UČEBNICE KARLA ZAHRADNÍKA

V této kapitole se pokusíme stručně zhodnotit Zahradníkovy středoškolské a vysokoškolské učebnice teorie determinantů, analytické geometrie a syntetické geometrie, jež napsal od konce sedmdesátých let 19. století do prvního desetiletí 20. století, a které ovlivnily rozvoj výuky chorvatské a české matematiky.

Učebnice determinantů

Ve čtyřicátých letech 19. století se determinanty staly všeobecně uznávaným matematickým nástrojem. Přibližně v polovině století se začaly ve světě objevovat první ucelené učební texty. První elementární učebnicí teorie determinantů byla nevelká knížka *Elementary Theorems relating to Determinants* sepsaná roku 1851 W. Spottiswoodem (1825–1883).[1] Druhá kniha italského matematika F. Brioschiho (1824–1897) nazvaná *La teorica dei Determinanti, e le sue principali applicazioni*[2] z roku 1854 byla již napsána s velkou znalostí oboru a přinášela bohatý studijní materiál. Třetí, nejrozšířenější učebnicí byla *Theorie und Anwendung der Determinanten mit Beziehung auf die Originalquellen*[3] německého autora Richarda Baltzera (1818–1887), která vyšla v mnoha vydáních a stala se základní univerzální učebnicí teorie determinantů pro německy mluvící země.[4]

Od šedesátých let 19. století byla determinantům věnována velká pozornost, teorie determinantů se stala oblíbenou disciplínou. Autoři článků, učebnic a monografií ukazovali rozmanité možnosti jejího využití (např. při studiu invariantů algebraických forem, v analytické geometrii, v matematické analýze, v teorii čísel). V sedmdesátých a osmdesátých letech jejich práce již většinou nepřinášely nové myšlenky, ale rozpracovávaly teorii do šířky a hloubky, studovaly nejrůznější speciální vlastnosti, vyšetřovaly různé možnosti aplikací. Determinanty postupně pronikaly do všech oblastí matematiky, literatura o nich se rozrůstala do neskutečných rozměrů, a tak není divu, že matematici sepisovali četné učebnice pro různé typy škol.[5]

Jako přirozená reakce na intenzívní studium a rozpracovávání teorie determinantů se na konci sedmdesátých a hlavně na počátku osmdesátých let 19. století objevily celosvětové snahy zavést determinanty do povinné náplně středních škol, na něž reagovali také autoři českých a německých středoškolských učebnic (např. E. Bartl, F. Hromádko, F. Machovec, M. Pokorný, F. J. Studnička,

[1] London, 1851, 8 + 63 stran.

[2] Pavia, 1854, 8 + 116 stran (francouzsky – Paris, 1856, německy – Berlin, 1856).

[3] Leipzig, 1857, 6 + 129 stran.

[4] O vývoji teorie determinantů, nejdůležitějších pracích, učebních textech a monografiích viz [B1], [Be7], [Mu1] a [Mu2].

[5] Podrobný přehled o téměř všech pracích o determinantech v chronologickém uspořádání od roku 1693 až do roku 1920 vydal v letech 1906 až 1930 T. Muir. Jeho bibliografie obsahuje stručné posudky jednotlivých prací a zdůrazňuje jejich vzájemné souvislosti. Viz [Mu1] a [Mu2].

A. Strnad, E. Taftl).[6] Do tohoto trendu plně zapadala i literární činnost Karla Zahradníka.

Zahradníkovy středoškolské učebnice determinantů

Roku 1878 Karel Zahradník vydal v záhřebském nakladatelství Albrecht a Fiedler nevelkou chorvatsky psanou učebnici *O derminantih drugoga i trećega stupnja. Za porabu viših srednjih učilišta* [Z42],[7] která byla určena středoškolským studentům; vznikla úpravou jeho prvních vysokoškolských přednášek, jež konal v zimním semestru roku 1876/1877.[8] Při přípravě textu měl obtížný úkol, neboť sepisoval první chorvatskou učebnici teorie determinantů, a tak vytvářel i chorvatskou terminologii. V té době ještě nevládl dobře chorvatským jazykem, a proto mu při práci pomáhal jeho přítel Petar Marković, záhřebský středoškolský učitel. Karel Zahradník v přemluvě o této spolupráci napsal:

Izpunjujem još ugodnu dužnost, zahvaljujući se gospodinu Petru Markoviću, koji je drage volje preuzeo na se korekturu, kao što mi je i pri tvorenju izraza bio na pomoći. ([Z42], nestránkovaná předmluva)

O rok později vydal Karel Zahradník v Praze rozšířený a nepatrně upravený český překlad své chorvatské učebnice nazvaný *Prvé počátky nauky o determinantech. Pro vyšší střední školy* [Z47].[9] Poznamenejme, že to nebyla první česká učebnice teorie determinantů, neboť roku 1865 Martin Pokorný vydal nepříliš rozsáhlou učebnici *Determinanty a vyšší rovnice* (133 stran) a roku 1870 František Josef Studnička uveřejnil stručnou učebnici *O determinantech* (64 stran).[10]

Česká verze Zahradníkovy knížky se skládala z úvodu a jedenácti krátkých kapitol rozdělených na 32 paragrafů.[11] V úvodu (4 krátké paragrafy) autor uvedl definici permutace, vysvětlil pojmy záměna pořadí, transpozice, znaménko permutace, řádek, sloupec, řádkový a sloupcový index. V první kapitole (jeden paragraf) definoval determinant takto:

Je-li dána soustava n^2 prvků, jež srovnáme u čtverec od n řádků i n sloupců, tu je determinant této soustavy algebraický součet všech možných součinů z n prvků, ve kterých je každý řádek i sloupec zastoupen pouze jedním prvkem, vzatých se znaménkem positivným neb negativným, podle toho, je-li počet jich obratů sudý neb lichý.

Determinant soustavy (1) označujeme obyčejně

---

[6] Hodnocení nejdůležitějších českých učebnic viz [Be1] a [Be7].

[7] Zagreb, 1878, 39 stran.

[8] V 19. století byly determinanty druhého a třetího stupně běžnou součástí výuky algebry a analytické geometrie na gymnáziích a reálkách. V českých středoškolských učebnicích byly uvedeny ještě ve 30. letech 20. století, potom vymizely. Dnes se objevují spolu s maticemi při výuce řešení soustav lineárních rovnic na některých technických lyceích a odborných středních školách. Současní studenti se s nimi většinou setkávají poprvé až na vysoké škole.

[9] Praha, 1879, 48 stran.

[10] O těchto učebnicích viz [Be1], [Be7] a [KB].

[11] Chorvatská verze měla úvod a deset krátkých kapitol rozdělených na 30 paragrafů.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} \tag{1}$$

Jednotlivé součiny zovou se členy determinantu, a poněvadž každý člen sestává z n prvků co činitelů, zoveme determinant soustavy od n^2 prvků obyčejně determinantem n-tého stupně.

Onen člen, v němž přípony prvků souhlasí s místem písmena v abecedě, jmenuje se hlavní člen, též i diagonalný člen, poněvadž prvky [činitele] *tohoto členu leží na diagonale čtverce. Tak jest v determinantu (1) hlavní člen*

$$a_1 b_2 c_3 \dots l_n,$$

a jelikož se počet jeho obratů rovná nule, přísluší mu znaménko positivné.

Označení (1) pro determinant n-tého stupně Δ_n všeobecně se upotřebuje a ve zvláštních případech jsme i přinuceni, ho upotřebiti. ([Z47], str. 5)

V druhé kapitole (jeden paragraf) Karel Zahradník stručně a výstižně zavedl determinant druhého stupně a popsal metodu jeho výpočtu, ve třetí kapitole (3 paragrafy) podobným způsobem zavedl determinant třetího stupně a vyložil Sarrusovo pravidlo. Následující tři kapitoly (1, 2 a 4 paragrafy) věnoval základním vlastnostem determinantů třetího stupně (změna znaménka při záměně řádku, resp. sloupce, subdeterminant, rozvoj determinantu podle jednoho řádku, resp. sloupce, násobení determinantu skalárem, determinant obsahující dva lineárně závislé řádky, resp. sloupce, přičtení lineární kombinace řádků, resp. sloupců k jinému řádku, resp. sloupci). V sedmé kapitole nazvané *Násobení determinantů* (2 paragrafy) vysvětlil násobení matic druhého a třetího řádu. V duchu tehdejšího pojetí nerozlišoval pojem matice a determinantu. V osmé kapitole (2 paragrafy) pojednal o sdruženém determinantu, který zavedl takto:

Odvodíme-li z daného determinantu $\Delta = (a_1 b_2 c_3)$ jiný tím, že stavíme na místo jeho prvků příslušné subdeterminanty, zoveme tím způsobem odvozený determinant sdruženým (reciprokým) determinantu Δ. ([Z47], str. 20)

Pak dokázal dvě jednoduché věty popisující jeho vlastnosti: *sdružený determinant třetího stupně rovná se kvadratu daného determinantu* a *subdeterminant prvku sdruženého determinantu třetího stupně rovná se danému determinantu násobenému stejnolehlým prvkem determinantu daného* ([Z47], str. 21, 22).

Jádrem učebnice je kapitola nazvaná *Upotřebení determinantů na řešení soustavy linearných rovnic* (4 paragrafy), v níž Karel Zahradník nejprve vyložil postup řešení nehomogenní soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, tří se třemi, resp. čtyř se čtyřmi, s využitím determinantů. Známé Cramerovo pravidlo formuloval takto:

… neznámé soustavy linearných rovnic mají determinant soustavy za svého společného jmenovatele, a čitatele neznámé najdeme, nahradíme-li koefficienty její ve jmenovateli příslušnými stálými členy. ([Z47], str. 25)

Poznamenejme na okraj, že Karel Zahradník v každém paragrafu nejprve uvedl názorný příklad, pak vyložil metodu jeho řešení a teprve na závěr zapsal větu, kterou v tisku odlišil italikou.

Závěr kapitoly věnoval rozboru řešitelnosti soustavy n lineárních rovnic s n neznámými. Nezavedl pojem hodnost matice soustavy a hodnost matice rozšířené, ani neuvedl dnes všeobecně známou Frobeniovu větu, tj. nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustav lineárních rovnic. Jeho přístup k řešení soustav lineárních rovnic však naprosto odpovídal přístupu ostatních autorů učebnic teorie determinantů uveřejněných v sedmdesátých a osmdesátých letech 19. století.[12] Uveďme pro zajímavost Zahradníkův poměrně komplikovaný výklad:

Při řešení soustavy rovnic linearných předpokládali jsme, že i determinant soustavy Δ i čitatelé neznámých liší se od nuly. Nyní objasníme úplněji případ tento, a sice na soustavě linearných rovnic (6),[13] *jejíž řešení nám rovnice (11)*[14] *podávají.*

α) $\Delta = 0$, čitatelé neznámých liší se od nuly; tu přísluší neznámým hodnota nekonečně veliká.

β) $\Delta \lesseqgtr 0$, a všechny stálé členy d_k rovnají se nule; tu jsou čitatelé neznámých rovné nule a tím je hodnota neznámých $x = y = z = 0$.

γ) $\Delta = 0$, i čitatelé neznámých rovnají se nule.

V tomto případě jeví se nám hodnoty neznámých ve tvaru

$$\frac{0}{0}$$

t. j. nejsou určeny. To nastane,

I. když jedna rovnice je výsledek rovnic ostatních,

II. rovnají-li se všechny stálé členy d_k i Δ nule.

Píšeme-li rovnice soustavy (6)

$$R_k = a_k x + b_k y + c_k z - d_k = 0, \qquad k = 1, 2, 3$$

máme v případě I.

$$R_3 \equiv \lambda R_1 + \mu R_2 = 0,$$

tím je

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda a_1 + \mu a_2, \quad b_3 = \lambda b_1 + \mu b_2, \\ c_3 &= \lambda c_1 + \mu c_2, \quad d_3 = \lambda d_1 + \mu d_2. \end{aligned} \tag{16}$$

---

[12] Podrobný rozbor historie vývoje řešení soustav lineárních rovnic přináší [B1].

[13] Jedná se o nehomogenní soustavu tří rovnic se třemi neznámými.

[14] Jedná se o následující soustavu tří lineárních rovnic: $x \cdot \sum_{k=1}^{3} a_k A_k = \sum_{k=1}^{3} d_k A_k$, $y \cdot \sum_{k=1}^{3} b_k B_k = \sum_{k=1}^{3} d_k B_k$, $z \cdot \sum_{k=1}^{3} c_k C_k = \sum_{k=1}^{3} d_k C_k$.

Poněvadž máme nyní bytně pouze dvě rovnice a tři neznámé, nejsou neznámé dosti určeny, což i z hodnot (16) vysvítá, za něž i čitatelé u (10)[15] *i společný jmenovatel rovnají se nule.*

V případě II., kde je $d_k = 0$, $\Delta = 0$, máme soustavu homogenných (stejnorodých) rovnic, totiž

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Rozdělíme-li tyto rovnice některou z neznámých, na př. neznámou z, a stavíme-li za $\frac{x}{z} = x'$, $\frac{y}{z} = y'$ (předpokládajíce, že se hodnoty x, y, z liší se od nuly, kterýž případ jsme v β) uvedli), můžeme soustavu rovnic (17) psáti:

$$\begin{aligned} a_1x' + b_1y' + c_1 &= 0 \\ a_2x' + b_2y' + c_2 &= 0 \\ a_3x' + b_3y' + c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Vidíme tudíž, že v případě II. máme, pokládáme-li poměry za neznámé, více rovnic než je neznámých; tím jsou neznámé obecně přeurčeny a společné řešení pouze tenkráte se vyskytuje, vyhovují-li hodnoty plynoucí ze dvou rovnic i rovnici třetí. … Můžeme tedy říci: Resultant eliminace, totiž determinant soustavy musí se rovnati nule, má-li míti soustava homogenných rovnic (17) společné řešení lišící se od nuly. ([Z47], str. 28–30)

V desáté kapitole nazvané *Eliminace* (jeden paragraf) Karel Zahradník nejprve popsal jednoduchou eliminaci, tj. vyloučení jedné neznámé ze soustavy dvou, resp. tří lineárních rovnic se dvěma proměnnými. Pak podrobně vysvětlil eliminaci jedné neznámé ze soustavy obsahující alespoň jednu rovnici vyššího stupně. Vybral čtyři typy úloh, s nimiž se středoškoláci mohli setkat při řešení příkladů z analytické geometrie (průsečík kuželoseček, kuželosečky a přímky, kubiky a přímky).

Poslední kapitolu nazvanou *Upotřebení determinantů v geometrii* tvoří sedm delších samostatných paragrafů, v nichž jsou naznačeny některé zajímavé aplikace determinantů v analytické geometrii. Karel Zahradník v ní ukázal výpočet poloměrů kružnic trojúhelníku opsaných a vepsaných, naznačil odvození a důkaz věty o součtu úhlů v trojúhelníku, sinové a kosinové věty, Heronova vzorce, objasnil analytické vyjádření rovnoběžných přímek v rovině, nalezení obecné rovnice přímky určené dvěma body, odvodil podmínku kolinearity tří bodů, podmínku, kdy se tři přímky v rovině protínají v jednom bodě, vysvětlil

[15] Jedná se o zápis Cramerova pravidla, tj. zápis řešení nehomogenní soustavy tří lineárních rovnic se třemi neznámými. K. Zahradník napsal: $x = \frac{d_k|^{a_k}}{\Delta}$, $y = \frac{d_k|^{b_k}}{\Delta}$, $z = \frac{d_k|^{c_k}}{\Delta}$.

výpočet obsahu trojúhelníku zadaného pomocí souřadnic jeho vrcholů a odvodil podmínku, kdy čtyři body leží na jedné kružnici.[16]

Poznamenejme, že Karel Zahradník na rozdíl od svých současníků pečlivě citoval zdroje, v nichž čerpal inspiraci při sestavování svých vysokoškolských přednášek a jejich následné úpravě do knižní podoby. Při práci se opíral především o německé vydání slavné francouzské učebnice P. Mansiona nazvané *Eléments de la théorie des déterminants* (1. vydání, Mons, Bruxelles, 43 stran)[17] a o články F. J. Studničky *Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech*[18] a *O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí jeho stran.*[19]

Zahradníkova učebnice determinantů byla poměrně kladně přijata českou matematickou komunitou, jak dokazuje i recenze otištěná v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.[20] Ocitujme z ní tři zajímavá místa:

Jest to vlastně české vydání spisu pro horvatské studující dříve vydaného, jímž velepilný spisovatel osvědčil opětně svou vřelou příchylnost k rodné vlasti své. Jelikož svým povoláním jest vázán, aby chudou literaturu horvátskou opatřil především potřebnými spisy školními, uchopil se cíle tohoto vděčného díla a podal tu na 48 stránkách velmi dovedně sestavené základy nauky o determinantech, pokud se klásti dají na neobsáhlou půdu školy střední.

… podal tu pan spisovatel na malém prostoru velký výběr z elementární nauky o determinantech, takže si více ani přáti není třeba pro pokročilejší školy střední, na nichž si všímají této mohútné paky moderní algebry, nedbajíce lichého nářku na přetížení žáků, kterýž jest oprávněn jenom u nedospělých hochů, pro něž jest studium každé vůbec přetížením.

Ku konci nesmíme mlčením pominouti zvláštnost, která dosti zhusta se v jmenovaném spisku vyskytuje, užívání totiž horvatských obratů v češtině; jako zajisté s počátku do horvatštiny sem tam se připletl bohemism, tak nyní naopak tlačí se duch jazyka horvatského ku předu u Čecha déle již v Záhřebě meškajícího. Krátkou revisí rukopisu by se bylo odpomohlo této formalní vadě.[21]

Srovnáme-li chorvatské a české vydání učebnice, zjistíme, že se prakticky neliší. V české verzi byl původní stručný paragraf věnovaný eliminaci zařazen jako samostatná kapitola, nepatrně rozšířen a doplněn jedním názorným příkladem. Poslední kapitola naznačující některé aplikace determinantů v analytické geometrii byla rozšířena o tři paragrafy (Heronův vzorec, výpočet obsahu

[16] Mnoho základních poznatků a zajímavých aplikací (Heronův vzorec, podmínka, kdy se tři přímky v rovině protínají v jednom bodě, výpočet obsahu trojúhelníku ze znalosti souřadnic jeho vrcholů atd.) se na většině současných středních škol nedokazuje, mnohde se ani neučí. Hlavním důvodem je především neustále se snižující povinný počet vyučovacích hodin matematiky.

[17] Německý překlad *Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Übungsaufgaben* vytvořil S. Günther (Teubner, Leipzig, 1878, VI + 49 stran). Poznamenejme, že francouzský originál se dočkal šesti vydání (poslední z roku 1900 mělo již IV + 90 stran) a německý překlad tří vydání (poslední z roku 1899 mělo 103 stran).

[18] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 2(1873), str. 69–82, 144–146, 192–195, 236–239.

[19] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 1(1872), str. 253–255.

[20] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 8(1879), str. 297–298.

[21] Tamtéž, str. 297–298.

trojúhelníku a stanovení podmínky, kdy čtyři body leží na jedné kružnici). S posledním odstavcem recenze nelze souhlasit, protože Zahradníkův český text rozhodně není plný chorvatských obratů. Jen na několika málo místech (např. str. 5, 11, 14, 17, 28, 29) lze najít mírně neobvyklé vazby nebo nestandardní použití předložek, která však nebrání dobrému porozumění textu.[22]

Karel Zahradník svoji učebnici stručně popsal v dopise F. J. Studničkovi:

Tyto dny zaslal jsem Vám vysoce ctěný příteli spísek o determinantech pro střední školy. Jest to rozšířené vydání hrvatského spisku, jejž jsem dříve byl vydal. Snad bude dost srozumlivé, třebaže úvod pro důvtipnější je náměřen, a né pro slabší a výklad, jak bývá obyčej. Třeba že Vy v algebře o determinantech mluvíte v dosti značném rozsahu, doufám, že přece nebude na škodu, že jsem jej na žádost více svých známých i česky vydal, v což arci rád jsem se uvázal.[23]

Litografie chorvatských univerzitních přednášek o determinantech

Roku 1898 vyšla v Záhřebu Zahradníkova litografie nazvaná *O determinantima. Predavanja u zimskom semestru godine 1897/8* [Z104][24] obsahující zápis jeho univerzitních přednášek pro první ročník.[25]

Jedná se o rukopisný záznam doplněný spoustou vpisků, oprav a úprav, který byl zapsán více typy dobře čitelných rukopisů. Dnes již není možno spolehlivě zjistit, zda předlohu pro litografický tisk zapsali během přednášek studenti nebo asistenti a zda ji Karel Zahradník upravoval, doplňoval a potom schválil definitivní verzi k tisku, ač je to velmi pravděpodobné. Poznamenejme, že po stranách byl text opatřen pečlivými odkazy na doplňující a rozšiřující literaturu a historickými poznámkami, jež dokazují Zahradníkovu znalost klasické německé, francouzské a latinské literatury, českých vysokoškolských i středoškolských učebnic a výborný přehled v nejnovější časopisecké literatuře. Jeho citace jsou vzorové, neboť obsahují nejenom jméno autora a název práce, ale i jméno vydavatele, rok a místo vydání, resp. název časopisu, číslo ročníku a příslušnou stránku, na niž je odkazováno.

Karel Zahradník rozdělil učební text na pět základních částí. V první části (str. 1–12) definoval permutace a vyložil jejich základní vlastnosti. V druhé části (str. 12–66) zavedl determinant stupně n a jeho subdeterminant, odvodil základní vlastnosti determinantů, vysvětlil pravidla pro jejich výpočet, objasnil násobení matic a speciálně výpočet druhé mocniny, dokázal Laplaceovu větu

---

[22] Například na straně 11 můžeme číst: *Takto jsme došli do velmi prospěšného pravidla za vyčíslení determinantu ...* Na straně 14 nalezneme: *Skládají-li se prvky jednoho řádku neb sloupce z n sčítanců, můžeme takový determinant rozložiti ve součet n determinantů.* A na straně 28 přečteme: *Vlastnosti dokázané (čl. 10.–17.) za determinant stupně třetího, můžeme tím bezprostředně přenésti na determinanty stupně čtvrtého a vyššího, any plynou z výměru determinantu.*

[23] Zahradníkův dopis ze dne 14. února 1879 je uložen ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

[24] Zagreb, 1898, 112 stran.

[25] Jeden její exemplář se dochoval v Národní knihovně v Záhřebu, dva exempláře jsou v knihovně Matematického ústavu Akademie věd České republiky v Praze.

o rozvoji determinantu podle jednoho řádku, resp. sloupce, a její obecnou verzi, tj. rozvoj podle m řádků, resp. sloupců. V závěru druhé části se věnoval determinantům sdruženým a jejich vlastnostem. V třetí části (str. 66–84) vyšetřoval vlastnosti speciálních determinantů (např. symetrické, antisymetrické, „kosimetrické“ ($a_{ij} = -a_{ji}, a_{ii} \neq 0$ pro každé $i, j = 1, \dots, n$), ortosymetrické, cirkulanty, alternanty). V krátké čtvrté části (str. 84–90) popsal funkcionální determinanty (jakobián a hessián), vysvětlil jejich vlastnosti, metody výpočtu a především jejich aplikace v matematické analýze. Vyvrcholením učebního textu byla pátá kapitola věnovaná řešení a řešitelnosti soustav lineárních rovnic (str. 90–107). Karel Zahradník postupoval v souladu s tehdejšími metodami výkladu. Nejprve vyložil řešení nehomogenní soustavy n rovnic s n neznámými a vyslovil Cramerovo pravidlo. Pak diskutoval podmínku řešitelnosti nehomogenní soustavy $n + 1$ rovnic s n neznámými a doplnil ji příkladem geometrické aplikace (existence průsečíku tří přímek v jednom bodě). Následně přešel k rozboru podmínek řešitelnosti n rovnic s $n + r$ neznámými a odtud již k existenci triviálního, resp. netriviálního řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. V závěrečné pasáži naznačil základy eliminace. Protože neuvedl pojem hodnost matice a nevyslovil Frobeniovu větu, je z dnešního hlediska jeho výklad řešení soustav lineárních rovnic značně komplikovaný a málo přehledný. Poznamenejme, že obdobný přístup k této problematice můžeme najít v řadě učebnic ještě v první třetině 20. století.[26] Litografii ukončil krátkým přehledem základní literatury.[27]

Zahradníkova chorvatská litografie obsahuje klasický kurz teorie determinantů a jejich aplikací v algebře, analytické geometrii a matematické analýze a pokrývá obvyklé spektrum látky vyučované ve druhé polovině 19. století na univerzitách i technikách. Z dnešního hlediska v oblasti speciálních determinantů a jejich vlastností značně přesahuje standardní náplň přednášek lineární algebry prvního ročníku univerzitního studia matematiky. Karel Zahradník nečlení výklad na definice, věty a důkazy, tak jak jsme dnes zvyklí, proto je orientace v textu pro dnešního čtenáře obtížnější. Na druhé straně však užívá symboliku, jež je nám celkem blízká a dobře srozumitelná. Velkou pozornost věnuje výkladu základních početních metod, pečlivému odvození jednotlivých vět a důkazům základních vlastností determinantů. Na druhé straně však uvádí málo ilustračních příkladů.

---

[26] Zájemce o historii vývoje řešení soustav lineárních rovnic odkazujeme na podrobný výklad uvedený v [B1].

[27] Karel Zahradník doporučoval tyto monografie a učebnice: S. Günther: *Lehrbuch der Determinantentheorie*, 1. vydání, Erlangen, 1875; R. Baltzer: *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 4. vydání, Teubner, Leipzig, 1875; P. Mansion: *Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Übungsaufgaben* (německý překlad), 1. vydání, Teubner, Leipzig, 1878; G. Salmon, W. Fiedler: *Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen*, 1. vydání, Teubner, Leipzig, 1863. Dále doporučoval C. G. J. Jacobiho latinsky psané práce otištěné ve třicátých letech 19. století v časopise Journal für die reine und angewandte Mathematik a jejich německé překlady uveřejněné P. Stäckelem pod názvy *Ueber die Bildung und die Eingeschaften der Determinanten* a *Ueber die Functionaldeterminanten* (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 77, 78, W. Engelmann, Leipzig, 1896).

Zahradníkovy vysokoškolské učebnice determinantů pro techniky

Roku 1904 vydal *Spolek posluchačů inženýrství na c. k. české vysoké škole technické v Brně* litografickou verzi Zahradníkových přednášek nazvanou *O determinantech. Přednášky z vyšší mathematiky I. běh, část úvodní* [Z107], která měla usnadnit studium základů lineární algebry.[28] Karel Zahradník ji o rok později doplnil stručnou předmluvou a v nezměněné podobě vydal jako nevelkou učebnici nazvanou *O determinantech* [Z92].[29] V předmluvě napsal:

Podávám v hlavních rysech nauku o determinantech, jak je přednáším jako úvod do vyšší mathematiky na vysoké škole technické v Brně. ([Z92], nestránkovaná předmluva)

V předmluvě doporučil jako doplňující literaturu nedávno vydanou Studničkovu monografii *Úvod do nauky o determinantech*[30] a německý překlad slavné Pascalovy monografie *I determinanti. Teoria ed applicazioni con tutte le più recenti ricerche.*[31]

Padesátistránkovou učebnici rozdělil na čtyři části o 36 paragrafech. V první části (22 paragrafů, str. 1–27) obvyklým způsobem nejprve zavedl permutace a jejich vlastnosti a s jejich pomocí pak definoval determinant stupně n:

Determinant n^2 prvků, srovnaných do n řádků a n sloupců je algebraický součet permutací těchto prvků.

Permutacím sudým přísluší znaménko $+$, permutacím lichým $-$. Dle Cauchy-ho ohradíme čtverec prvků svislými přímkami a píšeme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ & & \dots & \\ & & \dots & \\ & & \dots & \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} \quad \textit{nebo} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ & & \dots & \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Každá permutace se svým znaménkem jmenuje se členem determinantu, a pravíme, že je determinant n-tého stupně, má-li čtverec n^2 prvků a tudíž n sloupců a n řádků. ([Z92], str. 3)[32]

V dalších paragrafech první části uvedl základní vlastnosti determinantů a subdeterminantů a popsal metody jejich výpočtu. Vyložil rozvoj determinantu podle jednoho řádku, resp. sloupce, objasnil součin determinantů a výpočet druhé mocniny matice a vyslovil zobecněnou Laplaceovu větu, tj. rozvoj determinantu podle m řádků, resp. sloupců. V závěru této části se věnoval vybraným speciálním determinantům (např. sdružený a reciproký) a nově zavedl pojem matice a definoval násobení matic. V druhé části nazvané *Řešení*

[28] Brno, 1904, 62 stran. Jeden exemplář je v knihovně Matematického ústavu Akademie věd České republiky v Praze.

[29] J. Barvič, Brno, 1905, 50 stran.

[30] JČM, Praha, 1899, 231 stran.

[31] Ulrico Hoepli, Milano, 1897, 330 stran. Německý překlad – H. Lietzmann: *Die Determinanten*, Teubner, Leipzig, 1900, 266 stran.

