FYLOGENEZE POJMU FUNKCE

Alena Kopáčková

1. Úvod

Pojem funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů v matematice. Neobjevil se však najednou a v žádném případě se nezrodil definováním; formulaci samotné definice a obecnějšímu pohledu na funkční závislost předcházela staletí vývoje kauzálního myšlení a důkladné práce s konkrétními reprezentanty funkcí. Při našem pohledu do historie tohoto pojmu budeme sledovat dva směry: zamyslíme se jednak obecně nad vznikem a vývojem funkčního myšlení na samotné existenci definice funkce do jisté míry nezávislého a jednak budeme mapovat snahu matematiků, jak již pociťovanou závislost vymezit a pojmenovat. Historický exkurz však nebudeme provádět příliš do široka a naše pojednání nebude žádnou historií vývoje matematické analýzy; tomuto tématu je věnována poměrně bohatá literatura a odkazy na některé tituly nalezne čtenář v seznamu na konci článku. Proto i prostor věnovaný některým úsekům vývoje diferenciálního a integrálního počtu nebude úměrný významu daného období či zmiňovaných matematiků pro matematickou analýzu obecně, ale vždy se budeme tázat, jak toto období či matematik ovlivnili pohled na funkční závislost.

Může se tedy zdát, že některé úvahy a momenty práce známých matematiků budou přehnaně zdůrazněny na úkor jejich „daleko“ významnějších a slavnějších výsledků. Všímat si budeme více období, kdy se pojem funkce rodil, kdy se vedly spory o jeho obsah, kdy se jeho definice formulovala a dále se vyvíjela tak, aby do ní bylo možno zahrnout stále více zvláštních a patologických případů funkcí, jež se v matematice objevovaly, než období současné matematiky, kdy se již pohled matematiků na tento ústřední pojem matematické analýzy jeví jako relativně ustálený, resp. kdy se případná další zobecnění pojmu funkce již příliš vzdalují reálné funkci jedné reálné proměnné, na níž při našem pohledu budeme klást důraz.

2. Vývoj funkčního myšlení

Je nanejvýš pravděpodobné, že již naši prapředci při svém běžném praktickém životě pociťovali kauzálnost jevů, které je obklopovaly, případně do nichž oni sami jakýmkoliv způsobem zasahovali. Veškeré snahy o vysvětlování přírodních dějů, ať už jsou to z našeho dnešního hlediska vysvětlení tzv. „vědecká“ či „nevědecká“, svědčí o tom, že se lidé vždycky zamýšleli nad souvislostmi a příčinností různých událostí.

2.1 Starověk

První evidované matematické poznatky vznikaly v Egyptě, Mezopotámii, Indii a Číně; byly to však poznatky nesystematické, náhodně empiricky posbírané, ale především se ještě nestávaly součástí deduktivního systému, jímž matematika jako věda je. Již zde se však setkáváme na každém kroku se vztahem mezi čísly či veličinami. První doklady o matematickém vyjádření závislostí pocházejí z Babylónie z doby 2 až 1 tisíc let před naším letopočtem; jsou to tabulky funkcí $n \to \frac{1}{n}, n \to n^2, n \to \sqrt{n}, n \to n^3, n \to \sqrt[3]{n}, n \to n^2 + n$, ale i některých dalších jako např. „schodovité“ funkce či funkce po částech lineární ([15], str. 238, [35], str. 40). V této době se řešily převážně příklady vyvolané praxí – šlo o různé daňové předpisy, úlohy inspirované stavebnictvím, zemědělstvím a obchodem.

Významným zdrojem pro evidování funkčních závislostí bylo také pozorování oblohy a nebeských dějů. Lidé se postupným zaznamenáváním diskrétních údajů učí zachycovat spojitý děj. Je pozoruhodné, že staří Babylóňané ve školách, v nichž byli vychováváni správní úředníci, začínají pěstovat matematiku i jako samostatný předmět, formulují a řeší problémy, které nevzešly z praxe, ale byly vysloveny učitelem, tzv. imanentní problémy.

Otevřená otrokářská demokracie vytvořila v Řecku příznivé podmínky pro rozvoj vědeckých disciplín. Matematika se začíná konstituovat jako deduktivní věda. Řekové si v 6. – 5. stol. př. n. l. nejen začínají uvědomovat rozdíly mezi diskrétní a spojitou veličinou, ale rozvíjejí i své infinitesimální úvahy, zabývají se nekonečnem a objevují se u nich první (teoreticky nepodložené) záblesky limitních přechodů a integrálních součtů. V pokusech raných Pythagorejců vyslovit nejjednodušší zákony akustiky a vypátrat vzájemné vztahy mezi různými fyzikálními veličinami, jako byl např. vztah mezi délkou a tloušťkou struny a výškou zvuku, vidíme zřetelně prvky funkčního uvažování.

Z hlediska propedeutiky pojmu funkce a infinitesimálního myšlení připomeňme např. Eudoxovu exhaustivní metodu popsanou v Eukleidových „Základech“, Archimédův fyzikální způsob při výpočtu kvadratur či známé Zenónovy apórie (více [15], str. 250 – 254). (Eudoxos z Knidu: asi 365 – asi 300 př. n. l., Eukleides z Alexandrie: asi 365 – asi 300 př. n. l., Archimédes ze Syrakus: 287 – 212 př. n. l., Zenón z Eleje: asi 490 – 430 př. n. l.). Geometři studují křivky vzniklé spojitým pohybem bodu a formulují kinematické zákony jejich vzniku. Hippias (asi 460 – asi 400 př. n. l.) zkoumá křivku *kvadratrix*, Archimédes a o několik století později Papps z Alexandrie (asi 290 – 350 n. l.) studují *spirály*. Menaechmos (asi 380 – asi 320 př. n. l.) a Apollonios z Pergy (asi 260 – asi 170 př. n. l.) se pokoušejí pomocí geometrické terminologie slovně popsat obecnější křivku (libovolnou elipsu, parabolu, hyperbolu); tyto tzv. *symptomy* v podstatě odpovídají rovnici křivky za použití dnešního algebraického aparátu. Menaechmos byl údajně prvním, kdo se těmito kuželosečkami zabýval a Apollonios je později pojmenoval. Diocles (asi 240 – asi 180 př. n. l.) a Nikomedes (asi 280 – 210 př. n. l.) se zabývají v souvislosti s řešením problému zdvojení krychle křivkami *cissoida* a *konchoida*. Na přelomu 1. a 2. století tabeluje Ptolemaios (85 – 165 n. l.) v díle „Almagest“ v souvislosti s výpočty poloh Slunce, Měsíce a planet (o nichž se předpokládá, že se periodicky a spojitě mění v čase) vedle funkce *chordála* i další funkce jedné, dvou i tří proměnných.

