale nezvykle krátký příspěvek nazvaný *Věta o trojúhelníku* [Z98], který obsahoval hezkou úlohu doplněnou jasným a stručným řešením. Jak bylo jeho zvykem, nepřipojil k výkladu žádný obrázek. Ocitujme znění celého „příspěvku“ – úlohy:

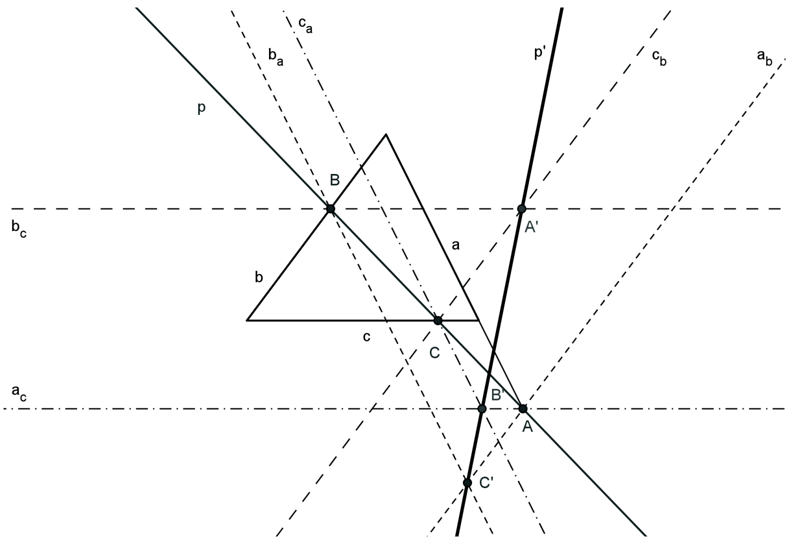
[80] [Z81], str. 119.
[81] [Z81], str. 120.
[82] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 30(1899), str. 516.

Dán budiž trojúhelník, jehož strany jsou a, b, c. Průseky přímky p se stranami buďtež $p \mid a = A$, $p \mid b = B$, $p \mid c = C$.

Uvažme vždy dva průseky na př. A, B. *Veďme rovnoběžku* a_b *bodem* A *ku straně* b *trojúhelníku a podobně rovnoběžku* b_a *bodem* B *ku straně* a. *Průsek těch rovnoběžek budiž* C'. *Podobně obdržíme* $b_c \mid c_b = A'$, $c_a \mid a_c = B'$. *Body* A', B', C' *leží na jedné přímce* p'.

Důkaz: Rovnoběžky body A, B, C *ke stranám trojúhelníka tvoří dvě křivky třetího stupně* $C_3 \equiv a_b b_c c_a$, $C'_3 \equiv a_c b_a c_b$. *Z devíti průseků křivek* C_3 *a* C'_3 *leží šest na kuželosečce rozpadající se ve přímku* p *a přímku úběžnou, tudíž leží ostatní tři průseky* A', B', C' *též na přímce.*[83]

Popsanou situaci přehledně zachycuje následující obrázek.



Obrázek 6. Věta o trojúhelníku

Pro dnešní studenty, téměř nepoznamenané syntetickou a analytickou geometrií, je důkaz správnosti řešení takřka nad jejich možnosti. Současně je ukázkou mistrného zvládnutí syntetické geometrie.

Trigonometrie

Roku 1873 vyšla v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* Zahradníkova jednoduchá mnemotechnická pomůcka nazvaná *O vzorcích goniometrických* [Z2] ilustrující elementární vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

[83] [Z98], str. 35–36.

Karel Zahradník uvedl následující obrázek

$$
\begin{array}{cccc}
 & \cos\alpha & \sin\alpha & \\
\cot\alpha & & & \operatorname{tg}\alpha \\
 & \operatorname{cosec}\alpha & \sec\alpha &
\end{array}
$$

a komentoval jej slovy:

1. Součin funkcí protilehlých rovná se 1.
2. Součin funkce první a třetí rovná se druhé neb prostřední.
3. Součin funkce první, třetí a páté rovná se též součinu druhé, čtvrté a šesté.
4. Podíl dvou sousedních funkcí rovná se funkci vedlé dělence položené.[84]