[32] Poznamenejme, že K. Zahradník užívá v definici slovo permutace ve více významech.

rovnic lineárných (5 paragrafů, str. 27–35) nejprve předvedl řešení nehomogenní soustavy n lineárních rovnic s n neznámými. Cramerovo pravidlo vyslovil takto:

Dána budiž soustava n rovnic lineárných:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = c_2 \\
\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = c_n .
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Determinant z n^2 koeficientů neznámých, vzatých ve své poloze v soustavě, tedy determinant

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 & & \dots & \\
 & & \dots & \\
 & & \dots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{2}
$$

jmenujeme determinantem dané soustavy. Znásobíme-li prvou rovnici A_{1r}, druhou A_{2r} atd., n-tou A_{nr}, kdež je A_{hr} subdeterminant elementu a_{hr} ve Δ, a sečteme-li, obdržíme:

$$
x_1 \sum_{h=1}^{n} a_{h1}A_{hr} + x_2 \sum_{h=1}^{n} a_{h2}A_{hr} + \dots + x_r \sum_{h=1}^{n} a_{hr}A_{hr} + \dots
$$

$$
+ x_n \sum_{h=1}^{n} a_{hn}A_{hr} = \sum_{h=1}^{n} c_h A_{hr}.
$$

Jest pak

$$
\sum_{h=1}^{n} a_{hs}A_{hr} = 0, \qquad \sum_{h=1}^{n} a_{hr}A_{hr} = \Delta,
$$

tudíž obdržíme:

$$
x_r \sum_{h=1}^{n} a_{hr}A_{hr} = \sum_{h=1}^{n} c_h A_{hr}
\tag{3}
$$

Z rovnice 3. obdržíme hodnotu x_r, a píšeme-li $r = 1, 2, \dots, n$, obdržíme hodnoty neznámých, to jest úplné řešení soustavy rovnic 1.

Všechny neznámé mají společného jmenovatele Δ a čítatele obdržíme z jmenovatele, nahradíme-li v determinantu soustavy koeficienty neznámé, jež určiti chceme, příslušnými členy druhé strany, t. j.:

$$
x_r = \frac{{}^{a_{hr}|c_n}\Delta}{\Delta}
\tag{3'}
$$

Řešení toto vyžaduje $\Delta \neq 0$. ([Z92], str. 27–28)

V dalších paragrafech Karel Zahradník postupně probral řešení nehomogenní soustavy n rovnic s n neznámými s nulovým determinantem matice soustavy, $(n+1)$ rovnic s n neznámými, řešení homogenní soustavy n rovnic s $(n+1)$ neznámými a n rovnic s n neznámými. Vzhledem k tomu, že nezavedl pojem hodnost matice soustavy a tudíž nemohl vyslovit nutnou a postačující podmínku řešitelnosti soustav lineárních rovnic (v dnešní podobě), rozhodl se ve čtvrté části učebnice nazvané *Zobecnění předcházejících řešení* (3 paragrafy, str. 36–40) podrobně probrat tři obecnější případy – řešení nehomogenní soustavy $(m+n)$ lineárních rovnic s n neznámými, n rovnic s n neznámými s nulovým determinantem, n rovnic s $(n+m)$ neznámými. Řešení obdobných homogenních soustav lineárních rovnic ponechal čtenáři. Ve čtvrté, závěrečné části nazvané *Eliminace* (5 paragrafů, str. 41–50) pojednal o Eulerovu, Sylvestrovu a Bézoutovu-Cauchyovu postupu nalezení společného kořene dvou polynomů metodou resultantů.

Zahradníkův výklad je přehledný a srozumitelný. Porovnáme-li tuto jeho učebnici s chorvatskou litografií, zjistíme, že zvolil výrazné zestručnění a zjednodušení výkladu. Vypustil konkrétní číselné příklady, speciální determinanty, aplikace determinantů v analytické geometrii a matematické analýze. Vynechal veškeré historické komentáře, citace a odkazy na doplňující a rozšiřující literaturu.

Výstižné hodnocení Zahradníkovy učebnice podal roku 1905 Karel Petr v recenzi uveřejněné v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky*:

Pan spisovatel, jak již z daného přehledu patrno, zachovává přesný logický postup, zůstávaje při tom snadno srozumitelný a totéž lze říci i o odstavcích obsahujících užití nauky o determinantech. Tyto odstavce jednají o řešení rovnic linearných, které vyloženo s obšírností takovou, jak toho tento důležitý pro mathematiku problém zasluhuje, a pak o eliminaci.

Za příklady ku výkladům obecným často voleny byly věci stýkající se s jinými oddíly elementární mathematiky, čímž ovšem výklad stal se ještě zajímavějším. … Jest nutno uznati že kniha tato bude vhodným a vítaným (i vzhledem ku malému objemu) úvodem do nauky o determinantech všem, kteří se s touto pomůckou a zároveň odvětvím mathematiky chtějí obeznámiti. ([Pe], str. 259)

Zahradníkova učebnice obsahovala jen úvodní partie teorie determinantů, které dnes nalezneme téměř v každé knize o lineární algebře. Ve srovnání s ostatními domácími i zahraničními učebnicemi nevynikala ani původností, ani způsobem zpracování, ani aktuálností či uvedením zajímavých a netradičních aplikací. Ani T. Muir se o ní příliš kladně nevyjádřil:

A useful elementary textbook for schools, but showing less improvement than might fairly be expected of a work published 35 years after Studnička's similar booklet with the same title. ([Mu2], str. 107)[33]

[33] Podrobnější hodnocení zahraničních a českých učebnic základů teorie determinantů mohou zájemci najít v [B1], [Be1], [Be7] a [KB].

Shrnutí

Zahradníkovy středoškolské i vysokoškolské učebnice determinantů patřily mezi standardní učebnice, které pokrývaly pouze základní partie této teorie. Nebyly však příliš inspirativní ani svým pojetím, ani obsahem. Přesto nalezly uplatnění u našich inženýrů, kterým byly převážně určeny. Nahrazeny byly na počátku třicátých let dvacátého století zdařilou monografií Bohumila Bydžovského nesoucí název *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*.[34]

V současné době se determinanty na našich středních školách téměř nevyučují. Ve světě se dokonce objevují tendence odstranit je i z vysokoškolské matematiky.[35]

Učebnice analytické geometrie pro střední školy

Roku 1883 Karel Zahradník vydal učebnici analytické geometrie nazvanou *Analytická geometrie v rovině. Pro školu* [Z56],[36] kterou sepsal pro české středoškolské studenty, ač již skoro jedno desetiletí působil v Chorvatsku. To také asi způsobilo, že se více odchýlil od českých zvyklostí, a také od naší učební osnovy. V úvodu učebnice napsal:

Přihlížel jsem všude hlavně k tomu, by důkazy byly po možnosti snadny, průzračny a přesny, jakož i ku geometrickému výkladu analytických výkonů. Poznámky četné namířeny jsou pilnějším žákům, kteří tu najdou nejen dosti látky ku přemýšlení, ale, což účelem jest, popudu ku vlastnímu studiu. … Příkladů v knize uvádím dosti, mimo to najde pilný žák hojnosť příkladů, jež jsem ku konci knihy připojil, při čemž hlavně ku číselným příkladům jsem přihlížel. ([Z56], nestránkovaná předmluva)

Vzhledem k tomu, že již řadu let přednášel jen chorvatsky, psal především chorvatsky nebo německy a žil daleko od Prahy, požádal o jazykové a tiskové opravy svého přítele Antonína Votrubu, pražského středoškolského učitele. O jeho práci napsal:

Aby po možnosti i tisk byl zcela správný, požádal jsem za příčinou své vzdálenosti od místa tisku přítele svého pana prof. Ant. Votrubu, by mi laskavě obstaral korrekturu. Za nevšední ochotu a péči, kterou korrektuře věnoval, buďtež mu zde vyjádřeny mé díky. ([Z56], nestránkovaná předmluva)

Poznamenejme, že jeho přítel korektury neprovedl příliš svědomitě.[37] Bez zajímavosti jistě není ani to, že Karel Zahradník svoji učebnici věnoval svému

---

[34] JČMF, Praha, 1930, 210 stran; 2. vydání vyšlo pod názvem *Úvod do teorie determinantů a matic a jich užití*, JČMF, Praha, 1947, 240 stran.

[35] Viz např. S. Axler: *Down With Determinants!*, American Mathematical Monthly 105(1995), str. 139–154; S. Axler: *Linear Algebra Done Right*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[36] K. Bellmann, Praha, 1883, 144 stran.

[37] O korekturách se K. Zahradník zmínil dne 8. listopadu 1883 v dopise F. J. Studničkovi: *Dovoluji si Vám poslati vázaný výtisk své anal. geometrie, v němž též tiskové opravy jsou opraveny.* Dopis je uložen ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

středoškolskému učiteli a pozdějšímu příteli Josefu Durdíkovi (1837–1902).[38] Původně ji chtěl připsat ještě F. J. Studničkovi, jak vyplývá z jeho dopisů sepsaných na jaře roku 1883:

Milé mi jest, že Vám mohu sděliti, že „geometrie analytické“ pro střední školy je již třetí arch vytištěn, a že snad do konce školního roku celá vyjde tiskem. Rytiny jsou dovedně provedené a vložené do textu. Při té příležitosti osmělují se Vás prositi, abyste dovolil, bych mohl spisek tento věnovati Vám a p. Dr. Durdíkovi co svým bývalým milým učitelům.

Snad se bude Vám líbiti způsob, jakým jsem postupoval, a mnohé uznáte za mnohého tám prospěšné, zvláště pro přírodoslovce. Co se mi zdálo, že by snad se vymíkalo z rámce zákonitého, to jsem drobnou sasbou dal vysázet a zůstaveno pilnosti jednotlivého žáka. Příkladu dost a celkem pouze 71/2 archu bude ta kníha, tedy značně menší než Jandečky, a nebude tak tak hustě tištěná. Uvidím jak bude přijatá. V příznivém případě budu moci mysleti potom na vydání „Přednášek o analytické geometrii“.[39]

Skoro stopadesátistránková učebnice se skládala ze čtyř oddílů rozdělených na 110 kratších paragrafů. V prvním oddílu nazvaném *Geometrie bodu* (18 paragrafů, str. 1–20) Karel Zahradník zavedl pojem souřadnice bodu v rovině, vyložil principy rovnoběžné, kartézské a polární soustavy souřadnic a objasnil základní typy transformací souřadnicových systémů (posunutí, otočení, posunutí a otočení současně, přechod od jedné soustavy souřadnic ke druhé). Pak vysvětlil základní úlohy – stanovení vzdálenosti dvou bodů, nalezení středu úsečky a těžiště trojúhelníku, výpočet obsahu trojúhelníku a čtyřúhelníku zadaného souřadnicemi vrcholů. Zavedl také dělení spojnice dvou bodů v daném poměru včetně harmonického dělení. Na závěr se pokusil o jednoduchou klasifikaci algebraických křivek podle jejich stupně. Srovnáme-li tuto část Zahradníkovy učebnice se současnými učebnicemi analytické geometrie, zjistíme, že se v ní navíc objevuje polární soustava, transformace soustavy souřadnic otočením souřadnicových os a kombinace otočení a posunutí, harmonické dělení úsečky, výpočet obsahu trojúhelníku a čtyřúhelníku zadaného souřadnicemi vrcholů a klasifikace křivek.

V druhém oddílu nazvaném *Geometrie přímky* (17 paragrafů, str. 21–43) Karel Zahradník vyložil základy analytické geometrie přímky v rovině. Zavedl analytické vyjádření přímky tak, že nejprve vyšel od analytického vyjádření přímky jdoucí počátkem kartézské soustavy souřadnic, pak zavedl pojmy směrnice přímky, úsečkový tvar rovnice (tj. úsekový tvar), normální tvar rovnice (tj. obecná rovnice přímky). Následně řešil klasické úlohy – vzájemná poloha dvou přímek, totožnost dvou přímek, nalezení rovnice přímky procházející

[38] Josef Durdík, český filozof, psycholog, estetik, překladatel, literární kritik a poslanec českého zemského sněmu, po studiu matematiky, přírodních věd a filozofie zastával v letech 1860 až 1861 místo asistenta na vyšší české reálce v Praze, v letech 1862 až 1866 byl suplujícím profesorem matematiky a fyziky na gymnáziu v Litomyšli, od roku 1867 učil matematiku, fyziku a filozofii na Akademickém gymnáziu v Praze. V roce 1869 se na pražské univerzitě habilitoval pro dějiny novověké filozofie a průpravu k estetice, roku 1874 zde byl jmenován mimořádným a roku 1880 řádným profesorem filozofie.

[39] Zahradníkův dopis ze dne 19. května 1883 je uložen ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

dvěma body, rovnice přímky jdoucí daným bodem a rovnoběžné se zadanou přímkou, jdoucí daným bodem a kolmé k dané přímce, výpočet vzdálenosti bodu od přímky v rovině, stanovení úhlu dvou přímek, nalezení podmínky, kdy se tři přímky protínají v jednom bodě. Poznamenejme, že v současných středoškolských učebnicích analytické geometrie zřídka kdy najdeme rovnici přímky vyjádřenou v polární soustavě souřadnic. Také užití metody neurčitých koeficientů při hledání přímky splňující předem dané podmínky již v současné výuce analytické geometrie nenajdeme.

Třetí oddíl učebnice *Geometrie kuželoseček* (75 paragrafů, str. 43–122) rozdělil Karel Zahradník na sedm částí, které věnoval kružnici, elipse, hyperbole, parabole, obecné klasifikaci kuželoseček a jejich vzájemným vztahům.[40] První čtyři části měly stejnou strukturu. Autor nejprve zavedl příslušné kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností, pak odvodil jejich obecné i „vrcholové" rovnice v kartézské soustavě souřadnic, vyšetřil vzájemnou polohu bodu a kuželosečky, resp. přímky a kuželosečky, objasnil pojmy sečna, tečna, tangenta, subtangenta, normála, subnormála, řídící přímka, polára bodu, resp. mocnost bodu ke kružnici, chordála dvou, resp. chordální bod tří kružnic, úhel tečny a průvodiče, sdružené průměry, asymptota. V páté části nazvané *Rovnice kuželoseček v souřadnicích polarných* objasnil rovnice všech kuželoseček v polární soustavě souřadnic, v šesté části nazvané *O vzájemném vztahu kuželoseček* definoval kuželosečky jako řezy kuželové plochy a uvedl stručnou historickou poznámku o vzniku názvů kuželoseček a příspěvku řeckých matematiků ke studiu jejich vlastností. V poslední části nazvané *Dodatek ku geometrii kuželoseček* autor nepřesně vyslovil tři základní věty[41] a naznačil jejich neúplné důkazy. Pokusil se také o stručnou a přehlednou klasifikaci křivek druhého stupně.

V posledním, čtvrtém oddílu učebnice Karel Zahradník uvedl 169 úloh i s výsledky nebo stručnými návody řešení.[42] Nejčastěji se jednalo o klasické úlohy z analytické geometrie, mnohé však výrazně rozšiřovaly teorii objasněnou v prvních třech částech učebnice. Svojí obtížností značně přesahují náročnost úloh uvedených v současných sbírkách maturitních úloh.[43] Mimo to Karel Zahradník již ve výkladové části uvedl základní procvičující úlohy.

---

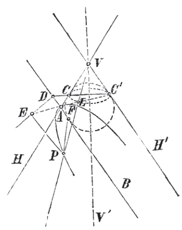
[40] Poznamenejme, že Karel Zahradník užíval termín kruh místo dnešního správného kružnice.

[41] *Ellipsa, hyperbola a parabola jsou křivky stupně druhého, t. j. analyticky vyjádřujeme je rovnicemi stupně druhého v souřadnicích proměnlivého bodu.*
Každá kuželosečka je buď ellipsa buď hyperbola buď parabola.
Každá křivka druhého stupně je kuželosečka. (Viz str. 116 a 118.)

[42] Sbírka úloh obsahovala tyto tematické celky: bod (20 úloh), přímka (49 úloh), kruh (22 úloh), elipsa (28 úloh), hyperbola (17 úloh), parabola (17 úloh) a transformace a klasifikace kuželoseček (16 úloh).

[43] Například: *43. Přímka mění svou polohu, při čemž však zůstává součet jejich reciprokých úseků na osách stálým. Dokaž, že ta přímka probíhá stále pevným bodem. 46. V trojúhelníku leží průsek jeho výšek, těžných přímek a kolmic sestrojených ve středech stran na téže přímce.* (str. 129); *22. Průsekem dvou kruhů veď sečnu omezenou oběma kruhy a hledej místo středů takových sečen.* (str. 132); *17. Součin vzdáleností tečny bodu ellipsy od jejího středu a délky normaly téhož bodu jest stálý, rovnající se čtverci malé poloosy.* (str. 134); *15. Sestroj ellipsu, dáno-li jedno ohnisko, dvě tečny s body dotyku.* (str. 135); *23. Najdi*

Poznamenejme, že K. Zahradník v učebnici neuvedl žádné odkazy ani na použitou, ani na rozšiřující literaturu. Text doplnil 72 obrázky, z nichž některé byly zbytečně malé a poslední tři uvedené v dodatku nebyly správné z hlediska zobrazování. Jsou na nich znázorněny řezy kuželovou plochou a Queteletova-Dandelinova věta. Kuželosečky jsou nepěkně a nesprávně vykresleny (dotykové body nejsou správně a přesně), názornost a srozumitelnost obrázků je malá (v jednom obrázku je zachyceno více různých pohledů – nárys kuželové plochy a kuželosečka ve sklopené poloze její roviny). Na ukázku úplně postačí otištění posledního obrázku (je uveden ve stejné velikosti jako v [Z56]).



Obtížnější partie, které K. Zahradník považoval za rozšiřující učivo a nadstandard vzhledem k povinným osnovám, nechal vytisknout menším písmem a označil je jako poznámky nebo doplňky. Za chvályhodnou snahu lze označit jeho pokus, byť ne zcela úspěšný, veškeré věty uvedené v učebnici stručně, jasně, správně a úplně dokázat.

Karel Zahradník učebnici sepisoval delší dobu a měl s ní asi velké plány, jak napsal F. J. Studničkovi:

Opětovně se obracím s prosbou, byste mi dovoliti ráčil, věnovati Vám můj spis, od něhož Vám posýlám prvé dva archy, jež jsem právě obdržel, a na než jsem čekal. Bude toho 7 archů a $4^{\text{tý}}$ *je v tisku, tedy do prázdnin spis sotva vyjde. Nechť je proti spisu Weyr i Blažek, nebudu si z toho nic dělati, vždyť je pro školy psan, a to již širší publikum si úsudek samo udělá. Bude též na jazyk bulharský přeložen a hortvatský ho později vydám sám, dojde tudíž dosti rozšíření a tím více bych si přál, bych mohl Vám věnovati spis, jejž mimo to jsem velkou pilí ano řekneme pietou sepisoval. Vždyť po dlouhou dobu jsem se obíral tou věci, piloval, měnil, než jsem se ustálil. Determinantů arci neužívám, vyjma co zkráceninu rozvedeného výrazu na málo místech a ve poznámkách a to by celkem na prstech spočital, nechtěl jsem hlavou proti zdi. Poznámky jsou naměřene pilnosti nadanějších.*[44]

Bulharská verze nebyla sepsána, jak vyplývá ze Zahradníkova dopisu z roku 1883 adresovanému Antonínu Václavu Šourkovi, který je uložen v Ústředním archivu v Sofii. Chorvatská verze nebyla pravděpodobně dokončena.

---

rovnici hyperboly, dán-li je úhel α *asymptot a délková výstřednosť* e. (str. 138); *5. Vzdálenosť ohniska paraboly od libovolné její tečny je střední geom. úměrna vzdáleností ohniska od bodu dotyku té tečny a od vrcholu.* (str. 138); *5. Najdi místo bodů, jež mají od svých polar vzhledem k parabole tuž vzdálenosť, jakou má ohnisko.* (str. 140).

[44] Zahradníkův nedatovaný dopis z jara roku 1883. O práci na chorvatském překladu se zmiňuje ještě v dopise ze dne 27. února 1885. Dopisy jsou uloženy ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

Spor o kvalitu učebnice analytické geometrie

Zahradníkova učebnice vyvolala v české matematické komunitě nezvyklou pozornost, o niž jistě autor nestál. Dostalo se jí dokonce tří podrobnějších posudků a jedné stručné recenze. První kritické hodnocení napsal A. Kostěnec;[45] vyvolalo velmi ostrou a neadekvátní Zahradníkovu reakci,[46] která způsobila následnou polemiku na stránkách *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky*,[47] jež se přenesla i do časopisu *Athenaeum*[48] a *Časopisu musea království Českého*.[49]

Recenzenti učebnici vytýkali četné matematické a didaktické chyby, terminologické i jazykové prohřešky a tisková pochybení. Pokusíme se ukázat, že některé jejich výtky byly oprávněné, jiné sporné či dokonce nespravedlivé.

První Kostěncova recenze

Antonín Kostěnec, první recenzent Zahradníkovy učebnice,[50] nejprve uvedl její předchůdce a pak poměrně podrobně popsal její obsah. V úvodu recenze napsal:

Mimo Jandečkovu Geometrii pro vyšší gymnasia (díl 4.)[51] *a Šandovo Měřictví pro vyšší třídy středních škol (díl 2.)*[52] *jest uvedená kniha třetí původní*

---

[45] Viz [Ko1]. Recenze vyšla na podzim roku 1883. Každý ročník *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* začínal v září a končil v srpnu, tj. „sledoval“ školní rok.

[46] Viz [Z113].

[47] Viz [Ko2], *Poznámka redakce*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 13(1884), str. 160, *Poznámka redakce*, tamtéž, str. 212. Výše uvedené reakce byly otištěny na konci roku 1883, resp. na začátku roku 1884.

[48] Viz [W]. Recenze byla otištěna v březnu roku 1884, ale připravena byla již na konci roku 1883. Viz dále.

[49] Viz [St]. Studničkova recenze byla otištěna na konci roku 1883.

[50] Antonín Kostěnec byl středoškolským učitelem matematiky v Praze. Jeho jméno však není uvedeno v žádné české encyklopedii či naučném slovníku. Nenapsal žádnou učebnici, sbírku či rozsáhlejší učební text. Je autorem čtyř nepříliš rozsáhlých článků uveřejněných v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* – *O vypočítání obsahu komolého jehlance* (13(1884), str. 24–28), *Pozvánka k pořádání a řešení rovnic* (15(1886), str. 16–23), *Jak lze snáze a jistěji děliti nežli způsobem obyčejným?* (15(1886), str. 74–80) a *Jak lze řešiti některé číselné rovnice pouhým odmocňováním* (17(1888), str. 159–170). V *Časopisu* vyšel také jeho překlad Hoüelova článku nazvaný *Poznámky o vyučování trigonometrii* (5(1876), str. 103–112, originál – J. Hoüel: *Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie*, Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane 13(1875), str. 72–79).

[51] Václav Jandečka (1820–1898) byl středoškolským profesorem matematiky a deskriptivní geometrie a aktivním členem *Jednoty českých mathematiků*. Sepsal a vlastním nákladem vydal čtyřdílnou učebnici *Geometrie pro vyšší třídy gymnasia* (Díl I. Planimetrie, Praha, 1864, 127 stran; Díl II. Stereometrie, Praha, 1865, 74 stran; Díl III. Trigonometrie, Praha, 64 stran; Díl IV. Analytická geometrie v rovině, Praha, 1867, 142 stran), která se dočkala šesti vydání.

[52] František Šanda (1831–1893) byl středoškolským profesorem matematiky a deskriptivní geometrie, ředitelem několika středních škol a okresním školním inspektorem. Sepsal dvoudílnou učebnici *Měřictví pro vyšší třídy středních škol k vlastnímu studiu* (Díl I. Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, Praha, 1869, 305 stran; Díl II. Analytické měřictví v rovině, Sférická trigonometrie, Praha, 1870, 107 stran), která byla vydána dvakrát.

spis v mathematické literatuře naší o předmětě tomto jednající a pro střední školy určený, třeba že při něm určení toto nikoliv z titulu, leč teprvé z obsahu poznati jest. Ačkoli zejmena spis Jandečkův jest v každém ohledu výborný, vítáme přece přítomnou knihu s radostí jakožto dílo velmi dobré, které berouc se místy zvláštní cestou, přispěje u nás platně k všestrannějšímu poznání předmětu, o němž pojednává. ([Ko1], str. 44)

Je zajímavé, že Zahradníkovu učebnici nejprve hodnotil pozitivně. Například o jejím třetím oddílu napsal:

Třetí, nejrozsáhlejší ovšem, oddíl jedná o kuželosečkách, při nichž řešeny všecky sem hledící úlohy způsobem jasným a důkladným. Chváliti tu jest zejmena, že vedle obvyklého odvození rovnice tečny z rovnice sečny ukázáno též při všech kuželosečkách, jak by se rovnice ta z obou podmínek, že totiž přímka tečná prochází daný bodem a dotýká se příslušné kuželosečky, odvésti dala, neboť tím dochází vyhledaná podmínka, při které se přímka kuželosečky dotýká, teprve náležitého upotřebení. Též konstrukcí jak kuželoseček samých tak zejmena jich tečen a normal dbáno měrou náležitou a přihlíženo bedlivě ku geometrickému významu výrazův analytických.

Ke konci oddílu tohoto odvozena polárná rovnice kuželoseček, promluveno o vzájemném jich vztahu na základě vrcholových rovnic, dále vyložen původ jmen parabola, ellipsa a hyperbola, načež proveden důkaz, že kuželosečky a křivky stupně 2. jedno jsou. ([Ko1], str. 45)

Po úvodní charakteristice přešel A. Kostěnec k výtkám, které rozdělil na dvě skupiny: „věcné poklesky“ a „jazykové poklesky“. Učebnici vytkl sedm věcných – matematických, terminologických a tiskových – chyb a devět jazykových pochybení.

První výtka je dosti problematická, neboť není jasně a srozumitelně formulována, není zřejmé, co recenzent kritizuje a jakou by si představoval nápravu. A. Kostěnec napsal:

… K stanovení polohy bodu v rovině souřadnicemi rovnoběžnými není potřebí veškeré soustavy souřadnic, jak se hned na prvních dvou řádcích praví, nýbrž předkem toliko obou os souřadnic, neboť osnovou čili soustavou souřadnic rovnoběžných nazývají se obě osy i se souřadnicemi celého pásma bodů v rovině. Tohoto výměru osnovy rovnoběžných souřadnic se v knize naší sice nedočítáme, můžeme se ho ale domysliti z vyobrazení 3. na str. 3. Mimo to nezdá se nám dosti paedagogickým, mluviti nejprve o soustavě souřadnic a pak teprve pojem tento objasňovati. ([Ko1], str. 45)

Podívejme se, jak vypadá kritizované místo v Zahradníkově učebnici:

Bychom jednoznačně polohu bodu v rovině určili, upotřebujeme tak zvanou soustavu souřadnic čili koordinat. Sestrojíme totiž v rovině dvě přímky XX' *a* YY'*, jež považujíce za pevné, jmenujeme je osy souřadnic. Bychom rozeznávali tyto dvě přímky, jmenujeme přímku* XX' *osa úseček (axis abscissarum) či osa* X *a přímku* YY' *zoveme osa pořaden (axis ordinatarum) či osa* Y*, průsek jejich* O *jmenujeme počátek soustavy souřadnic.*

Daným bodem P v rovině soustavy souřadnic či krátko v rovině souřadnic (obr. 1.) veďme PN rovnoběžně s osou XX' a PM rovnoběžně s osou YY'. Délky těchto rovnoběžek jsou polohou bodu P v rovině souřadnic zúplna určeny i naopak, známe-li délky PN a PM, mohli bychom polohu bodu P určiti. Stanovíme-li totiž $PN = a$, $PM = b$, třeba, bychom jen odměřili na ose X počínajíce od počátku souřadnic délku $OM = a$; podobně na ose Y délku $ON = b$, načež bychom vedli rovnoběžky s osami souřadnic MP, NP. Průsek těchto rovnoběžek dává nám bod P. Rovnoběžky MP a NP jmenujeme souřadnice – koordinaty – bodu P. Souřadnici rovnoběžnou s osou X, totiž NP, kteráž se patrně rovná délce OM, označujeme obyčejně písmenem x a zveme ji úsečkou (abscissou), a podobně označujeme souřadnici MP, rovnoběžnou s osou Y, písmenem y a jmenujeme ji pořadnou (ordinatou) bodu P.

2. Seznali jsme, že jsou souřadnice bodu P polohou jeho zúplna určeny; máli však i naopak poloha bodu P býti jednoznačně určena jeho souřadnicemi, musíme nejen velikosť souřadnic, nébrž i jejich směr uvážiti a jej znaménkem příhodně vytknouti.

Můžeme totiž délku $NP = a$ na ose X po obou stranách od počátku souřadnic odměřiti, podobně bychom i délku $MP = b$ po obou stranách osy Y od počátku souřadnic odměřiti mohli. Vedeme-li nyní (obr. 2.) koncovými body M, M_1, úseků na ose X rovnoběžky s osou Y a podobně koncovými body N, N_1, úseků na ose Y rovnoběžky s osou X, obdržíme takto čtyři body P, P_1, P_2, P_3 a každý z těchto bodů má úsečku a i pořadnu b.

Můžeme však, tak jako to činíme v trigonometrii, rozdílný směr úseček OM, OM_1 znaménkem vyjádřiti. Vezmeme směr úseček OM za kladný a směr OM_1 jakožto záporný směr osy X; podobně vezmeme směr pořadny ON za kladný a směr ON_1 za záporný směr osy Y. …

Značí-li tudíž a, b dvě jakéholi reálné veličiny, jsou

$$x = a, \quad y = b$$

dvě rovnice, jimiž každý bod v rovině vyjádřiti můžeme. ([Z56], str. 1–3)

Zahradníkova formulace není definicí soustavy souřadnic v našem slova smyslu, ale názorným a dosti zdlouhavým popisem, s nímž se již v současných středoškolských učebnicích nesetkáváme. V 19. století však byl příznačný pro elementární výklady. Podrobíme-li Zahradníkův popis kritice, zjistíme, že v duchu *Eukleidových Základů* hovoří o délce rovnoběžky (tj. úsečky), což recenzentovi zřejmě nevadilo. Vytýká mu však, že zavedl soustavu souřadnic „bez měřítka“, tj. bez zavedení jednotkové míry neboli bez použití jednotkového vektoru.

