Jiří Klaška

Historické mezníky ve studiu speciálních typů uspořádání

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. II. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. pp. 138–153.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402128

HISTORICKÉ MEZNÍKY VE STUDIU SPECIÁLNÍCH TYPŮ USPOŘÁDÁNÍ

Jiří Klaška

1. Úvod

Následující příspěvek obsahuje přehled základních pojmů a známých výsledků jedné z oblastí diskrétní matematiky, která se věnuje studiu speciálních typů uspořádání. Základy této novodobé disciplíny vyrůstají z prací o uspořádaných množinách publikovaných v rozmezí let 1930 až 1940. Teorie speciálních typů uspořádání se však začíná intenzívně rozvíjet až ve druhé polovině 20. století. Tato u nás méně známá část moderní matematiky si však právem zaslouží pozornost již z toho důvodu, jak často se aplikace uspořádaných struktur v nejrozmanitějších oborech lidské činnosti vyskytují. Zmiňme například práce z archeologie [13], teorie preferencí [6] nebo sociologie [2], [3]. V neposlední řadě mají speciální uspořádání také četné aplikace v moderní computer science. Uspořádávání objektů, pojmů, hodnot i výsledků patří k nejzákladnější lidské činnosti a informace o vlastnostech uspořádání se proto stávají nutným teoretickým základem při řešení řady problémů.

Speciálních typů uspořádání byla studována v posledních desetiletích celá řada. Vzhledem k tomu, že některé typy uspořádání nejsou v české matematické literatuře prozatím příliš často zmiňovány, uveďme v závorce ke každému typu uspořádání také ustálenou anglickou terminologii. V následujícím textu budeme konkrétně studovat tyto typy uspořádání: lineární uspořádání, nebo též řetězec (*linear order*, *chain*), slabé uspořádání (*weak order*), polouspořádání (*semiorder*), intervalové uspořádání (*interval order*), stupňovité upořádané množiny (*tiered posets*) a sériově–paralelní uspořádané množiny (*series–parallel posets*). Zdůrazněme, že tento výčet různých typů uspořádání není ani zdaleka úplný. Ze všeobecně známých uspořádaných struktur v našem výčtu chybí například svazy. Pomineme-li velmi zajímavou a důležitou problematiku aplikací, pak mezi hlavní problémy teorie uspořádání patří zejména hledání vhodných typů reprezentací a enumerační problematika. Právě touto problematikou se budeme v textu nejvíce zabývat.

Enumerační problematika se přitom zabývá klasickými otázkami kombinatorické analýzy typu: Kolik existuje uspořádání daného typu? Jaké je asymptotické chování těchto uspořádání? Odpovědět na tyto otázky znamená nalézt vhodné enumerační formule. I když je řada výsledků z této oblasti známa, nejsou ani zdaleka všechny otázky zodpovězeny.

Následující text je pokusem o historický nadhled nad problematikou speciálních uspořádání a je populárním úvodem do tohoto mladého oboru. Příspěvek je volným tématickým pokračováním autorova článku [12].

2. Uspořádání

Pro větší pohodlí čtenáře připomeneme úvodem některé základní pojmy. Binární relace P na množině X se nazývá

(1) reflexivní, když $\forall x \in X : [x, x] \in P$,

(2) areflexivní, když $\forall x \in X : [x, x] \notin P$,

(3) antisymetrická, když $\forall x, y \in X : [x, y] \in P \wedge [y, x] \in P \Rightarrow x = y$,

(4) tranzitivní, když $\forall x, y, z \in X : [x, y] \in P \wedge [y, z] \in P \Rightarrow [x, z] \in P$.

Připomeňme ještě, že místo zápisu $[x, y] \in P$ je často zvykem používat kratšího označení xPy. Obvykle je částečné uspořádání definováno jako binární relace P na X, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. V našem pojednání však budeme rozumět pod pojmem uspořádání binární relaci ve smyslu následující definice: Buď P areflexivní a tranzitivní binární relace na X. Pak P se nazývá *ostré částečné uspořádání* na X, nebo krátce jen *uspořádání*. Někdy též hovoříme o *indexovaném uspořádání*. Je-li P uspořádání na X, pak uspořádaná dvojice (X, P) se nazývá *uspořádaná množina*, nebo též *indexovaná uspořádaná množina*. Dvojici (X, P) nazýváme rovněž *poset* (název vznikl z anglického *partially ordered set*). Mezi oběma uvedenými definicemi uspořádání je podobný rozdíl jako mezi nerovnostmi $\leq$ a $<$ mezi reálnými čísly. Souvislost mezi definicemi je zřejmá rovněž z následující jednoduché věty. Buď $P(X)$ množina všech reflexivních, antisymetrických a tranzitivních relací na množině X a $P^*(X)$ množina všech areflexivních a tranzitivních relací na X . Pak existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi množinami $P(X)$ a $P^*(X)$. Tato korespondence je dána tak, že libovolnému uspořádání $P \in P(X)$ je přiřazena relace $P - \triangle \in P^*(X)$, kde $\triangle = \{[x, x] \in X\}$ je tzv. diagonální relace na X. Připomeňme dále, že dvě uspořádané množiny (X, P) a (Y, Q) jsou izomorfní, když existuje bijektivní zobrazení