Výše uvedené vztahy nedokazoval, jednoduchá prověření jejich platnosti ponechal čtenáři. Poznamenejme, že inspiraci čerpal z časopisu *Archiv der Mathematik und Physik*, v němž byla roku 1844 uveřejněna první dvě „pravidla“ v článku Dr. Brehmera nazvaném *Goniometrischer Zirkel*.[85]

Roku 1878 Karel Zahradník uveřejnil v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* krátký článek nazvaný *Příspěvek k trigonometrii* [Z37], který v témže roce vyšel v německé verzi v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik* v oddílu *Miscellen* pod názvem *Beitrag zur Trigonometrie* [Z41]. Elementárním způsobem dokázal tři základní věty rovinné trigonometrie (součet vnitřních úhlů v trojúhelníku, sinová věta a kosinová věta). Vyšel ze soustavy

$$b\cos\gamma + c\cos\beta = a,$$

$$c\cos\alpha + a\cos\gamma = b,$$

$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c,$$

---

[84] [Z2], str. 146.

[85] Viz Archiv der Mathematik und Physik 4(1844), str. 236–237. Zde byl otištěn jednoduchý obrázek podobný Zahradníkovu a tři pravidla:

1) Das Product zweier in Scheitelwinkeln stehender Functionen ist gleich 1.

$$\sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1, \quad \text{u. s. w.}$$

2) Das Product zweier über oder unter derselben Linie stehender Functionen ist gleich der eingeschlossenen Function.

$$\sin x \cdot \sec x = \tan x, \quad \text{u. s. w.}$$

3) Der Quotient zweier anliegender Functionen ist gleich der dem Dividendas auf der anderen Seite anliegenden Function,

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \quad \text{u. s. w.}$$

kterou získal tak, že vyjádřil součet průmětů dvou stran trojúhelníku ABC do strany třetí. Nejprve ji chápal jako homogenní soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé a, b, c, tj. za neznámé považoval délky stran. Podmínku existence netriviálního řešení vyjádřil pomocí determinantu matice soustavy a užitím elementárních goniometrických úprav dokázal, že součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180°. Pak eliminoval jednu stranu a jí protilehlý úhel, eliminační podmínku napsal opět pomocí determinantu a jeho jednoduchou úpravou odvodil sinovou větu. V poslední části článku eliminací dvou úhlů obdržel vztah mezi zbývajícím úhlem a stranami, které jej svírají, tj. dokázal kosinovou větu.

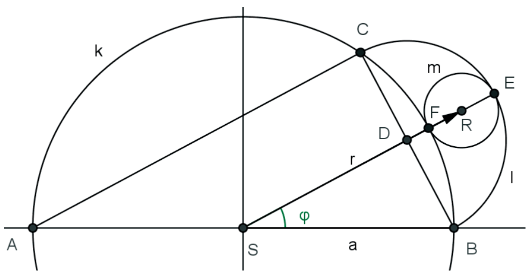
Tento stručný článek sepsal pravděpodobně pro talentované studenty a začínající středoškolské učitele, aby ukázal jednoduché aplikace oblíbených determinantů v trigonometrii a motivoval čtenáře k dalšímu studiu a hlubšímu porozumění elementárním poznatkům a odhalování jejich souvislostí.

Matematická analýza

Problémům z matematické analýzy věnoval Karel Zahradník pouze okrajovou pozornost, neboť jeho zájem se koncentroval spíše na syntetickou a algebraickou geometrii, zejména na geometrii křivek a ploch.

Roku 1876 uveřejnil v časopisu *Archiv für Mathematik und Physik* v oddílu *Miscellen* zajímavou a inspirativní úlohu nazvanou *Eine Quadratur* [Z24], která měla toto znění:

In den Hippokrateschen Halbmond soll der grösste Kreis eingeschrieben werden. Welches ist der Ort seines Mittelpunktes, wenn sich der Scheitel des gegebenen rechtwinkligen Dreiecks auf der Peripherie des ihm umgeschriebenen Kreises bewegt.[86]