Druhá Kostěncova výtka je ještě méně pochopitelná. A. Kostěnec napsal:

Dále nepřihlíženo všude při psaní jmen přímek a úhlů, dvěma, vztažně třemi písmeny označených, ke směru onde pohybu tvořícího bodu, zde otáčení ramene úhlu. Tak na př. hned na str. 1. ř. 3. měly by osy souřadnic psáti se $X'X$, $Y'Y$ a nikoliv XX', YY', třeba že teprv o něco dále činí se rozdíl mezi směrem positivným a negativným os souřadnic, protože se přirozeným způsobem směr od levé k pravé z pravidla za positivní béře, kterýž jest zároveň směrem přímek, *při nichž se k protivě směru nehledí, právě tak jako čísla prostá jsou vlastně čísla positivná.* ([Ko1], str. 45–46)

Z dnešního hlediska je tato výtka zcela lichá, nemá naproto žádné opodstatnění a recenzent se opíral pouze o tradiční zápis založený na „obvyklé konvenci našeho čtení a psaní“.

Třetí výtka je poměrně rozsáhlá; stručně řečeno je její podstatou nedůsledné uvádění „směru“. A. Kostěnec nejprve kritizuje Zahradníkovu definici směrnice přímky, která zní takto:

Tangentu úhlu, jejž činí přímka s osou X, tudíž veličinu A v souřadnicích pravoúhelných, jmenujeme směrnice přímky; dle toho jest

$$y = Ax,$$

rovnice přímky, jdoucí počátkem souřadnic, jejíž směrnice je A. ([Z56], str. 22)

A. Kostěnec ji považuje za neúplnou a tudíž nesprávnou ze dvou důvodů. Za prvé jí vytýká, že v ní není výslovně stanoveno, jak se úhel měří, za druhé že chybí přívlastek goniometrická tangenta. První výtka je správná, ale jak sám recenzent připouští, měření úhlu je naznačeno v obrázku, který definici doprovází. Poznamenejme navíc, že „měření“ je v učebnici vyloženo již na čtvrté straně při zavedení polárních souřadnic bodu, kde je uvedeno: *Vezmeme, jak to v trigonometrii činíme, směr otáčky z prava nahoru na levo, t. j. od kladné osy X ku kladné ose Y za kladný, i směr ve smyslu opáčném považovati budeme za záporný.* Druhá výtka je z dnešního hlediska téměř neopodstatněná, protože k chybnému pochopení by jistě nedošlo. Z hlediska analytické geometrie vyučované na středních školách v 19. století je však správná, neboť při výkladu kuželoseček se běžně zaváděl a procvičoval pojem tangenta (neboli délka tečny), tj. délka úsečky, která je dána bodem dotyku tečny a příslušné kuželosečky a průsečíkem tečny s osou x.

Dále jsou kritizovány způsoby zápisu úhlu, při nichž recenzent požaduje úplné respektování směru otáčení. Tudíž úhly POX a XOP nepovažuje za totožné. Z tohoto důvodu připojuje následující kritiku:
… Též věta o ellipse (str. 75.), že „tečna uzavírá s provodiči bodu doteku rovné úhly“, není úplně správna, jestliže ke znamení vztahu obou úhlů těchto přihlédneme, neboť pak shledáme, že pouze co do číselné hodnoty sobě rovny jsou … ([Ko1], str. 46)

Zahradníkova formulace zněla *… t.j. tečna uzavírá s provodiči bodu dotyku rovné úhly, nebo jinými slovy: „Tečna ellipsy v bodě P půlí úhel, jejž uzavírá jeden provodič tohoto bodu s prodlouženým provodičem druhým.“* ([Z56], str. 75)

První část Zahradníkovy věty by byla úplně korektní, kdyby použil místo spojení rovné úhly spojení úhly stejné velikosti. Druhá část věty však chybné pochopení téměř vylučuje.

Čtvrtá výtka je vlastně návrh zjednodušení a drobného metodického vylepšení Zahradníkova odvození úsekového tvaru rovnice přímky v kosoúhlé soustavě souřadnic. A. Kostěnec napsal:

Úsekovou rovnici v kosoúhlé soustavě souřadnic bylo možno o něco kratčeji odvoditi, nežli jak se stalo na str. 27., kdyby se byla úměra $\frac{MP}{OQ-OM} = \frac{OQ_1}{OQ}$ *napsala hned ve tvaru* $\frac{MP}{OQ_1} = \frac{OQ-OM}{OQ}$ *čili* $\frac{MP}{OQ_1} = 1 - \frac{OM}{OQ}$ *atd.* ([Ko1], str. 46)

Kostěncův návrh je správný. Poznamenejme však, že Zahradníkovo odvození bylo uvedeno malým písmem jako rozšiřující poznámka, která byla určena pro nejlepší studenty a zájemce o hlubší studium analytické geometrie, kterým přechod k převráceným hodnotám poměrů jistě nečinil žádné problémy.

Pátá výtka se vztahuje k terminologii. A. Kostěnec napsal: *Nedopatřením stalo se zajisté, že z kuželoseček definována pouze ellipsa jakožto geometrické místo určitých bodů, kdežto při ostatních jest přívlastek „geometrické" vynechán.* ([Ko1], str. 46)

A. Kostěnec má sice z formálního didaktického hlediska pravdu, ale vynechání slova „geometrické" a užití kratšího označení „místo bodů daných vlastností" není pro čtenáře ani matoucí, ani zavádějící. Kostěncova výtka je zbytečná a nepodstatná.

Šestá výtka zní: *Další nedopatření shledáváme na str. 87. shora, kdež se soudí na polohu bodu hledě k hyperbole z toho, je-li rozdíl průvodičů menší, větší nebo roven nulle, kdež patrně místo nulle má státi* $2a$*.* ([Ko1], str. 46)

A. Kostěnec poukazuje jen na evidentní tiskovou chybu.

Sedmá výtka se vztahuje k nevhodné Zahradníkově formulaci věty popisující typy průsečíků přímky a hyperboly. K. Zahradník napsal: *Oba průseky jsou reálné, splývají nebo jsou imaginarné dle toho, je-li*

$$n^2 \gtreqless a^2A^2 - B^2. \qquad \text{([Z56], str. 89)}$$

Tato výtka je oprávněná, neboť začínající středoškolský student nemusí formulaci správně porozumět a může si ji vyložit také tak, že splývající průsečíky nejsou reálné.

Uveďme jazykové poklesky, které Antonín Kostěnec Zahradníkovu textu vytknul, přesně tak, jak je formuloval ve své recenzi:

Co se tkne stránky jazykové, dovolujeme si vytknouti toto: Ježto se slov pořadnice a bod dotyčný v math. literatuře naší obecně užívá, neměl p. spisovatel místo nich voliti slova pořadna a bod doteku. Užil-li však již slova pořadna, pak měl také důsledně psáti souřadny bodu a osy souřaden místo souřadnice bodu a osy souřadnic.

Časoslovo upotřebiti pojí se s genitivem a nikoliv s akusativem, jak na př. na str. 1., 27. a 31. se stalo. Dále mělo se důsledně psáti pravoúhlá a kosoúhlá soustava a nikoliv brzy tak a brzy zase pravoúhelná a kosoúhelná soustava (viz na př. str. 4. shora a str. 15.). Místo úhel měří 90^o *neb* $180^o + \varphi$ *(str. 3., 4., 5.) mělo by státi: rovná se neb jest velký atd. Na str. 3. čteme: „Vytkněme* *sobě v každé soustavě po jedné přímce co osy souřadnic“, kdež místo posledních tří slov má státi: jakožto ose souřadnic. Ve větě (str. 10): „Nechť se najdou souřadnice těžiště trojúhelníku, jenž jest dán souřadnicemi jeho vrcholů“ má místo jeho státi patrně svých. Slova navedený užito ve významu neobvyklém na konci čl. 13. a na začátku čl. 27. Na str. 20., čl. 18 čteme: „Rovnice jest ntého stupně, vchází-li x neb y samo o sobě neb v součinu nejvýše v ntém stupni.“ Přiznáváme se, že významu časoslova vchází-li v hořejším spojení nerozumíme.*

K nemalému podivení svému dočítáme se na str. 21. o přímce, že teče stále v témž směru. Na str. 87. užito slova vně nesprávně ve smyslu uvnitř, kdežto slovo to znamená totéž co zevnitř. ([Ko1], str. 47)

Jak je z uvedeného citátu patrné, první Kostěncovy námitky souvisely se správnou terminologií, od níž se K. Zahradník asi pod vlivem chorvatštiny nepatrně odchýlil. Poznamenejme, že některé terminologické problémy jsou našimi současnými didaktiky stále diskutovány (měří, rovná se, má velikost), jiné již nejsou aktuální (souřadnice a pořadnice). Většina Kostěncem naznačených „pochybení“ je však nepodstatná.

Další Kostěncovy výtky se vztahují ke gramatické správnosti, „jazykové čistotě“ a jednotě textu; zde má recenzent pravdu. Je však trochu neobvyklé vypisovat drobná jazyková pochybení a nedopatření do čtyřstránkové recenze. Domnívám se, že by bylo daleko přínosnější, kdyby je byl pečlivě a přehledně sepsal a zaslal autorovi v osobním dopise pro případné korektury před dalším vydáním. Výtka vztahující se k užití slova „navedený“ má dosti subjektivní ráz. K. Zahradník napsal: *Navedené tři případy řeší ve spojení s čl. 6. každou proměnu – transformaci – uvedených soustav souřadnic. … Navedené tři tvary pro rovnici přímky jsou stupně prvého …* ([Z56], str. 16, 29). Dnes bychom spíše psali naznačené (uvedené, vypsané) tři případy (tvary), nicméně Zahradníkův tvar nebyl zcela neobvyklým v 19. století.

V neuspořádaném Kostěncově výčtu poklesků zanikají dva, v nichž má plnou pravdu. Zahradníkovy formulace – *Seznali jsme, že se stupeň rovnice proměnou soustavy souřadnic nemění. Dle toho dělíme křivky dle stupně rovnice. Rovnice je n-tého stupně, vchází-li x neb y samo o sobě neb v součinu nejvýše v n-tém stupni. Stupeň součinu $x^h y^k$ rovná se součtu $(h + k)$ exponentů jednotlivých činitelů.* (str. 20), *Z vlastnosti přímky, že teče stále v témž směru (obr. 19.) plyne …* (str. 21) či *přímka ve všech svých bodech má týž směr* (str. 28) – jsou velmi kuriózní, lze je snad použít při „názorném výkladu“ v hodině matematiky, ale do kvalitní učebnice 19. století již nepatří.

Na závěr recenze A. Kostěnec napsal:

Výtky, které jsme knize této v nejlepším úmyslu právě učinili, jsou převážnou většinou rázu tak podřízeného, že jimi cena její valně se nestenčuje. Celkový úsudek náš jest, že spis tento jest látkou bohatý, jasným a zároveň v mnohém vzhledě důkladným spracováním jejím zdařilý, který plnou měrou zasluhuje bedlivého povšimnutí všech, kdož u nás mathematikou se zabývají. ([Ko1], str. 47)

Ačkoli některé Kostěncovy výtky byly zcela formální, hodně subjektivní a možná i trochu nadnesené, napsal recenzi slušným a neagresivním tónem, a proto nelze mít námitek proti jejímu uveřejnění v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.*

Zahradníkova reakce

Karel Zahradník se však cítil dotčen výše uvedenou recenzí, jak vyplývá z jeho hustě napsaného osmistránkového dopisu, který adresoval F. J. Studničkovi dne 13. listopadu 1883. V jeho úvodu napsal:

Současně s listem Vašim obdržel jsem I. číslo našeho časopisů a musím říci, že mne kritika tam mého spisu z více příčin velmi nemile se dotkla, ano chvíli litoval jsem tolik práce věnované tomu spisu, když redakce, již jsem též byl poslal exemplář, tedy obsah může znáti, vezme recenzi od člověka, jenž ani neví co je „soustava souřadnic“. Předce mi psal p. Strnad, že recenzi důkladnou redakci podal a i p. Jarolímek, že recenzí opravdu mu obstará. Tomu se musím diviti, že právě sahlo se ku recenzi p. Kostěnce. Což se redakci nejlépe líbila? Co k tomu musí říci čtenář nemající knihy po ruce, když mi recenzent vytýká, že nevím co to je „soustava souřadnic“ a mi to v recenzi vykládá.

Na dalších stránkách dopisu podrobně rozebral Kostěncovu recenzi, vyvracel jeho výtky citáty z německých monografií a učebnic. Svůj rozbor zakončil takto:

Tak bych byl veškeré jeho opravy probral a co z toho vychází?

Je taková recenze důstojná časopisů? A není to hanebné, když se da při recenzi knihy univ. professora přednost hanebné recenzi plné lží před recenzemi jiných, jež naši literutuře vykonali platných služeb?

Je to velice bolestné, tím více že vím, že nenajde se v zahraniční literatuře anal. geom. pro školy tak důkladně promyšleně psana! Apak ještě říká recenzent že z titulu se neví je-li psana pro školu, a což to tam nestojí?

Arci je původně spracovano a né dle šablony a nalézá se tu poznámek, jež mnohému prof. středních škol budou vítané co vysvětlivky.

V závěru dopisu prosil F. J. Studničku o pomoc a zastání, když v dopise napsal:

... Prosím Vás vysoce vážený příteli, byste se přesvědčil o tom co píšu a dle toho dati ráčil opravenu recenze do našeho časopisu, neb by ji dle všeho Pánek ani nevzal, kdybych mu ji zaslal, a Vaše recenze jinak v Čechách padne na váhu než pouhá obrana. Dále bych prosil, byste malou recenzi ráčil dáti do Athenaeum, by takto se veřejné mínění proti té recenzi obrátilo.

Věru takto těžko by mi bylo, bych se pouštěl do vědecké anal. geometrie, když tak nedůstojné se na mne kritika páše.[53]

Karel Zahradník však nevyčkal na Studničkovu reakci a sepsal dosti razantní odpověď nazvanou *Několik slov k recenzi p. A. Kostěnce*, kterou odeslal redakci

[53] Zahradníkův dopis ze dne 13. listopadu 1883 je uložen ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky. Poznamenejme, že její obsah se příliš nelišil od obsahu jeho dopisu ze dne 13. listopadu 1883.

Během čtrnácti dnů se Karel Zahradník trochu uklidnil, celou věc si lépe promyslel a chtěl svou recenzi stáhnout, jak vyplývá z jeho dopisu F. J. Studničkovi ze dne 27. listopadu 1883. V něm napsal:

... Tyto dny psal mi Dr. Durdík, bych moje zasláno na recenzi p. Kostěnce vzal zpět a se do polemiky nepouštěl. Snad jste mu pravil, že na recenzi odpovím a snad i sám jste se pronesl podobně? Jať zcela věcně rozbírám kritiku p. K., a nerad a nechci osobu napadnout, a snad někomu ublížit. Zajisté mi bylo křivděno možná neznáním věci a toho se i domyslím, an je p. K. jinak velmi hodný pan, jak jej z Prahy znám. Ale neznaje, nemá se v recenzování pouštět. Kdyby však našemu časopisu z toho měla vzejíti škoda, že pravím: Pán K. mýlně. Doufám, že to není práce poslední, a mohl bych v případě zničení recenze při dalších článcích v poznámkách bez jmenování osob své náhledy obhájit. Z tohoto psaní již usoudíte, že na věc klídněji dívám, a třeba mne to mrzelo, neberu více na takovou váhu, jako dříve.[54]

Situace se vyvinula zcela jinak, než si Karel Zahradník přál. Redakce *Časopisu* totiž téměř okamžitě zveřejnila jeho „antirecenzi“, ale zřetelně se distancovala od jeho snahy recenzovat recenzi, když jako úvod k jeho „Několika slovům“ napsala: *Vyhovujíce žádosti prof. Dr. K. Zahradníka, aby redakce tohoto časopisu uveřejnila beze změny poznámky ke kritice napsané prof. Ant. Kostěncem o jeho „Analytické geometrii v rovině“, podáváme je tuto doslovně.* Navíc ještě před otištěním Zahradníkova textu seznámila s jeho obsahem Antonína Kostěnce. Podívejme se nyní podrobněji na Zahradníkovu reakci.

Již její úvod ukazuje jeho pohoršení:

V předcházejícím čísle nachází se recenze moje analytické geometrie z péra p. Ant. Kostěnce, ve kteréž uvádí pan recenzent některé, jak soudí poklesky. Abych nenechal pana recenzenta v bludném domění, dovolím si zde zmíněnou recenzi posouditi. ([Z113], str. 156)

Ve své odpovědi na Kostěncovu recenzi se Karel Zahradník vyjadřoval k jednotlivým výtkám, odvolával se na zahraniční učebnice a monografie analytické geometrie takových autorit, jako byli O. Schlömilch, L. O. Hesse, F. Joachimsthal, A. Clebsch, F. Lindemann, G. Salmon, W. Fiedler aj., ale i na práce Em. Weyra a Ed. Weyra. Na druhé straně zcela odmítal učebnice V. Jandečky. Nepřipouštěl, kromě tiskové chyby, žádné své pochybení. Jeho reakce byly zbytečně osobní, hysterické a místy až urážlivé. Například na první Kostěncovu výtku reagoval takto:

Hned na počátku nezdá se býti p. recenzentovi správné, jak pojem „soustava souřadnic“ pojímám a vykládá mi z knihy p. Jandečky (pag. 29) jak bych tomu rozuměti měl; ale toho mylného výkladu byl by si sobě k prospěchu zajisté byl ušetřil, kdyby byl dříve nahlédl ve Fort a Schlömilch: Analytische Geometrie.

[54] Zahradníkův dopis ze dne 27. listopadu 1883 je uložen tamtéž.

I. Theil. 2. Aufl. pg. 7, aneb Dr. O. Hesse: Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der geraden Linie etc. pg. 3. Joachimsthal: Elemente anal. Geometrie 2. Aufl. pg. 4. §. 6. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie pg. 3. To snad již p. recenzent nahlídne dosah navedených jmen? ([Z113], str. 156)

Podobným způsobem vyvracel i ostatní Kostěncovy výtky. V závěru své reakce zcela netakticky napsal:

Tak bych byl veškeré námitky probral. Že jsem tu recenzoval recenzi, je příčinou, že kniha dosuď je v málo rukou, jinak bych důvěřoval důvtipu soudnějšího čtenáře, jenž zajisté dovede tu knihu ocenit.

Dle všeho redakce opomenula tu recenzi přečísti, jinak by ji bez poznámky byla neotiskla. Vždyť již na počátku recenze se praví, že se nevidí z titulu, je-li pro střední školy určená a předce tam výslovně vytknuto, že je to školní kniha a že je lepší svých předchůdců, to pevně doufám. ([Z113], str. 157)

Druhá Kostěncova recenze

Zahradníkova nepromyšlená akce odstartovala lavinu. Na jeho „útočnou obranu“ reagoval Antonín Kostěnec, jehož *Odpověď na „Několik slov k recenzi p. A. Kostěnce“* redakce *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* otiskla hned za Zahradníkovou „antirecenzí“ (viz [Ko2]). Antonín Kostěnec na plných třech stránkách znovu probral každou ze svých sedmi výtek a každou ze Zahradníkových reakcí. Ocitujme úryvek z úvodního odstavce:

Že kniha školní není totéž co kniha pro střední školy, nepotřebuji, tuším, ani dokazovati a proto tvrdím opětovně, že se nevidí z titulu knihy páně spisovatelovy, že je pro střední školy určena, nýbrž že se toho dovídáme teprve z obsahu jejího. Přes to však jsme ji jakožto knihu pro školy střední určenou posuzovali a některé výtky jí učinili jen proto, že spis pro školy střední určený má po našem soudě vynikati přesností a důsledností při výkladě pojmův a ustanovení základních, kdežto spisy pro vysoké školy, jakých se p. spisovatel dokládá, mohou podrobných výkladů pojmů takových pominouti, za známé je pokládajíce. Proto také máme za to, že není úplně na místě, cituje-li p. spisovatel ve příčině této stále jen autory píšící pro čtenáře v anal. geometrii již pokročilé, nýbrž že měl též přihlédnouti k dobrým knihám toho druhu pro školy střední. ([Ko2], str. 157–158)

Po několika citátech z učebnic, které Karel Zahradník uvedl ve své odpovědi, Antonín Kostěnec svoji první výtku vztahující se k zavedení pojmu soustava souřadnic zakončil takto:

Kdyby však i poslední tři díla úplně souhlasila co do výměru neb vůbec jen co do pojmutí soustavy rovnoběžných souřadnic s dílem prvním, přece bychom pevně stáli při definici z předu uvedené, poněvadž si nemůžeme představiti soustavu souřadnic bez souřadnic, podobně jako soustavu číselnou bez čísel, vojsko bez vojáků atd. Jestliže však někteří mathematikové za soustavu souřadnic rovnoběžných přece jen obě osy mají, jest to pouhý, časem zakořeněný zvyk, jehož vznik lze si vysvětliti tím, že k určování polohy bodů v rovině postačí toliko obě osy či že oběma osama jsou dány též souřadnice veškerých bodů její, a který přec jest a zůstane v přímém odporu s elementy logiky.

V podobných otázkách sporných třeba, tuším, bráti v potaz též vlastní úsudek a nikoliv jen autority slepě následovati, což jest najmě ve vědách mathematických nejméně na místě, ač jest to jinak pohodlné nechati jiného mysliti za sebe. V určitých otázkách jest v pravdě jen ten autoritou, kdo mínění své lépe odůvodniti s to jest. ([Ko2], str. 158)

Podobně ostře obhajoval svých zbývajících šest výtek. Původně téměř nepodstatný odborný spor postupně přerůstal v otevřený konflikt. Recenzi ukončil slovy:

Že by kniha páně spisovatelova byla lepší svých předchůdců, připouštíme, nikoli ale, že by byla lepší všech předchůdců svých.

Konec konců jest tedy, že stojím posud na všem tom, co jsem vytkl v posudku svém knize pana dra. Zahradníka, a setrvám tak ve svém „bludném domění", poněvadž se nepodařilo, mě z něho vyvésti. ([Ko2], str. 160)

Reakce Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky

Také redakce *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* se cítila Zahradníkovou reakcí poškozena. Uveřejnila proto poznámku, v níž se plně ztotožnila s Kostěncovými recenzemi:

Naproti domněnce p. dra. K. Zahradníka, že redakce nečetla kritiky p. prof. Ant. Kostěnce jeho Analytické geometrie v rovině, v prvním čísle časopisu tohoto uveřejněné, že jsme ji přečetli a shledavše ji úplně správnou a slušným tonem napsanou, bez poznámky vytisknouti dali. O tak zvaném školním vydání knihy p. dra. K. Zahradníka promluvíme později.[55]

Poznamenejme na okraj, že redakce svůj slib nedodržela, neboť v dalším čísle časopisu uvedla pouze krátkou zprávu tohoto znění: *V posledním čísle tohoto časopisu slíbili jsme podati kritiku o opraveném vydání Analytické geometrie univ. professora dr. K. Zahradníka. Ježto však kritika o tomto spise v 6. čísle Athenaea ročníku I. uveřejněna bude, omluví zajisté laskavý čtenář, že ji redakce zde nepodá.*[56]

Reakce Athenaea

Je pravděpodobné, že si redakce *Časopisu* recenzi v *Athenaeu* objednala, jak je naznačeno v Zahradníkových dopisech, které roku 1883 zaslal F. J. Studničkovi, a v nichž vylíčil své pocity, zklamání a narůstající nespokojenost se svojí „kauzou" a žádal ho o pomoc.[57]

Athenaeum nesoucí podtitul *Listy pro literaturu a kritiku vědeckou* v březnovém čísle otisklo čtyřstránkovou zdrcující kritiku, která byla podepsána zkratkou W. Z jejího odborného a zasvěceného obsahu nade vší pochybnost vyplývá,

---

[55] Viz *Poznámka redakce*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 13(1884), str. 160.

[56] Viz *Poznámka redakce*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 13(1884), str. 212.

[57] Poznamenejme, že pro Athenaeum první recenzi napsal F. J. Studnička, jak vyplývá z úryvku Zahradníkova dopisu: *… Díky Vám za recenzi, již jste do Athenea dal.* (Dopis ze dne 28. prosince 1883). Tato recenze však nebyla otištěna.

že jejím autorem byl výborný český geometr Eduard Weyr (1852–1903), profesor matematiky na české technice v Praze. Kritika začala těmito slovy:

První požadavek, jejž dlužno činiti obzvláště na spise mathematickém, jest, aby vše, co obsahuje, bylo věcně správné; v té příčině nemůže býti žádných sporů mezi věci znalými, třeba se jinak v uspořádání latky, snad i v tom, čeho do spisu pojmouti záhodno, a v jiných věcech rozcházeli. A právě tomuto hlavnímu požadavku spis p. Z. nevyhovuje. Vytknu v následujících řádcích na prvním místě věcné poklesky ve spise učiněné … Dále přihlednu k oněm úvahám, jež – po mém soudu – jsou nedobře stylisovány, ač přímo nesprávny nejsou. O dobrých stránkách spisu pojednám naposled, neboť nechci, aby čtenářům této kritiky utkvěly v paměti slabé stránky více než dobré. ([W], str. 173)

Eduard Weyr uvedl jedenáct „věcných výtek“, v nichž oprávněně kritizoval neúplné, nevhodné nebo nesrozumitelné definice či „znaménkové konvence“ (např. průvodič, úhel, polární soustava, vzdálenost dvou bodů, vzdálenost bodu od přímky, asymptota), opominutí důležitých podmínek (např. nenulovost determinantu transformační matice), neúplnost nebo těžkopádnost některých důkazů, nepřesnost při zavedení kuželoseček jako řezů kuželové plochy (zejména opomenutí degenerovaných případů a imaginárních průsečíků) a terminologické odlišnosti. Dále uvedl deset méně podstatných výtek, jež nepovažoval za chyby, ale které více méně souvisely s předešlými kritizovanými místy (např. konvence znaménka délky úsečky a obsahu trojúhelníku, chybějící důkazy elementárních vlastností determinantů třetího stupně, které K. Zahradník používal v doplňujících poznámkách, aby naznačil možnosti aplikací teorie determinantů v analytické geometrii, nepřesné vymezení imaginárních bodů a imaginárních průměrů hyperboly, nedostatečná geometrická interpretace některých algebraických výpočtů, zbytečně složitá práce s nekonečnem apod.). Eduard Weyr měl ve svých výtkách pravdu a na rozdíl od Kostěncovy recenze navrhoval i vhodné opravy kritizovaných míst. Ocitujme jeho druhou, třetí, šestou a devátou věcnou výtku:

II. výtka

V čl. 7. vypočtena vzdálenosť dvou bodů $\overline{A_1A_2} = \pm\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ *a praveno tu: „Dvojité znaménko* $\pm$ *pouze značí, že můžeme vzdálenosť bodů* A_1 *i* A_2 *měřiti buď od bodu* A_1 *ku bodu* A_2 *čili naopak od* A_2 *k* A_1*. Vezmemeli vzdálenosť* $\overline{A_1A_2}$ *za kladnou, je vzdálenosť* $\overline{A_2A_1}$ *záporna. Jedná-li se pouze o veličinu samu o sobě, nebéřeme znaménko v úvahu.“ Z toho se čtenář dovídá, že když* $\overline{A_1A_2}$ *pokládá za kladnou veličinu, má* $\overline{A_2A_1}$ *pokládati za zápornou – buďši; ale kdo mu řekne, kterou z nich má za kladnou bráti? Vše, co tu o znamení pověděno, jest úplně bezúčelné a způsobilé, by mysl začátečníka zatemňovalo. Úloha žádala, aby se vypočetla vzdálenosť dvou bodů, a o nějakém algebraickém pojímání ani hlesu; když již v té věci nějaká konvence se děje, tedy je to konvence před výpočtem učiněná, že se béře vzdálenosť kladně, ač by opak byl stejně oprávněn.*

Weyrova výtka je oprávněná, ale její tón je zbytečně jízlivý.

III. výtka

Čl. 18. počíná slovy: „Seznali jsme, že se stupeň rovnice proměnou soustavy souřadnic nezmění. Dle toho dělíme křivky ...“ Zde i v čl. 17. se mluví o stupni a tento se přece teprve průběhem čl. 18. definuje. Dále má p. auktor za to, že v čl. 17. podán důkaz k výroku, že se transformací k jiným osám rovnoběžných souřadnic stupeň čáry nemění; p. auktor se snažil, aby tento důkaz provedl, ale nepovedlo se to. Praví totiž v čl. 17.: „Přechod z jedné soustavy rovnoběžných souřadnic na druhou soustavu rovnoběžných souřadnic provede se tím (čl. 13.), že místo souřadnic libovolného bodu (x, y) *stavíme výrazy stupně prvého v nových souřadnicích téhož bodu* x', y'. *Taková proměna může arci míti vliv na tvar rovnice, ale stupeň její se tím nemění.“ To není důkazem; neboť dána-li celistvá funkce* $f(x, y)$ *a nahradíme-li* x, y *výrazy linearnými v* x', y', *tu obdržíme celistvou funkci* $\varphi(x', y')$, *jejíž stupeň patrně nemůže býti vyšší stupně funkce* f; *že by ale nemohl býti nižším, to z linearnosti substitučních rovnic ještě nevychází. Na př. výrazy* $x' + y'$ *a* $2x' + 2y'$ *jsou dozajista linearné a byvše položeny místo* x *a* y *do kvadratického výrazu* $4x^2 - y^2 + x + 5$ *dávají linearný výraz* $x' + y' + 5$.