I když množství funkcí, jimiž se intuitivně zabývala antická matematika, nebylo rozsáhlé, způsob práce s nimi byl v mnohém podobný, jak to uvidíme později u matematiků středověku a novověku – Řekové hledali vlastnosti studovaných funkcí, tabelovali je, užívali interpolace, určovali extrémy a řešili úlohy obdobné našemu integrování. Ve všech antických úlohách však chyběl aparát analytických výrazů a algebraický symbolismus. Náznaky algebraické symboliky objevující se u Diofanta z Alexandrie (kolem r. 250 n. l) nebyly zatím využity. Shrneme-li antické období, můžeme konstatovat, že i přes studium různých konkrétních změn proměnné veličiny, úvahy o pohybu (převážně rovnoměrném přímočarém či kruhovém) a kontinuu nevystupuje zřetelně nikde idea obecné funkce či proměnné veličiny. Zároveň je však jisté, že i přes to, že myšlenka funkční závislosti nebyla nikde explicitně vyslovena a nebyla pojmenována ani proměnná veličina. Řekové se závislostmi veličin de facto pracují a popisují je tabulkou, slovním vyjádřením, graficky či kinematickým pravidlem. Idea obecného vztahu závislosti mezi veličinami se však poprvé objeví až ve středověku.

2.2 Středověk

Indové zavádějí v 5. stol. n. l. funkci *sinus*. Arabský matematik al-Bírúní (973 – 1048) uvažuje o obecné křivce, ve svých úvahách však zůstává bohužel osamocen. Evropa v 11. – 15. stol. využívá odkazu řecké a arabské matematiky, do latiny se překládají řecká a arabská matematická díla, prohlubuje se početní technika, rozšiřuje se používání indicko-arabských číslic a symbolů +, − a matematika zpracovává změnu a pohyb, poprvé i nerovnoměrný.

Na univerzitách v Oxfordu a Paříži přírodní filozofové a logici navazují na naturfilozofická díla Aristotelova i jeho islámských stoupenců a zabývají se problémem kvantifikace změny. Pozornost poutá především mechanika, ale také některé tepelné a optické jevy. Mezi učenci se začíná vytvářet představa o zákonech přírody jako o zákonech funkčního typu a objevují se různé obecnější teorie změny veličiny jako funkce času. Rozpracovává se pojetí proměnné veličiny jako stupně nebo toku kvality. Scholastici Robert Grosseteste (asi 1168 – 1253), Thomas Bradwardinus (asi 1290 – 1349), Richard Swineshead (14. stol.), Nicole Oresme (asi 1323 – 1382) zkoumají a popisují přírodní děje a pohyby a uvažují o kontinuu. Pod kvalitami či formami rozumějí scholastici fenomény jako teplo, světlo, barvu, hustotu, vzdálenost, rychlost apod., které mohou mít různé stupně (*gradus*) intenzity (*intensio*) a které se spojitě mění uvnitř jistých mezí. Intenzity forem jsou uvažovány ve vztahu ke svým extenzitám (*extensio*), jako jsou např. čas či hmotnost. Toto učení bylo anglickými scholastiky rozvíjeno v prostředí kinematiky, zatímco Oresme v Paříži své úvahy zasazoval i do geometrie.

Bradwardinus se ve svém díle „Tractatus proportionum seu de proportionibus velocitatum in motibus“ („Traktát o poměrech neboli o poměrech rychlostí při pohybu“) v roce 1328 pokouší vyjádřit závislost mezi rychlostí, silou způsobující pohyb a odporem.

Swineshead (též Swinshed, Swisset, Suisset, Suicet), přezdívaný Kalkulátor (podle svého díla „Liber calculationum“ neboli „Kniha kalkulací“ z r. 1350), poprvé uvažuje o okamžité neboli bodové rychlosti (*velocitas instantanea, velocitas punctualis*), zatímco dříve se rychlost uvažovala jen v nějakém konečném časovém intervalu. Pojem okamžité rychlosti však u něj nebyl nijak definován; středověcí (a stejně tak starověcí) učenci porovnávali totiž vždy veličiny stejného druhu a nebylo tedy možné uvažovat poměr dráhy a času. Intenzita u něj vystupuje jako rychlost mechanického pohybu, ale také jako míra tepla a chladu, řídkosti nebo hustoty. Jeho analýzy a příklady změn intenzit jsou však velmi abstraktní a ani výsledky se neuvádějí do souvislosti s reálnými měřeními, experimenty a pozorováním. Hovoří-li Swineshead o změně kvality, užívá někdy termínu „proudění (*fluxus*) kvality".

Oresme rozvíjí ve svém díle napsaném okolo r. 1370 a zachovaném v mnoha opisech pod různými názvy („De configuratione qualitatum" – „O konfiguraci kvalit", „De uniformitate et difformitate intensionum" – „O rovnoměrných a nerovnoměrných intenzitách", „Tractatus de figuratione potentiarum et mensura difformitatum" – „Traktát o utváření sil a míře nerovnoměrnosti") Swinesheadovo učení o intenzitě forem a pojímá proměnnou veličinu jako intenzitu či stupeň. Je při tom názornější než Swineshead, neboť veličiny a jejich vzájemné závislosti vyjadřuje geometricky.