$f : X \to Y$, které zachovává uspořádání, tj. platí

$$\forall x, y \in X : xPy \Leftrightarrow f(x)Qf(y).$$

Bijekce f se pak nazývá *izomorfizmus*. Izomorfizmus chápaný jakožto ekvivalence rozkládá množinu všech indexovaných uspořádaných množin na třídy, které nazýváme *neindexované uspořádané množiny*. Rovněž mluvíme o *neindexovaném uspořádání*.

3. Lineární uspořádání

Jedním z nejznámějších a snad nejčastěji používaných typů uspořádání je tzv. *lineární uspořádání*. Tímto typem uspořádání jsou například uspořádána reálná čísla podle velikosti, nebo jím uspořádáváme kroky nějaké činnosti do posloupnosti. Tento typ uspořádání používají lidé běžně v každodenní činnosti. Zaveďme nyní přesnou definici tohoto pojmu. Uspořádání P na X se nazývá lineární uspořádání a (X, P) se nazývá *řetězec*, když

$$\forall x, y \in X : xPy \vee yPx.$$

Definici řetězce lze nalézt již v prvním vydání Birkhoffovy monografie *Teorie svazů* z roku 1940. Koncepce tohoto pojmu je však pravděpodobně ještě starší.

Při zkoumání a klasifikaci jednotlivých typů uspořádání hraje významnou roli relace nesrovnatelnosti, nebo též relace indiference I. Relace I je definována následovně. Pro $x, y \in X$ klademe

$$xIy \Leftrightarrow [x, y] \notin P \wedge [y, x] \notin P.$$

Z definice lineárního uspořádání je ihned zřejmé, že libovolné dva prvky řetězce jsou srovnatelné. Relace indiference I je v případě lineárního uspořádání relací rovnosti, tj. platí

$$xIy \Leftrightarrow x = y.$$

Jiný typ reprezentačních vět charakterizující uspořádání je založen na reprezentaci pomocí reálné funkce. V případě lineárního uspořádání má reprezentace následující tvar: Uspořádání P na množině X je lineární uspořádání právě tehdy, když existuje reálná funkce $f : X \to \mathbb{R}$ taková, že

$$xPy \Leftrightarrow f(x) < f(y) \qquad \text{a} \qquad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Reprezentace lineárního uspořádání i reprezentace uspořádání jiných speciálních typů je možno nalézt například v [2] a [6]. Na následujícím obrázku nyní uvedeme příklad hasseovského diagramu lineárního uspořádání na čtyřprvkové množině.

Obr. 1

Pomocí popisu obrázku, tzn. jeho indexace, lze vytvořit všechny různé možnosti lineárního uspořádání čtyřprvkové množiny. Jednoduchou úvahou lze pak získat všeobecně známý fakt, že na dané konečné n-prvkové množině existuje celkem $n!$ různých indexovaných lineárních uspořádání a pouze jediné neindexované lineární uspořádání.

4. Slabá uspořádání

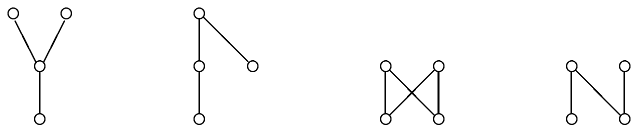
Přirozeným zobecněním lineárního uspořádání je tzv. slabé uspořádání. Uveďme nejprve přesnou definici tohoto pojmu. Uspořádání P na množině X se nazývá *slabé uspořádání*, když

$$\forall x, y \in X : xPy \Rightarrow \forall z \in X : xPz \vee zPy.$$

V první části odstavce se budeme zabývat základními známými reprezentacemi slabého uspořádání. První z nich, která je relačního typu, má tvar: Binární relace P na množině X je slabé uspořádání právě tehdy, když relace P je antisymetrická a platí