Obrázek 7. Průvodič středu kružnice vepsané do Hippokratova měsíčku

V polárních souřadnicích uvedl rovnici průvodiče křivky, který popisoval polohu výše zmíněného středu:

$$r = \frac{a}{2}\big(\cos\varphi + \sin\varphi + 1\big),$$

[86] [Z24], str. 448. Zadání úlohy lze přeložit takto: Do Hippokratova měsíčku má být vepsána největší kružnice. Jaké je geometrické místo jejích středů, když se vrchol daného pravoúhlého trojúhelníku pohybuje po opsané kružnici.

kde a je poloměr kružnice k opsané danému pravoúhlému trojúhelníku ABC. Odvození uvedené rovnice není náročné. Z výše uvedeného obrázku vyplývá, že průměr FE hledané kružnice m vepsané do Hippokratova měsíčku vypočteme takto:

$$SD + DE - SF = a\cos\varphi + a\sin\varphi - a.$$

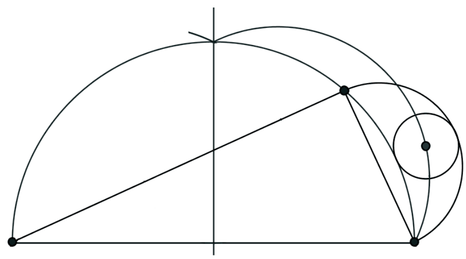
Poloměr kružnice m vepsané do Hippokratova měsíčku je

$$RF = \frac{a\cos\varphi + a\sin\varphi - a}{2},$$

a tudíž průvodič bodu R je

$$r = SF + FR = \frac{a}{2}\big(\cos\varphi + \sin\varphi + 1\big).$$

Čtvrtina hledané křivky je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 8. Část křivky vykreslená středem pohybující se kružnice

Poznamenejme, že odvození rovnice průvodiče je hezké a podnětné cvičení ze středoškolské matematiky a je dobře srozumitelné i pro studenty.

V druhé části článku Karel Zahradník podle známého Leibnizova vzorce

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

počítal obsah rovinné plochy ohraničené křivkou $r = f(\varphi)$ a průvodiči $r_1 = f(\varphi_1)$ a $r_2 = f(\varphi_2)$. Aniž by uvedl jednotlivé kroky výpočtu, zapsal výsledek integrace $S = \frac{a^2}{2}\big(\pi + 5\big)$.

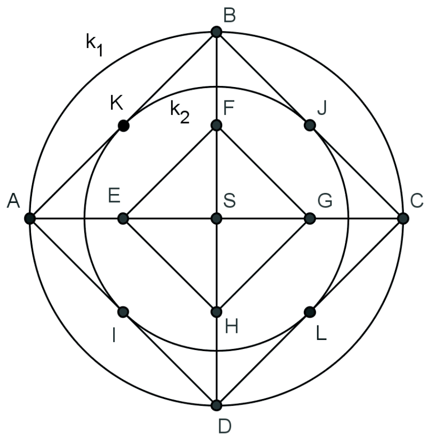
V zápisu horní meze integrálu se objevila tisková chyba – místo $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi$ je uvedeno $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi$. Chybu opsal i recenzent článku prof. F. Müller z Berlína.[87]

Ve třetí části článku Karel Zahradník napsal:

Die Fläche der Curve zerfällt in zwei Teile, in einen rationalen und einen irrationalen Teil. Schreiben wir in den festen Kreis ein Quadrat ein und dem Quadrat wieder ein Quadrat ein, dessen Seiten die Diagonalenhälften des

[87] Viz *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 8(1876), str. 172.

grösseren halbiren werden, und beschreiben aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte einen Kreis, dessen Radius gleich ist der Seite des kleineren Quadrats, so ist die Summe dieser drei Flächen gleich der Fläche der Curve.[88]



Obrázek 9. Náčrt situace

Ze Zahradníkova popisu vyplývá, že měl na mysli situaci znázorněnou na obrázku 9, tj.

$$S = \frac{a^2}{2}\bigl(\pi + 5\bigr) = \frac{4a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2},$$

neboli obsah útvaru omezeného výše popsanou křivkou je roven součtu obsahu čtverce $ABCD$ o straně $\sqrt{2}a$, obsahu čtverce $EFGH$ o straně $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ a obsahu kruhu k_2 o poloměru $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dne 10. ledna 1877 Karel Zahradník proslovil na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd přednášku, která vyšla ve stejném roce tiskem v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *O skladu kriterija konvergentnosti i divergentnosti bezkonačnih redova* [Z31]. V následujícím roce byl v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* otištěn její český překlad nazvaný *O souvislosti kriterií konvergence nekonečných řad* [Z35].

