Karel Zahradník (1848–1916)

Geometrické práce Karla Zahradníka .I.

In: Martina Bečvářová (author); Ján Čižmár (author): Karel Zahradník (1848–1916). (Praha–Záhřeb–Brno). (Czech). Praha: Matfyzpress, 2011. pp. 133–155.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/402142`

GEOMETRICKÉ PRÁCE KARLA ZAHRADNÍKA I.

Úvod

První časopisecká publikace Karla Zahradníka nazvaná *Jaké jest geometrické místo průseků tečen jedné kůželosečky s polarami bodů dotyčných vzhledem ke kůželosečce druhé?* [Z1] pochází z roku 1872. Bylo to období, kdy zejména ve středoevropském matematickém prostoru (Německo, Rakousko, české země, s jistým časovým posunem Uhersko) začínala v matematice a zvláště v geometrii nabývat na významu tzv. *novější geometrie* (*neuere Geometrie*), což v retrospektivním pohledu představuje projektivní geometrii s výraznou převahou syntetické metody ve výzkumu objektů projektivního prostoru reprezentovaného rozšířeným euklidovským prostorem jako téměř jediným a výlučným modelem. V českém prostředí k utváření této koncepce zajisté vydatně přispělo působení Wilhelma Fiedlera (1832–1912) na německé technice v Praze v letech 1864 až 1867. W. Fiedler byl vynikajícím představitelem a šiřitelem tohoto směru projektivní geometrie, pro který byla výrazným zdrojem motivace a nesmírně širokým oborem aplikace deskriptivní geometrie s její konjunkturou tvorby zobrazovacích metod a studia hlavních geometrických objektů, jimiž byly teoreticky zajímavé a aplikačně důležité křivky a plochy.

V českých zemích našlo toto zaměření vývoje geometrie velmi příznivou odezvu a dalo základ vzniku *české geometrické školy*, v níž si udržovalo (stejně jako v rakouské škole deskriptivní a projektivní geometrie) dominantní postavení až do 30. let 20. století, jak je zjevné z monografické i učebnicové tvorby oné doby. Klasickou cestou se z tvůrců první generace české geometrické školy vydal Emil Weyr (1848–1894), jenž rozvíjel ryze projektivně geometrickou linii hlavně syntetickou metodou v duchu tradice založené zejména Jakobem Steinerem (1796–1863) a Michelem Chaslem (1793–1880). Emil Weyr, stejně jako Karel Pelz (1845–1908), byli ve své vědecké orientaci nepochybně silně ovlivněni W. Fiedlerem. Ve Fiedlerově celoživotním díle jsou relativně vyváženě zastoupeny a rozvíjeny obě hlavní linie rozvoje projektivní geometrie – linie syntetická i linie analyticko-geometrická. Pro druhou koncepci měl v německy mluvícím prostředí neocenitelný význam Fiedlerův překlad a úprava monografie George Salmona (1819–1904) o analytické geometrii (*Analytische Geometrie des Raumes*; 1882). K zvláštnostem české geometrické školy patří výrazná dominance počtu prací opírajících se o syntetickou metodu.

Mezi nevelký počet autorů, kteří většinu svých vědeckých a odborných výsledků dosahovali analytickou metodou, patřil K. Zahradník. Od počátků jeho publikační činnosti to byla převážně teorie rovinných algebraických křivek, počínaje analytickým zpracováním speciálních typů racionálních křivek, která řešením četných problémů o objektech svázaných s kuželosečkami až po některé drobnější problémy elementární povahy poutala Zahradníkovu pozornost až do posledního období jeho života. Jednotící črtou Zahradníkových vědeckých, odborných i metodických prací je zručné, obratné a vysoce produktivní používání analytické metody vhodně doplněné menším rozsahem syntetických úvah v pasážích obecně přístupných a srozumitelných dobovému okruhu průměrně vysokoškolsky vzdělaných čtenářů-matematiků. Výběr námětů a variabilita metod a prostředků Zahradníkových prací jsou výrazně monotematické, což výstižně charakterizoval už Matyáš Lerch.

Několik obecných poznámek

Ze 114 položek úplného seznamu publikací K. Zahradníka (viz kapitolu *Faktografické přílohy*, část *Seznam publikací Karla Zahradníka*) 93 položek zaznamenává publikace přímo svázané s geometrií. Z toho počtu je 81 vědeckých a odborných prací, z nichž 78 lze označit v jisté míře za původní, ačkoliv několik z nich je v identickém nebo téměř identickém znění publikováno ve dvou, v některých případech dokonce ve třech jazycích – v češtině, němčině, chorvatštině, jedenkrát i ve francouzštině. Taktéž originalita prací je rozdílná – kolísá od drobných doplnění a poznámek k známým větám až po zobecňující výsledky o některých třídách rovinných algebraických křivek.

Pro orientaci čtenáře je nutno uvést několik poznámek o charakteru ambientní roviny geometrických objektů zkoumaných K. Zahradníkem, jakož i o metodách a prostředcích, jejichž pomocí toto zkoumání probíhalo. Výlučným typem roviny, s nímž se K. Zahradník zabýval, byla reálná euklidovská rovina doplněná množinou nevlastních bodů všech rozšířených přímek euklidovské roviny; množina všech těchto *nevlastních bodů* tvoří nevlastní přímku, jíž doplněna euklidovská rovina se nazývá *rozšířenou euklidovskou rovinou*. Incidenční struktura této roviny je izomorfní s incidenční strukturou reálné projektivní roviny. Tento model projektivní roviny byl po mnoho desetiletí téměř výlučným modelem projektivní roviny.[1] Konfúznost tohoto modelu spočívala v tendenci využívat metrické vlastnosti jeho vlastní části (tj. euklidovské roviny) ke studiu projektivních objektů a v následném zamlženém chápání vztahu metrických a projektivních vlastností a invariantů. Bez nadsázky lze konstatovat, že K. Zahradník (stejně jako většina jeho současníků) nepřekonal chápání projektivní roviny v podobě, v jaké ji prezentoval např. J. Steiner v rozsáhlé práci *Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises* (Konstrukce prováděné pomocí přímky a pevné kružnice, 1833), ačkoliv byla už dostatečně dlouho k dispozici koncepce projektivní geometrie zbavená metriky a založená na ryze incidenčním (tudíž projektivním) základě harmoničnosti, vypracovaná Christianem von Staudtem (1798–1867) v jeho knize *Geometrie der Lage* (Geometrie polohy, 1847) [1].

V rozšířené euklidovské rovině se zpravidla používala pravoúhlá nebo kosoúhlá kartézská (správně *karteziánská*) soustava souřadnic se všemi jejími možnostmi využití nehomogenních souřadnic na analytickou reprezentaci metrických objektů a metrických vlastností vlastní části této roviny. To zase, samozřejmě, vylučovalo možnost rovnocenně formulovat projektivní vlastnosti vlastních a nevlastních prvků používaného modelu roviny. Prostředkem, jenž umož-

[1] Vysokoškolští učitelé z řad absolventů učitelského studia matematiky a deskriptivní geometrie v 1. (meziválečné) Československé republice používali tento model ve výuce projektivní geometrie jako hlavní model projektivní roviny ještě v 60. letech 20. století.

ňoval zrovnoprávnění vlastních a nevlastních prvků, jakož i použití duality mezi množinou všech bodů a množinou všech přímek projektivní roviny, bylo používání homogenních souřadnic, exaktně prezentovaných např. Juliem Plückerem (1801–1868) v jeho díle *Theorie der algebraischen Curven* (Teorie algebraických křivek, 1839) [1]. K. Zahradník používal homogenní souřadnice ojediněle, i když jejich metodu nepochybně ovládal; na vyjadřování metrických a podobnostních vlastností – a většinou o ty se v jeho pracích jedná – jsou homogenní souřadnice nevhodné.

Používání nehomogenních reálných souřadnic k charakterizaci jistých množin daných nebo hledaných bodů či přímek v některých situacích, když tyto množiny byly definovány algebraickými rovnicemi mezi souřadnicemi předmětných bodů nebo přímek, přinášelo vágní výsledky způsobené faktem, že kořeny vyskytujících se algebraických rovnic s reálnými koeficienty byly *imaginární*. Dobové východisko z této situace spočívalo v deklaraci bodů nebo přímek s těmito imaginárními souřadnicemi za imaginární body, resp. přímky, jednoduše doplněné k existujícím reálným bodům, resp. přímkám (tj. k bodům nebo přímkám, jejichž všechny souřadnice byly reálné) rozšířené euklidovské roviny bez vyjasnění změny struktury, již akceptace imaginárních prvků přináší.[2] Zahradníkova doba nedospěla k explicitnímu pochopení role algebraické struktury, tvořící základnu analytické definice ambientního prostoru, ani k pojmu aritmeticko-algebraicko-geometrické komplexifikace tohoto prostoru.[3] Ani Kleinův grupový princip klasifikace geometrií, načrtnutý roku 1872 v Erlangenském programu, nemohl z různých – většinou objektivních – příčin aktuálně vstoupit do komplexního dění v geometrii vědeckého prostředí, v němž žil, působil a odborně pracoval K. Zahradník.