V úvodu své knihy říká, že *kromě čísly lze každou měřitelnou věc vyjádřit i jako spojitou veličinu a pro měření jsou proto potřebné body, čáry, plochy, v nichž se podle Aristotela primárně projevuje míra a vztah; v ostatních předmětech se míra nebo vztah poznávají tak, že se body, čáry a plochy kladou do myšlenkového vztahu s těmito věcmi.* (citováno z [22], str. 393). Oresme zavádí též pojem velocitatio, čímž je míněno zrychlení jako intenzita rychlosti či pohybu, přičemž samo zrychlení může být jak rovnoměrné, tj. konstantní, tak i různým způsobem nerovnoměrné. Funkční závislost popisuje slovně vyjádřeným pravidlem nebo graficky, pro závislost veličin užívá ve svých dílech „Tractatus proportionum" („Traktát o poměrech"), „Algorismus proportionum" („Algoritmus o poměrech") termínu *proportio* (poměr, vztah) a říká: *jakýkoliv vztah by se ukázal mezi jednou intenzitou a druhou, tentýž vztah se nachází i mezi první a druhou čárou* (přeloženo z [20], str. 141). Teorie konfigurace kvality (nazývaná také učením o šíři forem, případně o rovnoměrnosti a nerovnoměrnosti intenzity) se sice ve středověku stala v Evropě velmi populární, bylo jí věnováno mnoho knih a vykládala se v univerzitních kurzech, ale na řešení matematických problémů nebyla nijak využita. Z hlediska vývoje pojmu funkce se tato teorie stala jeho propedeutickou, dále se však již nerozvíjející fází. V oblasti zobecňování a abstrahování dospěli sice scholastici dále než antičtí matematici, ale v počtu a významu konkrétních výsledků nemohou být s nimi vůbec srovnáváni.

Vliv scholastiků na další vývoj funkčního myšlení není však podle Medvedeva v historii matematiky dosud uspokojivě prozkoumán a Juškevič uvádí, že jejich díla byla čtena a obdivována ještě v 17. století mezi jinými i Descartem a Leibnizem.

2.3 Novověk

Rozvíjející se astronomie a navigační metody v 16. století vyžadovaly přesnější a rozsáhlejší numerické výpočty. K tomu se, jak se zdá, velmi hodil nový nástroj, a to logaritmy objevené Johnem Napierem (1550 – 1617). Jeho tabulky logaritmů „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ („Popis nádherného zákona logaritmů“) byly poprvé publikovány v roce 1614. Edwards v [12] na str. 143 uvádí, že Kepler bezprostředně poté, co obdržel Napierovy tabulky logaritmů, je s velkým nadšením začal užívat a objevil pak rychle svůj třetí zákon o pohybu planet. Napierův logaritmus (označme ho Nog) byl odlišný od dnešního pojetí logaritmu; vztah mezi ním a dekadickým logaritmem log vyjadřuje formule: $\mathrm{Nog}x = 10^7 \cdot \log \frac{10^7}{x}$, z níž je patrné, že Napierův logaritmus nemá všechny vlastnosti obvyklé pro dnešní logaritmus o libovolném kladném základu různém od jedné. Podle [12] se Napier pro svůj objev pravděpodobně nechal inspirovat příkladem v práci „Arithmetica integra“ z r. 1544, v níž její autor Michael Stifel (1487 – 1567) poukazoval na souvislosti chování dvou posloupností, jedné aritmetické a druhé geometrické. Šlo o přirozenou skutečnost, že sčítání členů první z nich koresponduje s násobením členů druhé.

Napier svůj logaritmus definoval kinematicky – uvažoval spojitý pohyb bodu na dvou různých přímkách, jeden z bodů zmenšoval svou rychlost předepsaným způsobem a druhý měl konstantní rychlost rovnou počáteční rychlosti prvního bodu (podrobněji např. [12], [15], [20], [29]). Definovat logaritmus pomocí mocniny, na níž je třeba umocnit základ, Napier ani nemohl, neboť v té době nebyly v matematice např. ještě známy mocniny s racionálním exponentem. To, že by log mohla být chápána jako inverze k exponenciální funkci, bylo samozřejmě v Napierově době nemyslitelné. Napierův přístup k novému matematickému nástroji a jím prováděné výpočty však dokazují, že i přes to, že obecný pojem funkce byl stále neznámý, porozuměl Napier zřetelně tomuto konkrétnímu funkčnímu vztahu. Napierova cesta k logaritmu znovu ukazuje, že koncepce fyzikálního pohybu byla stále jedinou bází pro úvahy o kvantitativních změnách spojité proměnné. Zavedení dekadického logaritmu následovalo velmi rychle; v r. 1624 definuje Henry Briggs (1561 – 1631) v publikaci „Arithmetica logarithmica“ pomocí Napierova Nog nový pohodlnější logaritmus splňující již obvyklé požadavky vztahem: $\lg x = \frac{\mathrm{Nog}1 - \mathrm{Nog}x}{1 - \mathrm{Nog}10}$.

Logaritmy se staly v mnoha vědeckých odvětvích velmi užitečnou pomůckou a představují také velmi významnou propedeutickou fázi ve vývoji pojmu funkce.