Přehledný, nepříliš rozsáhlý článek začal definicí konvergentní a divergentní řady a připomenutím základního podílového kritéria,[89] pomocí něhož však neumíme vždy jednoznačně rozhodnout o konvergenci, resp. divergenci studované řady. Karel Zahradník se rozhodl, že pro chorvatského, resp. českého čtenáře

[88] [Z24], str. 448. Volný překlad zní: Obsah plochy ohraničené křivkou se rozpadne na dvě části, na racionální část a iracionální část. Vepíšeme-li do pevné kružnice čtverec a čtverci opět čtverec, jehož strany půlí diagonály většího čtverce, opíšeme-li ze středu čtverce kružnici, jejíž poloměr je roven straně menšího čtverce, je součet obsahů těchto tří ploch roven obsahu plochy ohraničené křivkou.

[89] Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergentní, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, je tato řada divergentní.

napíše přehled základních, jednoduchých a běžně užívaných kritérií konvergence pro řady s nezápornými členy.

Z Cauchyova srovnávacího kritéria[90] postupně odvodil Raabeovo,[91] Gaussovo,[92] Schlömilchovo,[93] Sternovo[94] a speciální „podílové“ kritérium,[95] jejichž znalost považoval za stěžejní.

Na závěr článku uvedl Olivierovo kritérium divergence řad[96] a připojil jedno komplikovanější kritérium (je-li $\lim_{n\to\infty}[n\ln n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\ln(n+1)] > 0$, potom řada konverguje, je-li $\lim_{n\to\infty}[n\ln n - \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)\ln(n+1)] < 0$, potom řada diverguje), při jehož odvození se opíral o konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^r}$, pro $r > 1$.

Článek zakončil slovy:

... Vyhledávání dalších kriterií v nerozhodnutých případech je tím patrno.

Tím je souvislost jednoduchých kriterií dovozená, a co se tkne složitých kriterií, z nichž jedno zde uvedeno, o tom pojednáme budoucně.[97]

Poznamenejme, že Karel Zahradník za stěžejní kritérium považoval Raabeovo kritérium, z něhož každé výše uvedené odvodil a jeho použití pak ilustroval na jednom příkladu. Výklad doplnil četnými historickými poznámkami a komentáři, v nichž uvedl kdo, kdy a v jakém díle příslušné kritérium poprvé vyslovil, resp. dokázal. Pečlivě uváděl odkazy na použitou literaturu a citoval stěžejní a dobře dostupné práce sepsané od počátku 19. století až do sedmdesátých let 19. století. Ocitujme zajímavou poznámku, kterou připojil k výkladu Olivierova kritéria:

L. Olivier uvedl v Crelle „Journal f. d. r. u. angw. Math.“ II. díl pag. 31, $\lim nu_n = 0$ *za obecné kriterium konvergence. Že není obecně platno, dokázal Abel v témž časopisu III. díl pag. 79, poukázav na řadu* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n\ln n}}$*, u níž je* $\lim nu_n = 0$*, ana předce diverguje. Jest sice pravda, že řada diverguje, je-li*

[90] Poznamenejme, že dnes obvykle neužíváme označení Cauchyovo srovnávací kritérium. Pod Cauchyovým kritériem chápeme kritérium odmocninové, které vyslovujeme takto: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ je řada a $q\in\mathbb{R}^+$, $q<1$. Jestliže $\exists k\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>k$ $\sqrt[n]{u_n}<q$, potom řada konverguje.

[91] Je-li $\lim_{n\to\infty} n\Big(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big) > r > 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ konverguje.

[92] Vyjdeme-li z Raabeova kritéria a podíl dvou po sobě jdoucích členů řady zapíšeme jako racionální lomenou funkci, tj. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^s+A_1n^{s-1}+A_2n^{s-2}+\dots}{n^s+a_1n^{s-1}+a_2n^{s-2}+\dots}$, po jednoduchých úpravách dospějeme ke kritériu: Je-li $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^s+A_1n^{s-1}+A_2n^{s-2}+\dots}{n^s+a_1n^{s-1}+a_2n^{s-2}+\dots} = a_1 - A_1 > r > 1$, potom řada konverguje.