Klasifikace geometrických prací Karla Zahradníka

Z publikovaných Zahradníkových geometrických prací, jež lze označit za samostatné a v jisté míře originální, po vynechání některých duplicitních článků, prací menšího významu a nižší originality, jakož i článků výrazně metodického zaměření, zbývá přibližně 45 až 48 prací, jež výstižně charakterizují jeho geometrické vědecko-odborné dílo. Podle věcného tematického kritéria a detailnějšího zaměření na partikulární témata je lze rozdělit do těchto skupin:

1. Teorie kuželoseček
    a) Vlastnosti kuželoseček – 7 prací
    b) Množiny bodů na kuželosečkách a bodové korespondence – 6 prací
2. Křivky odvozené z kuželoseček – 3 práce

[2] Obecně známým příkladem imaginárních bodů jsou *kružnicové body* (tradičně, ale nekorektně nazývané *kruhovými body*) v rozšířené euklidovské rovině doplněné imaginárními prvky: jsou to body doplněné nevlastní přímky, jejichž odpovídající souřadnice jsou sdružená komplexní čísla vyhovující rovnici každé kružnice euklidovské roviny.

[3] Tento proces se nemohl uskutečnit z objektivních historických příčin: teorie algebraických struktur byla ve stadiu zrodu a její geometrické aspekty se staly předmětem výzkumu v budoucnosti.

3. Speciální křivky – 6 prací

4. Racionální křivky
   a) Racionální křivky – 14 prací
   b) Soustavy bodů na křivkách a některé korespondence – 6 prací

5. Různé – 5 prací

Je ovšem zřejmé, že toto rozdělení je nutno brát se značnou tolerancí, neboť některé práce vyhovují několika kritériím zařazení a mnoho konkrétních parciálních témat se prolíná mnohými pracemi různých skupin.

Následující části této kapitoly a celá další kapitola budou věnovány zevrubnější informaci o obsahu prací jednotlivých skupin a částečně analýze a posouzení jejich významu v kontextu soudobé evropské geometrické tvorby. Tento pohled bude příležitostně podpořen opisem nebo citací recenzí z dobových referativních pramenů. Práce jednotlivých skupin budou uváděny v zásadě v chronologickém pořadí. Neodpovídá to vždycky tematické návaznosti, neboť některá témata K. Zahradník zpracovával několikrát a k některým se vracel po mnohaletém časovém odstupu. Některé články anebo i skupiny prací budou opatřeny nutným věcným doplněním a komentářem ve snaze usnadnit čtenáři srozumitelnost textů jiné, pro dnešní generace již historické doby. Stejný záměr bude plněn i častou aktualizací terminologie, která se v dnešní podobě značně liší od terminologie doby Zahradníkových aktivit. Zásahy budou citlivé, bez jakéhokoliv negativního dopadu na obsah a smysl textu.

Při použití odlišných termínů bude v zásadě respektována terminologie knihy [2].

Teorie kuželoseček

a) Vlastnosti kuželoseček

Ve většině prací této skupiny se K. Zahradník zabývá formulací a důkazy – s drtivou převahou analytickou metodou – těch vlastností regulárních kuželoseček, jež se obvykle neuvádějí v prvoplánových kurzech analytické geometrie. Hodně pozornosti věnuje problémům oskulace, jež se obvykle v elementární analyticko-geometrické teorii kuželoseček vůbec nezkoumají, neboť jsou svou podstatou povahy diferenciálně-geometrické. Bez prostředků diferenciální geometrie lze k řešení těchto problémů přistupovat pouze jistou algebraizací diferenciálně-geometrických postupů, např. bod oskulace regulární kuželosečky s oskulační kružnicí nutno považovat za trojnásobný průsečík těchto křivek, což se odrazí v algebraické rovnici pro parametr bodu oskulace násobností kořene 3.

Řešení problému oskulace je také tématem práce *Neue Eigenschaft der Kegelschnitte* (Nová vlastnost kuželoseček) [Z40]. Je-li dána regulární kuželosečka parametrickým vyjádřením

$$x = \frac{2p}{u^2 - q}, \qquad y = \frac{2pu}{u^2 - q}$$

s reálnými konstantami p, q a reálným parametrem u, a kružnice rovnicí

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0$$

s reálnými konstantami α, β, m, hledání čtyř společných bodů kuželosečky s kružnicí vede k hledání kořenů bikvadratické rovnice s neznámou u. Parametr u příslušný k bodu oskulace kružnice s kuželosečkou a parametr u' příslušný ke čtvrtému průsečíku kuželosečky s kružnicí jsou vázány rovnicí

$$u^3 + 3qu + u'(3u^2 + q) = 0,$$

která vyjadřuje $(1,3)$-korespondenci mezi body kuželosečky jako oskulačními body s kružnicí a čtvrtými průsečíky oskulačních kružnic s kuželosečkou. Body oskulace tří oskulačních kružnic procházejících bodem kuželosečky jako jednoduchým průsečíkem kuželosečky s těmito kružnicemi tvoří tzv. *oskulační trojici* (*oskulační trojúhelník*). Těžiště tohoto oskulačního trojúhelníku leží na vedlejší ose kuželosečky.

Jak poznamenal recenzent dr. A. Maynz v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*,[4] jedná se vesměs o výsledky známé již u G. Salmona s přesnější lokalizací těžiště oskulačního trojúhelníku ve středu kuželosečky. Nicméně recenzent ocenil odlišnost Zahradníkovy metody důkazu. Incidenci společného těžiště všech oskulačních trojúhelníků se středem kuželosečky dokázal K. Zahradník v doplňku ke jmenovanému článku.[5]

V článku *Über das Normalenproblem für Parabel* (O problému normál paraboly) [Z45] se K. Zahradník zabývá několika metrickými problémy souvisejícími s normálami paraboly dané rovnicí

$$y^2 = 2px$$

s nenulovým reálným číslem p. Nejdříve definuje *trojici pat kolmic* (*trojúhelník pat kolmic*) jako trojici bodů paraboly, jejichž normály se protínají v jednom bodě. Pak nachází rovnici evoluty paraboly – množiny středů křivosti všech bodů paraboly, přičemž každý střed křivosti je definován jako průsečík soumezných (tj. limitně blízkých) normál. Dále je dokázáno, že těžiště každého trojúhelníku pat kolmic leží na ose x pravoúhlé soustavy souřadnic a všechny trojúhelníky pat kolmic, jejichž normály se protínají v bodech přímky rovnoběžné s vrcholovou tečnou paraboly, mají společné těžiště. Následuje výpočet souřadnic ortocentra trojúhelníku pat kolmic a výpočet obsahu tohoto trojúhelníku. Hodnoty souřadnic ortocentra trojúhelníku i obsahu trojúhelníku pat kolmic jsou funkcemi souřadnic průsečíku všech tří normál příslušných k trojúhelníku.

[4] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 10(1878), str. 476.

[5] Viz *Neue Eigenschaft der Kegelschnitte*, Archiv der Mathematik und Physik 63(1879), str. 93.

Množina všech bodů (ξ, η) (jako průsečíků normál příslušných k trojúhelníkům pat kolmic), pro něž mají trojúhelníky pat kolmic konstantní obsah, je křivka 3. stupně daná rovnicí

$$8(\xi - p)^3 - 27p\eta^2 = c^3,$$

kde $c^3 = \frac{4\Delta}{p}$ (Δ je obsah trojúhelníku pat kolmic).

Zajímavou vlastnost má trojúhelník opsaný parabole, tvořený tečnami ve vrcholech trojúhelníku pat kolmic: *Spojnice dotykového bodu jedné tečny s průsečíkem ostatních dvou tečen půlí tětivu s krajními body v bodech dotyku těchto dvou tečen.*

Další vlastnosti skýtají kružnice opsané trojúhelníkům pat kolmic: *Všechny kružnice opsané trojúhelníkům pat kolmic mají společný bod ve vrcholu paraboly.*

Souřadnice středu každé takové kružnice jsou jednoduše lineárně závislé na průsečíku normál trojúhelníku pat kolmic. Vyhledáním středu kružnice a její konstrukcí (inciduje s vrcholem paraboly) jsou vrcholy trojúhelníku pat kolmic určené jako další tři průsečíky paraboly s kružnicí.