$$P^c P^c \subseteq P^c,$$

přičemž $P^c = (X \times X) - P$ je komplement relace P. Tzn. $xP^cy \Leftrightarrow [x, y] \notin P$. Asi nejlepší představu o tvaru hasseovských diagramů slabě uspořádaných množin lze získat z následující charakterizace pomocí relace indiference I. Platí věta: Uspořádání P na množině X je slabé uspořádání, právě když relace indiference I je ekvivalence. Z právě uvedeného tvrzení ihned plyne, že každé lineární uspořádání je slabé, ale opak obecně neplatí. Uveďme nyní obrázek, na kterém ilustrujeme příklady hasseovských diagramů slabě uspořádaných množin.



Obr. 2

Na základě předchozí věty je ihned zřejmé, že diagramy uspořádaných množin A a C představují slabá uspořádání, zatímco diagramy B a D nejsou diagramy slabě uspořádaných množin. Charakterizace slabého uspořádání pomocí reálné funkce je analogická reprezentační větě pro lineární uspořádání. Platí následující tvrzení: Relace P je slabé uspořádání na množině X právě tehdy, když existuje reálná funkce $f : X \to \mathbb{R}$ taková, že

$$xPy \iff f(x) < f(y).$$

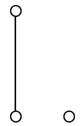
Jiný typ reprezentační věty popisuje slabě uspořádané množiny pomocí podmnožin. Tento způsob charakterizace není nikterak výjimečný. V algebře se například používá pro popis distributivních svazů. Připomeňme, že svaz L je distributivní, pokud neobsahuje podsvaz izomorfní s některým z následujících dvou svazů, které je zvykem označovat M_5 a N_5.

Obr. 3

Podobným způsobem lze nyní reprezentovat slabá uspořádání. Definujme nejprve speciální tříprvkovou uspořádanou množinu, která se skládá z jednoprvkového a dvouprvkového řetězce. Jednoprvkový řetězec přitom chápeme jako izolovaný bod. Označme tuto uspořádanou množinu symbolem $2 + 1$. Hasseovský diagram uspořádané množiny typu $2 + 1$ uvádíme na obr. 4.

Platí následující reprezentační věta, která charakterizuje slabě uspořádané množiny pomocí podmnožin. Uspořádaná množina je slabě uspořádaná právě tehdy, když neexistuje její část izomorfní uspořádané množině typu $2 + 1$.

V druhé části odstavce se alespoň v krátkosti věnujme enumerační problematice slabě uspořádaných množin. Především je nutno uvést, že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi n-prvkovými neinde-



$2+1$

Obr. 4

xovanými slabě uspořádanými množinami a kompozicemi čísla n. Kompozicí přirozeného čísla n přitom rozumíme libovolnou posloupnost přirozených čísel $x_1, x_2, \ldots, x_k$, kde $1 \leq k \leq n$, takových, že $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. Z této skutečnosti ihned plyne, že na n-prvkové množině existuje

$$W_n = 2^{n-1}$$

neindexovaných slabě uspořádaných množin. Viz článek [2]. Rovněž jsou známy rekurentní formule pro určování počtu všech indexovaných slabě uspořádaných množin. Tyto formule odvodili v roce 1978 J. L. Chandon, J. Lemaire a J. Pouget [4]. Symbolem $w_{n,k}$ označme počet všech indexovaných slabě uspořádaných množin, pro něž relace indiference I rozkládá množinu X na právě k tříd. Pak platí následující rekurentní formule

$$w_{k,n} = k(w_{n-1,k-1} + w_{n-1,k}).$$

Pro počáteční hodnoty $w_{n,k}$ platí $w_{0,0} = 1$, $w_{n,0} = 0$ pro $n > 0$ a $w_{n,k} = 0$, pokud $k > n$. Pro hodnoty $w_{n,k}$ je známa rovněž exaktní formule ve tvaru

$$w_{n,k} = S(n,k)k!,$$

kde $S(n,k)$ jsou tzv. Stirlingova čísla druhého druhu. Čísla $S(n,k)$ vyjadřují počet rozkladů n-prvkové množiny na právě k tříd. Podrobnější informace o Stirlingových číslech druhého druhu může čtenář nalézt v [12]. Pro počet w_n všech n-prvkových indexovaných slabě uspořádaných množin tedy platí formule

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)k!.$$

Nyní se již snadno zjistí, že počáteční členy posloupnosti w_n pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jsou

$$1, 3, 13, 75, 541, 4683, 47293, \ldots .$$

Asymptotickým chováním počtu všech indexovaných slabě uspořádaných množin se zabýval v roce 1980 J. P. Barthèlemy [1].