[93] Vyjdeme-li z nerovnosti $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^r$, kde $r>1$, obdržíme jejím umocněním na n-tou a logaritmováním nerovnost $n\ln\frac{u_n}{u_{n+1}} > r\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$. Její jednoduchou úpravou dostaneme následující kritérium: Je-li $\lim_{n\to\infty}\Big(n\ln\frac{u_{n+1}}{n_n}\Big) > r > 1$, potom řada konverguje.

[94] Označíme-li podíl dvou po sobě jdoucích členů řady $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}$, kde α je kladné číslo, po nepříliš složitých úpravách Raabeova kritéria získáme kritérium: Je-li $\lim_{n\to\infty}(n\alpha) > r > 1$, potom řada konverguje.

[95] Je-li $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln u_n}{\ln\frac{1}{n}} > r > 1$, potom řada konverguje.

[96] Je-li $\lim_{n\to\infty} n\cdot u_n > 0$, potom řada diverguje.

[97] [Z35], str. 102. Pokračování článku již nevyšlo.

$\lim nu_n > 0$*, avšak neplatí obráceně to povždy. Co se tkne upotřebení tohoto kriteria viz pojednání Kummera v Crelle's Jour. svaz. XIII.*[98]

Zahradníkův článek byl bezesporu velkou inspirací pro univerzitního profesora Františka Josefa Studničku, když sepisoval učebnici *Všeobecné tvarosloví algebraické čili nauka o konečných i nekonečných součtech čili řadách, součinech a podílech čili řetězcích* [St2]. V druhé části prvního oddělení druhé knihy F. J. Studnička uvedl rozsáhlou, dosti popisnou a příklady prosycenou kapitolu *O znacích sbíhavosti zvlášť* (str. 107–126), která měla velmi podobnou strukturu jako Zahradníkův článek. O své inspiraci napsal:

Pravidlo toto[99] *jest výsledkem spojení pravidla čtvrtého s podmínkou zvláštní, pomocí znaku Cauchy-ho z příkladu 1. odvozenou, a jest základem jiných pravidel, jež možná z něho vyvinouti, což Zahradník v uvedeném pojednání velmi pěkně provedl.*[100]

Roku 1879 publikoval Karel Zahradník v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* dvoustránkový příspěvek *O hmotě trojosého ellipsoidu. (Příklad na integraci trojnásobnou)* [Z44] obsahující řešení následujícího příkladu:

Dán budiž ellipsoid a kužel rotační s vrcholem ve středu ellipsoidu položeným, jehož osa splývá s jednou osou ellipsoidu. Předpokládejme, že je hmota v rovnoběžných vrstvách kolmo na osu kužele vedených stejná, avšak že hutnosti přibývá v poměru vzdálenosti od vrchole. Jaká jest hmota kužele omezeného ellipsoidem?[101]

Jedná se vlastně o klasický příklad ze základního kurzu matematické analýzy funkcí více proměnných, který se stále běžně objevuje i na našich současných vysokých školách. Ačkoliv Karel Zahradník pojal článek jako rozšiřující učivo zejména pro středoškolské studenty, jednotlivé kroky výpočtu detailně nevyložil. Pouze naznačil postup, uvedl mezivýsledky a výsledek. Připojil však informaci o základní pomocné literatuře, v níž se zájemce mohl hlouběji seznámit s výše uvedenou problematikou.[102]

---

[98] [Z35], str. 100.