K libovolnému bodu P roviny jsou jednoznačně určeny body: S – těžiště trojúhelníku pat kolmic příslušného k bodu P; ortocentrum H tohoto trojúhelníku; střed M kružnice opsané tomuto trojúhelníku; střed M_1 kružnice procházející středy stran tohoto trojúhelníku. *Každá čtveřice bodů S, H, M, M_1 určená jedním bodem P inciduje s jednou přímkou p.*

Probíhá-li bod P křivkou stupně n, obaluje přímka p křivku třídy $2n$ a stupně $2n(n-1)$.

Recenzent profesor C. Rodenberg z Darmstadtu podává bez komentáře výstižnou informaci o obsahu práce.[6]

Značně rozsáhlá dvoudílná práce *Teorija parabole na temelju racionalnoga parametra* (Teorie paraboly na základě racionálního parametru) [Z53] je systematickým výkladem velmi podrobné teorie paraboly v rozšířené euklidovské rovině zpracované analytickou metodou. Výklad začíná projektivním výtvorem kuželosečky pomocí dvou nesoumístných projektivních svazků přímek vedoucím k parametrickému vyjádření bodové kuželosečky. Konstrukce bodů a parametrické vyjádření jsou specializovány pro parabolu, jejíž parametrické vyjádření má tvar

$$x = 2pt^2, \quad y = 2pt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p \text{ – reálná nenulová konstanta;}$$

zatímco vyjádření jednou rovnicí má tvar

$$y^2 = 2px.$$

Potom následují paragrafy s názvy:[7] Sečna; Tečna; Pól a polára; Vzdálenost pólu od poláry; Trojúhelník tečen a polára bodu (trojúhelník, jehož vrcholy jsou

[6] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 12(1880), str. 554.

[7] Některé názvy jsou přizpůsobeny dnešní terminologii.

vnější bod paraboly a dotykové body tečen paraboly incidujících s tímto bodem); Těžiště tohoto trojúhelníku; Trojúhelník vepsaný parabole (s výpočtem souřadnic těžiště a obsahu toho trojúhelníku); Tečnový trojúhelník (trojúhelník, jehož strany leží na tečnách paraboly); Ortocentrum trojúhelníku opsaného parabole; Kvadratická involuce bodů na parabole; Průsečíky kružnice s parabolou; Bod střední vzdálenosti kružnicového čtyřúhelníku vepsaného parabole; Harmonický kružnicový čtyřúhelník na parabole; Ekvianharmonický kružnicový čtyřúhelník na parabole; Diagonální trojúhelník kružnicového čtyřúhelníku vepsaného parabole; Oskulační kružnice; Normála v bodě paraboly; Evoluta jako množina bodů, v nichž se protínají dvě normály; Průsečík normál dvou bodů paraboly; Trojúhelník normál; Těžiště trojúhelníku pat kolmic; Ortocentrum trojúhelníku pat kolmic; Obsah trojúhelníku pat kolmic; Kružnice opsaná trojúhelníku pat kolmic; Feuerbachova kružnice trojúhelníku pat kolmic; Projektivní příbuznost soustavy bodů P se soustavou bodů H, M, M_1; Bod P odpovídající Eulerově přímce svého trojúhelníku pat kolmic; Kubická involuce na parabole; Kubická involuce na ose paraboly; Kubická involuce tečen na parabole; Kubická involuce bodů na parabole.

Druhý díl obsahuje části: Průsečíky dvou parabol; Dotyková parabola základní paraboly; Parabola, jež má se základní parabolou styk druhého stupně; Harmonická čtveřice parabol se stykem druhého stupně se základní parabolou.

Mimo tradiční výklad standardních témat jsou do práce zařazeny výsledky obsažené v předešlé citované práci [Z45] a další výsledky o metrických i projektivních vlastnostech a vztazích různých objektů svázaných nějakým způsobem s danou parabolou (speciální body, přímky, trojúhelníky, čtyřúhelníky, kružnice, paraboly; bodové i tečnové korespondence, speciálně involuce). Autor vyšetřuje objekty téhož nebo podobného druhu podle stejného schématu, usiluje pravidelně o metrickou charakterizaci, často vyšetřuje množiny bodů indukujících tutéž (konstantní) charakteristiku (obsah, vzdálenost, dvojpoměr apod.). Technické postupy nejsou vždycky elementárně rutinní, ale celkem spolu i s výsledky nepřekračují obzor mírně rozvinuté teorie rovinných algebraických křivek. Nicméně v chorvatském prostředí své doby mohla být publikace vnímána jako práce monografického charakteru. Zahradníkovy práce publikované v chorvatském jazyku byly recenzovány v renomovaných referativních časopisech ojediněle. Tato práce není výjimkou.

Následující tři položky představují tři jazykové verze téhož textu. Práce *Prilog k teoriji čunjosječica* (Příspěvek k teorii kuželoseček) [Z77] je zpracovaným záznamem přednášky, jíž K. Zahradník proslovil na zasedání matematicko-přírodovědného oddělení Jihoslovanské akademie věd a umění 29. ledna 1894. Český překlad s názvem *Příspěvek k theorii kuželoseček* [Z80] byl publikován v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky*. Německý překlad s titulem *Zur Kegelschnittslehre* (K teorii kuželoseček) [Z83] byl uveřejněn v časopisu *Archiv der Mathematik und Physik*. K. Zahradník se v článku zabývá některými konstrukcemi bodů a tečen kuželoseček a důkazy některých jejich vlastností v rozšířené euklidovské rovině. Převažující metoda je analytická, ačkoliv v některých případech se vhodně využívá i metoda syntetická. Základní vyjádření regulární kuželosečky rovnicí v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic má tvar

$$y^2 = 2px - qx^2 \quad \text{s reálnými konstantami} \quad p, q,$$

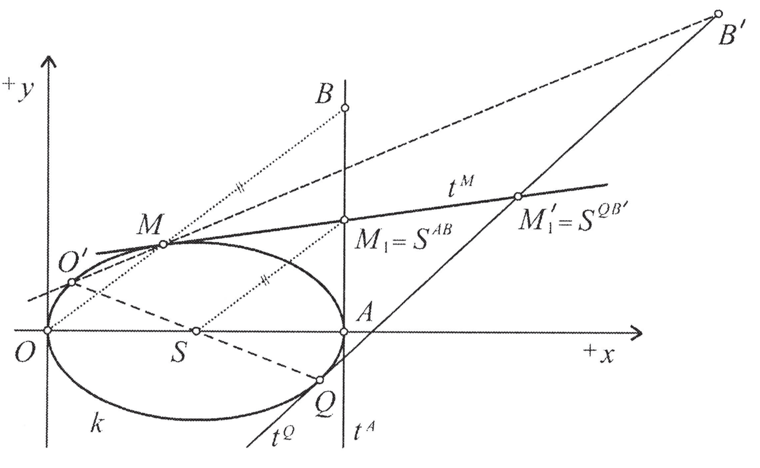
v parametrickém vyjádření

$$x = \frac{2p}{u^2+q}, \qquad y = \frac{2pu}{u^2+q}; \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Počátek O soustavy souřadnic je vrcholem hlavní osy u středové kuželosečky se středem S, v případě paraboly vrcholem. Nechť (obr. 1)

- středová kuželosečka má střed S;
- druhý vrchol hlavní osy má označení A;
- t^A je tečna kuželosečky v bodě A;
- M je libovolný bod kuželosečky různý od bodů O, A;
- B je průsečík přímky OM s tečnou t^A;
- M_1 je střed úsečky AB.

Potom: *Přímka MM_1 je tečna kuželosečky v bodě M.*



Obr. 1

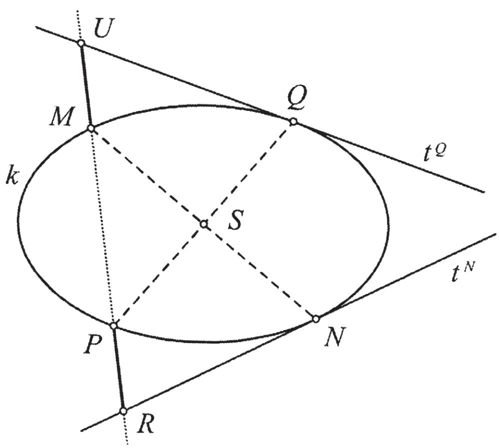
Bod M_1 lze též sestrojit jako průsečík tečny t^A s přímkou incidující se středem S a rovnoběžnou s přímkou OM.