5. Polouspořádání

V roce 1956 zavádí R. D. Luce pojem polouspořádání jako přirozené zobecnění pojmu slabého uspořádání. Uspořádání P na množině X se nazývá *polouspořádání*, jsou-li splněny následující podmínky

(1) $\forall x, y, z \in X : xPy \wedge yPz \Rightarrow \forall w \in X : wPz \vee xPw$,

(2) $\forall x, y, s, t \in X : xPy \wedge sPt \Rightarrow xPt \vee sPy$.

Analogicky jako u slabého uspořádání je v případě polouspořádání známa celá řada reprezentací tohoto pojmu. Uveďme nejprve dvě charakterizace polouspořádání relačního typu. Buďte P, Q binární relace na množině X. Pak symbol PQ označuje obvyklý součin, tj. skládání relací. Pro $x, y \in X$ tedy klademe

$$xPQy \Leftrightarrow \exists z \in X : xPz \wedge zQy.$$

Dále definujme binární relaci P^d na X tak, že

$$xP^d y \Leftrightarrow yP^c x \Leftrightarrow xPy \vee xIy.$$

Nyní již můžeme zformulovat reprezentační větu. Platí: Binární relace P na množině X je polouspořádání právě tehdy, když P je areflexivní a platí

$$PIP \subseteq P, \qquad P^2 P^d \subseteq P.$$

Jiná možnost, jak formulovat relační reprezentaci polouspořádání, souvisí s relací indiference I. Platí věta: Uspořádání P je polouspořádání právě tehdy, když binární relace $PI \cup IP$ je slabé uspořádání. Následující reprezentace polouspořádání pomocí reálné funkce pochází od D. Scotta a P. Suppese z roku 1958. Tato reprezentace bývá v řadě publikací uváděna jako definice. Reprezentace má tvar: Uspořádání P je polouspořádání, právě když existuje reálná funkce $f : X \to \mathbb{R}$ taková, že platí

$$xPy \Leftrightarrow f(x) > f(y) + 1.$$

Existuje ještě analogická reprezentace polouspořádání pomocí zobrazení f množiny X do množiny Y reálných intervalů stejné délky. Tuto reprezentaci lze formulovat takto: Uspořádání P je polouspořádání právě tehdy, když existuje zobrazení množiny X do množiny Y takové, že

$$xPy \Leftrightarrow \forall z \in f(x), \forall t \in f(y) : z > t.$$

Problematiku reprezentace polouspořádání uzavřeme přehlednou charakterizací pomocí podmnožin. Řekneme, že uspořádaná množina je typu $3+1$, je-li tvořena tříprvkovým a jednoprvkovým řetězcem. Analogicky uspořádaná množina je typu $2+2$, je-li tvořena dvěma dvouprvkovými řetězci. Hasseovské diagramy uspořádaných množin $3+1$ a $2+2$ jsou znázorněny na následujícím obrázku.

Obr. 5

Na základě právě uvedené definice můžeme snadno zformulovat reprezentační větu. Uspořádání P na množině X je polouspořádání právě tehdy, když uspořádaná množina (X,P) neobsahuje část izomorfní s $3+1$ nebo $2+2$. Z tohoto tvrzení mimo jiné plyne, že libovolné slabé uspořádání je polouspořádání.

Zabývejme se nyní enumerační problematikou polouspořádání. V roce 1978 odvodili francouzští matematici J. L. Chandon, J. Lemaire a J. Pouget [4] exaktní formuli pro výpočet počtu indexovaných polouspořádání. Nechť s_n, označuje počet indexovaných polouspořádání na n-prvkové množině. Pak platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} S(n,k)\{2k\}_{k=1},$$

kde $S(n,k)$ jsou Stirlingova čísla druhého druhu. Symbol $\{a\}_b$ značí jako obvykle kombinatorickou funkci definovanou vztahem

$$\{a\}_b = a(a-1)\dots(a-b+1).$$

Na základě této formule se již snadno zjistí, že počáteční členy posloupnosti s_n pro n=1, 2, 3, … jsou

$$1, 3, 19, 183, 2371, 38703, 763099, \dots .$$

Dále je známo, že počet S_n neindexovaných polouspořádání na n-prvkové množině je roven tzv. Catalanovu číslu