[99] *Viz Zahradník „O souvislosti kriterií.“ Časop. pro pěstov. math. a fys. Roč. VII. pag. 94, kde jest východiskem pro odvození následujících pravidel.*

[100] [St2], str. 117. Poznamenejme pro úplnost, že F. J. Studnička měl ve svém citátu na mysli následující kritéria: *Pravidlo 4. Řada jest konvergentní, jest-li poměr sousedních dvou členů, od n-tého počínajíc, vesměs menší nežli obdobný poměr známé řady sbíhavé.* (str. 114), *Pravidlo 5. Řada sestupná* $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots$ *jest řadou sbíhavou neb rozbíhavou zároveň s odvozenou řadou* $S_1 = u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$. (str. 115). Obě pravidla jsou speciální formou srovnávacího kritéria. Pravidlo čtvrté běžně užíváme i dnes, páté pravidlo se již téměř neužívá. Šesté pravidlo, Studničkou nazývané Cauchyovo, vzniká spojením podílového a srovnávacího kritéria a odpovídá prvnímu Zahradníkovu pravidlu. Ve Studničkově podání zní: *Pravidlo 6. Řada jest konvergentní, vyhovuje-li všeobecný člen podmínce* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^r$, $r > 1$. (str. 117). Podrobný rozbor Studničkovy učebnice lze nalézt v [Be7].

[101] [Z44], str. 188.

[102] K. Zahradník zájemcům doporučoval vysokoškolskou česky psanou učebnici F. J. Studničky nazvanou *Úvod do analytické geometrie v prostoru* (Nakladatel Fr. A. Urbánek, Tisk Dr. Ed. Grégr, Praha, 1874, 116 stran).

Dne 22. listopadu 1887 měl Karel Zahradník na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd přednášku, která vyšla ve stejném roce tiskem v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *Prilog za riešitbu kvadratičkih jednačaba pomoću Gauss-ievih logaritama* [Z58]. O dva roky později byl v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* otištěn její český překlad nazvaný *O řešení kvadratických rovnic logarithmy Gaussovými* [Z62]. V krátkém, ale podnětném článku ukázal, jak lze při znalosti Viètových vzorců a vlastností kořenů kvadratické rovnice použít Gaussovy (tj. dekadické) logaritmy, resp. logaritmické a trigonometrické tabulky při hledání řešení kvadratické rovnice v případě, že jsou zadány logaritmy jednotlivých koeficientů rovnice nebo logaritmy jednoho či obou kořenů. Výklad doplnil názorným řešením příkladu $px^2 + qx + r = 0$, kde $\log p = 0$, $\log(-q) = 0,90309$ a $\log r = 1,13640$.[103]

Dne 6. května 1905 přednesl na zasedání matematicko-přírodovědecké třídy *Královské české společnosti nauk* krátký příspěvek nazvaný *Zur Theorie der linearen Differenzialgleichungen* [Z90], který byl v témže roce otištěn pod stejným názvem ve spolkovém *Věstníku.* Jeho český překlad byl publikován o dva roky později v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* pod názvem *Příspěvek k theorii differenciálních rovnic lineárních* [Z94]. Karel Zahradník vyšel z úplné obyčejné lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = f(x), \tag{1}$$

dvě lineárně nezávislá řešení (integrály) příslušné homogenní rovnice označil u a v a písmeno w užil k označení partikulárního řešení (integrálu) dané rovnice nehomogenní. Připomněl, že

... obecný integrál rovnice (1) ... představuje síť křivek. Každá křivka té sítě určena je dvěma body. Každým bodem roviny probíhá ∞^1 křivek sítě, tvořících svazek křivek a jednotlivá křivka svazku určena jest přímkou tím bodem probíhající, jako tečnou v tom bodě.[104]

Po tomto stručném úvodu vyšetřoval geometrické místo středů křivosti $S[\xi,\eta]$ integrální křivky procházející bodem $M[x_0, y_0]$. Elementárními prostředky analytické geometrie a diferenciálního počtu dokázal, že množinou středů křivosti těchto křivek je racionální křivka třetího stupně a čtvrté třídy, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$\xi = x_0 - \frac{(1+t^2)t}{f(x_0) - \psi(x_0)y_0 - \varphi(x_0)t},$$

$$\eta = y_0 + \frac{1+t^2}{f(x_0) - \psi(x_0)y_0 - \varphi(x_0)t},$$

[103] S využitím Köhlerových logaritmických tabulek (1860) nalezl logaritmy kořenů výše uvedené rovnice, tj. $\log x_1 = 0,74194$ a $\log x_2 = 0,39446$.