Výše popsaná konstrukce tečny zůstává v platnosti i pro libovolný bod O' ($O' \neq O, O' \neq M$) kuželosečky, tečnu t^Q kuželosečky v bodě Q diametrálně sdruženém s O', její průsečík B' s přímkou $O'M$ a střed M_1' úsečky $B'Q$; přímka MM_1' je tečna kuželosečky v bodě M.

Jsou-li O, O' dva libovolné body kuželosečky a t^A, t^Q tečny kuželosečky v bodech diametrálně sdružených s body O, O', vytvářejí průsečíky $\leftrightarrow OM \cap t^A = B$ a $\leftrightarrow O'M \cap t^Q = B'$ pro proměnný bod M kuželosečky na tečnách t^A, t^Q projektivní bodové řady, tudíž množina všech spojnic $\leftrightarrow BB'$ je tečnová kuželosečka, jejímiž tečnami jsou i t^A, t^Q. Obálkou všech tečen je bodová kuželosečka incidující s bodem O. Probíhá-li bod O' ($O' \neq O$) celou základní kuželosečkou, obdrží se popsaným způsobem čtyřparametrická soustava bodových kuželoseček incidujících s bodem O, jejíž obálkou je křivka dvanáctého stupně.

Každým bodem roviny procházejí čtyři kuželosečky incidující s bodem O. Tečny k těmto kuželosečkám v bodě O definují dvojpoměr těchto čtyř kuželoseček. Množina všech bodů, pro něž uvedené čtveřice kuželoseček mají konstantní dvojpoměr, jsou křivky stupně menšího než 12; konkrétně pro harmonický dvojpoměr je to křivka stupně šestého a pro ekvianharmonický dvojpoměr ($\delta = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$) křivka stupně čtvrtého.

Jako nová vlastnost středových kuželoseček je dokázána věta: *Jsou-li MN a PQ dva libovolné různé průměry středové kuželosečky, t^N, resp. t^Q tečna v bodě N, resp. Q a $R =\leftrightarrow MP \cap t^N$, $U =\leftrightarrow MP \cap t^Q$, platí $MU \cong PR$* (obr. 2).



Obr. 2

Důkaz je proveden analyticky. Pro elipsu lze využít i vlastnosti rovnoběžného průmětu kružnice.

Českou verzi pro časopis *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* recenzoval profesor A. Sucharda z Brna,[8] německou profesor H. Schubert z Hamburku.[9] Oba se omezili na věcnou informaci (H. Schubert velmi stručnou) o obsahu článku.

Krátký článek *Geometrický význam koeficientů rovnice kuželosečky opsané danému trojúhelníku* [Z99] je jedním z nemnohých spisů, v nichž K. Zahradník pracuje s homogenními souřadnicemi.

[8] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 30(1899), str. 481.
[9] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 30(1899), str. 522.

V homogenní projektivní soustavě souřadnic s vrcholy $O_1(1,0,0)$, $O_2(0,1,0)$, $O_3(0,1,0)$ a osami $o_1 = \leftrightarrow O_2O_3$, $o_2 = \leftrightarrow O_3O_1$, $o_3 = \leftrightarrow O_1O_2$ v reálné projektivní rovině kuželosečka obsahující body O_1, O_2, O_3 má rovnici

$$a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0$$

s nenulovými koeficienty a_1, a_2, a_3. Tečny kuželosečky v bodech O_1, O_2, O_3 mají po řadě rovnice

$$t^{O_1} : a_3x_2 + a_2x_3 = 0, \quad t^{O_2} : a_1x_3 + a_3x_1 = 0, \quad t^{O_3} : a_2x_1 + a_1x_2 = 0,$$

neboli

$$\frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0, \qquad \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0, \qquad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0.$$

Průsečíky $t^{O_1} \cap o_1 = R_1$, $t^{O_2} \cap o_2 = R_2$, $t^{O_3} \cap o_3 = R_3$ leží na přímce p s rovnicí

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Přímka p je Pascalovou přímkou šestiúhelníku vepsaného kuželosečce, redukovaného na trojúhelník $O_1O_2O_3$, v němž tečny t^{O_1}, t^{O_2}, t^{O_3}, hrají role spojnic soumezných bodů.

V článku je dále odvozena tečnová rovnice kuželosečky a duální věta pro Brianchonův bod.

Lakonická jednořádková recenze článku od profesora K. Petra z Prahy zní: *Jedná se o rovnici* $a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0$.[10]

b) Množiny bodů na kuželosečkách a bodové korespondence

První dva články této skupiny jsou věnovány problému, jenž byl vyšetřován v práci [Z40]. Jedná se o korespondenci mezi třemi body kuželosečky, jež jsou body oskulace kuželosečky se třemi oskulačními kružnicemi, a čtvrtým bodem kuželosečky, jenž je dalším společným bodem těchto kružnic. Články, o něž se jedná, jsou *Vlastnosti jistých trojin oskulačních na kuželosečce* [Z21] a *Osculationstripel am Kegelschnitte* (Oskulační trojice na kuželosečce) [Z55]. Text druhého článku je doslovným překladem práce první; jediný rozdíl tkví v pojmenování některých vyskytujících se objektů v německém textu obecně přijatými názvy, jež v českém textu chybí.

Schéma článku [Z21] je stejné jako v článku [Z40]. Nejdříve se stanoví v parametrickém vyjádření regulární kuželosečky podmínka pro čtyři společné body s kružnicí, pak podmínka rovnosti tří parametrů jako podmínka pro bod oskulace kružnice s kuželosečkou a následně vazba kubickou rovnicí mezi parametrem oskulačního bodu a parametrem čtvrtého průsečíku oskulační kružnice s kuželosečkou. Tímto jednoduchým průsečíkem procházejí tři oskulační kružnice se třemi navzájem různými body oskulace, tvořícími tzv. *oskulační trojúhelník*. Jelikož korespondence mezi trojicí vrcholů oskulačního trojúhelníka

[10] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 41(1910), str. 656.

a čtvrtým společným průsečíkem všech tří předmětných oskulačních kružnic s kuželosečkou je bijektivní, mluví K. Zahradník o kubické involuci, což neodpovídá dnešnímu chápání pojmu involuce. Korektněji by se mělo mluvit o $(1,3)$-korespondenci bodů. Symbol $(1,3)$ vyjadřuje, že každému bodu oskulace jednoznačně odpovídá jediný jednoduchý průsečík oskulační kružnice v tomto bodě s kuželosečkou a každému bodu kuželosečky jakožto jednoduchému průsečíku kuželosečky s oskulační kružnicí odpovídají tři oskulační body, tudíž i tři oskulační kružnice incidující s tímto bodem kuželosečky.

Následuje výpočet obsahu oskulačního trojúhelníku a jako důsledek je zformulována věta: *Trojúhelník maximálního obsahu vepsaný elipse je oskulační.*

Výsledkem výpočtu souřadnic těžiště oskulačního trojúhelníku je zjištění, že *společným těžištěm všech oskulačních trojúhelníků středové kuželosečky je střed této kuželosečky.*

Další vlastnosti oskulačních trojúhelníků a útvarů s nimi sdružených jsou formulovány ve větách:

Množina středů kružnic opsaných všem oskulačním trojúhelníkům středové kuželosečky je kuželosečka téhož typu jako základní kuželosečka a mající osy rovnoběžné s osami základní kuželosečky.

Množina ortocenter všech oskulačních trojúhelníků kuželosečky je kuželosečka.

Množina středů všech Feuerbachových kružnic všech oskulačních trojúhelníků kuželosečky je kuželosečka.

Pro každý oskulační trojúhelník kuželosečky jsou jeho těžiště T, ortocentrum H, střed opsané kružnice S a střed příslušné Feuerbachovy kružnice S_1 kolineárními body tvořícími v tomto pořadí harmonickou čtveřici.

Karel Zahradník nazývá uvedené čtyři body význačné (v českém originálu *znamenité*, v německé verzi *ausgezeichnet*). Přímka, s níž incidují, je známá pod názvem Eulerova přímka.