Vím velmi dobře, že substituce $x = x' + y'$, $y = 2x' + 2y'$ *nemohou býti transformačními formulemi souřadnic; důkaz páně auktorův vyžaduje však jen linearnosť, a tu jsme zachovali. Správný důkaz, poukazující k jádru věci, lze takto podati: Položíme-li*

$$x = ax' + by' + c, \quad y = a'x' + b'y' + c'$$

a je-li $ab' - a'b \gtrless 0$, *t. j. lze-li tyto rovnice řešiti dle x', y' výrazy tvaru*

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma, \quad y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma',$$

tu se stupeň n celistvé funkce f(x,y) nezmění, položíme-li za x a y napsané výrazy, t. j. funkce

$$\varphi(x', y') = f(ax' + by' + c, a'x' + b'y' + c')$$

je vůči x', y' *též stupně* n^{ho}. *Důkaz: Je přímo patrno, že* φ *nemůže býti vyššího stupně než* f; *nižšího však také nemůže býti, neboť by opačnou transformací výraz* $\varphi(x', y')$ *musil stoupnouti ve stupni, t. j. funkce*

$$\varphi(\alpha x + \beta y + \gamma, \alpha' x + \beta' y + \gamma') = f(x, y)$$

by musela býti v x, y *vyššího stupně, než je* $\varphi(x', y')$ *vůči* x', y', *věc to nemožná. Jest tedy* $\varphi(x', y')$ *stupně* n^{ho}. *Pan auktor, který ve svém posouzení (Časop. math. XIII., č. 2. a 3.) kritiky prof. Kostěnce tak rád Salmon-Fiedlera cituje, patrně přehlednul čl. 11. tohoto díla, v němž se naznačený důkaz nalézá.*

I tato Weyrova výtka je zcela oprávněná, jeho důkaz je jasný, stručný a správný. Jeho závěr je však příliš osobní a zbytečně urážlivý.[58]

[58] Poznamenejme, že Salmonovy-Fiedlerovy knihy mají zcela jiný charakter než úvodní středoškolské učebnice. Karel Zahradník se jimi právem „zaštiťoval“ jako odbornými vzory.

VI. výtka

Na str. 39. tvrdí p. auktor, že z rovnic

$$lm' - l'm = 0, \quad mn' - m'n = 0$$

plyne rovnice $nl' - n'l = 0$, *a dokazuje svůj výrok. Abychom ukázali, že i tvrzení i důkaz obecně jsou nesprávnými, stačí položíme-li* $m = 0$, $m' = 0$ *a volíme-li* l, l', n, n' *tak, aby rozdíl* $nl' - n'l$ *nebyl nullou. Chyba vězí v tom, že p. auktor opominul přihlednouti k případu, kdy kvantity, jimiž dělí, jsou nullami.*

Výtka je opět správná, K. Zahradník měl být při formulaci přesnější a opatrnější.

IX. výtka

V čl. 75. praví p. auktor: „... t. j. spojnice $\overline{OP\infty}$ *bude soumezna s přímkou* OL, *k níž se hyperbola neustále těsněji přibližuje, aniž ji postihne. Přímka* OL *slove z té příčiny asymptota hyperboly.“ Tato definice asymptoty je nesprávná; dle ní by byla každá přímka vedená rovnoběžně s asymptotou též asymptotou, neboť slůvko „těsněji“ nevyžaduje nic jiného než stálé přibližování se. Mohlo by se namítnouti, že rovnoběžka s asymptotou hyperbolu jednou protne, tedy postihne; ale ani ta námítka nemůže definici zachrániti, jakož vidíme, přihledneme-li k čarám vyšších stupňů. A tak by se dala defince zachovati jen dvěma násilnými prostředky: vykládáním slov „aniž ji postihne“ v ten smysl že ji vůbec nikde nepostihne, a vztahováním definice jen k čarám druhého stupně. Z toho chatrnosť definice patrna.*

Správně zní definice takto: Asymptotou nazýváme mezní polohu tečny nějaké čáry, vzdaluje-li se bod dotyčný do nekonečna.

Poznamenejme, že ani Weyrova definice není přesná a vyžadovala by vysvětlení spojení „vzdalovati se do nekonečna“. Navíc Zahradníkova učebnice pojednává jen o bodu, přímce a kuželosečkách a nikde nevysvětluje pojem čára. Weyrova definice tedy není lepší než původní Zahradníkova.

Podobný charakter mají i zbývající věcné výtky a další deset výtek tzv. druhé (méně závažné) kategorie. Zmiňme se krátce ještě o kladech knihy, které Eduard Weyr nalezl. Mnoho jich neuvedl a patrně ani uvést nechtěl, jak vyplývá z jeho slov:

... rád uznávám, že p. auktor se snažil býti jasným, a to se mu na velmi četných místech úplně podařilo; nemálo k tomu přispívá rozpravný ton, který skorem z celé knihy vyznívá. Záslužné jest, že p. auktor vyvinul normálný tvar rovnice přímky, že užívá principu Laméova, dle něhož čára $\lambda f + \mu\varphi = 0$ *prochází průsečíky čar* $f = 0$ *a* $\varphi = 0$, *dále že přičinil hojnosť příkladů, zvlášť na konci díla; v těch jen postrádáme rovnice kvadratické repraesentující zvrhlé kuželosečky.* ([W], str. 176)

Svůj posudek ukončil smířlivými slovy:

Celkový úsudek referentův je ten, že by kniha p. prof. Z. v novém vydání, v němž by vyznačené poklesky byly opraveny, mohla býti dobrou příruční knihou pro ty, již se chtějí seznámiti s počátky anal. geometrie v rovině. ([W], str. 176)

S výše uvedeným Weyrovým hodnocením nezbývá než plně souhlasit.

Karel Zahradník byl Weyrovou recenzí rozloben. Nereagoval na ni již veřejně, ale podrobil ji ostré kritice v soukromém dopise adresovaném dne 19. března 1884 F. J. Studničkovi. Podrobně vyložil své námitky a současně se pokusil objasnit vývoj celého sporu, když napsal:

... Tak na př. Pánek, ač jsem mu psal, že netrvám na uveřejnění kritiky a aby ji odevzdal p. prof. Durdíkovi, předce ji uveřejnil a zaslané psaní zapřel.

Dále si Weyr omočil, maje snad zlost na kritiku Vaši a Vaněčkovu,[59] *avšak při celé vyvinuté učenosti si znamenitě škodil, ač možná zúmyslně. ...*

Končím toto psaní, jež Vás zajisté nebude baviti; že by byl Weyr i lží proti mne bojoval, toho jsem se nenadal, neměl jsem ho již za dobrého přítele, nicméně choval jsem se vůči němu stejně srdečně vždy jako dříve. Tak dobrá, to aspoň mne přinutí, vyjít z rezervy s mojema prácemi a pak uvidíme.[60]

Studničkova reakce

Na Zahradníkovu prosbu napsal „kladnou recenzi“ jeho přítel F. J. Studnička;[61] otištěna byla v *Časopisu musea království Českého* v rubrice *Hlídka literární*,[62] která uveřejňovala oznámení a recenze nových knih; učebnicím matematiky se však obvykle nevěnovala. F. J. Studnička chtěl smířit rozbouřené strany, proto se nepouštěl do žádného rozboru, přímo nereagoval na předchozí recenze a odpovědi, mezi řádky však jeho reakci můžeme snadno najít. Ocitujme pro zajímavost větší pasáž z jeho posudku:

Co do obsahu vázal se tedy spisovatel nemálo programem školním, o němž se ostatně rozcházejí úsudky znalců i ve věcech podstatných. Za to však počínal si co nejvolněji při volbě method a vůbec formalní úpravy svých výkladů. V této příčině srovnají se zajisté s námi všichni nepředpojatí znalci v úsudku, že tu založena jest veliká záslužnost celého spisu.

Kdo ví, jak zejména u školních knih po celá desetiletí se zachovává více méně otrocky typus nějaký, jehož se nerad spouští učitel, pohodlně na známých cestách nejraději se stále pohybující, pochopí velmi dobře, že nesnadno si klestí dráhu novota jakákoli, a že tedy jen zdlouhavě a opatrně sluší se domáhati uznání pro odchylky rázu jakéhokoli. A takových odchylek od běžných forem se ve spisu právě jmenovaném vyskytuje celá řada, čímž nejlepší podán jest důkaz o jeho samostatnosti a samorostlosti.

Spisovatel patrně přistoupil teprve po důkladném a zralém uvážení všech okolností k sepsání této své geometrie vůbec a k zavedení všech příslušných odchylek zvlášť. Aspoň tak souditi možná z jednotnosti celého provedení i co do výkladů i co do příkladů. A musíme se vyznati, že bychom si přáli, aby se způsob jeho zavedl do škol našich, v nichž namnoze Močníkovy staré spisy se zakořenily. Přáli bychom si toho tím více, jelikož dle úsudku dlouhou zkušeností utvrzeného by zároveň se lépe nežli dosud přikládalo další studium geometrie

---

[59] Vaněčkovu recenzi se nepodařilo dohledat; je otázka, zda vůbec vyšla.

[60] Dopis je uložen ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

[61] Viz Zahradníkovy dopisy F. J. Studničkovi ze dne 13. listopadu a 28. prosince 1883; uloženy jsou tamtéž.

[62] Viz [St].

analytické k výsledkům škol středních. Kde možná vedle hlediska paedagogicko-didaktického šetřiti i dále jdoucích požadavků vědeckých, tam není rozhodnutí nesnadné. …

Kdybychom chtěli, jakož jest obyčejem, též učiniti nějakou výtku knize této, poukázali bychom ke stránce mluvnické a slohové; zde bychom si byli přáli více ještě uhlazenosti a vybroušenosti a to tím spíše, že celou korrekturu vedl spisovatel jiný, v Praze meškající. S této strany bylo možná vyhnouti se té neb oné nesprávnosti a drsnosti, jež arci nesouvisí s podstatnou hodnotou spisu celého, často na subjektivnosti se zakládajíc. ([St], str. 605–606)

Druhé vydání

V zimě roku 1884 Karel Zahradník na náklady téhož nakladatele, Karla Bellmanna, vydal druhé vydání své tolik kritizované analytické geometrie, a to pod názvem *Analytická geometrie v rovině. Pro školu napsal D*^{r}*. Karel Zahradník.*[63] V „nové verzi" provedl jen zcela nepatrné jazykové změny a nepodstatné úpravy formulací (např. měření úhlu, obsah trojúhelníku, věta o úhlu průvodičů a tečen kuželoseček), které mu vytýkal Antonín Kostěnec v první recenzi. V poslední části sbírky věnované klasifikaci kuželoseček přidal tři příklady. Obsah, úpravu, předmluvu, věnování a obrázky ponechal zcela beze změn.[64] Je překvapivé, že toto nové vydání bylo schváleno výnosem vysokého c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 23. února 1884 pod číslem 2899 jako vhodná česká středoškolská učebnice analytické geometrie. Nepodařilo se najít oficiální posudky, jež nechalo ministerstvo vypracovat, a které potvrdily bezchybnost a úplnou správnost učebnice tak, aby mohla být zařazena do seznamu doporučených školních knih. Karel Zahradník neopravil nedostatky, na které poukazoval Eduard Weyr, neboť jeho kritika byla otištěna v březnu roku 1884, tj. až po ministerském schválení Zahradníkova učebního textu.

Následky sporu

Vzniklý spor na konci roku 1884 utichl, ale Zahradníkova hořkost, pocity neobjektivní a nespravedlivé kritiky a křivdy zůstaly, jak vyplývá z jeho dopisů adresovaných F. J. Studničkovi. Karel Zahradník chtěl napsat moderní a nově pojatou učebnici analytické geometrie, která měla nahradit Jandečkovy rozsáhlé, dobře propracované a oblíbené geometrické učebnice a měla zcela vytlačit překlady Močnikových německých učebnic.[65] Vyšel však ze

[63] Praha, 1884, 144 stran.

[64] O nepatrných úpravách provedených ve druhém vydání K. Zahradník napsal F. J. Studničkovi v dopise ze dne 28. prosince 1883. Dopis je uložen ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

[65] Franz von Močnik (1814–1892) byl profesorem elementární matematiky na technické akademii ve Lvově a na univerzitě v Olomouci. Později byl jmenován hlavním inspektorem škol v Lublani, Štýrském Hradci a Korutanech. Výrazně pozvedl úroveň výuky středoškolské matematiky v rakouské monarchii. Oblíbené byly jeho německy psané učebnice a metodiky aritmetiky, algebry a geometrie. Jejich překlady vycházely česky (39 vydání), chorvatsky a italsky. V 50. a 60. letech je do slovenštiny překládal M. Čulen, v 70. letech F. A. Hora do češtiny.

stavu a úrovně výuky v Chorvatsku, jež dobře znal, ale které byly odlišné od situace v našich zemích. Proto se mu jeho záměr nemohl podařit. Navíc jeho učebnice nebyla vzhledem k negativním recenzím příznivě přijata českými učiteli a nezískala tak větší rozšíření na našich středních školách. Ostré recenze pravděpodobně nesouvisely jen s kvalitou učebnice, ale byly ovlivněny i Zahradníkovou neskrývanou snahou získat pozici druhého řádného vysokoškolského profesora matematiky na univerzitě či na technice v Praze, což mnozí považovali za překážku pro své další osobní plány.[66] Karel Zahradník však svou neuváženou a nevhodně koncipovanou reakcí spustil lavinu, která patrně způsobila, že se do Prahy nikdy nedostal, že přestal psát české středoškolské učebnice matematiky a že omezil kontakt s českou matematickou komunitou.[67]

Připomeňme na závěr tohoto rozboru, že spor o kvalitu Zahradníkovy učebnice nebyl jediným konfliktem v české matematice. Na počátku 20. století nepůvodnost a chyby učebnice *Počet diferenciálný* sepsané Eduardem Weyrem a vydané Jednotou českých mathematiků roku 1902 nevybíravým a útočným způsobem kritizoval mladý, začínající matematik Jan Vilém Pexider (1874–1914). Jejich osobní konflikt pronikl na stránky odborného a denního tisku; měl však neblahé důsledky pro oba aktéry.[68] V sedmdesátých a osmdesátých letech 19. století skrytě a bez jakékoliv mediální pozornosti proběhlo nespravedlivé a neobjektivní odsouzení Smolíkovy studie *Jan Caramuel z Lobkovic a jeho dílo: „Mathesis biceps, vetus et nova“* a následně i jeho rozsáhlého překladu *Základů Eukleidových knihy patnáctery*, které sepsali František Josef Studnička a Vojtěch Šafařík, resp. Gabriel Blažek a Eduard Weyr. Na tichém a klidném průběhu měl hlavní zásluhu skromný a mírný Josef Smolík (1832–1915), který na kritiky veřejně nereagoval, stáhl se do ústraní, krátce poté matematiku opustil a dále se věnoval především archeologii a numismatice. Tudíž i tento konflikt nebyl ve svém důsledku pro naši matematiku šťastný.[69]

Sbírka úloh z geometrie pro střední školy

Karel Zahradník během svého mnohaletého působení na záhřebské univerzitě poznal, že příprava středoškolských studentů zejména v oblasti geometrie není dostatečná, a proto se rozhodl napsat rozsáhlejší sbírku pokrývající základní i rozšiřující učivo geometrie. Spolu s Davidem Segenem sepsali sbírku nazvanou *Geometrijska vježbenica za više razrede srednjih učilišta* [Z75], jejíž první díl

---

[66] Zájem o místo univerzitního profesora měli Gabriel Blažek a Eduard Weyr (profesoři matematiky na české technice), o místo profesora na české technice usiloval Augustin Pánek, pražský středoškolský profesor matematiky a fyziky, soukromý docent matematiky na české technice a současně hlavní redaktor *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.*

[67] Viz například Zahradníkův dopis F. J. Studničkovi ze dne 27. února 1885, v němž vylíčil své prázdninové setkání s Gabrielem Blažkem a Eduardem Weyrem. Dopis je uložen ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

[68] Viz J. Bečvář a kol.: *Eduard Weyr 1852–1903*, Dějiny matematiky, svazek č. 2, Prometheus, Praha, 1995, a J. Bečvář (ed.): *Jan Vilém Pexider 1874–1914*, Dějiny matematiky, svazek č. 5, Prometheus, Praha, 1997.

[69] Viz M. Bečvářová: *Josef Smolík (1832–1915)*, Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007.

vyšel roku 1896 a druhý roku 1899.[70] Vhodně tak doplnili středoškolskou učebnici Davida Segena *Geometrija*[71] z 1898 obsahující přehledně zpracované geometrické učivo vyšších tříd středních škol (planimetrie, stereometrie, rovinná a sférická trigonometrie, analytická geometrie roviny a prostoru, kuželosečky).

První díl sbírky tvořily čtyři části; první obsahovala 540 úloh z planimetrie a druhá 341 úloh ze stereometrie, ve třetí a čtvrté části byly uvedeny výsledky. Díky hustému tisku a absenci obrázků se téměř devět set úloh vešlo jen na 62 stránek. Tato sbírka byla kladně přijata i českými středoškolskými učiteli. Její výstižnou recenzi napsal Alois Strnad,[72] autor oblíbené české středoškolské učebnice *Geometrie pro vyšší školy realné.*[73] Ocitujme úryvek z jeho výstižné charakteristiky:

Úlohy jsou dílem početní, dílem strojné; tyto přirozeně převládají v planimetrii, ony ve stereometrii, ač nikdy ne jedny na úkor druhých. Úlohy o sestrojování trojúhelníků a čtyřúhelníků formulovány stručně a přesně užitím vhodného označení. V planimetrii pojato též sestrojování lineárných výrazů, jakož i řešení úloh na základě rozboru algebraického; novější geometrie zastoupena jest naukou o harmonickém dělení a o transversálách trojúhelníka.

Ve stereometrii rádi setkáváme se s poučkami i úlohami rázu obecného, po kterých teprve následuje výpočet povrchů a obsahů tělesných. ([S1], str. 127)

Druhé vydání prvního dílu vyšlo roku 1905; počet úloh zůstal nezměněn, byly odstraněny jen tiskové chyby a opraveny nesprávné výsledky několika málo úloh. Úpravy se Zahradníkovým svolením, který byl již v té době v Brně, provedl David Segen. Roku 2003, tj. více než sto let po prvním vydání, bylo vytištěno v edici *Elementarna matematika* třetí vydání prvního dílu sbírky pod názvem *Planimetrija i stereometrija. Geometrijska vježbenica*, které podle druhého vydání připravil profesor Neven Elezović. To ukazuje jistě nejenom oblibu sbírky, ale také její kvalitu. Je zajímavé, že třetí vydání je užíváno jako základní učební pomůcka při výuce geometrie i na současných chorvatských středních školách.

Druhý díl sbírky se skládal ze šesti částí; v první bylo 422 úloh z rovinné trigonometrie, ve druhé 58 úloh ze sférické trigonometrie a ve třetí 520 úloh z analytické geometrie. Zbývající tři části obsahovaly výsledky úloh. Při jejím tisku nebyly užity žádné názorné obrázky a byla zvolena hustá sazba, takže

---

[70] První díl, Zagreb, 1896, 105 stran, druhý díl, Zagreb, 1899, 146 stran.

[71] D. Segen: *Geometrija za više razrede srednjih učilišta*, Troškom i nakladom kr. hrv.-slav.-dalm. zemaljske vlade, Zagreb, 1898, 344 stran.

[72] Alois Strnad (1852–1911) byl výborný český středoškolský učitel, aktivní člen *Jednoty českých mathematiků* a autor úspěšných českých středoškolských učebnic a sbírek.

[73] Vydal nakladatel Fr. Kytka, Praha, 1893, 324 stran. Poznamenejme, že roku 1898 vyšlo druhé vydání, v letech 1902 až 1905 třetí vydání obohacené o procvičující úlohy, a konečně v letech 1912 až 1915 čtvrté vydání, které upravil Karel Rašín podle učební osnovy z roku 1909. Strnadova učebnice měla také verzi pro gymnázia; její první vydání vyšlo roku 1893 (285 stran), druhé v letech 1904 až 1907. Roku 1896 byla přeložena do bulharštiny. Podrobné recenze prvních vydání viz V. Jeřábek: *Geometrie pro vyšší třídy realné*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 23(1894), str. 98–104, J. Koch: *Geometrie pro vyšší gymnasia*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 23(1894), str. 91–98.

1000 úloh se vešlo na 76 stran. I tato sbírka vzbudila v Čechách značnou pozornost. Alois Strnad o ní napsal:

... Jak patrno, jest to počet úloh pro potřebu školní i cvičbu domácí úplně dostačující. Úlohy voleny jsou obezřetně, jsou věcně správné, rozmanité a zajímavé, seřaděny soustavně a přehledně. Úlohy rázu obecného vhodně se střídají se zvláštními příklady číselnými. Ku všem podány výsledky (68 stran), obsahující i případné pokyny k řešení; jest patrno, že vybrány skoro vesměs úlohy vedoucí k výsledkům jednoduchým, řešitele uspokojujícím.

Postup v trigonometrii snáší se s novou osnovou našich realek: funkce ostrých úhlů, trojúhelník pravoúhlý a rovnoramenný, pravidelné mnohoúhelníky a kruh, funkce úhlů vůbec, trojúhelník kosoúhlý, obecné vzorce a rovnice goniometrické, užití trigonometrie; trigonometrie sférická rovněž postupuje od trojúhelníka pravoúhlého ke kosoúhlému.

Úlohy z analytické geometrie jednají o bodu, přímce, kružnici, ellipse, hyperbole a parabole, s dodatkem o kuželosečkách vůbec. Zamlouvají se svou průhledností, elegancí a moderním rázem, jak ani jinak nebylo lze očekávati od autorů v oboru tom tak osvědčených. Že sbírka nevyhýbá se ani souřadnicím polárným ani úlohám s výsledky irracionálnými – ovšem vkusnými a zaokrouhlenými – úplně schvalujeme. ([S2], str. 272)

Poznamenejme ještě, že roku 1904 byla trigonometrická část sbírky přeložena Vasilem N. Ikonomovem (1858–1919) do bulharštiny.[74]

Oba díly sbírky obsahovaly 1881 různě obtížných úloh s řadou podčástí a s výsledky, resp. stručnými návody řešení. Není jasné, kde se autoři sbírky inspirovali, zda úlohy přejímali z německých či francouzských sbírek nebo zda je sami vymýšleli, neboť neuvedli žádné své výchozí zdroje. V části věnované stereometrii a analytické geometrii rozsah procvičované látky a náročnost úloh výrazně překračuje požadavky učebních programů našich současných gymnázií.

V české učebnicové literatuře druhé poloviny 19. století a počátku 20. století nebyla sepsána podobná geometrická sbírka, která by umožňovala tak důkladné a rozsáhlé procvičení vyučované látky a přitom poskytovala i dostatek aplikačních úloh. A. Strnad v recenzi chorvatské sbírky uvedl:

Pisatel těchto řádků po léta střádal materiál k české cvičebnici geometrické pro střední školy; má v úmyslu zařaditi přiměřený počet úloh za každý odstavec své „Geometrie“, jejíž třetí vydání k tisku připravuje. ([S2], str. 272)[75]

---

[74] Др. Каръл Захрадник, Др. Давид Сеген: *Тригонометричен сборник за горните класове на средните училища*, Книжарница на Е. П. Христов, Търново [Dr. Karel Zahradník, Dr. David Segen: Sbírka úloh z trigonometrie pro vyšší třídy středních škol, Tiskárna E. P. Christov, Tărnovo], 1904, 132 stran. V. N. Ikonomov přeložil 422 úloh z trigonometrie. Přeložil také trigonometrickou část Segenovy učebnice a vydal ji pod názvem *Праволинейна тригонометрия. Съставил Д-р Давид Сеген* [Trigonometrie. Sestavil D-r David Segen] (Tărnovo, 1904, 64 stran).

[75] Poznamenejme, že A. Strnad svůj slib splnil; v letech 1902 až 1905 vyšlo třetí vydání jeho učebnice obohacené o desítky úloh.

Poznamenejme, že roku 1873 byla otištěna první rozsáhlá česká sbírka úloh středoškolského profesora Vincence Jarolímka nazvaná *Dekriptivní geometrie v úlohách pro vyšší školy reálné*, která obsahovala 1000 úloh. Složitější úlohy byly doplněny návody a každý tematický celek byl navíc uvozen stručným výkladem procvičované látky.[76] Roku 1876 vyšla první velká česká sbírka úloh z algebry nazvaná *Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol*, kterou sestavili středoškolští učitelé F. Hromádko a A. Strnad;[77] obsahovala 3500 úloh bez návodů a výsledků řešení. Její poslední, sedmé vydání bylo vytištěno roku 1906. Kromě výše uvedených oblíbených a rozšířených sbírek vydávaných Jednotou českých mathematiků byly tištěny v menších nákladech sbírky, jež měly jen regionální dopad. Například roku 1893 A. Zdrahal publikoval nevelkou sbírku nazvanou *Úlohy z analytické geometrie* (Chrudim, 95 stran) a roku 1901 A. Mach *Sbírku příkladů geometrických pro vyšší třídy středních škol* (Jičín, 190 stran); dostalo se jim však podstatně menšího rozšíření a neměly prakticky žádný vliv na vývoj vyučování geometrie na našich školách. Teprve na počátku dvacátého století se objevily nové sbírky, které začaly postupně nahrazovat výše uvedené cvičebnice.[78]

Učebnice analytické geometrie pro studenty techniky

Karel Zahradník v průběhu necelých dvou prvních desetiletí 20. století sepsal pro své studenty brněnské techniky dva učební texty, které částečně pokrývaly výuku geometrie v prvním a ve druhém ročníku.

Analytická geometrie v rovině

Roku 1904 na naléhání *Spolku posluchačů inženýrství na c. k. české vysoké škole technické v Brně* vydal Karel Zahradník pod názvem *Analytická geometrie v rovině. Přednášky z vyšší mathematiky I. běh* [Z106][79] litografickou verzi svých přednášek, které konal pro studenty prvního ročníku techniky ve školním roce 1903/1904. O tři roky později vyšla jeho učebnice nazvaná *Analytická geometrie. Svazek I. Geometrie bodu, přímky a kuželoseček* [Z96],[80] která obsahovala jen nepatrně upravenou verzi litografického tisku. O úpravách Karel Zahradník v předmluvě učebnice napsal:

---

[76] JČM, Praha, 98 stran. Podruhé vyšla sbírka roku 1880 (JČM, Praha); nové vydání obsahovalo více úloh, vypuštěny však byly úvodní výklady a návody k obtížnějším úlohám.

[77] JČM, Praha, 1876, 198 stran.

[78] Oblíbenou učební pomůckou byly *Maturitní otázky z mathematiky* sepsané roku 1905 J. Sommerem a V. Hübnerem (Praha, 1905, 141 stran; 2. vydání, Praha, 1907). Nejrozšířenější publikací tohoto typu byla *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol* B. Bydžovského a J. Vojtěcha, která byla poprvé vydána v roce 1912; do roku 1939 vyšla ještě třikrát (na úpravě dalších vydání se podíleli S. Teplý a F. Vyčichlo). Obsahovala látku z aritmetiky a algebry (zpracoval ji Bydžovský) a z geometrie (Vojtěch). O českých středoškolských učebnicích matematiky druhé poloviny 19. století viz [Be1].

[79] Brno, 1903–1904, 198 stran. Jeden exemplář se dochoval v knihovně Matematického ústavu Akademie věd České republiky v Praze.

[80] A. Píša, Brno, 1907, 184 stran.

Podávám veřejnosti své přednášky o analytické geometrii, jež vyšly v roce 1904 v podstatě v témž rozsahu lithografované. Pouze část o souřadnicích homogenních, ku kterým na vysokých školách technických méně se přihlíží, více jsem vyvinul, chtěje posloužiti i těm p. posluchačům, kteří by s mathematikou více chtěli se obírati. Musil jsem však upustiti od většího upotřebení těch souřadnic; pouze ve článku 162. poukazuji k tomu, kterak by články 157.–161. přímo v souřadnicích homogenních vyložiti se dali. Zato jsem přihlížel větší měrou ku počítání se symboly, kterými přílišnému mechanickému počítání se vyhneme, současně více při výpočtu konstrukci sledujeme a výpočet sám začasto zkrátíme. ([Z96], nestránkovaná předmluva)

V knize naopak vynechal ukázkové početní příklady (zejména ve druhé části věnované kuželosečkám) a omezil popisy některých konstrukcí kuželoseček. Úpravy zdůvodnil takto:

… Příkladů se podává ve cvičeních dosti a konstruktivní část probírá se zase v deskriptivní geometrii. ([Z96], nestránkovaná předmluva)

Studentům zajímajícím se o studium souvislostí analytické, deskriptivní a projektivní geometrie doporučil v úvodu učebnici Jana Sobotky *Deskriptivní geometrie promítání parallelního* (Praha, 1906) a druhý díl třídílné monografie Emila Weyra a Eduarda Weyra *Základové vyšší geometrie* (Praha, 1874). Zájemcům o hlubší studium samotné analytické geometrie radil studovat kvalitní a rozsáhlé monografie G. Salmona – W. Fiedlera *Analytische Geometrie der Kegelschnitte* (Leipzig, 1898)[81] a R. Baltzera *Analytische Geometrie* (Leipzig, 1882). Studenty geometrie, kteří by chtěli získat lepší přehled o vývoji analytické geometrie, nejnovějších pracích a výsledcích v tomto oboru, odkázal na *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* (III. Band, 1. Theil, Leipzig, 1903). Větší množství kvalitních učebnic, monografií a časopiseckých prací zahraničních i českých autorů citoval v poznámkách pod čarou. Dotýkaly se nejenom analytické geometrie, ale také základů matematické analýzy, teorie determinantů, základů projektivní a syntetické geometrie. Četné odkazy ukazují Zahradníkovu sečtělost a znalost klasické i nové literatury.