Zatímco matematiku až do konce 16. století lze i přes ojedinělé pokusy zobecnit a popsat závislost jedné veličiny na druhé charakterizovat jako matematiku konstantních veličin, 17. století znamenalo ve fylogenezi pojmu funkce zásadní přelom. Koncepce (přírodní) zákonitosti přerůstá v pojem funkční závislosti. Pojem funkce se začíná pozvolna oprošťovat od konkrétních souvislostí s geometrií a kinematikou, postupně nabývá tvaru nezávislého pojmu a na přelomu sedmnáctého a osmnáctého století je poprvé vymezen definicí. Podmínky, které způsobily toto nesmírné urychlení ve vývoji pojmu a ovlivnily silně i vznik diferenciálního a integrálního počtu, jsou dvojí: vnější, tj. hospodářský a kulturní vývoj v Evropě a vnitřní, tj. vývoj matematiky samé, zejména objevení písmenové symboliky a vznik analytické geometrie. Matematici této doby jevili velký zájem o praktické, zejména technické problémy; v podstatě neexistovali tzv. čistí matematici. Matematici byli tehdy často zároveň fyziky, mechaniky, hvězdáři, lékaři i filozofy a často sami navrhovali a konstruovali mnohé přístroje. Mechanika zemských i nebeských pohybů stavěla před vědce obrovské množství otázek, které v obecném matematickém vyjádření vedou k výzkumu funkcí metodou nekonečně malých veličin.

Významnou etapou ve vývoji matematické analýzy se staly infinitesimální úvahy při výpočtech obsahů a objemů a konstrukci tečen navazující na Hippokrata, Demokrita, Eudoxa a Archiméda.

Johannes Kepler (1571 – 1630) počítá objemy vinných sudů a obsah kruhu a využívá při tom rozkladu tělesa či rovinného obrazce na nekonečně mnoho nekonečně malých částí o téže dimenzi a ty potom přeskupuje do „uchopitelného“ tělesa či obrazce; sečtením těchto malých elementů objemu či obsahu nachází hledaný objem či obsah.

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) při svých výpočtech objemů a obsahů „rozkládá“ tělesa či obrazce na elementy nižší dimenze a formuluje zároveň svůj známý princip. John Wallis (1616 – 1703) využívá nekonečné řady a limitní úvahy při výpočtu kvadratury paraboly, kvadraturám a konstrukcím tečen se věnují Pierre de Fermat (1601 – 1665) i Blaise Pascal (1623 – 1662), který jako první užívá metody charakteristického trojúhelníka. Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675) se vedle kvadratur věnuje podrobně *cykloidě* a jako jeden z prvních využívá při výpočtu tečen kinematického přístupu. Přesností byl ve svých infinitesimálních výpočtech známý Christian Huygens (1629 – 1695), Isaac Barrow (1630 – 1677) již znal vzájemnou souvislost mezi kvadraturou křivky a její tečnou. (Více v [15], [30], [12], [36].)

Spojení algebry a geometrie v analytické geometrii (roviny), (jejíž vznik je připisován Pierru Fermatovi, avšak již dříve ji publikoval a více se s ní proslavil René Descartes (1596 – 1650)), umožnilo popsat závislost mezi dvěma proměnnými prostřednictvím rovnice v x a y. Descartes to ve svém díle „Discours de la méthode“ („Rozprava o metodě“), jehož částí je známá „La géométrie“ z roku 1637, vystihuje těmito slovy: *Dáváme-li čáře (křivce) y postupně nekonečné množství různých hodnot, najdeme také nekonečné množství hodnot x a tímto způsobem dostaneme nekonečné množství různých bodů …: a ty opíšou hledanou křivou čáru* (přeloženo z [20] str. 142). Zcela jasně cítíme z těchto slov Descartovo evidování funkční závislosti mezi dvěma množinami proměnných veličin i toho, jak rovnice v x i y umožňuje bod po bodu sestrojit graf této závislosti.

Centrální myšlenkou analytické geometrie se tedy stala korespondence mezi rovnicí $f(x, y) = 0$ a křivkou, sestávající ze všech takových bodů, jejichž souřadnice (x, y) vztaženy ke dvěma daným (nikoliv nutně kolmým) osám vyhovují rovnici. Tuto ideu však jak Fermat, tak Descartes graficky znázorňovali jinak, než je obvyklé dnes. Oběma stačila jen jedna osa (horizontální) s vyznačeným počátkem, na níž potom nanášeli ve zvoleném směru ordináty a tím dostali obraz bodu o souřadnicích (x, y).

Ve skutečnosti to u Descarta i Fermata bylo spíše obráceně: na prvním místě byla křivka a na místě druhém analytická formule, která se jevila vhodným a užitečným, ale stále jen pomocným způsobem popisu křivky. Descartes např. nehovořil o klasifikaci analytických výrazů, ale křivek a rozlišoval křivky *geometrické*, které byly vytvořeny spojitým pohybem, a křivky *mechanické*, které byly vytvořeny dvěma oddělenými pohyby, mezi nimiž neexistoval vztah ([20], str. 103). Všechny mechanické (tj. negeometrické či transcendentní) křivky ze své geometrie dokonce vyloučil jako nevyhovující jeho metodě zkoumání.

Přínos obou zakladatelů analytické geometrie byl v tom, že se jednak mohly studovat rovnice pomocí křivek a jednak křivky definované pomocí rovnic; novým rysem přitom bylo, že jak Descartes, tak Fermat uvažovali neurčité rovnice spojitých proměnných (pokud předtím např. Viéte řešil rovnice, neznámé v nich byly vždy jen konstantami, které byly hledány). Analytická geometrie umožňovala vyjádřit analyticky různé křivky, i když pozornost matematiků byla zpočátku zaměřena pouze na křivky algebraické (Descartem nazývané geometrické), jejichž body vyhovují jediné algebraické rovnici. Také termíny *abscisa, aplikáta* či *ordináta* užívané nejen Fermatem a Descartem, ale vyskytující se i později např. u Newtona, Leibnize a dalších, vznikly při studiu kuželoseček; je zajímavé i to, že prvotní při popisu křivky byla aplikáta (později více zvaná ordináta), tedy z hlediska funkce jedné proměnné závisle proměnná, zatímco abscisa, tj. nezávisle proměnná, byla popisována jako druhá, zaměřená na kuželosečce či obecně na jakékoliv křivce v daném a jak jsme již dříve připomněli, nikoliv nutně kolmém směru ([20], str. 100). Je přitom známo, že již dříve Apollonius užíval při studiu kuželoseček dvou na sebe kolmých průměrů neboli os. Pokud byly analytické výrazy popisující danou křivku užívány, jednalo se zpravidla o rovnici o dvou proměnných, tj. z našeho pohledu sledujícího fylogenezi funkčního myšlení šlo o funkci danou implicitně.