Pozoruhodný je závěrečný výsledek práce: *Eulerovy přímky všech oskulačních trojúhelníků středové kuželosečky incidují s jejím středem.*

Poměrně podrobnou věcnou informaci o německé verzi práce podává recenzent dr. A. Maynz.[11]

Tematice kubické involuce na kuželosečce je věnována i rozsáhlá dvoudílná práce *Prilog k teoriji kubične involucije na čunjoseku* (Příspěvek k teorii kubické involuce na kuželosečce) [Z59], jež je časopiseckým rozšířením přednášky, již K. Zahradník přednesl na zasedání matematicko-přírodovědného oddělení Jihoslovanské akademie věd a umění dne 26. března 1887. V této práci se K. Zahradník podrobněji něž v předešlých dvou a některých dalších článcích zabývá bodovou $(1,3)$-korespondencí mezi trojicí bodů oskulace kuželosečky se třemi kružnicemi a dalším bodem kuželosečky, s nímž uvedené tři kružnice incidují. Výkladu základních pojmů věnuje mnohem více místa než v ostatních

[11] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 15(1883), str. 598

pracích a uvádí i další související pojmy, jako kupř. tzv. *kuželosečku kubické involuce* dané základní kuželosečky, což je obálka nositelek stran všech oskulačních trojúhelníků vepsaných základní kuželosečce. Dokazuje větu: *Spojnice vrcholu oskulačního trojúhelníku vepsaného základní kuželosečce F s dotykovým bodem nositelky protilehlé strany s kuželosečkou I kubické involuce inciduje se středem kuželosečky F.* To není žádné překvapivé zjištění, neboť jak je známo, společným těžištěm všech oskulačních trojúhelníků je střed základní kuželosečky. Navíc se ukazuje, že F a I jsou stejnolehlé kuželosečky.

Hodně pozornosti věnuje K. Zahradník křivce, jež je obálkou přímek obsahujících společné tětivy základní kuželosečky a jejích oskulačních kružnic. Jedná se o tětivy, jež jsou spojnicemi bodů oskulace kuželosečky s kružnicemi (jako trojnásobných průsečíků kuželosečky a jejích oskulačních kružnic) se čtvrtými průsečíky základní kuželosečky s oskulačními kružnicemi. Analyticky je dokázáno, že tato obálka je křivka čtvrté třídy (tj. každým „obecným“ bodem roviny lze vést čtyři její tečny). Dále jsou vyšetřovány množiny bodů roviny, pro něž uvažované čtveřice tečen tvoří harmonickou, resp. ekvianharmonickou čtveřici. První množinou je úplně rozložitelná kubika (na tři vzájemně různé přímky), druhou je kuželosečka stejnolehlá se základní kuželosečkou.

Pro uvedenou obálku jsou dále nalezeny její singularity, obsah oblasti obálkou ohraničené (v případě, když je základní kuželosečkou elipsa), křivka k ní *polárně reciproká* vzhledem k základní kuželosečce (množina pólů všech nositelek společných tětiv základní kuželosečky s jejími oskulačními kružnicemi) – je to racionální křivka 4. stupně, dále množiny bodů dělících tětivy (úsečky) v konstantním poměru pro obecnou (kladnou) hodnotu dělícího poměru i pro speciální hodnoty: pro „obecnou“ hodnotu je to racionální křivka šestého stupně. (Některé výsledky byly známy již dříve.)

V dalším K. Zahradník stručně uvádí vlastnosti oskulačního trojúhelníku, již dříve publikované v jeho jiných pracích: ortocentrum, střed kružnice opsané trojúhelníku, střed Feuerbachovy kružnice příslušné k trojúhelníku. Pak vyšetřuje $(1,3)$-tečnovou korespondenci (v Zahradníkově terminologii „*kubickou involuci tečen*“) mezi tečnami ve vrcholech oskulačního trojúhelníku základní kuželosečky a tečnou kuželosečky v jejím bodě, v němž se s ní protínají tři oskulační kružnice ve vrcholech oskulačního trojúhelníku. Trojstran tvořený těmito tečnami nazývá oskulačním trojstranem (trojstranem oskulace). V práci je dokázáno, že obsah trojstranu oskulace je konstantní a je nejmenší z obsahů všech trojstranů opsaných kuželosečce. Dále K. Zahradník zkoumá těžiště, ortocentra, středy opsaných kružnic a středy Feuerbachových kružnic příslušných k trojstranu oskulace a dospívá ke stejným anebo analogickým výsledkům jako v případě trojúhelníků oskulace. V závěru první části práce jsou prozkoumány vlastnosti paraboly opsané trojúhelníku oskulace.

Ve druhé části článku se K. Zahradník věnuje problému normál, jenž byl pro parabolu řešen v práci [Z45]. Ukazuje, že každým bodem regulární kuželosečky procházejí tři normály této kuželosečky různé od normály v daném bodě, jejichž průsečíky s příslušnými tečnami (což jsou body kuželosečky) tvoří trojúhelník pat kolmic. Přiřazení tří pat kolmic k bodu kuželosečky nazývá Zahradník kubickou involucí. V pozdější terminologii je to $(1,3)$-korespondence bodů kuželosečky: bodu kuželosečky odpovídá trojice pat kolmic a této trojici bodů bod kuželosečky, v němž se protínají tři normály ve vrcholech trojúhelníku pat kolmic.

Po odvození závislosti mezi parametry dvou vrcholů trojúhelníku pat kolmic je vyšetřován případ dvojnásobného vrcholu. Jedná se o případ *rozvětvení*: jednoduchý bod trojice pat kolmic se nazývá bod rozvětvení, trojice složená z dvojnásobného bodu a jednoduchého bodu se nazývá trojice rozvětvení. Na kuželosečce existují čtyři případy rozvětvení.

Probíhá-li jeden vrchol trojúhelníku pat kolmic základní kuželosečkou, obaluje protilehlá strana tohoto trojúhelníku tzv. *kuželosečku kubické involuce* určené uvedenými trojúhelníky. Tato kuželosečka je soustředná se základní kuželosečkou. Spojnice vrcholů trojúhelníku pat kolmic s příslušnými body kuželosečky involuce (tj. s body dotyku kuželosečky involuce se stranami protilehlými k těmto vrcholům) obalují křivku čtvrté třídy a šestého stupně.

Množina průsečíků všech stran trojúhelníků pat kolmic s tečnami základní kuželosečky ve vrcholech trojúhelníků protilehlých k těmto stranám je racionální křivka čtvrtého stupně.

Dále je v práci stanoven obsah trojúhelníku pat kolmic a je dokázáno, že množina těžišť všech trojúhelníků pat kolmic je kuželosečka soustředná a stejnolehlá s kuželosečkou základní. Obálka všech spojnic bodů základní kuželosečky s těžišti přiřazených trojúhelníků pat kolmic je racionální křivka šestého stupně a čtvrté třídy. Množina všech bodů, z nichž tečny vedené k této křivce tvoří harmonickou čtveřici, je rozložitelná kubika složená z osy souřadnicové soustavy x a kuželosečky, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami základní kuželosečky. Množina všech bodů, z nichž čtyři tečny vedené k této křivce jsou čtveřice s ekvianharmonickým dvojpoměrem, je kuželosečka, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami základní kuželosečky.

Množina ortocenter všech trojúhelníků pat kolmic je kuželosečka soustředná se základní kuželosečkou. Spojnice všech bodů kuželosečky s ortocentry příslušných trojúhelníků pat kolmic obalují racionální křivku čtvrté třídy.

Množina středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům pat kolmic je kuželosečka.

Každým bodem roviny základní kuželosečky procházejí dvě kružnice opsané dvěma trojúhelníkům pat kolmic. Chordály takových dvojic kružnic tvoří svazek přímek.

Množina středů Feuerbachových kružnic příslušných všem trojúhelníkům pat kolmic je kuželosečka soustředná se základní kuželosečkou.

Většina výsledků o trojúhelnících pat kolmic uvedených u Karla Zahradníka pochází od jiných autorů; Zahradníkovým přínosem je jednotná analytická metoda důkazu a systemizace výsledků.

Poslední část druhého dílu práce je věnována mírnému zobecnění předešlé tematiky o trojúhelnících pat kolmic na kuželosečce. Trojice bodů kuželosečky jsou definovány kubickou rovnicí pro parametry tří bodů kuželosečky, závislou od parametru u v parametrickém vyjádření bodů kuželosečky. Tato rovnice je analogií ke kubické rovnici svazující parametry tří vrcholů trojúhelníku pat kolmic procházejících jedním bodem základní kuželosečky. Jelikož parametr libovolného bodu kuželosečky a parametry tří bodů přiřazených k proměnnému parametru bodu kuželosečky jsou oboustranně jednoznačně určeny, mluví se zde opět o kubické involuci. Opět je dokázáno, že množiny těžišť i ortocenter všech trojúhelníků involuce jsou kuželosečky. Totéž platí o množině středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům involuce.

V dodatku článku je uvedeno, že korespondence mezi body roviny a body středních vzdáleností příslušných čtyřúhelníků pat kolmic je kvadratická biracionální (Cremonova) transformace.