Učebnice se skládala ze dvou částí. První část *Geometrie bodu a přímky* (74 paragrafů, str. 1–89) tvořilo deset oddílů. V prvním oddílu nazvaném *O soustavě souřadnic* (17 paragrafů, str. 1–19) Karel Zahradník nejprve uvedl definici soustavy souřadnic, pak popsal kartézské, Plückerovy, polární, bipolární a biangulární souřadnice a vyložil základy parametrizace geometrických útvarů. Například Plückerovy souřadnice zavedl takto:

Vytkneme si nyní bod B na ose X a na ose Y bod C. Těmi body určena je přímka $\overline{BC}$ jako spojnice těch bodů.
Úseky $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ (obr. 2.) té přímky na osách je přímka sama úplně určena a naopak určuje přímka jednoznačně ty úseky na osách. Dle výměru podaného

[81] Jednalo se o Fiedlerovo německé přepracování Salmonových anglických knih: *A treatise on conic sections* (Dublin, 1848), *A treatise on the higher plane curves: Intended as a sequel to a treatise on conic section* (Dublin, 1852) a *A treatise on the analytic geometry of three dimension* (Dublin, 1862).

na počátku jsou tyto úseky souřadnice přímky. Jak později uvidíme, je výhodnější vzíti negativně reciproké hodnoty těch úseků za souřadnice. Dle Plückera klademe

$$u = -\frac{1}{OB}, \quad v = -\frac{1}{OC}$$

a pravíme, přímka p má souřadnice u, v, t. j. úseky její na osách jsou

$$OB = -\frac{1}{u}, \quad OC = -\frac{1}{v}.$$

V souřadnicích bodových vyjadřuje rovnice

$$F(x, y) = 0$$

křivku jako geometrické místo bodů, jichž souřadnice vyhovují rovnici dané; v souřadnicích přímkových je

$$F(u, v) = 0,$$

rovnice křivky jako obálky přímek, jejichž souřadnice té rovnici vyhovují. Jelikož jednotlivé přímky jsou tečnami obálky, jmenují se souřadnice přímkové též souřadnicemi tangenciálnými aneb Plücker-ovými. ([Z96], str. 2–3)

Následně definoval vzdálenost dvou bodů, zavedl rozdělení úsečky v daném poměru, dělící poměr, harmonické dělení a dvojpoměr čtyř bodů. Pak přešel k úplnému čtyřúhelníku a dokázal tvrzení *Diagonala čtyřúhelníku a jí protilehlý diagonalný bod dělí ten pár protilehlých stran čtyřúhelníku harmonicky, který se na té diagonale sbíhá* ([Z96], str. 13). V závěru prvního oddílu pojednal o trojúhelníku a čtyřúhelníku v rovině (výpočet středů stran, těžnic, těžiště a obsahu trojúhelníku s využitím determinantů).

V druhém oddílu *O rovnicích vůbec* (jeden paragraf, str. 19–21) načrtl obecnou úvahu o využití rovnic a algebry v analytické geometrii. Podstatu analytické geometrie popsal takto:

V analytické geometrii vyjadřujeme geometrické vlastnosti křivky rovnicí, a naopak z rovnice hledáme geometrické vlastnosti dotyčné křivky. Pokud řešíme geometrický problém na základě koordinátového principu počtem, jmenuje se tato geometrie analytická. Neupotřebujeme konstrukcí na obrazcích, nýbrž operací se souřadnicemi a rovnicemi. Ale počet není hlavní známkou analytické geometrie – na počtu zakládá se i trigonometrie – nýbrž právě upotřebení souřadnic na elementy geometrie. ([Z96], str. 20–21)

Třetí oddíl *Rovnice přímky* (8 paragrafů, str. 21–30) autor věnoval přímce a jejím vlastnostem. Nejprve klasickým způsobem zavedl rovnici přímky určené dvěma body ($y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$), vyložil pojem směrnice přímky a následně uvedl různé typy rovnic (obecná rovnice ($ax + by + c = 0$), úseková rovnice ($\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$), normální rovnice ($x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$), hlavní rovnice ($y = Ax + b$)). Pak objasnil vzdálenost bodu od přímky, nalezení rovnice kolmice k dané přímce a souřadnic její paty, výpočet velikosti úhlu dvou přímek, průsečíku dvou, resp. tří přímek.

Ve čtvrtém oddílu *Rovnice bodu, zákon duality* (4 paragrafy, str. 30–32) pojednal o duálním vztahu bodu a přímky, který chápal takto:

Rovnice

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{1.}$$

vyjadřuje, že bod $(x|y)$ *leží na přímce* $(u|v)$*, aneb že přímka* $(u|v)$ *jde bodem* $(x|y)$*. Jsou-li* u, v *pevné, neproměnné – přímka* $\overline{BC}$ *pevná, a* x, y *proměnlivo, praví nám rovnice (1.), že všechny body* $(x|y)$*, jichž souřadnice vyhovují rovnici (1.), leží na pevné přímce* $\overline{BC}$*; naopak jsou-li* x, y *pevné a* u, v *proměnné, praví rovnice (1.), že všechny přímky, jichž souřadnice* u, v *ji vyhovují, probíhají pevným bodem* $(x|y)$*. Při proměnném* $u|v$ *otáčí se přímka* $(u|v)$ *okolo bodu* $(x|y)$ *a rovnice (1.) je rovnicí bodu, jako společného průseku všech přímek jím jdoucích. Při proměnném* x, y *je rovnice (1.) rovnicí přímky, jako spojnice všech bodů, jež na ní leží.* ([Z96], str. 31)

Na závěr tohoto oddílu uvedl několik zajímavých příkladů rozšiřujících výše uvedenou látku (nalezení rovnice přímky splňující předem stanovené podmínky, důkaz Menelaovy věty a Cevovy věty, nalezení obsahu trojúhelníku zadaného pomocí tří různoběžek).

Pátý oddíl *Upotřebení symbolů* (20 paragrafů, str. 36–59) šel hodně nad rámec běžné výuky analytické geometrie na technických školách. Karel Zahradník ukázal symbolické zápisy bodů, přímek, svazku přímek a bodové řady. Poslední dva pojmy definoval takto:

Význam rovnice $s_1 - \lambda s_2 = 0$*. Rovnice je lineární v souřadnicích bodových, vyjadřuje tudíž přímku a jelikož se té rovnici vyhovuje souřadnicemi bodu* $s_1|s_2$ *za každou hodnotu veličiny* λ*, kterou jmenujeme parametrem, vysvítá, že rovnice* $s_1 - \lambda s_2 = 0$ *vyjadřuje přímku jdoucí průsekem přímek* s_1, s_2*. Jelikož může* λ *obdržeti každou hodnotu od* $-\infty$ *do* $+\infty$*, vyjadřuje ta rovnice při proměnlivém* λ *souhrn všech přímek jdoucích bodem* $s_1|s_2$*. Takový souhrn přímek jmenujeme svazkem paprsků a píšeme zaň* (s)*, t. j. dáme písmeno, jímž libovolnou přímku toho svazku označujeme, do závorek. Společný průsek* S *přímek* s_1, s_2 *jmenujeme vrcholem či středem svazku paprsků* (s)*.* ([Z96], str. 37)[82]

Význam rovnice $U_1 - \lambda U_2 = 0$*. Rovnice je lineární v souřadnicích přímkových (tangenciálních), vyjadřuje tudíž bod a jelikož se té rovnici vyhovuje souřadnicemi přímky, která oběma body prochází, tedy souřadnicemi spojnice* $\overline{U_1U_2}$*, za každou hodnotu veličiny* λ*, vysvítá, že je rovnice* $U_1 - \lambda U_2 = 0$ *rovnicí bodu, ležícího na přímce* U_1U_2*. Jelikož může* λ *obdržeti veškeré hodnoty od* $-\infty$ *do* $+\infty$*, vyjadřuje ta rovnice při proměnlivém* λ *souhrn všech bodů ležících na*

[82] Poznamenejme, že Zahradníkova definice není správná. Žádnou volbou parametru λ nelze dostat přímku $s_2 = 0$. Ledaže by připustil dělení nulou, tj. $\lambda = \frac{s_1}{s_2}$; pro $\lambda = \infty$ by pak platilo $\lambda = \frac{s_1}{0}$. Zde je právě nutno použít dva homogenní parametry a rovnici zapsat ve tvaru $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 = 0$, $(\lambda_1, \lambda_2) \sim (\kappa_1, \kappa_2) = (t\lambda_1, t\lambda_2)$, $t \neq 0$.

přímce $\overline{U_1U_2}$. *Souhrn všech bodů na přímce jmenujeme řadou bodovou a označujeme ji* (U), *t. j. dáme písmeno, jímž označujeme libovolný bod přímky* $\overline{U_1U_2}$ *do závorek.*

Spojnici $\overline{U_1U_2}$ *jmenujeme spojnicí aneb osou řady bodové a veličinu* λ, *která polohu jednotlivého bodu té řady určuje, jmenujeme parametrem.* ([Z96], str. 40)[83]

Následně stručně naznačil vzájemné vztahy svazků paprsků a bodových řad. Přehledně uvedl, kdy tři přímky procházejí jedním bodem a kdy tři body leží na jedné přímce, objasnil dvojpoměry čtyř elementů svazku paprsků, resp. bodové řady, definoval harmonikálu bodu a harmonikální bod přímky.

Také šestý oddíl *Trimetrické souřadnice bodu* (10 paragrafů, str. 59–72) obsahoval nadstandardní látku. Karel Zahradník v něm s využitím symbolického počtu zavedl trimetrické souřadnice bodu, resp. trimetrické souřadnice přímky, a jejich speciální případ Hesseovy homogenní souřadnice bodu, resp. Hesseovy homogenní souřadnice přímky. Ocitujme jeho definice:

… souřadnice trimetické bodu jsou tři čísla x_1, x_2, x_3 *úměrná vzdálenostem* s_1, s_2, s_3 *toho bodu od základních tří přímek …* ([Z96], str. 60)[84]

… trimetické souřadnice přímky jsou tři čísla u_1, u_2, u_3 *úměrná vzdálenostem* σ_1, σ_2, σ_3 *té přímky od vrcholů trojúhelníku souřadnic …* ([Z96], str. 64)[85]

Pak Karel Zahradník definoval obecné trimetrické souřadnice bodu a přímky, vyložil vztah mezi kartézskými a trimetrickými souřadnicemi, zavedl další speciální typy souřadnic a ukázal jejich použití při řešení rozmanitých úloh (např. barycentrické souřadnice).

V sedmém oddílu *Pár přímek neb bodů* (4 paragrafy, str. 72–76) uvedl základní vlastnosti harmonického páru přímek, resp. bodů, definoval osu úhlu dvou přímek a úhel dvou přímek. Pokusil se odpovědět na otázku, kdy rovnice druhého stupně vyjadřuje pár přímek, resp. bodů ať reálných, ať splývajících, ať imaginárních. Objasnil tedy degenerované případy kuželoseček.

V krátkém osmém oddílu *Rovnice přímky v souřadnicích polárných* (jeden paragraf, str. 76–78) uvedl tvar rovnice přímky v polárních souřadnicích, vysvětlil podmínky rovnoběžnosti a kolmosti přímek, vlastnosti úběžných přímek a bodů.

V devátém oddílu *Transformace os souřadnic* (3 paragrafy, str. 78–82) zavedl pojem transformace, pak se speciálně věnoval posunutí, otočení a jejich kombinaci.

---

[83] Ze stejného důvodu není ani tato definice v pořádku, neboť žádnou volbou parametru λ nelze získat bod $U_2 = 0$.

[84] Hesseovy homogenní souřadnice bodu jsou speciálním případem trimetrických souřadnic bodu, kdy strany základního trojúhelníku jsou osy souřadnic a jedna úběžná přímka, neboli přímka $ax + by + c = 0$, kdy $\lim a = 0$ i $\lim b = 0$, tj. přímka „leží v nekonečné vzdálenosti“.

[85] Hesseovy homogenní souřadnice přímky jsou speciálním případem trimetrických souřadnic přímky, kdy vrcholy základního trojúhelníku jsou počátek a úběžné body os souřadnic.

Desátý oddíl *O projektivných řadách bodových a svazcích paprsků* (6 paragrafů, str. 82–89) popisoval základy projektivnosti dvou svazků paprsků a bodových řad. Karel Zahradník napsal:

Dva svazky paprsků

$$(p) \equiv p_1 - \lambda p_2 = 0, \quad (q) \equiv q_1 - \lambda' q_2 = 0 \tag{1}$$

jsou projektivné, přísluší-li paprsku jednoho svazku jediný paprsek druhého svazku a naopak, t. j. jsou-li paprsky v obou svazků ve vztahu jedno-jednoznačném. ([Z96], str. 82)

Dále definoval pojem sdružené paprsky a odvodil základní vlastnost projektivních svazků, tj. zachování dvojpoměru čili dvojpoměr čtyř paprsků jednoho svazku je roven dvojpoměru čtyř sdružených paprsků druhého svazku. Podobným způsobem studoval bodové řady, soumístné projektivní svazky paprsků, resp. souosé bodové řady, perspektivnost svazku a řady, její vlastnosti, dualitu a její důsledky. Také tento oddíl jde daleko nad rámec běžné výuky analytické geometrie na současných technických školách.

Druhá část učebnice nazvaná *O křivkách stupně druhého* (93 paragrafů, str. 89–184) obsahovala téměř kompletní teorii kuželoseček.

V prvním oddílu *Vlastnosti křivek z obecné rovnice* Karel Zahradník zavedl obecnou rovnici druhého stupně (tj. $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$) a z ní postupně odvodil základní vlastnosti kuželoseček. Postupoval od názorného výkladu transformace soustavy souřadnic, přes hledání průsečíků přímky a křivky druhého stupně až po klasifikaci kuželoseček podle *asymptotických směrů.* Základní klasifikaci provedl takto:

… Směry, jež úběžné body křivek určují, jmenujeme asymptotické směry, a dle povahy těchto směrů třídíme křivky druhého stupně; je-li

α) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ jsou asymptotické směry imaginárné, křivka nemá žádného úběžného bodu reálného, probíhá tedy celá v konečnu, je uzavřená. Taková křivka druhé stupně jmenuje se ellipsa.

β) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$; křivka má dva reálné asymptotické směry, tedy dva reálné body úběžné, k nimž větve křivky směřují. Taková křivka druhého stupně jmenuje se hyperbola.

γ) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$; v případě tomto můžeme rovnici (5)[86] *psáti: $(x\sqrt{a_{11}} + y\sqrt{a_{22}})^2 = 0$, obě přímky p_1 a p_2 splývají, tím platí totéž i pro úběžné body křivky, v nichž přímka $z = 0$ křivku protíná, t. j. úběžná přímka je tečnou křivky. Taková křivka stupně druhého jmenuje se parabola.* ([Z96], str. 91)

Dále definoval střed křivky, průměr, tětivu, sdružené průměry, osy, asymptotu, tečnu, poláru a popsal jejich vlastnosti. Pozornost věnoval také imaginárním a degenerovaným případům a naznačil i geometrické konstrukce kuželoseček. Celý oddíl zakončil „tangenciální“ rovnicí kuželosečky.

[86] Jedná se o rovnici $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$. Poznamenejme, že uvedená rovnice je rovnicí kuželosečky v homogenních souřadnicích, které nejsou v učebnici [Z96] příliš často užívány.

… Pravili jsme, že leží-li pól na poláře, je polára tečnou kuželosečky. Zodpovězme si nyní otázku, kdy je přímka $ux + vy + 1 = 0$ tečnou kuželosečky

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

v bodě $(x|y)$? Jsou-li u, v souřadnice poláry, jsou souřadnice pólu jejího (rov. 25)

$$x = \frac{A_{11}u + A_{12}v + A_{13}}{A_{31}u + A_{32}v + A_{33}}, \quad y = \frac{A_{21}u + A_{22}v + A_{23}}{A_{31}u + A_{32}v + A_{33}}.$$

Leží-li pól na poláře, t. j. je-li přímka $u|v$ tečnou kuželosečky, je

$$u(A_{11}u + A_{12}v + A_{13}) + v(A_{21}u + A_{22}v + A_{33}) + (A_{31}u + A_{32}v + A_{33}) = 0$$

aneb

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0. \tag{33}$$

Tato relace mezi souřadnicemi tečny kuželosečky je tangenciální rovnice kuželosečky. Stupeň rovnice křivky v souřadnicích tangenciálních udává, kolik tečen z libovolného bodu na křivku vésti můžeme a jmenuje se třída křivky. Kuželosečka je tudíž křivkou druhé třídy, t. j. každým bodem roviny kuželosečky probíhají dvě tečny. ([Z96], str. 104–105)[87]

V druhém oddílu *Redukce rovnice kuželosečky na tvar normální* (95 paragrafů, str. 105–112) Karel Zahradník vyložil transformaci souřadnic pro kuželosečku středovou a nestředovou, tj. v jeho podání pro kuželosečku se středem v konečnu, resp. nekonečnu. Pak uvedl přehlednou klasifikaci kuželoseček (včetně degenerovaných a imaginárních typů).

V třetím oddílu *O kuželosečkách v normálných rovnicích* (43 paragrafů, str. 112–145) Karel Zahradník vyšel z normální rovnice kuželosečky a v pěti částech pojednal o elipse a hyperbole, Apolloniových větách pro elipsu a hyperbolu, o parabole a kružnici. V části věnované elipse objasnil pojmy ohnisko, tečna, řídící přímka, parametr a vysvětlil konstrukci tečen a vlastnosti eliptického kružítka. Na závěr uvedl rovnici elipsy v polárních souřadnicích a fokální rovnici. V části pojednávající o hyperbole zavedl pojmy ohnisko, parametr, řídící přímka, asymptota, tečna a připomněl rovnici hyperboly v polárních souřadnicích i její fokální rovnici, neopominul ani popis konstrukce tečen. V krátké třetí části dokázal Apolloniovy věty: *součet (rozdíl) čtverců dvou sdružených průměrů rovná se součtu (rozdílů) čtverců os* a *rovnoběžník nad dvěma sdruženými průměry rovná se obdélníku nad osami* ([Z96], str. 129).[88] Ve čtvrté části věnované parabole uvedl pojmy řídící přímka, parametr, ohnisko, tečna, popsal konstrukci paraboly a připomněl její fokální rovnici. V poslední, nejdelší části

[87] A_{hk} je doplněk prvku a_{hk} v determinantu $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$. Viz [Z96], str. 100.

[88] Karel Zahradník samozřejmě mínil rovnost obsahů.

třetího oddílu nejprve studoval základní vlastnosti kružnice (základní rovnice v různých typech souřadnic, poloha přímky a kružnice, mocnost bodu ke kružnici, chordála, vzájemná poloha dvou, resp. tří kružnic, bod rovných mocností tří kružnic) a pak přešel ke studiu svazku kružnic.

Ve čtvrtém oddílu *O vzájemném vztahu kuželoseček* (3 paragrafy, str. 146–151) porovnal středové, vrcholové a fokální rovnice kuželoseček, uvedl četné historické poznámky o řeckých matematicích, kteří studovali kuželosečky, a na závěr definoval nedegenerované kuželosečky jako řezy kuželové plochy.

V pátém oddílu *Vytvořování kuželoseček pomocí dvou projektivných svazků paprskových neb řad bodových* (10 paragrafů, str. 151–162) zavedl kuželosečky jako produkty dvou projektivních svazků, resp. dvou bodových řad. Ukázal konstrukci kuželosečky z pěti bodů pomocí dvou svazků paprsků a konstrukci kuželosečky z pěti tečen.[89] Vyložil Pascalovu a Brianchonovu větu a ukázal jejich užití ve speciálních případech (nalezení druhého průsečíku přímky s kuželosečkou, která je dána pěti body, a přímka prochází jedním z těchto bodů; nalezení průměru kuželosečky, dané pěti body, sdruženého s daným směrem (tj. s danou osnovou); pomocí Pascalovy věty sestrojit kuželosečku danou pěti body; sestrojit tečnu kuželosečky v jednom z pěti bodů, jimiž je kuželosečka zadána).

V šestém oddílu *O podmínkách, jimiž je kuželosečka určena* (2 paragrafy, str. 162–166) uvedl základní možnosti jednoznačného zadání kuželosečky (5 bodů, tj. dva projektivní svazky, 5 tečen, tj. dvě projektivní bodové řady) a diskutoval další možnosti zadání (tečna s bodem dotyku zastupuje dvě jednoduché podmínky, sdružené tětivy reprezentují dvě podmínky, pár sdružených průměrů nahrazuje tři podmínky, pól a polára je za dvě podmínky, podobně ohnisko).

V sedmém oddílu *Upotřebení zkráceného označení* (14 paragrafů, str. 166–184) zavedl svazek kuželoseček a řadu kuželoseček a pokusil se o vyšetření vzájemné polohy svazku kuželoseček a jejich tečen. Svazek kuželoseček definoval takto:

Podobně jako jsme učinili u bodu, přímky a kruhu, můžeme též u kuželosečky levou stranu anulované rovnice kuželosečky označiti jedním písmenem, tedy staviti

$$S \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{21}y + a_{33}.$$

Pak jest

$$S = 0$$

rovnice kuželosečky S. Jsou-li dány dvě kuželosečky S_1, S_2, je při libovolném λ

$$S \equiv S_1 - \lambda S_2 = 0 \tag{1}$$

rovnice kuželosečky, probíhající průsek kuželoseček S_1 a S_2, neboť pro souřadnice průseků je $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, tím i $S = 0$. Je-li hodnota parametru λ

[89] Poznamenejme na okraj, že tyto konstrukce se již dnes na technických školách nevyučují vzhledem k malému počtu hodin věnovaných deskriptivní a analytické geometrii.

určená, je tím určena i kuželosečka. To se stává, žádáme-li, aby ta kuželsoečka probíhala ještě určitým bodem $(x'|y')$, *jenž se liší od průseků kuželoseček* $S_1 = 0$ *a* $S_2 = 0$, *neboť označíme-li čárkou resultát substituce souřadnic bodu* $(x'|y')$ *do* S_h, *obdržíme* λ *z relace*

$$S_1' - \lambda S_2' = 0.$$

Souhrn všech kuželoseček, jež z rovnice (1) obdržíme, mění-li se λ *od* $-\infty$ *do* $+\infty$, *jmenuje se svazek kuželoseček. Společné čtyři body všem kuželosečkám tohoto svazku jmenujeme vrcholy či základními body toho svazku.* ([Z96], str. 166–167)

Na základě principu duality podobným způsobem dospěl k řadě kuželoseček. Vyslovil Pappovu, Pascalovu a Sturmovu větu a ukázal jejich použití při studiu svazku kuželoseček a polohy tří přímek vzhledem ke kuželosečce.

Připomeňme na závěr, co už bylo uvedeno dříve, že výše popsaná Zahradníkova učebnice *Analytická geometrie. Svazek I. Geometrie bodu, přímky a kuželoseček* [Z96] vznikla nepatrnou úpravou litografovaných přednášek *Analytická geometrie v rovině. Přednášky z vyšší mathematiky I. běh* [Z106]. Výrazně navazovala na jeho středoškolskou učebnici *Analytická geometrie v rovině. Pro školu* [Z56] (1883, 1884), z níž převzal různé poznámky, historické komentáře, aplikace teorie determinantů, úvodní části v prvním oddílu a některé úlohy vztahující se ke klasifikaci kuželoseček. Student, který si pečlivě prostudoval tuto středoškolskou učebnici, měl při studiu jeho vysokoškolské knížky značně ulehčenou práci.

Zahradníkovu učebnici v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* recenzoval Jan Vojtěch. O Zahradníkově výkladu a způsobu prezentace látky napsal:

... probírá Zahradník moderním způsobem látku mnohem obsáhlejší, pojednávaje stručně, obsažně a poutavě jak o starších obvyklých úkonech, tak i o novějších pojmech, methodách a vztazích, jakož se děje ve větších učebnicích cizojazyčných. ...

Spis Zahradníkův vznikl z přednášek na vys. škole technické a určen jest v prvé řadě pro posluchače techniky; tím dány meze výkladů. V těchto mezích podáno však tolik látky takovým způsobem, že neváháme knihu vřele doporučiti všem, kdož v našich úzkých poměrech chtějí česky se poučiti o základech moderních výkladů analytickogeometrických. V tomto ohledu uvádíme zajímavý a povlovným postupem zcela přístupný výklad o souřadnicích trimetrických, početní úvod do pojmů geom. projektivní, velmi výhodné symbolické počítání s body, přímkami i kuželosečkami. Z ostatních předností budiž vyzvednuto aspoň něco: bod a přímka vystupují od počátku jako rovnoprávné elementy, týž fakt vyjadřuje se lehce rozmanitým způsobem (na př. harmonické dělení na str. 10–1, rovnice přímky str. 21–5), instruktivní úlohy objasňují theorii na potřebných místech, zavedeny invarianty kuželosečky, elegantně dokázány theorémy Apolloniovy o ellipse a hyperbole, vhodně podán o kruhu výklad delší, poutavě vyloženy hojné zvláštní případy svazku kuželoseček, diskutována stručně rovnice kuželosečky v symbolech tří přímek a j. ([Vo1], str. 72–73)

Poznamenejme, že tato recenze nebyla asi úplně nezávislá a objektivní, neboť J. Vojtěch byl K. Zahradníkovi za mnohé zavázán,[90] a navíc oba působili na téže vysoké škole. Připomeňme, že J. Vojtěch vydal v roce 1912 dobře propracovanou, promyšlenou a názornou, ale i na tehdejší dobu poměrně náročnou učebnici analytické geometrie pro septimu, tj. pro maturitní třídu reálek, nazvanou *Geometrie pro VII. třídu reálek, Analytická geometrie.*[91]

Analytická geometrie v prostoru

Roku 1911 vyšla litografie *O plochách druhého stupně. Z přednášek v zimním pololetí 1910/1 na c. k. české vysoké škole technické v Brně* [Z109][92] obsahující část Zahradníkových přednášek proslovených v rámci předmětu *Mathematika II.* pro posluchače druhého ročníku brněnské techniky. Učební text skládající se ze tří částí (129 paragrafů) navazoval na předchozí Zahradníkovu učebnici analytické geometrie v rovině [Z106], resp. [Z96]. Dochoval se v jediném exempláři v knihovně Matematického ústavu Akademie věd České republiky v Praze. Je velmi dobře čitelný, neobsahuje žádné škrtance, přepisy či opravy. Byl doplněn četnými ilustračními obrázky a řadou odkazů na základní a rozšiřující literaturu, které byly uvedeny v poznámkách. Téměř za každým paragrafem následovaly početní i teoretické příklady.

V první části nazvané *Vytvořování ploch* (str. 1–34) Karel Zahradník nejprve definoval plochu druhého stupně a zavedl pojmy řídící a tvořící křivka a řídící rovina. Pak se věnoval přímkové, válcové a kuželové ploše (předložil definice, analytická a parametrická vyjádření, upřesnil základní vlastnosti, popsal řezy kuželové plochy). Dále studoval konoidické a rotační plochy (popsal jejich vznik, uvedl definice, analytická a parametrická vyjádření). Stručně pojednal o Wallisově konoidu,[93] elipsoidu, jednodílném i dvoudílném hyperboloidu, toru a kuželové ploše. Uveďme na ukázku zavedení Wallisova konoidu, které se vyskytlo jako „demonstrační“ příklad:

Konoid t. zv. Wallisův měǰž za svou osu Z, za rovinu řídící rovinu XY a za křivku řídící kružnici, jejíž rovina je kolmá k rovině řídící a střed její leží na ose X. Rovnice této kružnice jest

$$x = c, \quad y^2 + z^2 = r^2 \tag{7}$$

Přímka tvořící $\overline{BC}$, jejíž rovnice jsou

$$z = c, \quad y = bx \tag{8}$$

[90] Například za místo na druhé české reálce v Brně (1907), habilitaci na české brněnské technice (1909), místo honorovaného docenta základů matematiky pro studenty chemie na téže škole (1909) a místo titulárního profesora tamtéž (1915). Viz kapitola věnovaná Zahradníkovu životu.

[91] JČM, Praha, 1912, 166 stran.

[92] Brno, 1911, 151 stran.

[93] John Wallis (1616–1703) byl významným anglickým matematikem. Konoidy byly oblíbeným stavebním prvkem.

probíhá kružnicí; musí tedy parametry a, b vyhovovati relaci

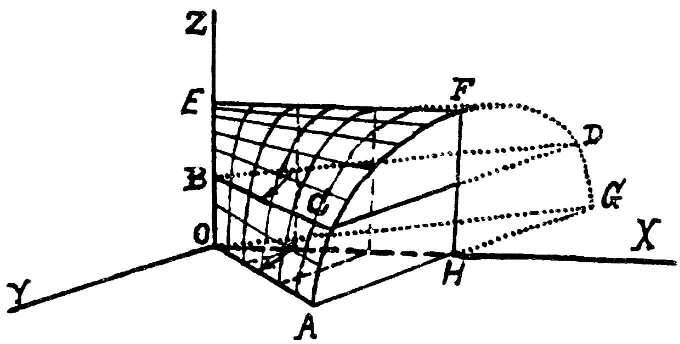
$$\psi(a,b) \equiv a^2 + b^2c^2 - r^2 = 0 \tag{9}$$

Vytvořený konoid bude plochou čtvrtého stupně a jeho rovnicí jest

$$x^2z^2 + c^2y^2 - r^2x^2 = 0 \tag{10}$$

Protneme-li tuto plochu rovinou BCD rovnoběžnou k rovině řídící, obdržíme dvě tvořící přímky $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, jež svírají tím menší úhel, čím více se rovina sečná od roviny řídící vzdaluje, a splývají v jedinou, je-li vzdálenost sečné roviny $z = r = \overline{FH}$. Průsek rovinou $x = h$ rovnoběžnou k rovině kruhu řídícího je ellipsa; blíží-li se rovina sečná k ose konoidu Z, zůstává jedna osa ellips stálá $= r$, druhá se pak stále zmešuje. ([Z109], str. 16–17)

Text příkladu doprovázel malý a nepříliš přehledný obrázek, který však mohl čtenáři usnadnit porozumění.