Medvedev uvádí v [25] na str. 29 dva faktory, které mohly ovlivnit to, že funkce byla zpočátku vnímána implicitně. Jednak šlo patrně o tradici v koncepci popisu různých zákonitostí, kde již předchůdci novověkých matematiků počínaje např. Eudoxem či Archimédem nevyjadřovali obsah, objem, rychlost či tlak, ale vztahy mezi nimi. Dalším faktorem, který mohl prioritu implicitního vnímání funkce ovlivnit, bylo to, že samotná představa o funkční závislosti jako o formuli se rodila v algebře a ta byla tehdy vnímána jako věda o rovnicích. Descartes však ukázal, že rovnice o dvou proměnných umožňuje vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé, nešlo však samozřejmě tehdy o žádnou obecnou větu o implicitní funkci.

Užívání analytických výrazů umožňujících provádět výpočty bezprostředně, na první pohled se od sebe odlišujících a vhodných pro různé úpravy podle předem daných pravidel, otevřelo ve vývoji matematiky nové perspektivy a stalo se posledním krokem, který nastartoval vznik a bouřlivý vývoj matematické analýzy jako nové matematické disciplíny.

2.4 Newtonův a Leibnizův pohled na funkční závislost

Říkáme-li, že zakladateli matematické analýzy byli Newton a Leibniz, nemíní se tím jen to, že tito dva učenci objevili efektivní metody na řešení problémů spojených s hledáním tečen a kvadratur. Takové problémy byly totiž úspěšně či neúspěšně studovány již od antiky a především pak půlstoletí před Newtonem a Leibnizem.

Předchozí výsledky obdobných úloh vznikaly po aplikaci speciálních metod na speciální a konkrétní problémy. Již Fermat a Roberval užívali s úspěchem různé metody na hledání tečny ke křivce (viz např. [12], [15], [36]), nikdy je však nerozvinuli do obecně použitelných algoritmů. Z dnešního hlediska se může zdát, že od užití speciálních technik na řešení jednotlivých problémů je k obecným metodám matematické analýzy na řešení celých tříd vzájemně podobných problémů jen malý krůček, ale nikdo z předchůdců Newtona a Leibnize tento krůček neudělal. Patrně je velký rozdíl mezi pouhým objevem důležitého jevu a uvědoměním si jeho důležitosti a významnosti. Dokonce i pojmenování existujícího a již známého jevu může způsobit pokrok.

Význam Newtona a Leibnize netkví tedy především v tom, že se zabývali problémy tečen a kvadratur a že nalezli kalkulativní techniky na řešení, ale v tom, že byli schopni z různých infinitesimálních technik užívaných v různé podobě již od antiky vydestilovat neuvěřitelně silný nástroj pro systematickou kalkulaci a navíc objevili vzájemnou souvislost mezi problémem tečny a kvadratury.

Isaac Newton (1643 – 1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) takřka nezávisle na sobě vystoupili se svým diferenciálním a integrálním počtem, každý z nich však své infinitesimální úvahy zasazoval do jiného prostředí. Zatímco Newton vychází z pohybu hmotného bodu a proměnnou veličinou v jeho teorii fluxí a fluent je čas, Leibniz vychází z geometrie a konstrukce tečny ke křivce v daném bodě křivky. Oba však řeší podobné problémy a dospívají ke stejným závěrům. Zdůrazněme však, že ani jeden z nich neužívá při zrodu matematické analýzy pojmu funkce. Podrobnější osvětlení Newtonova i Leibnizova přístupu k základním problémům matematické analýzy je předmětem mnoha publikací; uveďme např. [12], [15], [36], [20], [30], [35]. Podívejme se nyní na jejich období z hlediska vývoje funkčního myšlení.

Zanedlouho po zavedení analytické geometrie se objevil další významný prostředek – rozklad funkce do mocninné řady umožňující práci i s transcendentními funkcemi. Jedna ze základních prací I. Newtona z roku 1671 nese dokonce název „De methodis serierum et fluxionum" („O metodě fluxí a nekonečných řad"); poprvé byla vydána až po Newtonově smrti po více než šedesáti letech v roce 1736 v anglickém překladu pod názvem „Method of Fluxions and Infinite Series". (Je nutné si však uvědomit, že na řadu se Newton a jeho současníci dívali jako na aproximativní proces a řady sloužily Newtonovi převážně jako nástroj k různým výpočtům – mj. i na řešení diferenciálních rovnic či na výpočet veličin jako $\ln 2, \mathrm{e}, \pi$, apod. Na rozvoj každé funkce byl při tom užit nějaký konkrétní „trik"; obecná věta o rozvoji funkce v řadu však známa ještě nebyla a ani nebyl pomocí limitního přechodu definován pojem *součet* řady.

Newton zde užívá pojmy *fluentes quantitates*, což jsou neurčité (*indeterminatae*) veličiny závislé na čase, které spojitě narůstají nebo ubývají za současného vzniku křivek prostřednictvím místního pohybu (jde tedy o rozklad pohybu hmotného bodu v rovině) a pod jejich *fluxemi* (nom. sg. *fluxio*) chápe rychlosti jejich růstu nebo ubývání. Fluenty jsou tedy v dnešní terminologii spojité funkce závisející na čase a popisující dráhu bodu v rovině a fluxe jsou jejich prvními derivacemi podle času. Všeobecným argumentem je zde čas, na němž závisí spojitě tekoucí proměnné veličiny mající jisté rychlosti změny.