$$S_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{\{2n\}_{n-1}}{n!}.$$

Tento výsledek jako první dokázali Wine a Freund v roce 1957. Uvedený výsledek byl v pozdější době několikrát znovuobjeven (například Dead a Keller 1968 [2]). Počáteční členy posloupnosti S_n pak pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nabývají hodnot

$$1, 2, 5, 15, 42, 132, 429, \ldots .$$

Je rovněž známo, že enumerační problematika polouspořádání souvisí s rozsáhlou skupinou tak zvaných Catalanových úloh. Odbočme na okamžik od našeho hlavního tématu a zformulujme alespoň jednu z úloh tohoto typu. Předpokládejme, že je dána množina S, na které je definována neasociativní operace násobení. Zřejmě výraz $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, kde $x_i \in S$, nemá smysl, pokud pomocí závorek nedefinujeme pořadí, v jakém se budou jednotlivé součiny provádět. Nechť u_n označuje počet všech možných závorkování n prvků. Například pro $n = 4$ je $u_4 = 5$ a odpovídající závorkování jsou tvaru

$$(a,(b(cd))), \quad (a((bc)d)), \quad ((ab)(cd)), \quad ((a(bc))d), \quad (((ab)c)d).$$

Není obtížné dokázat, že pro libovolné $n > 2$ platí následující rekurentní formule:

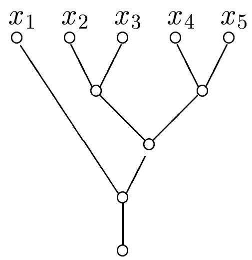
$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$$

Z rekurentního vztahu lze pomocí vytvořujících funkcí odvodit exaktní formuli pro výpočet hodnot u_n, která je tvaru

$$u_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Je evidentní, že čísla u_n nejsou ničím jiným než Catalanovými čísly, a platí $u_n = s_{n-1}$. Právě uvedená úloha o uzávorkování pochází od belgického matematika E. Catalana (1814–1894) a datuje se do roku 1838. Úloha o uzávorkování rovněž souvisí s grafovou problematikou. Každému závorkování totiž odpovídá jistý graf, tzv. binární strom, jehož uzly mají stupně právě 1 a 3. Korespondence mezi závorkováními a binárními stromy je naznačena na následujícím obrázku.

$$(x_1((x_2x_3)(x_4x_5))) \quad \rightleftarrows$$



Obr. 6

6. Intervalové uspořádání

Definice intervalového uspořádání navazuje svou strukturou na předcházející definice. Uspořádání P na množině X se nazývá *intervalové*, když platí

$$\forall x, y, s, t \in X : xPy \wedge sPt \Rightarrow xPt \vee sPy.$$

Ihned na základě definice je zřejmé, že každé polouspořádání je intervalové uspořádání. Proveďme nyní krátkou rekapitulaci vztahů mezi doposud probranými speciálními typy uspořádání. Nechť symboly L, W, S, I, P označují po řadě množiny všech lineárních uspořádání, slabých uspořádání, polouspořádání, intervalových uspořádání a uspořádání na dané konečné množině. Pak platí

$$L \subseteq W \subseteq S \subseteq I \subseteq P.$$

Shrňme nyní základní informace o reprezentacích intervalových uspořádání. Tyto reprezentace pocházejí asi ze 70. let a lze je nalézt například v článku [6]. Relační charakterizace intervalového uspořádání využívá opět relace indiference. Platí věta: Binární relace P na množině X je intervalové uspořádání právě tehdy, když P je areflexivní a platí $PIP \subseteq P$. Analogická charakterizace má tvar: Binární relace P na množině X je intervalové uspořádání právě tehdy, když P je areflexivní a relace PI je slabé uspořádání. Reprezentace intervalových uspořádání pomocí reálné funkce má tvar: Uspořádání P na množině X je intervalové uspořádání právě tehdy, když existuje reálná funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a kladná reálná funkce $g : X \to \mathbb{R}_+$ taková, že

$$xPy \Leftrightarrow f(x) > f(y) + g(y).$$

Existuje ještě jiná reprezentace pomocí zobrazení f množiny X do množiny Y reálných intervalů. Reprezentace je tvaru: Uspořádání P je intervalové uspořádání právě tehdy, když existuje zobrazení množiny X do množiny Y takové, že

$$xPy \Leftrightarrow \forall z \in f(x), \forall t \in f(y) : z > t.$$

Charakterizace intervalových uspořádání pomocí podstruktur je známa například z práce [6]. Platí již celkem očekávaná věta, že uspořádání P je intervalové právě tehdy, když uspořádaná množina (X, P) neobsahuje část izomorfní s 2+2. Závěr odstavce o reprezentacích zakončíme pěkným tvrzením. Pro libovolné $x \in X$ definujme množinu

$$P(x) = \{y \in X; yPx\},$$

tzv. množinu předchůdců prvku x. Pak platí: Uspořádání P je intervalové právě tehdy, když je množina $\{P(x); x \in X\}$ lineárně uspořádaná pomocí množinové inkluze.