V známých referativních časopisech práce nebyla recenzována.

Následující dva články jsou německou a českou verzí téhož textu. (Německá verze byla publikována dříve.) Náleží k tématům často zpracovávaným v té době obecně a u K. Zahradníka zvláště. Obsah napovídají názvy prací: *Einige Eigenschaften der Oskulationstripel am Kegelschnitte* (Některé vlastnosti oskulačních trojic na kuželosečce) [Z100] a *Některé vlastnosti oskulačních trojin na kuželosečce* [Z103]. Předmětem zkoumání jsou oskulační trojúhelníky regulární kuželosečky, pro něž oskulační kružnice v jejích vrcholech se protínají v jednom bodě kuželosečky. Oskulační trojúhelníky mají následující vlastnosti:

1. *Normály kuželosečky ve vrcholech oskulačního trojúhelníku se protínají v jednom bodě.*
2. *Trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou středy křivosti kuželosečky ve vrcholech všech oskulačních trojúhelníků, mají konstantní obsah.*

   Důkaz plyne z faktů, že a) poměr obsahů jmenovaných trojúhelníků k obsahu příslušných oskulačních trojúhelníků je konstantní a b) všechny oskulační trojúhelníky téže kuželosečky mají konstantní obsah.
3. Nechť H je průsečík normál kuželosečky ve vrcholech oskulačního trojúhelníku $U_1U_2U_3$ a nechť U je pata kolmice čtvrté normály procházející bodem H. Nechť T je čtvrtý průsečík kuželosečky s kružnicí opsanou trojúhelníku $U_1U_2U_3$. *Body U a T jsou diametrálně sdružené body této kružnice* (věta Joachimsthalova).

   Množina všech bodů H je kuželosečka afinní se základní kuželosečkou.
4. *Obálka všech spojnic TH bodů T, H k sobě příslušných je racionální křivka 4. třídy. Přiřazení $T \to TH$, resp. $H \to TH$ vyjádřené v souřadnicích bodu T, resp. H a přímky TH je kvadratická biracionální korespondence.*
5. Označíme-li střed kružnice opsané oskulačnímu trojúhelníku písmenem S, *je obálka všech spojnic TS příslušných bodů T, S racionální křivka*

4. třídy a přiřazení $T \to S$ (vyjádřené v souřadnicích) *je kvadratická biracionální korespondence.*

6. Množina všech spojnic HS příslušných bodů H, S je svazek přímek se středem ve středu kuželosečky.

V závěru práce je uvedeno několik zajímavých výsledků pro speciální polohu bodu T.

Obsáhlou recenzi německé verze napsal profesor M. Zacharias z Berlína.[12] Podává obšírnou, věcnou informaci o obsahu práce, zvláště cituje nové Zahradníkovy výsledky navazující na jeho starší výsledky a na výsledky Steinerovy.

Stručná recenze profesora K. Petra v časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*[13] uvádí krátkou informaci o obsahu a cituje vlastnosti 1, 2 uvedené v předešlém přehledu. Českou verzi v *Revue semestrielle des publications mathématiques*[14] recenzoval F. Velísek z Prahy.

Poslední prací této skupiny je článek *O průsecích kuželosečky s fokálou* [Z102].[15] Nejdříve jsou uvedeny podmínky pro to, aby šest bodů kuželosečky (tj. Pascalův šestiúhelník) leželo na fokále, resp. čtyři body kružnice, resp. tři body přímky ležely na fokále. Patnáct vět popisuje různé vlastnosti Pascalových šestiúhelníků vepsaných fokále a dalších skupin bodů na fokále odvozených z Pascalových trojúhelníků. Tak jsou zkoumány průsečíky, resp. body dotyku, speciálně body oskulace fokály s kuželosečkami, jež procházejí konečnými skupinami bodů fokály (skupiny čtyř, tří, dvou bodů), resp. mají v bodech fokály dvoj-, troj- nebo čtyřbodový styk. V početných případech nově vzniklé body tvoří opět Pascalův šestiúhelník nebo jeho speciální případy. Zajímavý je výsledek: *Rozložíme-li šest průsečíků libovolné kuželosečky s fokálou na dvě trojbodové skupiny a proložíme-li těmi skupinami dvě kružnice, tvoří čtvrté průsečíky těchto kružnic s fokálou dvojice sdružených bodů kvadratické centrální involuce.* – To znamená, že existuje bod, z něhož se uvedené dvojice průsečíků promítají sdruženými přímkami involuce ve svazku přímek se středem v tomto pevném bodě.

Práci recenzoval v časopisu *Revue semestrielle des publications mathématiques*[16] F. Velísek.

Křivky odvozené z kuželoseček

V tomto paragrafu jsou uvedeny příklady křivek, jež jsou množinami bodů splňujících jisté podmínky vázané na danou regulární kuželosečku. Skupina zahrnuje tři práce, z nichž poslední dvě jsou různými jazykovými verzemi téhož textu.

---

[12] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 42(1911), str. 565.

[13] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 41(1910), str. 655.

[14] Viz Revue semestrielle des publications mathématiques 21-II (1913), str. 107.

[15] Fokálou se nazývá množina ohnisek všech kuželoseček svazku kuželoseček. Fokála je cirkulární kubika, tj. křivka 3. stupně incidující s kružnicovými body roviny.

[16] Viz Revue semestrielle des publications mathématiques 21-II (1913), str. 103.

První práce nazvaná *O místě bodu, jehož tětiva styku má pro danou kuželosečku stálou délku* [Z25] podává nové – spíše metodické – řešení problému již několikrát v literatuře posuzovaného.

K regulární kuželosečce dané rovnicí

$$K \equiv y^2 - 2px - qx^2 = 0; \quad p, q \in \mathbb{R},$$

v parametrickém vyjádření

$$x = \frac{2p}{u^2 - q}, \qquad y = \frac{2pu}{u^2 - q},$$

lze bodem A mimo kuželosečku vést dvě různé tečny s body dotyku U_1, U_2. Množina všech bodů A, pro něž má tětiva U_1U_2 konstantní délku c, je křivka čtvrtého stupně, jak lze ukázat nepříliš složitým analytickým výpočtem. V článku jsou dále analyzovány vlastnosti svazku takových křivek pro všechny hodnoty $c \in \mathbb{R}_+$.

V dostupných pramenech není uvedena recenze této práce.

Následující dvě práce *O nekih krivuljah izvedenih iz sjeka čunja* (O některých křivkách odvozených z kuželosečky) [Z33] a *O některých křivkách z kuželosečky odvozených* [Z36] jsou chorvatská a česká verze téhož textu. Kuželosečka je určena týmiž rovnicemi jako v předešlé práci. Vyjádřen je obsah trojúhelníku (nesprávně nazývaný *plochou*), jehož vrcholy jsou vnější bod kuželosečky a dotykové body tečen kuželosečky vedených tímto bodem. Množina všech bodů, pro něž je obsah trojúhelníku roven dané konstantě, je křivka šestého stupně, jež se v případě paraboly rozpadá na dvě imaginární paraboly a jednu reálnou parabolu shodnou se základní parabolou a posunutou vzhledem k ní ve směru osy o orientovanou úsečku délky $\frac{-p}{2}$.

Dále je stanovena závislost mezi parametry vrcholů uvedeného trojúhelníku a souřadnicemi jeho těžiště T. Probíhá-li bod T křivkou stupně n, probíhá vnější vrchol A trojúhelníku křivkou stupně $3n$. Ve zvláštním případě, když bod T probíhá přímkou, je u paraboly příslušná křivka třetího stupně rozložitelná; skládá se z paraboly a nevlastní přímky roviny.

Recenze práce není v dostupných pramenech k dispozici.

Speciální křivky

V pracích této skupiny jsou vyšetřovány některé objekty svázané s křivkami antické doby a období vzniku a prvního rozvoje matematické analýzy, jakož i se zobecněním těchto křivek z pozdější doby (19. století). V pracích se často opakuje stejné nebo podobné schéma výtvorů křivek a výběru problémů, jež jsou v souvislosti s křivkami řešeny. Lepší porozumění detailům obsahu, na něž se K. Zahradník někdy odvolává, by vyžadovalo jisté expozé některých základních faktů diferenciální a algebraické teorie křivek. Nezbytné minimum těchto výsledků bude předloženo v úvodu následující kapitoly jako preliminář vlastních informací o obsahu sledovaných prací.

Články v tomto paragrafu jsou nadále uváděny v zásadě v chronologickém pořadí publikace, i když to někdy není v plné shodě s časem jejich vzniku, resp. s jejich tematickou příbuzností.