Zahradníkův výklad je neúplný a trochu nedbalý. Čtenář, který o Wallisově konoidu nikdy dříve neslyšel, textu nemůže dobře porozumět. Naznačme místa, která jsou nepřesná. Určení řídící kružnice je neúplné. Rovnice v (7) požadují, aby byla kolmá nejen k řídící rovině xy, ale i k ose x. Ve výkladu není řečeno, kde se nacházejí body B, C, D, F, H, tudíž není jasné, jak vypadají a kde se vezmou řídící přímky BC a BD. Zavádějící je i celá věta „Přímka tvořící … probíhá kružnicí“. Není také vyloženo, co je parametr a. Je tudíž velmi pravděpodobné, že jen výjimečný student techniky by s pomocí obrázku a textu dospěl k rovnicím (9) a (10).

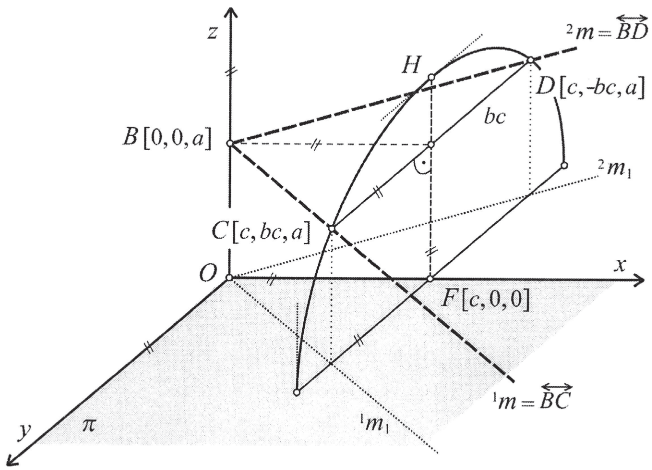
Zdůrazněme, že v každé učebnici geometrie by měl být výklad doplněn vhodnými a názornými obrázky. Ke snadnému pochopení by snad stačil následující jednoduchý obrázek,[94] který by měl být srozumitelný i pro studenta s minimem znalostí deskriptivní geometrie. Pro lepší názornost je zachováno Zahradníkovo značení – řídící prvky – osa z a rovina xy jsou vytaženy tučně, vytvořující přímky BC a BD jsou znázorněny tučnou přerušovanou čarou a jejich první

[94] Obrázek vytvořila Zita Sklenáriková v programu COREL.

průměty tečkovonou čarou. Trojúhelník $CF\bullet$ je pravoúhlý s pravým úhlem při $\bullet$. Potom tedy podle (8) platí

$$r^2 = a^2 + (bc)^2 = z^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 c^2$$

a to je již (10).



Výše uvedený citát jistě neukazuje Karla Zahradníka v příliš dobrém světle, ale je třeba mít na paměti, že hodnocený text je litografií jeho přednášek, tj. více méně neautorizovaná verze pomocného učebního materiálu, kterou pravděpodobně zapsal nějaký Zahradníkův student. Je nutno zdůrazit, že tento text nebyl určen k otištění ve formě řádné učebnice.

V dalších paragrafech první části Karel Zahradník vyšetřoval kulovou plochu. Nejprve popsal její vznik, vlastnosti a analytické vyjádření, pak vyložil mocnost bodu ke kulové ploše a vysvětlil vzájemnou polohu dvou, tří a čtyř kulových ploch. Pozornost věnoval také imaginárnímu kruhu v nekonečnu. O této problematice napsal:

Klademe-li $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ místo x, y, z do rovnice (4),[95] *obdržíme*

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 + (Ax + By + Cz)t + Dt^2 = 0 \tag{6}$$

Úběžná rovina, jejíž rovnicí jest $t = 0$, protíná kouli ve kruhu

$$K = 0, \quad t = 0 \tag{7}$$

Místo $K = 0$ můžeme následkem druhé rovnice psáti

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{8}$$

[95] Jedná se o rovnici kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$.

což jest však kužel, jejž úběžná rovina v témž kruhu potíná jako kouli. Rovnici kužele (8) se však žádnými realnými hodnotami za x, y, z mimo nully nevyhovuje, t. j. počátek souřadnic jest jediný realný bod kužele; ježto veškeré ostatní body jeho jsou imaginárné, slove proto imaginárný kužel. Z tvaru jeho rovnice jest patrno, že jest rotačním kuželem ku kterékoliv ose souřadnic jako ose rotační. Volíme-li však kterékoliv tři přímky navzájem k sobě kolmé a společným bodem probíhající za osy souřadnicové, nemění se členy druhého stupně v rovnici (4); zůstává tedy rovnice imaginárného kužele nezměněná. Imaginárný kužel (8) jest tedy kuželem rotačním vzhledem ku kterékoliv přímce vrcholem jeho jdoucí jako ose rotační, tedy protíná jej každá rovina, a tudíž i úběžná rovina, v témž kruhu, ve kterém tato protíná danou kouli. Kruh tento slove imaginárný kruh v nekonečnu. Jelikož rovnice (8) a $t = 0$ *jsou nezávislé na hodnotách a, b, c, r, plyne z toho, že všechny koule probíhají týmž imaginárným kruhem v nekonečnu. Imaginárný kruh v nekonečnu můžeme považovati za řídící křivku kužele* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *majícího svůj vrchol v počátku souřadnic.* ([Z109], str. 26–27)[96]

Na závěr první části definoval Karel Zahradník kruhovou inverzi a předvedl několik zajímavých speciálních příkladů.

Druhá část (str. 35–122) byla hlavní částí celého spisu. V úvodních paragrafech Karel Zahradník uvedl obecnou rovnici plochy druhého stupně, objasnil základní podmínku jejího jednoznačného zadání (9 bodů) a stručně se zmínil o vlastnostech svazku ploch určeného 8 body. Postupně dospěl až k homogennímu tvaru rovnice plochy druhého stupně:

Rovnici plochy $f = 0$ *možno dáti tvar homogenní, píšeme-li za* x, y, z *buď* $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ *aneb* $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ *a násobíme-li pak společným jmenovatelem* t^2 *resp.* x_4^2. *Tím obdržíme*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}xt + \\ + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0 \tag{3}$$

aneb

$$\sum\sum a_{hk}x_hx_k = 0 \tag{3'}$$

kde $a_{hk} = a_{kh}$ *a* $h, k = 1, 2, 3, 4$. ([Z109], str. 36)

Pak popsal základní transformace soustavy souřadnic (posunutí a otočení), definoval základní pojmy (střed, resp. vrchol plochy, tečná rovina, polární rovina) a uvedl jejich vlastnosti. Připomněl také definici a analytické vyjádření „asymptotického kuželu“, tj. asymptotické kuželové plochy. Dále věnoval pozornost průměrné a polární rovině a jejich vzájemnému vztahu. Průměrnou rovinu (v dnešní terminologii průměrovou rovinu) charakterizoval takto:

Bodem O jdoucí tetiva, jejíž směry $\alpha|\beta|\gamma$ *vyhovují podmínce*

$$\overline{u_1} = a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{34}\gamma = 0,$$

[96] Poznamenejme, že se nejedná o kouli, kužel a kruh, nýbrž o kulovou plochu, rotační kuželovou plochu (imaginární) a imaginární kružnici v nevlastní rovině komplexifikace rozšířeného euklidovského prostoru.

půlí se (čl. 32) v tom bodě, neboť, jsou-li M_1, M_2 průseky té tetivy s plochou, jest [rovnice (12)]

$$r_1 + r_2 = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} = 0$$

z čehož $\overline{M_1O} = \overline{OM_2} = \frac{1}{2}\overline{M_1M_2}$.

Pošineme-li soustavu souřadnou na bod $O'(x'|y'|z')$ jako nový počátek, přejdou a_{hk} ve a'_{hk} a podmínka, by tetiva novým počátkem jdoucí pod dřívějším směrem byla půlena v tom bodě, jest

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y'}\beta + \frac{\partial f}{\partial z'}\gamma = 0 \tag{27}$$

aneb

$$\alpha\varrho_1 + \beta\varrho_2 + \gamma\varrho_3 = 0 \tag{27'}$$

Souřadnice bodu O' musí vyhovovati rovnici (27) t. j. geometrické místo bodů (O'), jež půlí tetivy rovnoběžné se směrem $(\alpha|\beta|\gamma)$, jest rovina (27') jdoucí průsekem rovin ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 t. j. středem plochy; rovina tato slove průměrná (diametrálná) rovina se směrem tetiv $(\alpha|\beta|\gamma)$ sdružená. ([Z109], str. 54–55)

Pak Karel Zahradník objasnil vlastnosti různých řezů plochou druhého stupně, hlavní pozornost soustředil na průměry, sdružené roviny průměrové, osy ploch, hlavní roviny a stanovení směru os. Hlavní roviny zavedl tímto způsobem:

Ze sdružených rovin průměrných jsou význačny ony, jež jsou kolmy ku směru rovnoběžných tetiv, s nímž jsou sdruženy. Tyto průměrné roviny slovou hlavní roviny plochy druhého stupně a průměry, v nichž se protínají, slovou osy plochy.

Rovina průměrná sdružená se směrem $(\alpha|\beta|\gamma)$ rovnoběžných tetiv má rovnici

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

aneb

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)y +$$
$$+ (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)z + (a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma) = 0$$

Rovina tato jest kolmá k tetivám, s nimiž jest sdružena, platí-li relace

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= \lambda\alpha \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma &= \lambda\beta \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma &= \lambda\gamma \end{aligned} \tag{32}$$

jimž vyhovuje jen tenkráte určitými hodnotami za α, β, γ, je-li

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

aneb rozvinuto

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)-a_{12}^2(a_{33}-\lambda)-a_{13}^2(a_{22}-\lambda)-a_{23}^2(a_{11}-\lambda)+ \\ +2a_{12}a_{13}a_{23}=0 \qquad (34)$$

Spořádáme-li tuto rovnici dle mocností λ, obdržíme

$$-\Delta(\lambda)\equiv\lambda^3-\lambda^2\sum_{h=1}^{3}a_{hh}+\lambda\sum_{h=1}^{3}A_{hh}^0-\Delta=0 \qquad (35)$$

kde jest $\Delta=\Delta(0)$ a $A_{hh}^0=Sd(a_{hh})$ v determinantu Δ. ([Z109], str. 60–62)

V následujících paragrafech Karel Zahradník nejprve dokázal reálnost kořenů rovnice $\Delta(\lambda)=0$ (Cauchyho metodou, čistě geometricky, a pak ještě pomocí determinantů), provedl rozbor geometrického významu kořenů a ukázal jejich nezávislost na volbě souřadnicové soustavy. Pak předložil přehlednou klasifikaci ploch druhého stupně. Nejprve se věnoval plochám první třídy, které popsal rovnicí $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+a_{44}=0$ (tj. reálný a imaginární elipsoid, jednodílný i dvoudílný hyperboloid, reálná i imaginární kuželová plocha, rotační elipsoid, jednodílný, dvoudílný a rovnoosý rotační hyperboloid). Pak přešel k plochám druhé třídy, které popsal rovnicí $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+2a'_{14}x+2a'_{24}y+2a'_{34}z+a_{44}=0$ (tj. kruhová, eliptická, hyperbolická a parabolická válcová plocha, dvě reálné nebo imaginární roviny, paraboloid, hyperbolický a eliptický paraboloid, dvě rovnoběžné reálné nebo imaginární roviny, dvě splývající roviny). Výsledky klasifikace uvedl v přehledné tabulce.

V dalších paragrafech druhé části pojednal o elipsoidu, hyperboloidu a paraboloidu. V paragrafech věnovaných elipsoidu nejprve uvedl jeho analytické vyjádření, pak vyložil základní vlastnosti (např. střed, hlavní řezy, osy, vrcholy, tečná rovina z bodu elipsoidu i z vnějšího bodu, vzdálenost tečné roviny od středu elipsoidu, Mongeova kulová plocha (jako geometrické místo vrcholů pravoúhlých trojstranů opsaných elipsoidu), sdružené průměry). Na závěr pojednal o *kružných řezech* a *kružných bodech*. Kružné (kruhové) řezy zavedl takto:

Poněvadž řezy rovnoběžných rovin s ellipsoidem jsou křivky podobné, třeba vyšetřiti jen rovinné řezy centrálné. Píšeme-li krátce

$$E\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,\quad K_r\equiv\frac{x^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}-1$$

bude $E=0$ rovnicí ellipsoidu a $K_r=0$ rovnicí soustředné koule o poloměru r; dále patrně

$$K_r-E\equiv x^2\Big(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\Big)+y^2\Big(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}\Big)+z^2\Big(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c^2}\Big)=0$$

jest rovnicí kužele, jenž má vrchol ve středu ellipsoidu a prochází průsekem ellipsoidu s koulí. Mají-li tyto dvě plochy společný rovinný řez, musí se kužel *rozpadnouti ve dvě roviny, což nastává, vymizí-li koefficient jedné proměnné t. j. rovná-li se r jedné z poloos a, b, c ellipsoidu. Předpokládáme-li $a > b > c$, obdržíme za $r = a$ neb $r = c$ roviny imaginárné, za $r = b$ dvě roviny reálné*

$$K_b - E \equiv x^2\Big(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\Big) - z^2\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\Big) = 0 = \varrho_1\varrho_2 \qquad (17)$$

Roviny ϱ_1, ϱ_2 slovou cyklické roviny ellipsoidu a z rovnice jejich plyne, že probíhají střední osou ellipsoidu kolmo na rovinu obou ostatních os. Konstrukce jich jest jednoduchá. Opišme z bodu O kruh v hlavní rovině XOZ poloměrem rovným b, který protne hlavní řez $AEA'E'$ v této rovině ležící v bodech D, E, D', E'; roviny jdoucí střední osou ellipsoidu a průměry $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$ jsou hledané cyklické roviny ϱ_1, ϱ_2.

Jelikož každá rovina rovnoběžná s rovinou cyklickou protíná ellipsoid též v kruhu, máme na ellipsoidu dvě soustavy kruhů. Z rovnice

$$E \equiv K_b - \varrho_1\varrho_2 = 0 \qquad (18)$$

plynoucí z rovnice (16), můžeme jednotlivý kruh obdržeti jako průsek roviny $\varrho_1 = \lambda$ a koule $K_b - \lambda\varrho_2 = 0$ aneb jako průsek roviny $\varrho_2 = \mu$ a koule $K_b - \mu\varrho_1 = 0$, kdež λ, μ jsou libovolné parametry. ([Z109], str. 90–92)[97]

Výklad doprovázel malý a nepříliš přehledný obrázek. V dalších paragrafech Karel Zahradník uvedl definice a analytická vyjádření jednodílného, jednodílného rotačního, dvoudílného a dvoudílného rotačního hyperboloidu, které doprovodil jediným obrázkem, v němž byly zakresleny všechny výše uvedené plochy. Pak přešel k výkladu sdružených hyperboloidů, cyklických řezů a jejich vlastností, přímek ležících na jednodílném hyperboloidu, jejich vlastností a vzájemných poloh a na závěr dospěl k soustavám povrchových přímek. Například sdružené hyperboloidy definoval takto:

Dva hyperboloidy slovou sdružené, mají-li při společném středu osy co do délky a směru stejné, avšak reálné osy jednoho jsou imaginárnými osami druhého a naopak. ([Z109], str. 95)

Výklad vlastností paraboloidu Karel Zahradník rozdělil na dva přirozené celky. Nejprve se věnoval eliptickému paraboloidu, pak hyperbolickému paraboloidu. Uvedl jejich analytická vyjádření, popsal řezy rovinami kolmými k osám a rovinami rovnoběžnými s osami, řídící, tečné a průměrné roviny, kružné (tj. kruhové) řezy. Speciální pozornost věnoval objasnění faktu, že hyperbolický paraboloid je přímková plocha a na závěr naznačil základní vztah mezi jednodílným hyperboloidem a hyperbolickým paraboloidem.

Pošineme-li osy souřadné při jednoplochém hyperboloidu daném rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ve smyslu osy Z o délku c, což provedeme substitucí $z = z_1 + c$, obdržíme

$$\frac{cx^2}{a^2} - \frac{cy^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c} + 2z_1 = 0$$

[97] Poznamenejme, že v Zahradníkově pojetí termín *koule* všude znamená *kulová plocha* a *kruh* označuje *kružnici*.

a, myslíme-li si, že a, b, c rostou do nekonečna tak, že $\lim \frac{a^2}{c} = -p$, $\lim \frac{b^2}{c} = -q$, *přejde jednoplochý hyperboloid ve*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z_1$$

t. j. v hyperbolický paraboloid. ([Z109], str. 121–122)

Třetí část učebního textu (str. 122–151) tvořily čtyři menší celky. V prvním pojednal Karel Zahradník o podmínkách, jimiž je jednoznačně určena plocha druhého stupně. Nejprve dokázal, že plocha druhého stupně je určena devíti lineárními podmínkami, tj. devíti body, resp. devíti tečnými rovinami. Pak se věnoval speciálním případům; ukázal, že pro kuželovou plochu a paraboloid stačí 8 podmínek, pro rotační plochu, eliptickou nebo hyperbolickou válcovou plochu stačí 7 podmínek, pro parabolickou válcovou plochu nebo plochu druhého stupně rozpadající se na dvě roviny stačí 6 podmínek. Pak velmi podrobně analyzoval jednoduché a násobné podmínky.[98]

V druhém celku třetí části učebního textu Karel Zahradník využil zkrácený symbolický zápis, který mu umožnil názorně popisovat svazek ploch druhého stupně a vyšetřovat vzájemnou polohu dvou, resp. tří ploch (průsečnice ploch a jejich vlastnosti, společné tečny a tečné roviny), definovat kuželovou a válcovou plochu opsané dané ploše a polární čtyřstěn plochy.

V třetím celku definoval fokální kuželosečky elipsoidu, jednodílného a dvoudílného hyperboloidu a paraboloidu. V posledním, čtvrtém celku se věnoval konfokálním plochám. Uvedl jejich definici a vyšetřil vlastnosti řady elipsoidů, jednodílných a dvoudílných hyperboloidů. Na závěr popsal vzájemnou polohu tří konfokálních ploch s využitím kartézských a eliptických souřadnic.

O Zahradníkově učebnici v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* recenzent Jan Vojtěch napsal:

Přednášky uvedeného obsahu psány jsou v témž duchu jako p. auktorova Analytická geometrie (vydaná v Brně 1907). Jsou cenné už vhodným výběrem látky nejdůležitější; opíraje se o bohaté zkušenosti podává p. auktor i věci složitější methodou jednoduchou a velmi přístupnou. Ačkoli vynikají stručností, vedou přece přednášky tyto na některých místech dosti daleko (hlavně v části třetí).

[98] Vyložil, že bod, tečna či tečná rovina představují jen jednoduché podmínky, tečna s bodem dotyku či průměr dvojnásobné podmínky, tečná rovina s bodem dotyku, střed, povrchová přímka kuželové plochy, povrchová nebo tvořící přímka či řídící rovina paraboloidu jsou trojnásobné podmínky, každá význačná přímka plochy (např. osa) či Mongeova kulová plocha dávají čtyřnásobnou podmínku, kuželosečka na ploše, kružný (kruhový) bod se svou tečnou rovinou, osa se středem, kuželová plocha asymptotických směrů či dvě povrchové přímky různých soustav vyjadřují pětinásobné podmínky, dvě povrchové přímky téže soustavy či tři sdružené průměry dané svou polohou definují šestinásobné podmínky, dvě přímky jedné soustavy a jedna přímka druhé soustavy, kuželosečka a přímka zastupují sedminásobnou podmínku, dvě mimoběžky a dva body, asymptotická kuželová plocha, dvě kuželosečky na ploše, dvě přímky jedné soustavy a dvě přímky druhé soustavy určují osminásobnou podmínku, tři mimoběžné přímky téže soustavy jednoznačně určují přímkovou plochu druhého stupně a tři sdružené průměry dané svou polohou a délkou jednoznačně definují plochu druhého stupně.

Věci zvlášť významné odvozeny několika způsoby, věnován zřetel také zajímavým a důležitým pojmům i větám novějšího data. Výklad podporují příklady na mnohá místa vložené.

Theorie ploch 2. stupně jest ovšem částí celého kursu mathematiky na vysoké škole technické; nehledě k maličkostem tvoří však uzavřený celek. Po stránce formální vytkl by referent nesouhlas s některými názvy (na př. kosý válec, rovina průměrná, kružné řezy a pod.). Nemnohé chyby písma (na př. kužel assymptotický místo [správného] asymptotický a j.) nebo omyly v označení … pozorný čtenář snadno si opraví.

Netřeba zajisté připomínati, že přednášky tyto přednostmi svými samy se doporučují. ([Vo2], str. 76–77)

Ani tuto recenzi nelze považovat za skutečné nezávislé a objektivní vyjádření, jak plyne z poznámky učiněné k předchozí Vojtěchově recenzi Zahradníkovy učebnice [Z96].

Další české učební texty analytické geometrie

Zahradníkova učebnice rovinné geometrie nebyla ani prvním, ani jediným česky psaným vysokoškolským učebním textem zabývajícím se touto tematikou ve druhé polovině 19. století a na počátku 20. století.

Roku 1864 vydal Gustav Skřivan[99] pro studenty techniky *Úvod do analytické geometrie v rovině*,[100] který byl první česky psanou vysokoškolskou učebnicí této disciplíny. Obsahoval pouze její základy,[101] a byl tudíž jen elementární pomůckou ke Skřivanovým kurzovním přednáškám o analytické geometrii, které byly součástí předmětu *Mathematika*, v nichž kladl důraz na aplikace geometrie ve stavební a strojní praxi. Jeho výklad nepatrně přesahuje úroveň současných středoškolských učebnic matematiky; náročnější je jen v úplné klasifikaci kuželoseček neopomíjející ani imaginární případy. Zajímavý byl tím, že kladl

[99] Gustav Skřivan (1831–1866) byl český matematik, od roku 1863 zastával na pražské polytechnice místo profesora matematiky s českou vyučovací řečí.

[100] Praha, 1864, 144 stran + dvě litografované tabulky. Druhé nezměněné vydání vyšlo roku 1873.

[101] Učebnici tvořilo osm částí, které se dále dělily na kratší paragrafy. V první části autor pojednal o poloze bodu, soustavách souřadnic (kartézská, kosoúhlá, polární) a jejich transformacích (posunutí, otočení a jejich kombinace). Druhou část věnoval přímce. Odvodil obecnou i úsekovou rovnici přímky, vyřešil klasické úlohy (nalezení rovnice přímky dané dvěma body, bodem a směrem), popsal vzájemnou polohu přímek (úhel, kolmost, rovnoběžnost, vzdálenost bodu od přímky a vzdálenost dvou přímek), uvedl podmínky, kdy tři body leží v jedné přímce a kdy tři přímky procházejí jedním bodem. Dále vyložil základní vlastnosti trojúhelníku (obsah, těžnice, výšky, osy úhlů, osy stran). Tuto část ukončil stručným rozborem algebraické rovnice n-tého stupně a stanovením podmínek, kdy reprezentuje svazek přímek. Ve čtvrté až sedmé části se zabýval kružnicí, parabolou, elipsou a hyperbolou. Zavedl jejich analytická vyjádření, definoval základní pojmy (vrchol, ohnisko, střed, osa, řídící přímka, tečna, sečna, pól, polára, tangenta, subtangenta, normála, subnormála, sdružené průměry, výstřednost atd.), vyšetřil vzájemnou polohu přímky a kuželosečky a kuželoseček navzájem, dokázal vlastnosti průvodičů a na závěr připojil rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích. V poslední části uvedl klasifikaci kuželoseček (včetně degenerovaných a imaginárních případů) a vyřešil několik obtížnějších příkladů, které bychom dnes označili jako úlohy o množině bodů daných vlastností.

důraz na propojení analytické a deskriptivní geometrie, pečlivé odvození poznatků a uváděl také úlohy, které rozšiřovaly základní teorii. Jeho nevýhodou však byla malá matematická exaktnost (práce s nekonečně blízkými body, nekonečně malými či velkými veličinami), odlišná terminologie a nedostatek ilustračních obrázků, které navíc nebyly zařazeny do textu, ale byly uvedeny ve speciální dvoustránkové příloze.[102]

O deset let později jej doplnil *Úvod do analytické geometrie v prostoru*[103] sepsaný Františkem Josefem Studničkou pro studenty techniky a univerzity a doporučený i pro nejvyšší ročníky gymnázií a reálek. Ačkoli obsahoval pouze základní učivo v rozsahu dnešních požadavků na učitelském studiu matematiky,[104] podával přehledný a takřka úplný výklad obecných i speciálních vlastností jednotlivých útvarů (přímka, rovina, kuželosečky) doplněný úplným odvozením vztahů a vzorců. Jeho nevýhodou bylo nadměrné užívání determinantů, aniž by práce s nimi byla řádně vysvětlena. Některé části tak nebylo možno bez předchozího studia teorie determinantů zvládnout, pokud chtěl čtenář porozumět detailnímu odvození jednotlivých vztahů. Od současných učebních textů se výrazněji lišil jen v terminologii a uspořádání látky.[105]

V letech 1891 až 1892 vyšly dva rozsáhlé svazky litografovaných přednášek Eduarda Weyra nazvané *Výklady o mathematice*,[106] které obsahovaly základní kurz matematiky určený pro studenty prvního a druhého ročníku techniky. První díl vycházející z jeho přednášek proslovených ve školním roce 1890/1891 se skládal z devíti částí. Analytické geometrii autor věnoval osmou část na-

---

[102] Doplňme pro úplnost, že G. Skřivan v učebnici neuvedl žádné odkazy na použitou literaturu; v předmluvě se pouze odvolal na monografie a články A. Clebsche, W. Fiedlera, O. Forta, F. Joachimsthala, G. Salmona a J. Salmona, neuvedl však ani jejich názvy.

[103] Praha, 1874, 116 stran.

[104] Učebnici tvořily čtyři části rozdělené na řadu kratších paragrafů. Úvod autor věnoval problematice průmětů v rovině a prostoru. V první části se zabýval určením polohy bodu v prostoru v různých souřadnicových systémech, popsal vztahy mezi body (lineární kombinace bodů, vzdálenost, poměr), odvodil obecnou a parametrickou rovnici roviny, diskutoval vzájemnou polohu rovin (průsečnice, vzdálenost, úhel dvou rovin), odvodil základní vlastnosti čtyřstěnu a rovnici přímky, objasnil vzájemnou polohu dvou přímek a přímky a roviny. Druhou část věnoval válcovým a kuželovým plochám, dále pak rotačním plochám druhého stupně a jejich vlastnostem. V dodatku pojednal o průniku ploch druhého stupně. O Studničkově učebnici viz [Be7].

[105] F. J. Studnička kromě odkazu na své dvě učebnice základů teorie determinantů a základů sférické trigonometrie neuvedl žádné odkazy na použitou literaturu; v předmluvě napsal, že citování klasických prací není v učebních textech nutné.

[106] Díl I., 1. vydání, vydal em. assist. prof. A. Vaňourek, 1891, 310 stran, 2. vydání (opravené), 3. vydání, 206 stran (roky dalších nejsou uvedeny; podle informací otištěných v recenzi druhého vydání druhého dílu vyšlo druhé vydání prvního dílu až po roce 1899). Díl II., 1. vydání, vydal A. Vaňourek, 1892, 271 stran, 2. opravené vydání vydal E. Hlavatý, 1898, 271 stran. Oba díly měly formát A4, byly psány velmi hustým, dobře čitelným písmem. Doplňme, že A. Vaňourek byl nejprve asistentem matematiky na české technice v Praze, později byl řádným profesorem matematiky a fyziky na střední škole v Rakovníku. E. Hlavatý byl také nejprve asistentem matematiky na české technice v Praze, pak působil jako středoškolský profesor matematiky a fyziky na reálce v Hradci Králové. O litografiích viz [R1], [R2], [R3], [R4] a [B2].

zvanou *Analytická geometrie v rovině*[107] a devátou část nazvanou *Analytická geometrie v prostoru*.[108] Jejich uspořádání je srovnatelné s uspořádáním v Zahradníkově učebnici, rozsah a náročnost prezentované teorie je menší. Ve srovnání s předchozími texty vynikaly Weyrovy litografie pečlivě provedenými a dobře promyšlenými důkazy a názornými obrázky. Na druhé straně neobsahovaly řádné odkazy na použitou či doporučenou literaturu.[109] Druhý díl vycházel z Weyrových přednášek pro druhý ročník techniky, které proslovil ve školním roce 1891/1892,[110] a skládal se z pěti částí, z nichž čtvrtá část nazvaná *Pokračování analytické geometrie v prostoru* byla věnována analytické geometrii ploch druhého stupně.[111]

Zhruba v polovině devadesátých let 19. století byly vytištěny litografované přednášky Gabriela Blažka nazvané *I. Mathematika, běh dle přednášek prof. D^r = G. Blažka*,[112] které patrně zapsal v letech 1893 až 1894 jeho student František Turnschek z Kuklen. G. Blažek v devíti kapitolách uvedl základy vysokoškolské matematiky respektující potřeby budoucích techniků. Ve dvou krátkých kapitolách – *Základové analytické geometrie v rovině* a *Počátky analy-*

---

[107] Osmá kapitola se skládala ze čtyř celků. První celek pojednával o bodu (poloha bodu, základy promítání, základní typy souřadnic (kartézské a kosoúhlé), transformace soustavy souřadnic (otočení, posunutí a jejich kombinace), vzdálenost bodů, dělící poměr, harmonický bod a výpočet obsahu trojúhelníku). Druhý celek se věnoval přímce (obecná a úseková rovnice, směrnice, průsečík dvou přímek, vzájemná poloha dvou přímek), klasickým úlohám (nalezení rovnice přímky zadané dvěma body, bodem a směrem, bodem a úhlem sevřeným s jinou přímkou, výpočet vzdálenosti bodu od přímky a vzdálenosti dvou přímek), vlastnostem úplného čtyřrohu, harmonickým bodům a paprskům a speciálním souřadnicím (homogenní Hesseovy bodové a přímkové souřadnice). Třetí celek nejprve zavedl algebraickou čáru (obecná definice algebraické čáry a její analytický popis, vzájemná poloha přímky a čáry), pak vyložil teorii kuželoseček (základní i speciální vlastnosti – geometrická definice a analytické vyjádření, střed, ohnisko, vrchol, parametr, řídící přímka, vzájemná poloha kuželosečky a přímky, tečna, pól a polára, sdružené průměry, asymptota, vzájemná poloha kuželoseček, polární rovnice kuželoseček) a končil klasifikací kuželoseček (včetně degenerovaných a imaginárních případů), transformací středových a nestředových kuželoseček a konstrukcí oskulačních kružnic.