Enumerační problematikou neindexovaných intervalových uspořádání se zabývali v roce 1979 matematici T. L. Greenough a K. P. Bogart. Výraznějších výsledků však dosáhli až v roce 1987 P. E. Haxell, J. J. McDonald a S. K. Thomason [8]. Uveďme alespoň stručně hlavní výsledek, ke kterému v [8] dospěli. Nechť I_n označuje počet neindexovaných intervalových uspořádání na n-prvkové množině. Pak platí

$$I_n = \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{n-j} h(j), \qquad \text{kde} \qquad h(j) = \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=1}^{i} h(i,j,k).$$

Hodnoty $h(i,j,k)$ z posledně uvedeného vztahu lze určit pomocí následující formule

$$h(i,j,k) = \sum_{a,b} \binom{b}{a, k-(a+1)} h(i-1, j-(a+1), b),$$

v níž sumace probíhá přes všechny hodnoty indexů a, b takové, že

$$0 = a \le k-1 < b \le i-1, \qquad \text{nebo} \qquad 0 < a \le k-1 \le b \le i-1.$$

Na základě uvedených výsledků byly spočteny hodnoty I_n pro $n \le 60$. Počáteční členy této posloupnosti pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jsou

$$1, 2, 5, 15, 53, 217, 1\,014, 5\,335, 31\,240, 201\,608, \ldots .$$

Příbuznou problematiku intervalových grafů studoval v roce 1982 P. Hanlon [7]. Na tuto práci částečně navázal v roce 1989 svým článkem [5] M. H. El-Zahar.

7. Stupňovitě uspořádané množiny

Definici stupňovitě uspořádané množiny lze nalézt již ve druhém rozšířeném vydání Birkhoffovy *Teorie svazů* z roku 1948. Uspořádaná množina (X, P) se nazývá *stupňovitě uspořádaná*, pokud na množině (X, P) existuje tzv. hodnotová funkce $h : X \to \{0, \ldots, |X|\}$ taková, že pokud prvek y pokrývá prvek x, pak $h(y) = h(x)+1$. Jestliže $h(x) = m$, pak říkáme, že prvek x má stupeň m. Každá stupňovitě uspořádaná množina splňuje následující tzv. Jordan–Dedekindovu podmínku: Všechny maximální řetězce v (X, P) spojující dva dané prvky mají stejnou délku. Délkou konečného n-prvkového řetězce přitom rozumíme číslo $n - 1$.

Enumerační problematikou stupňovitých uspořádaných množin se zabýval v roce 1969 a 1970 D. A. Klarner. Pokusme se nyní shrnout aspoň některé výsledky, kterých v publikacích [9] a [10] dosáhl. Nechť $g_k(n)$ označuje počet n-prvkových indexovaných stupňovitých uspořádaných množin, jejichž prvky mají stupeň nejvýše k. Pro hodnoty $g_k(n)$ platí následující formule

$$g_k(n) = \sum_{(v_1,\ldots,v_k)} \binom{n}{v_1, \ldots, v_k} \cdot 2^{v_1 v_2 + \ldots + v_{k-1} v_k},$$

v níž se sčítá přes všechny kompozice $(v_1, \ldots, v_k)$ čísla n na k nezáporných částí. Stupňovitá uspořádaná množina (X, P) se nazývá *bázová*, jestliže každá její souvislá část obsahuje prvek x s vlastností $h(x) = 1$. Nechť $b_k(n)$ označuje počet všech n-prvkových indexovaných bázových stupňovitých uspořádaných množin, jejichž prvky mají stupeň nejvýše k. Označíme-li $g_k(x)$ a $b_k(x)$ exponenciální vytvořující funkce posloupností $g_k(n)$ a $b_k(n)$, pak platí