Později však Newton zobecňuje pojmenování obou veličin a abstrahuje do určité míry od závislosti na čase: fluenta = *quantitas correlata*, fluxe = *quantitas relata*. Newton připouští vyjádření fluenty analyticky (a to i ve formě součtu nekonečné řady), „jeho“ funkcemi jsou vlastně polynomy. Newton řeší dvě základní úlohy; z kinematického pohledu je to jednak úloha, jak ze znalosti dráhy hmotného bodu v libovolném okamžiku nalézt rychlost tohoto pohybu v určitém čase a naopak, jak ze znalosti rychlosti hmotného bodu v každém okamžiku nalézt dráhu, kterou tento bod urazí za určitý čas. V jeho teorii fluxí to znamená jednak ze vztahu mezi fluentami daném rovnicí $f(x, y) = 0$ určit poměr mezi fluxemi $\dot{x}$ a $\dot{y}$ a naopak, ze vztahu mezi fluxemi určit vztah mezi fluentami.

První úloha je v podstatě úlohou počtu diferenciálního, vede na derivování, druhá je úlohou integrálního počtu a vede na integrování, resp. na hledání primitivní funkce k dané funkci. Stěžejní Newtonovy ideje týkající se objevení diferenciálního a integrálního počtu byly vysloveny v již zmíněném rukopise z r. 1671.

U Newtona vystupuje snaha ustanovit základní pojmy analýzy, když v dopise Wallisovi v r. 1692 píše: *Předpokládám, že jedna z předložených veličin, stejného druhu s ostatními, roste díky rovnoměrnému plynutí a všechny ostatní jsou vztaženy k ní jako k času* (přeloženo z [20], str. 144). Počáteční Newtonovo pojetí funkční závislosti v letech 1665 – 1666 byla geometrická představa funkce jako proměnné ordináty křivky závislé na abscise, později Newton nahradil toto pojetí analytickým vyjádřením, kde je funkce dána implicitně jednou nebo více rovnicemi a ve své Metodě fluxí své pojetí funkce kinematizoval, přičemž funkce tam byla zpravidla zadána pomocí diferenciální rovnice.

Připomeňme, že Newton kinematicky zaváděl pouze základní pojmy, fakticky se metoda fluxí vytvářela pro fluenty vyjádřené analyticky ať už v konečném tvaru nebo pomocí součtu nekonečné řady a s funkcemi Newton ve skutečnosti pracoval jako s analytickými výrazy sestavenými z proměnných a konstant. Užíval při tom slova ordináta, křivka, ale tyto pojmy nijak nedefinoval.

V souvislosti s tehdejším vnímáním funkční závislosti je zajímavé, že Newtonův učitel Isaac Barrow (1630 – 1677) v jedné ze svých prací poznamenal, že *nemá význam, jestli se zkoumaná veličina mění pravidelně podle nějakého zákona či nepravidelně*, tj. zda existuje analytické vyjádření či ne („Mathematical Works“, vydáno až v r. 1860 v Cambridge, přeloženo z [20], str. 144). Byla to však pouze teoretická poznámka, která předběhla dobu; toto širší chápání funkční závislosti překračovalo rámec dostupných výpočetních metod a v 17. století nepřitahovalo žádný zájem.

V úvahách tohoto druhu pokračoval až Euler v polovině 18. století a k upřesnění idejí došlo až v teorii funkcí v 19. a 20. století.

Leibniz založil svůj diferenciální počet na myšlence charakteristického trojúhelníka dx, dy, ds (čímž zobecňuje dřívější Pascalovu ideu užívanou i Barrowem), na Descartově analytickém vyjádření geometrických křivek a na teorii nekonečných řad (pojednání „Nova methodus pro maximis et minimis“ – „Nová metoda maxim a minim“ v časopise Acta eruditorum v r. 1684). Obecnou křivku pojímá Leibniz jako mnohoúhelník sestavený z nekonečně mnoha nekonečně malých úseček (nekonečně malý rozdíl označuje písmenem d), tečnu ke křivce v jejím bodě hledá vlastně jako spojnici dvou bodů křivky, které jsou od sebe nekonečně málo vzdáleny, čili jako „limitní“ polohu sečny a zanedbává při tom nekonečně malé veličiny: ... *nalézt tečnu ke křivce, to znamená vést přímku spojující dva body křivky, jejichž vzdálenost je nekonečně malá nebo též prodloužit stranu nekonečně úhlového mnohoúhelníka, který je pro nás s křivkou totožný* ... (Acta Eruditorum 1684, přeloženo z [12], str. 258)

Leibniz řešil podobně jako Newton i základní úlohu počtu integrálního: hledal funkci, pro níž je znám poměr stran jejího charakteristického trojúhelníka, tj. jejíž derivace je známa. O Leibnizově pohledu na funkci pojednáme samostatně v následujícím odstavci, kde se budeme věnovat vymezování pojmu funkce.

Porovnáme-li specifika přístupu obou učenců, lze říci, že Leibniz dbal více na vytváření obecných metod a algoritmů, promýšlel symboly a vhodná označení, zatímco Newton kladl zase více důraz na konkrétní výsledky a praktické úlohy a na symboliku se tolik neohlížel. Newtonovi byla bližší koncepce neurčitého integrálu (řečeno dnešními slovy), Leibniz pojímal integrál jako nekonečný součet, tj. byla mu bližší riemannovská koncepce určitého integrálu. Newton hojně užíval ve vyjádření funkcí nekonečné řady, zatímco Leibniz jim takový význam nepřikládal. Na rozdíl od Newtona Leibniz své myšlenky v letech 1684, 1686 hojně publikoval, zejména v časopise Acta Eruditorum, což patrně vedlo k tomu, že právě on byl považován za objevitele diferenciálního a integrálního počtu a ještě za života obou učenců se vedly rozsáhlé spory o prvenství.