[108] Devátou kapitolu tvořilo několik kratších celků, které pojednávaly o základních souřadnicových soustavách, promítání přímek a ploch, poloze bodu a vzdálenosti dvou bodů, vzájemné poloze dvou a více přímek, objemu čtyřstěnu, jednoduchých transformacích souřadnic, analytickém vyjádření roviny, vzájemné poloze dvou a více rovin, vzdálenosti bodu od roviny a bodu od přímky, nalezení rovnice roviny při různých způsobech jejího zadání a příčce dvou mimoběžek.

[109] Eduard Weyr v závěru deváté kapitoly doporučil studovat učebnice J. Plückera, A. Cayleyho, G. Salmona, W. Fiedlera a L. O. Hesse. Neuvedl však jejich názvy, ani místa či rok vydání.

[110] Druhé vydání druhého dílu obsahovalo přednášky z roku 1897/1898. V geometrické části však nedošlo k výraznějším změnám.

[111] Čtvrtou část tvořily tři celky. První definoval válcovou, kuželovou a kulovou plochu a popsal jejich vlastnosti. Druhý obecně pojednal o vlastnostech plochy druhého stupně (střed, osy, transformace k hlavním osám, klasifikace ploch druhého stupně, speciální transformace středových a nestředových ploch, polární vlastnosti). Poslední, třetí celek uvedl speciální vlastnosti elipsoidu, hyperboloidu (jednodílného a dvoudílného), paraboloidu (eliptického a hyperbolického).

[112] Litografované přednášky, vročení chybí, 480 stran.

tické geometrie v prostoru – prezentoval úvodní partie analytické geometrie.[113] V celé učebnici kladl důraz na pochopení nejdůležitějších pojmů a elementárních vztahů, zejména na procvičení příkladů a technické aplikace. Uváděl naprosté minimum teorie, které doplňoval stručnými a jednoduchými důkazy nebo je demonstroval na názorných příkladech. V části věnované analytické geometrii prakticky nešel nad tradiční rámec tehdejší středoškolské látky.

V roce 1902 vydal F. J. Studnička *Úvod do analytické geometrie v rovině*[114] navazující na Skřivanovu vysokoškolskou učebnici, Jandečkovy a Zahradníkovy středoškolské geometrické učebnice a využívající nová vydání klasických německých učebnic.[115] Učebnice měla výborné metodické a didaktické zpracování, neboť její autor vycházel ze svých letitých zkušeností z výuky matematiky na pražské univerzitě, kde se samostatné přednášky o analytické geometrii konaly pravidelně od roku 1872 ve dvou až tříletém cyklu. Vynikala také úplným a někdy až zbytečně podrobným odvozením všech poznatků a vhodnými ilustračními příklady. Jejím záporem byla úplná absence pojmu vektor a lpění na starším používání pojmů vzdálenost a směr. Ač byla určena pro základní univerzitní kurz, nebyla příliš exaktní a matematicky přesná (zejména v partiích o nekonečně malých veličinách a spojitých funkcích) a spíše se hodila pro naprosté začátečníky. Uvážíme-li dnešní objem látky vyučované z analytické geometrie na středních školách, zjistíme, že více méně odpovídá svým rozsahem výše zmíněné Studničkově učebnici. Ta obsahuje navíc jen partie o průměrech kuželoseček, polárách a využití různých souřadnicových soustav.[116]

Shrnutí

Zahradníkovy vysokoškolské učebnice analytické geometrie v řadě paragrafů předstihly své předchůdce a překračovaly obvyklý rozsah výuky této disciplíny na našich technických školách na počátku 20. století. Zajímavým způsobem

[113] G. Blažek stručně vyložil tato témata: souřadnice bodu, souřadnicové systémy a transformace, vzdálenost bodů, základní vyjádření přímky v rovině, vzájemná poloha dvou přímek, kuželosečky (definice, obecná rovnice, klasifikace, poláry, tečny a sečny, tětivy a normály, asymptoty), rovnice přímky a roviny v prostoru, vzájemná poloha a vzdálenost dvou přímek, přímky a roviny, bodu a přímky. Podrobnější hodnocení litografie lze najít v [Be2].

[114] Sborník Jednoty českých mathematiků, č. VII, Praha, 1902, 224 stran.

[115] Jednalo se o následující knihy: O. Fort: *Lehrbuch der analytischen Geometrie, I. Theil* (6. vydání, 1893) a G. Salmon – W. Fiedler: *Analytische Geometrie der Kegelschnitte* (6. vydání, 1898).

[116] V krátkém historickém úvodu autor mimo jiné popsal vznik a význam kartézských, polárních, kosoúhlých a bipolárních souřadnic. V prvním oddělení vyložil transformaci, v druhém oddělení pojednal o přímkách (rovnice přímky, vzájemná poloha dvou a tří přímek, vzdálenost přímek a vzdálenost bodu od přímky), v třetím oddělení se věnoval kružnici (definice kružnice, vzájemná poloha dvou a tří kružnic, přímky a kružnice), ve čtvrtém až šestém psal o elipse, hyperbole a parabole (geometrická definice kuželoseček, jejich rovnice v různých souřadnicových systémech, rovnice tečen, polár a asymptot), v sedmém oddělení provedl podrobný rozbor rovnice druhého stupně. Doplňme pro zajímavost, že F. J. Studnička v učebnici uvedl seznam základní literatury (české, německé, italské, francouzské a anglické učebnice a monografie), z níž při sepisování vycházel. V poznámkách pod čarou citoval další rozšiřující cizojazyčnou literaturu. Jeho citace byly přesné a úplné. Podrobnější hodnocení učebnice je uvedeno v [Be7].

propojovaly výuku algebry, projektivní a deskriptivní geometrie s výukou analytické geometrie. Pro budoucí techniky však byly poměrně náročné, a to jak svým obsahem, tak způsobem prezentace vyučované látky. Ukazuje se v nich, že Karel Zahradník byl dobrým geometrem, který dlouhá léta učil matematiku na univerzitě a své nároky nehodlal snížit ani u studentů techniky.

V současné době se s tak širokým rozsahem a náročným obsahem výuky analytické geometrie na školách technického charakteru již nesetkáváme. Dokonce rozsah v několika paragrafech převyšuje i požadavky kladené na studenty matematiky na školách univerzitního směru. Jen studenti deskriptivní geometrie dnes probírají teorii svazků přímek, bodových řad, kuželoseček a ploch druhého stupně v rozsahu Zahradníkových učebních textů.

Litografie přednášek o teorii ploch a křivek v prostoru

Roku 1898 vyšla litografie Zahradníkovy chorvatské učebnice *O plohama i krivuljama u prostoru. Predavanja u ljetnom semestru godine 1898* [Z105][117] obsahující text jeho přednášek o prostorových křivkách a plochách, které proslovil v letním semestru školního roku 1897/1898 pro studenty záhřebské univerzity. Výše uvedená problematika mu byla poměrně blízká; poprvé o ní přednášel již v letním semestru školního roku 1877/1878, pak se jí zabýval v letech 1879/1880, 1881/1882, 1885/1886, 1889/1890 a 1893/1894.[118] Jeho litografie byla první chorvatskou prací uvádějící do studia základů diferenciální geometrie. Sepsal ji pro pokročilé posluchače, a proto automaticky předpokládal jejich dobrou znalost matematické analýzy (reálné funkce více proměnných, diferenciální rovnice), analytické geometrie a algebry a uváděl výhradně příklady teoretického charakteru, které rozšiřovaly základní látku. Text doplnil jen minimem názorných obrázků, ale v poznámkách pod čarou uvedl četné odkazy na německou, francouzskou a anglickou knižní i časopiseckou, moderní i klasickou literaturu.[119] Dnes již není možno zjistit, kdo zápisky napsané dobře čitelným, drobným a hustým písmem zaznamenal, zda to byl Zahradníkův žák nebo asistent, a do jaké míry je Karel Zahradník před vydáním upravil.

Než se pokusíme naznačit obsah a úroveň Zahradníkovy litografie, připomeňme moudrá a výstižná slova Bohumila Bydžovského (1880–1969):

Posouzení lithografovaných přednášek musí se díti s hledisek částečně jiných, než posouzení tištěné knihy, hlavně pokud se týče výběru a uspořádání látky. A je jasno, že v přednáškách více než v knize vystupuje do popředí záliba autorova; moment osobní záliby je pro poutavost a vůbec úspěch přednášky velmi

[117] Zagreb, 152 stran. Litografie se dochovala v jednom exempláři v Národní knihovně v Záhřebu a ve dvou exemplářích v knihovně Matematického ústavu Akademie věd České republiky v Praze.

[118] Viz seznam Zahradníkovy pedagogické činnosti uvedený ve faktografické příloze této monografie. Obvykle se jednalo o dvouhodinovou nebo tříhodinovou jednosemestrální přednášku.

[119] Karel Zahradník doporučoval například práce A. F. Möbia, G. Salmona, W. Fiedlera, C. Jordana, A. Cayleyho, J. Plückera, J. A. Serreta, Ch. Hermita, É. Picarda, Ch. Dupina, L. Cremony, G. Darbouxa, Em. Weyra a Ed. Weyra.

důležitý. Také nemůže býti přednáška tak akademicky upravena, jako definitivní text tištěné knihy; postup přednášky je cosi živého, co teprve přednášením samým nabývá určitějších obrysů, takže přesný, do nejmenších detailů propracovaný program nebývá dán. Odtud vyplývá jistá volnost v úpravě a rozvrhu, která činí lithografované přednášky čitelnějšími, než je kniha. ([By1], str. 514)

Litografie se skládala ze tří částí, které byly rozděleny na 79 paragrafů. První část *Krivulja u prostoru* poskytovala základy diferenciální geometrie prostorových křivek a tvořily ji čtyři delší celky. V prvním celku (8 paragrafů) Karel Zahradník uvedl definici prostorové křivky, její analytické a parametrické vyjádření, vyložil určování směrů v prostoru a definoval pojmy jednoduchý, násobný, singulární, stacionární bod a bod dané třídy, stupeň a rod křivky, normálová rovina, tečna a normála. Věnoval se také transformacím souřadnic, popsal obecné vlastnosti křivek a jejich vznik s využitím předem definovaného pohybu bodu v prostoru. Ve druhém celku *Okret pravca oko točke; fleksija krivulje* (8 paragrafů) objasnil úhel dvou tečen, oskulační rovinu, nalezení hlavní normály a binormály, stanovení hlavního trojhranu a výpočet poloměru křivosti prostorové křivky. Ve třetím celku *Okret ravnine oko pravca; torzija krivulje* (8 paragrafů) se zaměřil na výklad oskulační roviny, úhlu dvou oskulačních rovin, křivosti a torze, uvedl známé Frenetovy vzorce a Bertrandovu větu, naznačil vyjádření křivky v okolí libovolného bodu pomocí rozvoje v řadu. Ve čtvrtém celku *Teorija doticaja* (12 paragrafů) popsal vzájemnou polohu dvou křivek a křivky a plochy (dotyk, společné body), pojednal také o oskulačních plochách (oskulační rovina, oskulační sféra).

Druhou část nazvanou *O plohama u prostoru* (37 paragrafů) věnoval Karel Zahradník prostorovým plochám, jejich popisu a výkladu jejich vlastností. Nejprve uvedl definici plochy, její analytické a parametrické vyjádření, pak popsal transformaci souřadnic a klasifikoval typy bodů (singulární, násobný, stacionární, dané třídy) a kruhové body. Následně zavedl stupeň plochy, tečnou a normálovou rovinu, tečnu a normálu, jejich vlastnosti a vzájemnou polohu. Zabýval se dotykem ploch, obálkou ploch závislých na jednom, resp. dvou parametrech, problémem obecného i speciálního rozvinutí plochy (rozvinutí na rovinu nebo rotační plochu), definoval polární plochu, vztah mezi křivkou a polární plochou, resp. křivkou a plochou obecně. Neopominul ani rektifikaci křivky a kvadraturu plochy. Zavedl také evolutu a evolventu prostorové křivky a popsal Dupinovu indikatrix. V závěru vyložil Meusnierovu větu a Eulerovu větu a pojednal o křivkách na ploše (poloměry křivosti hlavních normálních řezů, obecná křivka na ploše, geodetické křivky a geodetická křivost, normální křivost, sdružené tečny) a o křivosti plochy.

V třetí části *Osebite krivulja na plohi* (6 paragrafů) se krátce zabýval význačnými křivkami na ploše (sdružené, hlavní a asymptotické křivky) a podrobněji popsal křivky na eliptickém a hyperbolickém paraboloidu.

Zahradníkovy přednášky z teorie křivek a ploch sehrály důležitou roli při vzniku chorvatského názvosloví pro diferenciální geometrii.

České učební texty diferenciální geometrie

Diferenciální geometrie nepatřila v našich zemích v 19. století k příliš oblíbeným disciplínám. Od druhé poloviny šedesátých let František Josef Studnička přednášel její základy na technice v Praze v rámci předmětu *Diferenciální a integrální počet II.*, resp. *Mathematika II.*, v nichž se také, jak bylo v té době naprosto obvyklé, věnoval aplikacím diferenciálního počtu v geometrii, a tedy základům diferenciální geometrie. Roku 1868 vydal pro své studenty učebnici *Základové vyšší mathematiky. Díl I. O počtu differenciálním*[120] skládající se z úvodu a tří samostatných „knih". Třetí „knihu" nazvanou *O upotřebení počtu differencialního při řešení úloh vyšší geometrie* rozdělil na čtyři části. První věnoval křivkám v rovině, druhou křivkám v prostoru, třetí plochám, poslední pak množinám bodů daných geometrických vlastností. Vyložil základní charakteristiky útvarů (tečna, normála, poloměr křivosti, křivost, dotyk, oskulační kružnice, oskulační kulová plocha apod.). Jeho učebnice postrádala dnešní členění látky na definice, věty a důkazy. Teorii se snažil vyjádřit názorně a obšírně, pojmy a vlastnosti objasňoval na řadě konkrétních příkladů. Výklad vedl spíše intuitivně, vyhýbal se exaktnímu popisu a přednost dával názorné cestě, která byla vhodná pro úvodní motivaci a úplné začátečníky, ale zcela nevhodná pro přesný matematický výklad.[121] O deset let později, již v době svého působení na pražské univerzitě, vydal přepracovaný první díl učebnice, který pak užíval až do konce své pedagogické činnosti.[122] O základech diferenciální geometrie nenapsal žádnou učebnici ani časopiseckou práci, neboť nebyl geometrem a geometrickou problematikou se téměř nezabýval.

Od poloviny sedmdesátých let F. J. Studnička nepravidelně přednášel na pražské univerzitě o aplikacích diferenciálního a integrálního počtu v geometrii. Této tematice věnoval samostatné přednášky v letním semestru 1872/1873, 1875/1876, 1878/1879, 1881/1882, 1887/1888 a 1891/1892 (obvykle dvou až tříhodinové přednášky) a dva matematické semináře (letní semestry 1893/1894 a 1895/1896). Pouze v letním semestru školního roku 1877/1878 proslovil samostatnou semestrální dvouhodinovou přednášku nazvanou *O prostorových křivkách a plochách.*[123]

Základy diferenciální geometrie v rámci výběrových přednášek přednášel na pražské univerzitě v letech 1876 až 1882 Eduard Weyr, tehdy soukromý docent novější geometrie.[124] Doplňoval tak Studničkovy základní kurzovní přednášky.

---

[120] Tiskem Ed. Grégra, nákladem spisovatelovým, Praha, 1868, 240 stran; druhé valně změněné vydání, Praha, 1878, 280 stran. Rozsáhlá učebnice *Základové vyšší mathematiky* pokrývající celou tehdejší výuku matematiky na české technice v Praze měla tři díly (2. díl, Praha, 1871, 216 stran; 3. díl, Praha, 1867, 296 stran), byla doplněna sbírkou *Vyšší mathematika v úlohách* (1. vydání, Praha, 1866, 48 stran; 2. vydání, Praha, 1874, 64 stran).

[121] Poznamenejme, že exaktní styl (definice – věta – důkaz) ještě není zárukou matematické přesnosti, správnosti a srozumitelnosti, stejně jako dnes zavrhovaný intuitivní způsob prvního výkladu nutně neznamená nepřesnou a nesprávnou cestu.

[122] Podrobnější hodnocení Studničkovy učebnice lze najít v [Be7].

[123] O jeho pedagogickém působení viz [Be7].

[124] Roku 1876/1877 měl celoroční přednášku *O plochách druhého stupně* (2 hodiny v zimním semestru a 1 hodina v letním semestru) a v roce 1879/1880 konal celoroční dvouhodinovou přednášku *O plochách druhého a třetího stupně.* Nenapsal však žádný učební text.

Eduard Weyr začal podruhé působit na pražské univerzitě roku 1891, když byl jmenován suplujícím profesorem a pověřen výukou „moderní geometrie“, tj. výukou projektivní, diferenciální a algebraické geometrie. O diferenciální geometrii přednášel v letech 1891/1892, 1892/1893, 1896/1897, 1898/1899, 1900/1901 a 1902/1903. Obvykle se jednalo o celoroční tříhodinový kurz.[125] Ani v devadesátých letech však Eduard Weyr pro své posluchače nenapsal učebnici diferenciální geometrie. O náplni a organizaci jeho přednášek si můžeme udělat jistou představu ze zápisů, které kolem roku 1900 pořídil Jan Schuster (1880–1961);[126] dochovaly se v knihovně Matematicko-fyzikální fakulty Karlovy univerzity pod názvem *Obecná theorie ploch*, dnes jsou svázány s dalšími Studničkovými přednáškami a jsou uvedeny v katalogu pod Studničkovým jménem.[127] Výběrem látky i způsobem výkladu se podobají úvodním kapitolám litografovaných přednášek nazvaných *Lezioni di geometria differenciale*, které sepsal slavný italský geometr Luigi Bianchi (1856–1928).[128]

Od roku 1875 do roku 1903 učil Eduard Weyr na české technice v Praze, kde vedl kurzovní přednášky *Mathematika I.*, *Mathematika II.* a *Geometrie polohy*, v nichž se mimo jiné také objevily základy diferenciální geometrie křivek a ploch. Jak jsme viděli již v předchozí části této kapitoly, v letech 1891 až 1892 vyšly dva rozsáhlé svazky jeho litografovaných přednášek nazvané *Výklady o mathematice*, které obsahovaly základní kurz matematiky určený pro studenty prvního a druhého ročníku techniky. První díl vycházející z jeho přednášek proslovených ve školním roce 1890/1891 se skládal z devíti částí.[129] Základy diferenciální geometrie byly obsaženy v druhém celku druhé části, v níž se probíraly aplikace diferenciálního počtu. Hlavní pozornost byla zaměřena na vyšetřování vlastností křivek v rovině (výpočet tečny a asymptoty, popis vzájemného dotyku přímky a křivky, klasifikace násobných bodů křivek, stanovení křivosti křivky, nalezení směru normály a tečny, výpočet diferenciálu plochy a oblouku). Dále byly vyloženy evoluty a evolventy, křivky rovinné se vztahem k polární soustavě souřadnic. Poté bylo pojednáno o křivkách obalujících, oskulační kružnici a obecných oskulačních křivkách. Druhý díl vycházel z Weyrových přednášek pro druhý ročník techniky, které proslovil ve školním roce 1891/1892.[130] Skládal se z pěti částí, z nichž první část nazvaná *Pokračování počtu differenciálního* obsahovala rozsáhlý text věnovaný aplikacím diferenciálního počtu. Většina aplikací byla orientována na základy

---

[125] Názvy přednášek a další podrobnosti o Weyrově pedagogickém působení na pražské univerzitě jsou uvedeny v [B2].

[126] Jan Schuster studoval matematiku a fyziku na české univerzitě v Praze. Pak byl profesorem na reálce v Pardubicích a později přešel na reálku do Prahy. Publikoval několik geometrických příspěvků v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* a v *Rozhledech matematicko-přírodovědeckých*, které na počátku třicátých let 20. století krátce redigoval.

[127] Jedná se o téměř 230 stránek formátu B5, které jsou uloženy pod signaturou Va 559. Více viz [B2] a [Be7].

[128] Litografované přednášky vyšly poprvé roku 1886. Jejich první díl vyšel tiskem v Pise roku 1894 (druhé vydání 1902, třetí vydání 1922). Rozšířená a oblíbená byla také německá verze prvního dílu nazvaná *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (Leipzig, 1899).

[129] Více viz předchozí „část“ této kapitoly.

[130] Více viz předchozí „část“ této kapitoly.

diferenciální geometrie ploch a čar. Nejprve byly zavedeny základní pojmy (tečna a normálová rovina křivky, tečná rovina a normála plochy, tečná rovina vedená bodem mimo plochu, diferenciál oblouku prostorové křivky). Pak byly vyloženy rektifikace prostorových křivek, oskulační rovina a hlavní normála prostorové čáry, křivost prostorových čar a oskulační kružnice, křivost čar na dané ploše, křivost normálních řezů a poloměr křivosti normálních řezů. Výklad byl zakončen teorií obalujících a rozvinutelných ploch, sdružených tečen plochy, asymptot křivek a čar křivosti. Teoretický výklad byl doplněn řadou názorných příkladů, chyběly však odkazy na základní a rozšiřující literaturu.[131]

Připomeňme na závěr, že Eduard Weyr měl nepřehlédnutelnou účast při vzniku české terminologie pro diferenciální geometrii díky svým přednáškám na univerzitě a především díky odborným článkům.[132]

S Eduardem Weyrem v přednáškách na české technice alternoval Gabriel Blažek. I on tedy nutně musel přednášet základy diferenciální geometrie, ale pro studenty druhého ročníku, kde se výše zmíněná látka probírala, za více než čtyřicet let svého působení nesepsal žádný učební text, nepublikoval žádnou litografii svých přednášek. Nedochovaly se ani žádné studentské zápisy jeho lekcí. Vzhledem k tomu, že přednášky obou řádných profesorů byly považovány za ekvivalentní, je pravděpodobné, že se Blažkovy přednášky příliš nelišily od Weyrových.

Novým řádným profesorem matematiky na české univerzitě v Praze byl roku 1904 jmenován geometr Jan Sobotka (1862–1931), který až do své smrti učil veškeré základní geometrické předměty. Vzhledem k nedostatku české geometrické vysokoškolské literatury začal postupně vydávat rozsáhlé litografie, učebnice a monografie.[133] V roce 1909 Jednota českých mathematiků ve speciální edici *Mathematické přednášky české university v Praze* vydala Sobotkovy litografované přednášky *Differenciální geometrie. Část I.: Křivky rovinné* a o pět let později otiskla *Díl II.: Křivky prostorové, plochy v souřadnicích pravoúhlých* a *Díl III. Parametrické vyjádření ploch. Útvary přímkové.*[134] Jednalo se o nejrozsáhlejší a nejpodrobnější české učební texty diferenciální geometrie, které byly napsány dobře čitelným písmem, doplněny množstvím pěkných a názorných obrázků a řadou pečlivě vybraných příkladů a aplikací, které doplňovaly a rozšiřovaly vyloženou látku. Vynikaly spojením analytické, syntetické, deskriptivní a diferenciální geometrie, účelným, jasným a matematicky přiměřeným výkladem, jehož rozsah šel nad rámec tehdejších běžných učebnic diferenciální geometrie, neboť ukazoval zajímavé analytické a syntetické konstrukce, četné aplikace matematické analýzy a algebry, upozorňoval na

---

[131] Podrobnější hodnocení Weyrových litografovaných přednášek je uvedeno v [R1], [R2], [R3] a [R4].

[132] Viz [B2].

[133] Stručné informace o jeho životě, pedagogickém a odborném díle jsou uvedeny v [Be1].

[134] Edice *Mathematické přednášky české univerzity v Praze*, nákladem Jednoty českých mathematiků (resp. mathematiků a fysiků), Praha, 1909, 1914, 1914, 543 + 484 + 506 stran. Podrobná recenze prvního dílu je uvedena v [By1].

nové původní výsledky a elegantní metody diferenciální geometrie. Na druhé straně kladl na čtenáře vysoké nároky; předpokládal totiž dobré znalosti diferenciálního počtu, analytické i deskriptivní geometrie, a tudíž byl pro začátečníky značně náročný.

Přibližme si podrobněji jen obsah prvního dílu (543 stran + 333 obrázků), který se skládal ze 12 kapitol. V úvodu Jan Sobotka definoval pojem křivka, zavedl analytické a parametrické vyjádření křivek v různých souřadnicových soustavách a provedl klasifikaci bodů (singulární, násobné, inflexní). Pak vyložil základní úlohy (nalezení tečny a normály, stanovení stupně a rodu křivky) a ukázal jejich příslušné konstrukce odvozené z analytických i syntetických úvah. Zvláštní pozornost věnoval algebraickým křivkám a kuželosečkám a výklad zakončil obecnou teorií ohnisek algebraických křivek. Pak se zaměřil na vlastnosti asymptot a pojednal i o asymptotách v nevlastních bodech a o asymptotách algebraických křivek. Ve druhé části učebního textu vyložil teorii dotyku křivky a kružnice (oskulační kružnice, vrcholy) a přirozenou cestou dospěl k teorii křivosti, kterou nejprve předložil pro regulární body křivky a pak pro singulární body. Neopomenul objasnit ani evoluty a evolventy (včetně evolut vyšších), a to nejprve opět pro regulární body a pak pro body singulární. Zmínil se také o kongruenci křivek. V závěru knihy uvedl hlubší teorii obalových křivek, základy kinematické geometrie křivek a rozsáhlejší výklad vlastností algebraických křivek v okolí singulárních bodů, který založil na užití Newtonova polygonu. Připojil také studii o cirkulárních systémech vycházející z teorie algebraických funkcí jedné komplexní proměnné.[135]

Také druhý a třetí díl Sobotkovy litografované učebnice pojednávající o prostorových křivkách a plochách měly podobně náročný obsah.

První hodnocení Sobotkových litografovaných přednášek napsal Bohumil Bydžovský, přední český geometr. Ocitujme úryvek z jeho závěru:

… zvláště je také pochopitelno při známém směru vědecké činnosti autorovy, že geometrický zájem je postaven do popředí, a to značněji, než bývá v učebnicích, jež jsou postaveny na analytickém základu. Také zde sice analysa je vlastním podkladem výkladů a dedukcí, ale většina analytických úvah směřuje k tomu, aby byla nalezena jednoduchá a rázovitá konstrukce a aby bylo možno výsledku užíti k dalšímu bádání čistě geometrickému. Jistě by byl autor na mnoha místech volil postup veskrze synthetický, kdyby ekonomie časová a patrně také zřetel k vědecké přípravě posluchačů nebyly vyžadovaly cesty analytické kratší a mnohdy přístupnější. Záliba a zájem o úvahy geometrické jeví se také ve volbě applikací; autor se s láskou pozdržel při věcech, kde mohl, opíraje se o svou původní činnost vědeckou, dáti nahlédnouti posluchačům do své duchovní dílny, což náleží k nejvážnějším právům i povinnostem universitního učitele (to se týká, pokud ref. může posouditi, z větší míry problému normál, theorie křivosti, theorie evolut a vyšších evolut, křivky differenciální a j., v podrobnostech však také většiny ostatních oddílů).

[135] Podrobnější hodnocení lze najít v [By1].

Přihlédneme-li nyní blíže k obsahu „Differenciální geometrie", seznáme neobyčejnou bohatost látky, jež se jeví po několika stránkách: Jednak množstvím věcných jednotlivostí; autor pojal ve své výklady také partie, které zpravidla se projednávají samostatně v theorii algebraických křivek. Jednak – což padá více na váhu – mnohostranností, pokud se method týče. Ačkoliv, jak již bylo řečeno, vlastní podklad dedukcí tvoří methoda analytická (spec. infinitesimální počet), nebylo zapomenuto ani na úvahy projetivně geometrické, ani na geometrickou methodu infinitesiální, ani na úvahy kinematické, takže vlastní obsah infinitesimální geometrie je objasněn se všech stran. A dále: autorovi běželo zřejmě o to, přivésti posluchače a čtenáře nejen k širokému přehledu otázek, jež projednává, nýbrž také k jich pochopení co možná hlubokému. Proto téměř všude zašel značně hlouběji, než bývá obvyklo v elementárních učebnicích ... Příslušné partie jsou ovšem poněkud obtížnější, zvláště pro začátečníka, avšak autor postupuje ve výkladu opatrně, počíná případy jednoduchými a na snadě ležícími, upozorňuje v příkladech na detaily a obtíže, jež se mohou vyskytnouti, a dochází tak znenáhla k případu nejobecnějšímu.

Není ovšem třeba zvláště vytýkat, že je všude dbáno naprosté přesnosti. Zvláštní zmínky ještě zasluhují příklady a cvičení, jichž hojnost a vhodná volba výklady oživují a činí pochopitelnějšími. Volené příklady pak jsou většinou více než pouhé applikace obecného postupu; buď seznamují s vlastnostmi některých důležitých útvarů speciálných (tak je m. j. ve formě applikací provedena skoro úplná metrická geometrie kuželoseček) anebo připravují na výklady další. ([By1], str. 514–515)

Je třeba říci, že výše citovaná recenze není úplně objektivní. Když B. Bydžovský psal o „naprosté přesnosti", pravděpodobně podlehl svému přátelství nebo respektu ke staršímu kolegovi a uznávanému geometrovi. B. Bydžovský se roku 1909 habilitoval na české univerzitě v Praze, roku 1911 se zde stal mimořádným profesorem a roku 1920 řádným profesorem matematiky. Vzhledem k tomu, že J. Sobotka byl v letech 1904 až 1931 řádným profesorem matematiky na české univerzitě v Praze, je nepochybné, že zasedal ve všech komisích, které rozhodovaly o Bydžovského kariérním růstu. Těžko lze proto očekávat, že by se B. Bydžovský k Sobotkově učebnici vyslovil s objektivní kritikou.