$$g_k(x) = b_1(x) \ldots b_k(x).$$

Symbolem $G_k(n)$ označme dále počet n-prvkových neindexovaných stupňovitých uspořádaných množin, jejichž prvky mají stupeň nejvýše k. Problematikou enumerace hodnot $G_k(n)$ se zabývají práce [5] a [10]. Buď X n-prvková množina a $\{X_1, \ldots, X_k\}$ rozklad X takový, že $|X_i| = v_i$. Nechť dále S_i je grupa všech permutací na X_i a $S = S_1 \times \ldots \times S_k$ označuje součin těchto grup. Dále pro každou permutaci $\sigma \in S$ položme $c(\sigma) = c_1(\sigma) + c_2(\sigma) + \ldots$, kde $c_i(\sigma)$ označuje počet i-prvkových cyklů v σ. Pak platí

$$G_k(n) = \sum_{(v_1,\ldots,v_k)} \frac{1}{v_1! \ldots v_k!} \sum_{\sigma \in S} 2^{c(\sigma)},$$

kde vnější součet probíhá přes množinu všech kompozicí čísla n na k nezáporných sčítanců $(v_1, \dots, v_k)$ a vnitřní součet přes množinu všech permutací σ grupy S. Odvození právě uvedené formule je založeno na Pólyově enumerační teorii.

8. Vrstvová uspořádání

G. Kreweras v [14] definuje *vrstvově uspořádanou množinu* jako uspořádanou množinu, ve které mají všechny maximální řetězce stejnou délku. Vrstvově uspořádané množiny jsou speciálním případem stupňovitě uspořádaných množin, přičemž prvky stejného stupně tvoří vrstvu. Ve vrstvově uspořádané množině platí, že každý prvek z i-té vrstvy pokrývá aspoň jeden prvek v $(i-1)$–ní vrstvě a je pokryt aspoň jedním prvkem z $(i+1)$–ní vrstvy. Symbolem $t(n,k,m)$ označme počet n-prvkových indexovaných vrstvově uspořádaných množin s k vrstvami a m maximálními prvky. Následující enumerační výsledky pocházejí z roku 1985. Zřejmě $t(n,k,m) = 0$, pokud $m > n-k+1$. Případ $k = 1$ je triviální, neboť $t(n,1,n) = 1$. V případě $k = 2$ je třeba určit počet bipartitních uspořádaných množin, v nichž každá komponenta obsahuje aspoň dva prvky. Buď $h = n - m$. Pak číslo $t(n,2,m)$ je rovno počtu $c(h,m)$ matic typu $h \times m$ nad množinou $\{0,1\}$ takových, že každý řádek a každý sloupec matice obsahuje aspoň jednu jedničku. Pro hodnoty $c(h,m)$ platí

$$c(h,m) = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{h-j} \binom{h}{j} (2^j - 1)^m.$$

Konečně pro hodnoty $k \geq 3$ platí následující rekurentní a exaktní formule

$$t(n,k,m) = \binom{n}{m} \sum_{h=1}^{n-m-k} t(n-m, k-1, h) \cdot c(h,m),$$

$$t(n,k,m) = \sum_{(v_1,\dots,v_k)} \binom{n}{v_1, \dots, v_k} c(v_1,v_2) \dots c(v_{k-1}, v_k).$$

V posledním vztahu součet probíhá množinu všech kompozicí čísla n na právě k kladných sčítanců, přičemž $v_k = m$. Počet $t(n)$ všech indexovaných vrstvově uspořádaných množin nyní získáme sumací přes všechna možná k a m. G. Kreweras v [12] určil hodnoty $t(n)$ pro $n \leq 11$.

9. Sériově paralelní uspořádání

Posledním typem uspořádání, o kterém se v článku zmíníme, je takzvané sériově paralelní uspořádání. K jeho zavedení je třeba definovat následující dvě operace mezi uspořádanými množinami. Buďte $\mathcal{X} = (X, P)$ a $\mathcal{Y} = (Y, Q)$ disjunktní uspořádané množiny. *Disjunktním součtem* $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ rozumíme uspořádanou množinu $\mathcal{Z} = (X \cup Y, R)$, kde $R = P \cup Q$. Tedy pro $x, y \in X \cup Y$ klademe xRy právě tehdy, když nastane jedna z možností (1) a (2).

(1) $x, y \in X, xPy$,

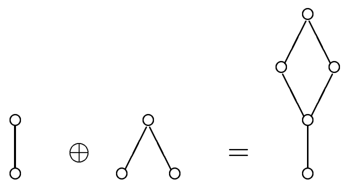
(2) $x, y \in Y, xQy$.

Disjunktní součet dvou uspořádaných množin získáme prakticky tak, že hasseovské diagramy těchto množin položíme vedle sebe.