V současné době se historici matematiky shodují v tom, že oba vědci položili základy matematické analýzy nezávisle na sobě (Newton v letech 1665 – 1666, Leibniz v letech 1672 – 1676) a dospěli z hlediska dalšího vývoje matematické analýzy k základním, jedinečným a přitom podobným výsledkům, i když jejich přístupy se značně lišily. Nejvýznamnější výsledky, na nichž mají zásluhu oba dva, jsou: došlo k vzájemnému propojení vzájemně inverzních metod derivování a integrování, začala se užívat formule, dnes známá pod jménem Newton-Leibnizova: $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, kde F je primitivní funkcí k f na intervalu (a, b). (I když je tato známá a užitečná poučka pojmenována po Newtonovi a Leibnizovi, její objevení se připisuje I. Barrowovi – [36], str. 127.). Začala se užívat promyšlená symbolika a bohatý algoritmický aparát. Funkce se stává hlavním objektem zkoumání matematické analýzy, která vznikla jako nová vědní disciplína, i když samotný tento pojem nebyl ještě vymezen.

3. Vymezování pojmu funkce

V následujícím odstavci se budeme podrobněji věnovat procesu vymezování pojmu funkce, formulování její definice a budeme sledovat, jak se obsah pojmu rozšiřoval tím, jak kopíroval v té době jeho známý rozsah. Jak jsme viděli v předchozích odstavcích, úvahy předchůdců Leibnize a Bernoulliho dokazují, že mnozí učenci si nejenom byli vědomi kauzality různých dějů, ale že si uvědomovali existenci funkční závislosti mezi proměnnými a dokonce se ji i různým způsobem pokoušeli popsat a pojmenovat.

3.1 První užití slova funkce – geometrický význam

Poprvé pravděpodobně užil termínu funkce Leibniz v roce 1673 v rukopise „Methodus tangentium inversa, seu de functionibus“ („Inverzní metoda tečen neboli o funkcích“), dřívější užití slova nebylo historiky matematiky zaznamenáno ([20], str. 144 – 145 i s kopií titulní stránky rukopisu, kde se termín objevuje). (Moritz Cantor ve třetím díle svých objemných „Geschichte“ [9] z roku 1901 tento zatím první výskyt slova funkce nezaznamenává, uvádí jako dobu prvního výskytu slova rok 1692, a to ještě pouze ve své vlastní předmluvě, kde se o věci zmiňuje jako o čerstvém poznatku – viz [9], str. 5 předmluvy.) Význam slova byl však jiný než dnes; Leibnizovo rané pojetí funkce je vysloveně geometrické.

Pojem funkce je u Leibnize zpočátku pevně svázán s křivkou (geometrickou i negeometrickou) a její tečnou v daném bodě křivky a funkcemi Leibniz nazývá různé úseky na osách objevující se při konstrukci této tečny. Nejde mu jen o úseky vyťaté tečnou samou, ale i o další vznikající při konstrukci dalších přímek křivek vztažených k danému bodu křivky, jako jsou normála, chordála i další.

Vznikající geometrické objekty (průměty a úseky na osách) svázané pevně s křivkou jsou u něj funkcemi křivky. Vedle popisu vlastností těchto „odvozenin“ křivky a vyjádření tohoto popisu rovnicemi řeší Leibniz i inverzní úlohu, jak najít ordináty bodů oněch úseček a křivých čar, jestliže pro danou křivku a tečný bod splňují nějakou funkci.

Leibniz tuto úlohu popisuje jako hledání aplikát (ordinát) pomocí známé vlastnosti tečny, *ale i jiných čar, které pro daný náčrt splňují nějakou funkci (ex aliis linearum in figura data functiones facientum generibus assumtis*) – [35], str. 56. Slovo funkce se tedy u Leibnize vyskytuje ve dvojím významu: jednak ve významu jisté vlastnosti či role a jednak jako pojmenování výsledku či objektu s touto vlastností. Není však pochyb o tom, že ani idea funkční závislosti v širším pojetí, než jakým bylo právě popsané geometrické, nebyla Leibnizovi cizí, jen pro ni užíval jiného slova. V tomtéž rukopise, v němž se slovo *funkce* poprvé objevilo, používá Leibniz i slova *relatio* (vztah, poměr) v souvislostech, kde by se dnes užilo právě slova funkce.

Poprvé Leibniz své rané pojetí funkce jakožto obecného termínu pro různé lineární segmenty svázané s danou křivkou publikoval v článcích v letech 1692 a 1694 (1692 – Acta Eruditorum, článek „De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis“, 1694 – Journal des Sçavans, článek „Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione“ ([20], str. 146, [9], str. 5 předmluvy, str. 215).

První užití termínu funkce nevyděluje ještě dostatečně to, co jsou nezávislé, volné proměnné (křivka totiž v té době nebyla pojímána jako graf nějaké funkce, ale jako geometrický objekt ztělesňující vztah mezi abscisou a ordinátou, tedy mezi proměnnými x a y, přičemž však pojem *proměnná* nijak neimplikoval pojem *závislost*).

Zdá se, že Leibnizovo chápání tohoto nového matematického termínu dobře odpovídalo latinskému významu slova: *fungor, fungi, functus sum* = být činný, vykonávat, provádět, zastávat, spravovat; *functio* = vykonávání, činnost.

V letech 1692 – 1694 se slovo funkce několikrát objevuje také v korespondenci mezi bratry Bernoulliovými (Jacob I. 1654 – 1705, Johann

I. 1667 – 1748) a Leibnizem a Leibniz je zmiňuje i v dopise Huygensovi stále v původním užším významu.

Jacob Bernoulli užil podle [9], str. 242, v roce 1694 v článku uveřejněném v Acta Eruditorum vedle slova funkce v Leibnizově původním geometrickém významu také slova *funkční čára* (*Functionslinie*), čímž mínil křivku (jak algebraickou, tak transcendentní).