Poznamenejme, že Sobotkovy přednášky, litografie, učebnice a odborné práce z geometrie ovlivnily českou terminologii jeho mladších kolegů a žáků (např. B. Hostinský, J. Vojtěch a B. Bydžovský).[136]

Roku 1915 vyšla v edici *Knihovna spisů mathematických a fysikálních* jako její první svazek první česká učebnice diferenciální geometrie nazvaná *Differenciální geometrie křivek a ploch.*[137] Sepsal ji Bohuslav Hostinský (1884–1951), tehdy soukromý univerzitní docent vyšší matematiky, na základě před-

---

[136] O Sobotkově přínosu viz M. Kašparová, Z. Nádeník: *Jan Sobotka (1862–1931)*, M. Bečvářová a J. Bečvář (editoři), edice Dějiny matematiky, svazek č. 44, Matfyzpress, Praha, 2010.

[137] Jednota českých mathematiků a fysiků, Praha, 1915, 128 stran. Druhé přepracované vydání bylo otištěno roku 1942 (161 stran), třetí roku 1950 (217 stran). Podrobná recenze prvního vydání je uvedena v [By2].

nášek, které konal na české univerzitě v Praze ve školním roce 1913/1914. Skládala ze dvou částí a dodatku. První část pojednávala o základních vlastnostech a charakteristikách rovinných a prostorových křivek a ploch. V prvním oddílu první části (str. 1–18) se Bohuslav Hostinský věnoval rovinným křivkám (tečna, normála, singulární body, délka oblouku, teorie dotyku, křivost, oskulační kružnice, evoluta, obálka křivek a speciálně obálka kružnic). V druhém oddílu (str. 18–42) nejprve podal úvod do analytické geometrie prostoru (určení směrů v prostoru, transformace souřadnic, analytické vyjádření přímky a roviny, výpočet objemu čtyřstěnu). Pak podrobněji vysvětlil teorii dotyku a teorii křivosti (tečna a oblouk křivky, normální rovina, oskulační kružnice, hlavní normála a binormála, křivost a torze). Oddíl pokračoval odvozením Frenetových formulí, studiem vlastností hlavního trojhranu, popisem průběhu křivky v okolí bodu, zavedením polární a rektifikační plochy křivky a evoluty. Výklad vyvrcholil stručným popisem útvarů určených soumeznými elementy a důkazem Jacobiovy věty. V třetím oddílu první části (str. 42–74) se Bohuslav Hostinský zabýval plochami. Nejprve studoval tečnou a normálovou rovinu, potom dotyk ploch a hlavní tečny, dotyk plochy a křivky a asymptotické tečny. Pak přešel k popisu obálky ploch závislých na jednom parametru a prostorových křivek a ploch závislých na dvou parametrech. Dále dokázal Meusnierovu větu a Eulerovu větu a přirozenou cestou dospěl k definici geodetické křivosti, normální křivosti a geodetické torze. V souvislosti s tím pojednal o křivoznačných a asymptotických křivkách, sférickém obrazu plochy a zavedl křivočaré souřadnice na ploše. Pokračoval podrobným popisem obou základních diferenciálních forem plochy a řešením základních problémů (křivost plochy, popis geodetických čar, studium rotačních a přímkových ploch, výklad deformace plochy).

Druhá část učebnice se skládala ze dvou oddílů. V prvním oddílu (str. 75–92) Bohuslav Hostinský vyložil nejprve základy teorie obyčejných diferenciálních rovnic a s jejich pomocí popsal isogonální trajektorie, charakterizoval konformní zobrazení a jeho vlastnosti, vyřešil některé úlohy vztahující se k problematice křivosti rovinných křivek. Dále objasnil základní kritéria popisu jednoznačnosti pohybu souřadnicové soustavy. Získané výsledky využil při detailnějším studiu křivek (pohyb hlavního trojhranu podél křivky, nalezení obyčejné rovnice křivky, jsou-li dány přirozené rovnice, stanovení přirozené rovnice křivky, popis vlastností integrální křivky, studium křivoznačných čar a průběhu geodetických čar). Ve druhém oddílu pojednal o aplikacích parciálních diferenciálních rovnic v teorii pohybujících se ploch. Bohumil Bydžovský, recenzent Hostinského učebnice, o této části napsal:

V oddíle druhém … je především vyložena kinematická methoda pro theorii ploch a je jí m. j. užito k odvození základní věty pro theorii ploch, totiž věty vyslovující určenost plochy šesti základními veličinami, jež vyhovují známým dvěma rovnicím. Autor správně upozorňuje, že tento méně obvyklý způsob řešení základní úlohy theorie ploch má před jinými výhodu stručnosti v provedení i označení. Pak jsou provedeny některé úlohy, jež vyžadují řešení t. zv. Cauchyova problému, a to pro parciální rovnice jak prvního, tak druhého řádu;

jako příklad jsou uvedeny plochy translační, specielně minimální. Ke konci jsou udány jako applikace soustavy parciálních rovnic prvního řádu věty o konjugovaných systémech křivek na ploše a základní věty o soustavě ploch trojnásob orthogonální. ([By2], str. 465)

Dodatek učebnice obsahoval padesát úloh doplněných stručnými návody řešení a přehled základní a rozšiřující literatury obohacený o krátkou a výstižnou charakteristiku jednotlivých děl. Učebnice byla základní pomůckou ke studiu diferenciální geometrie, předpokládala však dobrou znalost základů diferenciálního a integrálního počtu.

Roku 1937 byla otištěna ještě náročnější učebnice diferenciální geometrie sepsaná Václavem Hlavatým (1894–1969) a nazvaná *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet*,[138] která byla určena pro zájemce o hlubší studium diferenciální geometrie, a proto nesledovala historický přístup k vykládané teorii, ale opírala se o klasickou Gaussovu metodu a tenzorový počet. Uváděla všechny důležité pojmy, věty a vztahy nezbytné pro studium křivek a ploch a díky tenzorovému počtu poskytovala také možnosti zevšeobecnění teorie na zakřivené prostory více dimenzí. Skládala se ze čtyř rozsáhlejších oddílů, které se dále členily na části a paragrafy. První oddíl pojednával o křivkách v rovině (definice křivky, parametrické vyjádření, transformace, tečna, oskulační rovina, základní trojhran, křivka vztažená k oblouku, Frenetovy vzorce, oskulační sféry, Bertrandovy křivky a křivky spádové, evoluty a evolventy, minimální křivky apod.). Druhý oddíl se věnoval první základní formě plochy a její aplikaci. V sedmi částech byly vyloženy základní pojmy a popsány vlastnosti plochy a jednomocného (tj. jednoparametrického) svazku ploch, první základní forma plochy, konformní zobrazení, absolutní diferenciál, obecné i speciální křivky na ploše, Gaussova míra křivosti a rozvinutí ploch. Třetí oddíl objasnil druhou základní formu plochy a její aplikace. Ve čtyřech částech byl vyložen popis druhé základní formy plochy (normála, základní rovnice, sférické zobrazení, tangenciální souřadnice), význačné směry na ploše, křivky na ploše a konstrukce ploch. Čtvrtý oddíl obsahoval popis a charakteristiku speciálních ploch (přímkové, rovnoběžné, centrální, translační, Weingartenovy, minimální, sférické, pseudosférické a Mongeovy plochy).

Výše uvedené řádky naznačují pouze obsah českých učebnic diferenciální geometrie a okolnosti jejich vzniku. Čtenáři, kteří nejsou hlouběji seznámeni s vývojem diferenciální geometrie v prvních desetiletích 20. století, by mohli získat nesprávnou představu o jejich kvalitách a přesnosti. Z hlediska přesnosti je Sobotkova litografie nejslabší, nejlepší je učebnice Hlavatého. Obsahem a zpracováním je však nejlepší učebnice B. Hostinského, ač má nejskromnější rozsah. Jako jediná se totiž věnuje i globální diferenciální geometrii. Její absence je nápadná právě u učebnice V. Hlavatého z konce 30. let 20. století, která vůbec neodrazila výsledky geometrie „ve velkém“ za posledních padesát let. Svým obsahem tedy zůstala ještě dosti hluboko v 19. století.

[138] Sborník Jednoty československých matematiků a fysiků, č. XX, Praha, 1937, 445 stran.

Shrnutí

Zahradníkova litografie nazvaná *O plohama i krivuljama u prostoru. Predavanja u ljetnom semestru godine 1898* [Z105] obsahovala výklad veškerých základních problémů diferenciální geometrie, byla napsána poměrně jasně, stručně a výstižně. Po všech stránkách výrazně převyšovala Studničkovy a Weyrovy učebnice sepsané pro studenty techniky a používané také českými univerzitními studenty. Karel Zahradník jejím publikování více než o deset let předběhl české matematiky. Jeho litografie snese srovnání s nejrozsáhlejší českou učebnicí Jana Sobotky.

Učební text matematické analýzy

V seznamu Zahradníkových publikací je uvedena litografie nazvaná *Přednášky o integraci differenciálních rovnic obyčejných. Letní semestr 1904* [Z108], která obsahovala text části jeho přednášek, jenž proslovil v rámci předmětu *Mathematika I. Základové vyšší mathematiky.* Ještě v roce 2003[139] byl jediný její exemplář dostupný v knihovně Matematického ústavu Akademie věd České republiky v Praze. V roce 2007 však byl nenávratně ztracen, proto již není možno rekonstruovat obsah tohoto Zahradníkova učebního textu.

Neúspěšné pokusy o další učební texty

Od svého příchodu do Záhřebu se Karel Zahradník snažil obohatit chorvatskou odbornou a populárně naučnou literaturu o překlady českých, německých a francouzských učebnic, monografií a popularizačních knížek, jak vyplývá z jeho dopisů zaslaných Františku Josefu Studničkovi.[140]

V sedmdesátých letech 19. století se Karel Zahradník pokusil přeložit Studničkovu učebnici nazvanou *Algebra pro vyšší třídy škol středních.*[141] Již 21. listopadu 1876, sotva obdržel první arch jejího výtisku, nabídl, že ji ve spolupráci se středoškolským profesorem M. Kišpatićem přeloží do chorvatštiny a zprostředkuje její oficiální schválení pro výuku na chorvatských reálkách a gymnáziích. V dopise F. J. Studničkovi napsal:

Zmínujete se, že by se mohl tento spis převést na jazyk hrvatský; ano i tímto Vašim přáním zavděčíte se velmi Hrvatům, a jestli by Vám bylo milo, vzal bych překlad sám s p. Kišpatićem si na starost. Poslední je prof. přírodopisu na reálce zdejší a co velmi padne na váhu, zná jako jich ne mnoho, jazyk hrvatski, tak že i co do řeči byl překlad zcela správným. Arci jakmile spis Vašnostin vyjde, půjdu k našemu Exel. ministrovi Muhać-ovi, aby mi přislíbil, že tento spis odporučí školám, načež se pak zdejší kněhkupectví „Albrecht et Fiedler“ o slušnou úpravu postaralo.[142]

---

[139] V tomto roce byl zahájen intenzívní archivní výzkum Zahradníkova života a díla.

[140] Zahradníkovy dopisy jsou uloženy ve fondu F. J. Studnička v Literárním archivu Památníku národního písemnictví v Praze.

[141] Tiskem Dra. Ed. Grégra, Nákladem spisovatelovým, Praha, 1877, 192 stran (druhé, skoro nezměněné vydání, Praha, 1879, 172 stran); německá verze – první vydání, Praha, 1878, 212 stran (druhé vydání, Praha, 1879, 212 stran).

[142] Viz Zahradníkův dopis ze dne 21. listopadu 1876.

Z dochovaných dopisů z roku 1877 vyplývá, že Karel Zahradník začal na jaře překládat Studničkovu učebnici, projednal její vydání a schválení s chorvatskou vládou, tisk a úpravy se záhřebským nakladatelstvím. O postupu prací posílal průběžně informace do Prahy.[143] Například dne 6. února 1878 napsal:

Co se tkne překladu algebry, předce pozvolna jde to ku předu, mámt nyní právě 1/3 přeloženu; nyní dříve než dále se pustím, vezmu to ještě jednou na přetřes, stran definitivníh terminu a dám tu věc do tisku, an by vláda to protahovala, až udělala kšeft s Močnikem, který v loni vyšel o 3000 exemplářích což na 8 gym. a realek vyšších vyžaduje leta Páně. Udělal jsem to s kněhkupcem, že to vezme na tři sešity ($V^{\underline{\text{tá}}}$*, VI, VII třída) a kdyby vláda to nepřipustila do škol, že pak to na svůj náklad vezmu. Jest totiž nyní Albrecht et Fiedler proti vládě opatrný, která je velmi copatá, ostatně mne skoro o 600 zl připravila, tímže mne poukazala plat od* $1^{\underline{\text{ho}}}$ *října, ač jsem ve červnu složil přísahu. Její je system vec protahnout, až se to umlčí, tak jsem ja na tři reklamace po půl roku odpověď dostal jalovou.*[144]

Situace se zkomplikovala přesně tak, jak Karel Zahradník předpokládal. Chorvatská vláda si vše rozmyslela a rozhodla, že vydání Studničkovy učebnice není nezbytně nutné, neboť je k dispozici ještě mnoho exemplářů chorvatské verze Močnikovy učebnice, jejíž vydání financovala. Usnesla se, že dokud nebude prodána alespoň třetina předchozího nákladu, neuvolní žádné prostředky na tisk nové knihy, ale nebude bránit jejímu zavedení do škol. Karel Zahradník se rozhodl, že náklad v první fázi bude financovat sám, že se postará o pěknou úpravu a provedení korektur.[145]

Po celé léto 1878 proto pracoval na překladu, ale na podzim se dozvěděl, že vláda odmítla dát písemnou záruku, že chorvatská verze Studničkovy učebnice bude doporučena jako učební kniha pro chorvatské střední školy. Protože měl již 2/3 překladu úplně hotové, rozhodl se, že jej dokončí a k posledním korekturám využije i německé vydání Studničkovy učebnice, které bylo vytištěno na podzim roku 1878. Doufal, že chorvatská zemská vláda (stejně jako česká a rakouská) povolí užívat na středních školách českou a německou verzi a tím bude cesta pro chorvatský překlad otevřena.[146] Na konci roku 1878 vyvstal nový problém, neboť odpůrci českého vlivu v Chorvatsku (Kočeschka a Golub) prosadili, aby vláda nechala vyhotovit nové nezávislé posudky Studničkovy české učebnice, její německé verze a chorvatského překladu a navrhli, že se práce rádi ujmou. Argumentovali jednak tím, že je pro střední školy příliš rozsáhlá a náročná, jednak tím, že je na skladě stále ještě dostatek Močnika. Karel Zahradník byl situací značně znechucen a poprvé vyjádřil obavu, že překlad nikdy nevyjde a jeho práce byla zbytečná.[147] A jak předpokládal, tak se i stalo. Poslední zmínka o jeho překladu je v dopise ze dne 22. března 1880:

… Škoda, že je Močník přeložen, tím se posloužilo jen liknavosti starých

[143] Viz Zahradníkovy dopisy ze dne 21. 4., 16. 5., 10. 7., 4. 11. a 4. 12. 1877.
[144] Viz Zahradníkův dopis ze dne 6. února 1878.
[145] Viz Zahradníkův dopis ze dne 29. května 1878.
[146] Viz Zahradníkův dopis ze dne 23. listopadu 1878.
[147] Viz Zahradníkův dopis ze dne 31. prosince 1878.

profesorů, a z pohodlnosti možná nedbají žádné kníhy lepší. Překládatel tím věci se špatně zavděčil.[148]

Poznamenejme, že Zahradníkovi se nepodařilo ani později prosadit publikování překladu Studničkovy *Algebry*; jeho snahy narážely na malou prodejnost Močnika. Rukopis jeho překladu dnes není k dispozici ani v chorvatských, ani českých archivech.

Výše popsaná Zahradníkova snaha nebyla zdaleka jediným jeho překladatelským nezdarem. Z dochované korespondence víme, že se na počátku osmdesátých let 19. století pokusil prosadit překlad Studničkova rozsáhlého díla *Všeobecný zeměpis čili astronomická, mathematická a fysikální geografie.*[149] Marně usiloval o jeho vydání v edici *Matice Hrvatská*, ale po předchozích zkušenostech, když nedostal písemné záruky, se do překladu nepustil.[150]

V roce 1882 Karel Zahradník zaslal chorvatské zemské vládě prostřednictvím děkanátu Filozofické fakulty[151] dopis obsahující podrobné zdůvodnění návrhu na vydání chorvatské středoškolské učebnice analytické geometrie, která měla nahradit starší Močnikovu učebnici. Jeho nabídka nebyla akceptována, neboť na skladě byla ještě značná zásoba „Močniků“, jež vláda vydala státním nákladem. Po deseti letech Karel Zahradník návrh zopakoval. Dne 12. února 1892 předložil prostřednictvím děkanátu[152] novou koncepci vydání středoškolské učebnice analytické geometrie, která měla být rozšířenou verzí jeho české učebnice *Analytická geometrie v rovině. Pro školu* [Z56]. Vláda návrh formálně ani nepodpořila, ani nezamítla. Dne 27. června 1892 dekretem č. 1969 odpověděla filozofické fakultě a požádala ji, aby Karla Zahradníka informovala, že je stále ještě dostatek neprodaných „Močniků“, a proto vláda nemůže financovat vydání další učebnice. Souhlasila však, aby ji vydal za své vlastní prostředky jako doplněk „Močnika“ a přislíbila, že bude-li text kvalitní a bude o něj dostatečný zájem, obdrží časem oficiální souhlas k užívání na chorvatských středních školách.[153] Ve své podstatě se jednalo o likvidační rozhodnutí, neboť učebnice bez „vládní doložky“ mohla být užívána jen jako neoficiální pomůcka. Náklady vložené do jejího vydání by se autorovi těžko vrátily.

Na počátku devadesátých let, když pozvolna narůstal počet studentů matematiky na záhřebské univerzitě, byl stále citelnější nedostatek vysokoškolských učebních textů pokrývajících základní partie matematické analýzy. Karel Zahradník, ačkoli se sám o tuto partii matematiky odborně nezajímal, se rozhodl, že přeloží první díl rozsáhlé a kvalitní učebnice základů diferenciálního a integrálního počtu J. A. Serreta *Cours de calcul différentiel et intégral.*[154] Opíral

[148] Viz Zahradníkův dopis ze dne 22. března 1880.

[149] Díl I., Praha, 1882, 274 stran; díl II., Praha, 1882, 200 stran; díl III., Praha, 1883, 400 stran. Podrobné hodnocení této třídílné monografie lze najít v [Be7].

[150] Viz Zahradníkův dopis ze dne 8. listopadu 1883.

[151] Viz dopis č. 238/1882, fond *Spisy za rok 1882*, Archiv Filozofické fakulty univerzity v Záhřebu.

[152] Viz dopis č. 44/1892, fond *Spisy za rok 1892*, tamtéž.

[153] Viz dopis č. 153/1892, fond *Spisy za rok 1892*, tamtéž.

[154] *Calcul différentiel*, 1. díl, 2. vydání, Paris, 1879, 15 + 617 stran; *Calcul intégral*, 2. díl, 2. vydání, Paris, 1880, 12 + 754 stran.

se o oblíbenou a rozšířenou německou verzi *Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung*, kterou připravil A. Harnack.[155] O svém překladatelském záměru a úsilí napsal F. J. Studničkovi:

> *Přichystávám k tisku sbírku úloh z trigonometrie a z anal. geometrie, a překládám Serreta difer. a integ. počet. Aspoň první díl má chuť vláda vydat, a později snad druhý.*[156]

Ale i v tomto případě se Karel Zahradník hluboce zmýlil, neboť ani tento jeho překlad nikdy nevyšel. Jeho dvě desetiletí trvající snaha obohatit, doplnit a rozšířit chorvatskou matematickou literaturu neustále narážela na nedostatek peněz, nechuť vlády financovat vysoké školství, neochotu úředníků dodržovat jednou dané sliby a závazky a neporozumění univerzitních kolegů, kteří se zajímali jen o své obory a odborné práce, ale nebyli schopni se dohodnout na jednotném rozumném postupu a prosazování společných cílů.

Zahradníkův „boj“ s úředními místy dokládají zápisy profesorského sboru Filozofické fakulty, v nichž je dokumentován delší, ale úspěšný zápas o vydání sbírky *Geometrijska vježbenica za više razrede srednjih učilišta* [Z75]. Dne 12. ledna 1889 Karel Zahradník oznámil chorvatské zemské vládě prostřednictvím děkanátu, že hodlá sepsat sbírku úloh z geometrie a nabídl ji jako novou středoškolskou pomůcku.[157] Dne 2. února vláda dekretem č. 566 dovolila Karlu Zahradníkovi vypracovat podrobnou osnovu výše uvedené sbírky, což mu bylo oznámeno děkanátem dne 9. února.[158] O měsíc později Karel Zahradník předložil podrobný obsah sbírky a požádal ministerstvo školství o poskytnutí vládní podpory na její sepsání. Svoji žádost zdůvodňoval nutností zakoupit novou zahraniční literaturu.[159] Během čtrnácti dnů mu byla přidělena dotace ve výši 20 zlatých.[160] Není jasné, co se dělo dalších pět let. Teprve dne 3. srpna 1895 Karel Zahradník předložil prostřednictvím děkanátu vládní komisi rukopis první části *Geometrijske vježbenice.*[161] Na konci téhož roku vláda schválila její vydání v nákladu 2000 kusů a uvolnila finanční prostředky na tisk, ale současně si vyžádala takřka okamžitou korekturu tiskových archů.[162] Díky rychle provedeným, ale pečlivým opravám byla učebnice vydána během roku 1896. V září roku 1898 Karel Zahradník zaslal chorvatské zemské vládě přes děkanát rukopis druhého dílu *Geometrijske vježbenice* a požádal o jeho vydání na vládní náklady;[163] argumentoval tím, že druhý díl je nedílnou součástí kompletu, který byl

---

[155] *Differentialrechnung*, Leipzig, 1884, 10 + 567 stran; *Integralrechnung*, Leipzig, 1885, 8 + 380 stran; *Differentialgleichungen*, Leipzig, 1885, 6 + 388 stran.

[156] Viz Zahradníkův dopis ze dne 29. května 1895.

[157] Viz dopis č. 11/1889, fond *Spisy za rok 1889*, Archiv Filozofické fakulty univerzity v Záhřebu.

[158] Viz dopis č. 21/1889, fond *Spisy za rok 1889*, tamtéž.

[159] Viz dopis č. 38/1889 ze dne 16. března 1889, fond *Spisy za rok 1889*, tamtéž.

[160] Viz vládní dopis č. 2929 ze dne 31. března 1889 a dopis děkanátu č. 55/1889, fond *Spisy za rok 1889*, tamtéž.

[161] Viz dopis č. 192/1895, fond *Spisy za rok 1895*, tamtéž.

[162] Viz vládní dopis č. 11 440/95 a dopis děkanátu č. 26/1896 ze dne 19. ledna 1896, fond *Spisy za rok 1896*, tamtéž.

[163] Viz dopis č. 342/1898 ze dne 21. září 1898, fond *Spisy za rok 1898*, tamtéž.

předešlou vládou schválen již v roce 1889. V polovině října se vláda dotázala na požadovanou výši autorského honoráře, výši nákladu, nároky na kvalitu tisku, sazbu a grafickou úpravu, neboť vydání druhého dílu neplánovala.[164] Karel Zahradník odpověděl prostřednictvím děkanátu již dne 24. října.[165] Navrhoval pouze jednoduchý tisk a nenáročnou grafickou úpravu shodnou s prvním dílem, náklad stanovil opět na 2000 kusů. K výši honoráře se nevyjádřil. Poznamenejme, že druhý díl vyšel roku 1899 a byl kompletně finančně zajištěn z vládních zdrojů.

Závěr

Na předcházejících více než šedesáti stránkách jsme stručně popsali Zahradníkovy učebnice teorie determinantů [Z42], [Z47], [Z92], [Z104] a [Z107], analytické geometrie [Z56], [Z75], [Z96], [Z106] a [Z109] a diferenciální geometrie [Z105]. Naznačili jsme jejich obsah a metody výkladu, uvedli z nich četné úryvky a přidali pasáže z recenzí či soukromé korespondence, které nastínily jejich dobové přijetí odbornou komunitou nebo okolnosti jejich vzniku. Pokusili jsme se je porovnat s česky psanými učebnicemi a litografiemi. Na základě uvedeného popisu je možno konstatovat, že Zahradníkova litografovaná vydání jeho chorvatských univerzitních přednášek dosahovala úrovně učebnic většiny jeho českých současníků a kolegů, a to jak po stránce obsahu a rozsahu, tak po stránce matematické přesnosti. Jeho česky psané učebnice pro studenty techniky se od jiných českých učebnic určených pro techniky příliš neodlišovaly ani obsahem, ani rozsahem, ani formou zpracování. I pro ně bylo charakteristické omezení teorie, vynechání některých důkazů, posílení aplikací a zvětšení počtu názorných příkladů. Jeho středoškolská učebnice analytické geometrie však nedosahovala úrovně klasických českých učebních textů.

LITERATURA:

[B1] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 35, Matfyzpress, Praha, 2007.

[B2] Bečvář J. a kol., *Eduard Weyr (1852–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 2, Prometheus, Praha, 1995.

[Be1] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008.

[Be2] Bečvářová M., *Z historie Jednoty (1862–1869)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 13, Prometheus, Praha, 1999.

[Be7] Bečvářová-Němcová M., *František Josef Studnička (1836–1903)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Prometheus, Praha, 1998.

[By1] Bydžovský B., *Prof. Dr. Jan Sobotka: Differenciální geometrie. Část I. Křivky rovinné (lithogr., 543 + X, 333 obr.). V Praze 1909, nákl. J. Č. M. (ve sbírce „Mathematické přednášky české university v Praze“)*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **39** (1910), 512–515.

[164] Viz vládní dopis č. 14 561 ze dne 17. října 1898 a přípis děkanátu č. 392/1898, fond *Spisy za rok 1898*, tamtéž.

[165] Viz dopis č. 401/1898, fond *Spisy za rok 1898*, tamtéž.

[By2] Bydžovský B., *Dr. B. Hostinský: Differenciální geometrie křivek a ploch. („Knihovna spisů mathematických a fysikálních“ Sv. 1.), V Praze 1915. Str. VIII + 128*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **45** (1916), 463–466.

[KB] Kohoutová Z., Bečvář J., *Vladimír Kořínek (1899–1981)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 27, Matfyzpress, Praha, 2005.

[Mu1] Muir T., *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development I.–IV.*, London, 1906, 1911, 1920, 1923, 11 + 491, 16 + 475, 26 + 503, 31 + 508 stran.

[Mu2] Muir T., *Contributions to the History of Determinants 1900–1920*, London, 1930, 24 + 408 stran.

[Ko1] Kostěnec A., *Analytická geometrie v rovině. Pro školu napsal Dr. Karel Zahradník, v. ř. professor na universitě Františka Josefa v Záhřebě. V Praze, nákladem K. Bellmanna, 1883*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **13** (1884), 44–47.

[Ko2] Kostěnec A., *Odpověď na „Několik slov k recenzi p. A. Kostěnce“*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **13** (1884), 157–160.

[Pe] Petr K., *O determinantech, napsal Dr. Karel Zahradník. V Brně. Nakladatel J. Barvič, knihkupec, 1905, stran 51*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **34** (1905), 258–259.

[R1] R., *Výklady o mathematice. Dle přednášek prof. Eduarda Weyra*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **21** (1892), 254–256.

[R2] r., *Výklady o mathematice na c. k. vys. šk. technické. Dle přednášek dvor. rady Ed. Weyra. Díl I. (vyd. 3.)*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **34** (1905), 368.

[R3] R., *Výklady o mathematice. Dle přednášek prof. Eduarda Weyra. Díl II. 1892*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **22** (1893), 45–47.

[R4] R., *Prof. dra. Ed. Weyra Přednášky o mathematice. (II. ročník). Druhé, opravené vydání*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **28** (1899), 46–48.

[S1] Strnad A., *Geometrijska vježbenica za više razrede srednjih učilišta. Sastavili Dr. Karlo Zahradník i Dr. David Segen. I. dio. Zagreb 1896*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **28** (1899), 126–127.

[S2] Strnad A., *Geometrijska vježbenica za više razrede srednjih učilišta. Sastavili Dr. Karlo Zahradník i Dr. David Segen. II. dio. Zagreb 1899*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **29** (1900), 271–272.

[St] Studnička F. J., *Analytická geometrie v rovině (sepsal dr. K. Zahradník, v. ř. professor mathematiky na universitě v Záhřebu)*, Časopis musea království Českého **57** (1883), 605–606.

[Vo1] Vojtěch J., *Dr. Karel Zahradník: Analytická geometrie. Díl I. Geometrie bodu, přímky a kuželoseček. Stran 184, se 105 obrazci. V Brně 1907, Píša*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **37** (1908), 71–74.

[Vo2] Vojtěch J., *Dr. Karel Zahradník, O plochách druhého stupně. Z přednášek v zimním pololetí 1910/1 na c. k. české vysoké škole technické v Brně, Brno 1911, nákladem vlastním, stran 151 (lithografováno)*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky **41** (1912), 76–77.

[W] W., *Analytická geometrie v rovině*, Athenaeum **1** (1884), 173–177.