[104] [Z94], str. 9.

kde $y'_0 = t$. Eliminací t a posunutím počátku soustavy souřadnic do bodu $M[x_0, y_0]$ získal rovnici vyjadřující geometrické místo středů křivosti integrálních křivek procházejících tímto bodem ve tvaru

$$y^2(ax + by) - (x^2 + y^2) = 0,$$

kde $a = \varphi(x_0)$ a $b = f(x_0) - \psi(x_0)y_0$. Pak ukázal, že výše uvedená racionální křivka se dotýká asymptoty původní integrální křivky.

V druhé části článku vyšetřoval tečny v inflexních bodech křivek sítě ležících na přímce $x = x_0$. Rovnici tzv. inflexní tečny zapsal následovně[105]

$$\varphi(x_0)(y - y_0) - \Big[y_0\psi(x_0) - f(x_0)\Big](x - x_0) = 0,$$

aneb

$$\Big[xf(x_0) - y\varphi(x_0) - x_0f(x_0)\Big] - y_0\Big[xf(x_0) - \varphi(x_0) - x_0f(x_0)\Big] = 0$$

a dokázal, že

... ať je již poloha bodu M_0 na přímce $x = x_0$ jakákoliv, tečna obratu příslušné křivky svazku křivek tím bodem M_0 určeného vždy pevným bodem N probíhá, jenž je průsekem přímek

$$xf(x_0) - y\varphi(x_0) - x_0f(x_0) = 0$$

$$xf(x_0) - \varphi(x_0) - x_0f(x_0) = 0. \tag{9}$$

Souřadnice tohoto bodu jsou:

$$x = x_0 + \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$$

$$y = \frac{f(x_0)}{\psi(x_0)}. \tag{10}$$

Všechny tečny inflexní v bodech přímky $x = x_0$ vedené ku různým křivkám sítě integrálních křivek tvoří tudíž svazek paprskový. Pohybuje-li se přímka $x = x_0$, měníc svůj směr, opisuje střed N příslušného svazku paprskového křivku, již parametricky vyjadřuje rovnici (10). Tuto křivku (N) můžeme pojmenovati místem inflexních středů integrální sítě.[106]

V závěrečné části článku studoval problém, kdy průsečík tzv. inflexní tečny křivky svazku křivek příslušného bodu M_0 s osou x, tj. kdy

$$OT = x_0 - \frac{ay_0}{b} = \frac{x_0f(x_0) - \Big[\varphi(x_0) + x_0\psi(x_0)\Big]y_0}{f_(x_0) - \psi(x_0)y_0},$$

[105] [Z94], str. 11.
[106] [Z94], str. 11.

kde O je počátek soustavy souřadnic a T je průsečík inflexní tečny křivky svazku křivek bodu M s osou x, nezávisí na y_0-ové souřadnici bodu M_0. Rozborem všech podmínek plynoucích z výše uvedeného výrazu dospěl k závěru, že

Všechny tečny inflexní v bodech přímky $x = x_0$ vedené ke křivkám sítě splývají s tou přímkou.[107]

Historie matematiky

Karel Zahradník se historií matematiky systematicky nezabýval, nenapsal o ní ani knížku, ani rozsáhlejší studii. V řadě svých odborných prací, učebnic, metodických a popularizačních příspěvků však uvedl četné historické poznámky a zasvěcené komentáře, z nichž je patrné, že měl dobré znalosti o vývoji matematiky, zejména geometrie, a slušný přehled o klasické i moderní matematické literatuře.

Dne 22. února 1877 Karel Zahradník proslovil na zasedání matematicko-přírodovědné třídy Jihoslovanské akademie věd historicko-popularizačně-matematickou přednášku, která vyšla ve stejném roce tiskem v časopisu *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu* pod názvem *O suvislosti Neperovih logarithama s naravskimi* [Z32]. Podal v ní krátkou, ale výstižnou charakteristiku dvou slavných děl Johna Napiera (1550–1617), a to *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio …* (Edinburgh, 1614) a *Mirifici Logarithmorum Canonis constructio …* (Edinburgh, 1619). Nejprve stručně objasnil zavedení a podstatu tzv. Napierových logaritmů, které byly odvozeny ze speciálního pohybu dvou bodů po přímce,[108] pak objasnil konstrukci a použití jeho slavných tabulek při složitých trigonometrických výpočtech. Ukázal také souvislost Napierových logaritmů s přirozenými logaritmy a Briggsovými, tj. dekadickými logaritmy. V závěru přednášky se zmínil o Napierových následovnících (např. Henry Brigss, Edmund Gunter, Benjamin Ursinus, Jost Bürgi a Johann Kepler), kteří vydali různě rozsáhlé logaritmické tabulky a přispěli tak k rozšíření užívání logaritmů při komplikovaných astronomických a geodetických výpočtech.