Lineárním nebo též *ordinálním součtem* $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ těchto množin pak rozumíme uspořádanou množinu $\mathcal{Z} = (X \cup Y, R)$, kde $R = P \cup Q \cup (X \times Y)$. Tj. pro $x, y \in X \cup Y$ klademe xRy právě tehdy, když nastane jedna z možností (1),(2), nebo možnost

(3) $x \in X, y \in Y$.

Snadno se ověří, že pro ordinální součet $\oplus$ neplatí komutativní zákon. Na následujícím obrázku uvedeme pro názornost příklad, jak ordinální součet funguje.



Obr. 8

Nyní lze již uvést hlavní definici. Uspořádaná množina se nazývá *sériově paralelní*, pokud je získána z jednoprvkové uspořádané množiny pomocí operací disjunktního a lineárního součtu.

Enumerační problematiku sériově paralelních uspořádaných množin studoval v roce 1974 R. P. Stanley [15]. Výsledky, kterých ve své práci dosáhl, byly založeny především na metodě vytvořujících funkcí. Symbolem P_n nyní označme počet všech neindexovaných n-prvkových sériově paralelních uspořádaných množin a symbolem $P(x)$ vytvořující funkci posloupnosti P_n. Pak platí

$$P(x) = \exp[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}[P(x) + \frac{1}{P(x)} + x - 2]].$$

Na základě uvedeného vztahu pro vytvořující funkci odvodil Stanley asymptotický odhad pro hodnoty P_n. Platí

$$P_n \sim Cn^{-\frac{3}{2}} r^{-n},$$

kde C je konstanta a r je poloměr konvergence řady $P(x)$. Symbol $\sim$ má přitom následující význam. Pro posloupnosti f_n a g_n klademe $f_n \sim g_n$ právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = 1.$$

Numerické hodnoty konstant C a r z předchozího vztahu byly určeny přibližně takto: $C \doteq 0.229$ a $r \doteq 0.216$. Při studiu asymptotického chování posloupnosti p_n všech indexovaných sériově paralelních uspořádaných množin bylo v práci použito exponenciální vytvořující funkce. Stanley touto cestou získal očekávaný výsledek

$$p_n \sim C^* n! n^{-\frac{3}{2}} r^{-n}.$$

Literatura

[1] Barthelèmy, J. P., An asymptotic equivalent for the number of total preorders ora a finite set, *Discrete Mathematics* **29**(1980), 311–313.

[2] Barthelèmy, J. P., Flament Cl., Monjardet B., Ordered sets and social sciences, *Ordered sets* (1982), Reidel, Dordrecht–Boston, 721–759.

[3] Bogart K. P., Some social science applications of ordered sets, *Ordered sets* (1982), Reidel, Dordrecht–Boston, 759–787.

[4] Chandon J. L., Lemaire J., Pouget J., Dénombrement des quasi-orders sur un ensemble fini, *Math. Sci. Humaines* **62**(1978), 61–80.

[5] El-Zahar M. H., Enumeration of ordered sets, *Algorithms and Order* (1989), 327–352.

[6] Fishburn P. C., Intransitive indiference in preference theory, A Survey, *Oper. Res.* **18**(1970), 207–228.

[7] Hanlon P., Counting interval graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **272**(1982), 383–426.

[8] Haxell P. E., McDonald J. J., Thomason S. K., Counting interval orders, *Order* **4**(1987), 269–272.

[9] Klarner D., The number of graded partially ordered sets, *J. Combinatorial Theory* **6**(1969) 12–19.

[10] Klarner D., The number of classes of isomorphic graded partialdy ordered sets, *J. Combinatorial Theory* **9**(1970), 412–419.

[11] Klarner D., The number of tiered posets modulo six, *Discrete Math.* **52**(1986), 295–297.

[12] Klaška J., Birkhoffův kombinatorický problém počtu uspořádání a jeho historie, *in Matematika v proměnách věků I* Dějiny matematiky, svazek 11, Prometheus, Praha, 1998, 99–112.

[13] Kendall D. G., Incidence matrices, interval graphs and seriation in archeology, *Pacific J. Math.* **28**(1969), 565–570.

[14] Kreweras G., Denombrement des ordres étages, *Discrete Math.* **53**(1985), 147–149.

[15] Stanley R. P., Enumeration of posets generated by disjoint unions and ordinal sums, *Proc. Amer. Math. Soc.* **45**(1974), 295-299.

Jiří Klaška
Matematický ústav FaSt VUT Brno
e-mail: klaska@um.fme.vutbr.cz