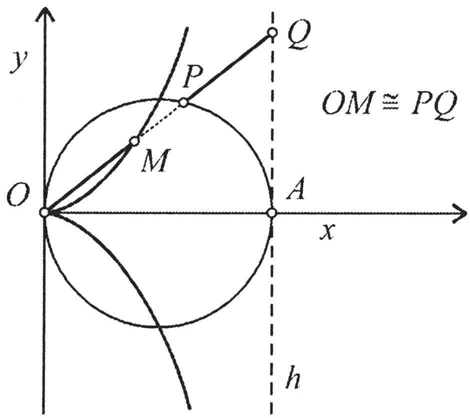
Práce *Geometrischer Ort der Punkte constanter Berührungsdreiecke in Bezug auf die Cissoide* (Množina všech bodů s konstantními dotykovými trojúhelníky vzhledem ke kisoidě) [Z27] se zabývá problémem, jenž se v Zahradníkových pracích objevuje u různých křivek. Předmětem zkoumání je kisoida (Dioklova kisoida; kisoida – podobná břečťanu; Diokles žil kolem r. 200 př. n. l.) (obr. 3) s parametrickým vyjádřením

$$x = \frac{a}{1+u^2}, \quad y = \frac{a}{u(1+u^2)}; \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0;\ u \in \mathbb{R},\ u \geq 0;$$

a algebraickou rovnici

$$x^3 - y^3(a-x) = 0.$$

(Konstrukce bodů kisoidy je zřejmá z obrázku.)



Obr. 3

Jak je vidět z rovnice kisoidy, jedná se o křivku třetího stupně a – jak se ukáže v příští kapitole – taky třetí třídy, což znamená, že bodem mimo křivku lze „obecně“ vést tři tečny kisoidy. Křivka má jediný singulární bod – bod vratu v počátku soustavy souřadnic. Body dotyku tvoří trojúhelník nazývaný *dotykovým trojúhelníkem* kisoidy, příslušným k danému společnému bodu všech tří tečen. Řešeným problémem je hledání množiny všech bodů, pro něž příslušné dotykové trojúhelníky mají konstantní obsah. Důmyslnými, ne vždy úplně přesnými výpočty je ukázáno, že hledanou množinou pro každou reálnou konstantu je křivka pátého stupně s dvojnásobným bodem v bodě vratu kisoidy.

Podrobná recenze dr. A. Maynze[17] konstatuje správnost použité metody, ale má námitky vůči poslední rovnici, jakož i některým dalším nepřesnostem v předcházejícím textu.

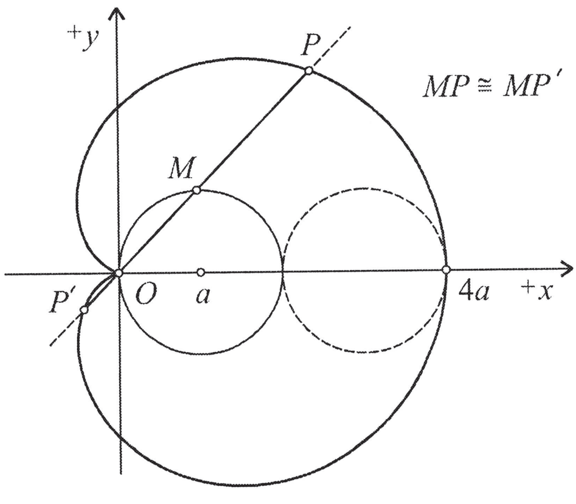
Stejný problém je řešen i v práci *Pole constanter Berührungsdreiecke bei der Cardioide* (Póly konstantních dotykových trojúhelníků u kardioidy) [Z28]. Jak je známo, kardioida je rovinná algebraická křivka, jejíž rovnice v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic euklidovské roviny zní

$$(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0,$$

a jejíž parametrické vyjádření má tvar

$$x = \frac{4a(1-u^2)}{(1+u^2)^2}, \quad y = \frac{8au}{(1+u^2)^2},\ u \in \mathbb{R}_0.$$

Kardioida vzniká pohybem bodu kružnice poloměru délky a, jež se zevně kotálí po kružnici, která je s ní shodná. Jak je vidět z tvaru rovnic a z konstrukce, jedná se o křivku čtvrtého stupně s bodem vratu v počátku soustavy souřadnic. (Obr. 4)



Obr. 4

Tečna v bodě kardioidy příslušném k parametru u má rovnici

$$(1 + 3u^2)x + (3 - u^2)uy - 4a = 0$$

---

[17] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 10(1878), str. 485.

třetího stupně v neznámé u a vyjadřující závislost mezi parametrem dotykového bodu na kardioidě a souřadnicemi x, y libovolného bodu tečny. Když je bod (x, y) dán, poslední rovnice je kubickou rovnicí pro neznámý parametr dotykového bodu tečny procházející tímto bodem a jelikož má rovnice nejvýš tři kořeny u_1, u_2, u_3, existují nejvýš tři tečny kardioidy procházející daným bodem, tudíž je kardioida algebraická křivka třetí třídy. Trojúhelník, jehož vrcholy jsou dotykové body tečen vedených bodem ke kardioidě, se nazývá dotykovým trojúhelníkem bodu (x, y) vzhledem ke kardioidě. Jelikož dotykové body jsou jednoduchými body kardioidy a jsou průsečíky kardioidy s první polárou bodu (x, y) vzhledem ke kardioidě, název pól dotykového trojúhelníku pro bod (x, y) je oprávněn.

V práci je řešen problém nalezení pólů všech dotykových trojúhelníků s konstantním obsahem. Poměrně komplikovaným výpočtem je zjištěno, že hledanou množinou bodů je křivka osmého stupně se čtyřmi body vratu, z nichž dva jsou kružnicové body roviny.

Pro všechny kladné reálné hodnoty předepsané jako konstantní hodnoty obsahů dotykových trojúhelníků tvoří příslušné křivky osmého stupně jako množiny pólů dotykových trojúhelníků jednoparametrickou soustavu – svazek křivek. V práci jsou ještě popsány některé jevy hyperoskulace společné všem křivkám tohoto svazku.

Dr. A. Maynz v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*[18] uvedl pouze název Zahradníkova článku, nenapsal však žádnou jeho recenzi.

Práce *Zusammenhang zwischen dem Pole und dem Schwerpunkte des Berührungsdreieckes bei der Cardioide* (Souvislost mezi pólem a těžištěm dotykového trojúhelníku u kardioidy) [Z29] je doplňkem článku [Z28]. Jelikož pro každý dotykový trojúhelník kardioidy jeho pól i těžiště jsou jednoznačně určeny, existuje pro přiřazení pól $\rightarrow$ těžiště algebraické vyjádření. Souřadnice (ξ, η) těžiště jsou racionálními funkcemi souřadnic x, y pólu téhož dotykového trojúhelníku. To znamená: Probíhá-li těžiště dotykového trojúhelníku křivkou stupně n, probíhá pól dotykového trojúhelníku křivkou stupně $4n$.

Dr. A. Maynz uveřejnil v časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*[19] jen název Zahradníkova příspěvku, klasickou recenzi však nepřipojil.

Obsah článku *Geometrijske opazke* (Geometrické poznámky) [Z57] se poněkud vymyká převládající Zahradníkově tematice. Téma práce vychází formálně z elementárně-geometrické problematiky, ale formulací dalších problémů práce přechází do oboru speciálních křivek a netriviálních metrických vztahů v útvarech odvozených ze základní situace.

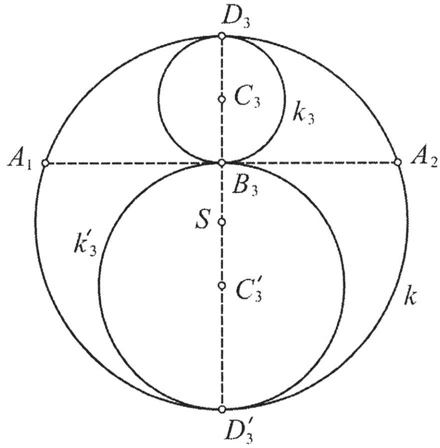
Základní konfigurace elementárních útvarů euklidovské planimetrie je následující:

---

[18] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 10(1878), str. 484.

[19] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 10(1878), str. 484.

Je dána kružnice $k(S, r)$, její tětiva A_1A_2 se středem B_3 a dvě kružnice $k_3(C_3, r_3)$, resp. $k_3'(C_3', r_3')$ dotýkající se zevnitř kružnice k v bodech D_3, resp. D_3' tětivy A_1A_2 v bodě B_3 a ležící v různých polorovinách s hranicí v přímce A_1A_2 (obr. 5).