Závěrečné zamyšlení

Ve všech předchozích kapitolách jsme se pokusili ukázat a doložit, že Karel Zahradník sice nebyl geometrem první hvězdné evropské velikosti, nebyl však rozhodně žádným „podřadným“ matematikem. Díky svým několika dodnes citovaným výsledkům v teorii rovinných algebraických křivek (viz např. [BL], [Lo] a [SS]) má plné právo na čestné místo v dějinách české a zejména chorvatské matematiky, které mu – bohužel – českou matematickou historiografií nebylo dosud přiznáno.

---

[107] [Z94], str. 13.

[108] *„Logarithmus ergo cujusque sinus est numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit, interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente motu synchrono atque initio aequiveloce.“ … „Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens, aequalibus momentis segmenta abscindit ejusdem continuo rationis ad lineas a quibus abscinduntur.“* Viz [Z32], str. 160. Překlad a podrobnější výklad viz [He] a [Ul].

LITERATURA:

[Be1] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008.

[Be3] Bečvářová M., *Život i djelo Karela Zahradníka*, str. 9–36, in Mardešić S. (ed.): *Karel Zahradník (1848–1916)*, Hrvatska akademija znanosti i umjetnosti. Spomenica preminulim akademicima, svezak 134, Zagreb, 2007.

[Be4] Bečvářová M., *Život a dílo matematika Karla Zahradníka (1848–1916)*, str. 111–112, in Proceedings of the 22nd World Congress of the Czechoslovak Society of Arts and Sciences, Univerzita Palackého, Olomouc, 2004.

[Be5] Bečvářová M., *Life and Work of Karel Zahradník (1848–1916)*, str. 276–283, in T. Motlíček, M. Rechcígl (eds.): Proceedings of „Moravia from the World Perspective", 22nd World Congress of the Czechoslovak Society of Arts and Sciences, 2. díl, Ostrava, Repronis, 2006.

[Be7] Bečvářová-Němcová M., *František Josef Studnička (1836–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha, 1998.

[BL] Brocard H., Lemoyne T., *Courbes géométriques remarquables planes & gauches*, 3. díl, Paris, 1970.

[He] Hejzlar F., *O prvních deskách logarithmických*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **3** (1874), 49–61.

[Le] Lerch M., *Karel Zahradník*, Almanach České akademie věd a umění **27** (1917), 132–142.

[Lo] Loria G., *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. Mit 174 Figuren auf 17 lithographierten Tafeln, B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

[Ma] Majcen J. (ed.), *Izvješća o raspravama matematičko-prirodoslovnoga razreda za godine 1867–1914*, Zagreb, 1916/1917 (o K. Zahradníkovi napsal V. Varićak na stranách 3–34).

[Sj] —, *Spomenica. Jugoslavenska akademija znanosti i umetnosti 1866–1966*, Jugoslavenska akademija znanosti i umetnosti, Zagreb, 1966 (o pracích z matematiky, fyziky a technických věd je stranách 55–70).

[SS] Смогоржевский А. С., Столова Е. С.: *Справочник по теории плоских кривых третьего порядка*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва [Smogorževskij A. S., Stolova E. S.: Příručka teorie rovinných křivek třetího řádu, Státní nakladatelství fyzikálně-matematické literatury, Moskva], 1961.

[St2] Studnička F. J., *Všeobecné tvarosloví algebraické čili nauka o konečných i nekonečných součtech čili řadách, součinech a podílech čili řetězcích*, J. Otto, Praha, 1880, 239 stran.

[Ul] Úlehla J., *Dějiny matematiky*, 2. díl, Spisů „Dědictví Komenského" číslo 146. Tiskem Družstva knihtiskárny v Zábřeze, Praha, 1913.

[Vo1] Vojtěch J., *Karel Zahradník*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **46** (1917), 289–304.