Obr. 5

Nechť body S, C_3 leží v různých polorovinách s hranicí $\leftrightarrow A_1A_2$. Je zřejmé, že body D_3, C_3, S, B_3 a D_3' jsou kolineární. Označíme-li délky kružnic k, k_3, k_3' po řadě o, o_3, o_3' a obsahy kruhů kružnicemi ohraničených P, P_3, P_3', platí: $r = r_3 + r_3'$, $o = o_3 + o_3'$, $P - P_3 - P_3' = \frac{1}{2}o_3 \cdot o_3'$. V křivočarém trojúhelníku se stranami $D_3A_1D_3'$,$D_3'B_3$, B_3D_3 je $|D_3A_1D_3'| = |D_3'B_3| + |B_3D_3|$ a jeho obsah P je roven součinu $\frac{1}{2}o_3 \cdot \frac{1}{2}o_3'$.

Mění-li tětiva A_1A_2 svou délku i svůj směr, opisuje střed C_3, resp. C_3' křivku (C_3), resp. (C_3'). Zavedením polárních souřadnic a parametru φ pro velikost úhlu osnovy určené přímkou A_1A_2 s polární osou, vyjádřením délky $|A_1A_2| = f(\varphi)$ jako funkce parametru φ, poloměru r_3 pomocí r a $f(\varphi)$ je zjištěno, že křivka (C_3) je konchoidou křivky E vzniklé zkrácením délky průvodičů bodů C_3 o $\frac{r}{2}$. Analogický výsledek platí pro křivku (C_3'); navíc se ukazuje, že (C_3) a (C_3') jsou shodné křivky.

Dále je prozkoumáno několik konkrétních příkladů, v nichž konchoidou křivky (C_3) je úpatnice jisté elipsy.

1) *Konchoidou křivky c vzhledem k pólu O* se nazývá množina všech bodů X, pro něž platí: $OX \cong OM \pm UV$, kde bod M probíhá křivkou c, body O, M, X jsou kolineární a UV je pevná nenulová úsečka.
2) *Úpatnicí křivky c vzhledem k bodu P* se nazývá množina všech pat kolmic z bodu P na všechny tečny křivky c.

Analýzou trojúhelníků $A_1A_2A_3$, kde A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 jsou tětivy kružnice k, a s nimi asociovaných dvojic trojúhelníků $B_1B_2B_3$ (kde B_i je střed úsečky

A_iA_k; $i \neq j \neq k \neq i \wedge i,j,k \in \{1,2,3\}$) a $C_1C_2C_3$ (C_i je střed kružnice k_3 dotýkající se kružnice k a tětivy A_jA_k v jejím středu B_i) a jejich metrických charakteristik je odvozeno mnoho zajímavých – zčásti známých, novým způsobem potvrzených – výsledků o metrických vlastnostech kružnice, jejích prvků a dalších útvarů od ní odvozených.

Na tuto Zahradníkovu chorvatsky napsanou práci nebyla uveřejněna žádná recenze.

Článek *Einige Bemerkungen zu den zirkularen Zissoidalen als Fusspunktkurven* (Několik poznámek k cirkulárním kisoidálám jako úpatnicím) [Z97] lze předmětem vyšetřování zařadit i do následující skupiny prací. Nicméně příbuznost objektů s křivkami předešlých prací je argumentem pro ponechání v této skupině.

V práci je vyšetřována rovinná algebraická křivka, jejíž rovnice v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic má tvar

$$x(x^2+y^2)+lx^2+mxy+ny^2=0; \quad l,m,n \in \mathbb{R}, \quad n \neq 0.$$

Je to křivka
- třetího stupně,
- ireducibilní,
- s dvojnásobným bodem v počátku soustavy souřadnic,
- tudíž racionální,
- cirkulární, tj. incidující s kružnicovými body roviny,
- s asymptotou kolmou na osu x soustavy souřadnic.

Z práce [Z93], jež bude pojednána v následující kapitole, plyne, že je to křivka kisoidální, generovaná přímkou g a kuželosečkou k, jejichž rovnice jsou

$$g: x+n=0,$$
$$k: x^2+y^2-(l-n)x-my=0.$$

Po jisté přípravě technických prostředků analytické geometrie pak K. Zahradník dokazuje, že každou racionální cirkulární kubiku lze konstruovat jako úpatnici jisté paraboly. Jsou-li tyto křivky kisoidální, existuje dvojí způsob jejich generování, a to
- jako křivky kisoidální pomocí tří generátorů – přímky, křivky a bodu křivky
- jako úpatnice jisté paraboly.

Obě konstrukce vedou k identickým výsledkům.

Druh křivky s určujícími prvky pro základní parabolu a s generujícími prvky kisoidální konstrukce zachytává K. Zahradník v přehledné tabulce, v níž je obsažena celá řada známých křivek, jako jsou Dioklova kisoida, Maclaurinova trisektrix, Slusova konchoida, Peanova viziéra, strofoida, ofiurida a další.

V závěru práce je popsána konstrukce tečen a vyjádření paraboly a její úpatnice v polárních a přímkových souřadnicích.

Stručná recenze profesora K. Petra dvěma větami vystihuje podstatu práce: konstatuje možnost konstrukce cirkulární kisoidály jako úpatnice paraboly, konstrukce kisoidál na základě tohoto faktu a možnost konstrukce tečen.[20]

Poslední prací této skupiny je *Zur Theorie der Focale* (K teorii fokály) [Z101]. Obsah se v značné míře překrývá s obsahem článku [Z102]. Prvým výsledkem je důkaz faktu, že kružnice incidující se dvěma body fokály protínají fokálu v další dvojici bodů, tvořících sdružené dvojice kvadratické bodové involuce na fokále. Samodružné body této involuce jsou dotykové body fokály se dvěma dotykovými kružnicemi uvažovaného svazku kružnic. Obálka spojnic dvojic samodružných bodů pro všechny involuce určené dvojicemi libovolných bodů fokály je parabola – tzv. Weyrova-Cayleyova kuželosečka fokály. Čtveřice průsečíků kružnice s fokálou indukují na fokále ještě další vlastnosti involutorní povahy.

Oskulační kružnice fokály v průsečících fokály s kružnicí protínají fokálu v dalších čtyřech bodech, jež opět leží na jedné kružnici. Každým bodem fokály procházejí tři oskulační kružnice. Jejich oskulační body tvoří oskulační trojúhelník. Přiřazení těchto bodů oskulace ke společnému bodu oskulačních kružnic je $(1,3)$*-korespondence, dobově nazývaná kubickou involucí.*

Obálkou přímek obsahujících strany všech oskulačních trojúhelníků fokály je racionální křivka třetí třídy.

Množina těžišť všech oskulačních trojúhelníků fokály je křivka shodná s fokálou, vzniklá otočením fokály o úhel velikosti $180°$ *a následným posunutím.*

Množina středů kružnic opsaných všem oskulačním trojúhelníkům je hyperbola.

Obálka kružnic opsaných všem oskulačním trojúhelníkům je bicirkulární racionální kvartika.

Některé další zajímavé vlastnosti fokály a vztahy útvarů s ní sdružených lze obratně odvodit použitím kružnicové inverze. Několik dalších vlastností fokály přináší zkoumání Pascalových šestiúhelníků vepsaných do fokály.

Mnoho dalších netriviálních výsledků o fokále přináší vyšetřování soustav kuželoseček splňujících rozmanité incidenční, dotykové nebo oskulační podmínky vzhledem k fokále. Například množina těžišť dotykových trojúhelníků všech kuželoseček dotýkajících se ve třech bodech fokály a opsaných trojúhelníkům s vrcholy na fokále je křivka shodná se základní fokálou.

Práci recenzoval profesor E. Salkowski z Berlína.[21] Nejprve uvedl stručnou charakteristiku základního tématu práce, pak ocenil zvláštní výsledek, jenž uvádí slovy: Bodem fokály lze položit tři kružnice, jež mají s fokálou tři splývající průsečíky, tj. jsou oskulačními kružnicemi fokály. Jejich dotykové body

[20] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 40(1909), str. 647.
[21] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 42(1911), str. 615.

tvoří oskulační trojúhelník; množina těžišť všech těchto trojúhelníků je křivka shodná s fokálou.

Práce této skupiny přinášely hlubší poznání některých známých i zobecněných křivek a rozšiřovaly a obohacovaly dobový teoretický obzor v této oblasti.

LITERATURA:

[1] Kolmogorov A. N., Juškevič A. P., *Matematika XIX veka*, Nauka, Moskva, 1981.

[2] Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie*, JČMF, Praha, 1948.