Postupně se kladl větší důraz na vzorce a rovnice vztahující se k „funkcím“ křivky a pozornost matematiků se více soustřeďovala na roli symbolů v těchto rovnicích. Proměnnou začínali vidět více jako hodnotu závislou na ostatních proměnných a konstantách v rovnici a nikoliv na křivce samé. Tento posun v uvažování se odrazil i v následujícím vývoji pojmu funkce.

3.2 První definice – funkce jako veličina

V roce 1694 Johann Bernoulli označuje v souvislosti s rozvojem $\int ndz$ do nekonečné řady v článku uveřejněném v Acta Eruditorum písmenem *n libovolnou veličinu jakkoliv vzniklou z neurčitých a konstant* (*per n intelligo quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis ex constatibus*), ale neužívá pro ni slova funkce ([20], str. 146, [35], str. 57).

Během následujících několika let se začíná analytický výraz označovaný Johannem Bernoullim jako n nazývat funkcí. Cantor v [9] na str. 215 uvádí, že v roce 1698 Johann Bernoulli hovoří v dopise Leibnizovi o funkcích ordinát při řešení izoperimetrického problému (tj. problému hledání obrazců se stejným obvodem) a Leibniz v odpovědi oceňuje, že Bernoulli užívá slova funkce ve stejném významu jako on, a navrhuje speciální znaky pro odlišení několika různých funkcí argumentu nebo funkce dvou a více proměnných (viz níže).

Z korespondence mezi Leibnizem a Johannem Bernoullim je patrné, že pojem funkce již (zpočátku jen u Bernoulliho) ztrácí svůj původní geometrický charakter a klade se více důraz na souvislost s formulí namísto s obrázkem. Johann Bernoulli hovoří o *funkci proměnné* místo dřívější *funkce křivky* a funkce je stále častěji pojímána jako analytický výraz. I v pojednáních Académie des Sciences de Paris r. 1706 užívá Johann Bernoulli již slova funkce ve smyslu analytického výrazu ([9], str. 456).

Zajímavě se vyvíjí i funkční symbolismus. Johann Bernoulli v roce 1698 navrhoval v korespondenci Leibnizovi pro funkci proměnné x označení X, případně ξ. Leibniz byl v tomtéž roce názoru, že by i značení mělo zdůrazňovat různost vyskytujících se funkcí a doporučoval písmeno ξ navíc opatřovat indexy. Sám však v této době užíval jiné značení, a to:

$\overline{x}\rceil\underline{1}\rfloor$, resp. $\overline{x}\rceil\underline{2}\rfloor$ pro funkce proměnné x,

$\overline{x;y}\rceil\underline{1}\rfloor$, resp. $\overline{x;y}\rceil\underline{2}\rfloor$ pro funkce proměnné x a y,

$\overline{x}\rceil\underline{r\,1}\rfloor$, resp. $\overline{x}\rceil\underline{r\,2}\rfloor$ pro racionální funkce proměnné x,

$\overline{x}\rceil\underline{ri\,1}\rfloor$, resp. $\overline{x}\rceil\underline{ri\,2}\rfloor$ pro celé racionální funkce proměnné x

([9], str. 215). Podle tohoto značení se zdá, jako by Leibniz předpokládal konečné, v nejhorším případě spočetné množství funkcí, neboť je čísloval. Vzhledem k tomu, že teorie reálných čísel i úvahy o mohutnosti množin se rozvíjely až mnohem později, nemůžeme však na takový závěr s určitostí usoudit.

I když pojem funkce se stále častěji objevoval v článcích a korespondenci matematiků, nebyl ještě zařazen do encyklopedické publikace „Mathematisches Lexicon", kterou vydal v roce 1716 v Lipsku prof. Wolff; byla tam pouze hesla „konstantní" a „proměnná veličina". Pojmy *proměnná* a *konstantní veličina* se do matematiky dostaly zásluhou Leibnize (současně se však pro proměnnou i dále užívalo pojmu *neurčitá veličina*), stejně tak jako pojmy *souřadnice* a *parametr*. Kromě toho Leibniz shledával předchozí Descartovu klasifikaci křivek za nevyhovující a funkce i křivky dělil na algebraické (reprezentovatelné algebraickou rovnicí) a transcendentní.

Poprvé zformuloval definici nového pojmu Johann Bernoulli v roce 1718 v Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris v článku věnovaném řešení izoperimetrického problému:

On apelle ici fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manère que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.
(*Funkcí proměnné veličiny se nazývá veličina sestavená libovolným způsobem z této proměnné veličiny a konstant.*)

(Citace z Bernoulliho díla „Opera omnia" vydaného v r. 1742 v Lausanne a Ženevě převzata z [9], str. 457, kde je i německý překlad, originál citován též v [35], str. 60, [1], str. 10, ruský překlad v [20], str. 147, česky např. v [30], str. 52.) O způsobu sestavení veličiny zde Bernoulli nehovoří, ale lze se domnívat, že jej chápe podobně jako v následujícím Euler. Zároveň nahradil Johann Bernoulli své dřívější označení funkce novým; jako „charakteristiku“ (což byl Leibnizův termín pro značení) funkce navrhl řecké písmeno φ a argument funkce navrhl psát bez závorky φx.

Touto definicí vstoupil nový pojem regulérně do vědy.

3.3 Funkce jako analytický výraz

V roce **1748** Leonhard Euler (1707 – 1783) ve svém „Introductio in analysin infinitorum“ („Úvod do analýzy nekonečných“) nejprve definuje proměnnou a konstantní veličinu a poté tím, že slovo veličina nahrazuje slovem analytický výraz, zpřesňuje definici funkce, kterou do matematiky zavedl jeho učitel J. Bernoulli. V první kapitole prvního dílu své práce **Euler** uvádí definici:

Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.
(*Funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený jakýmkoliv způsobem z této proměnné veličiny a čísel nebo konstantních veličin.*)

(Citace originální formulace převzata z [10], str. 22, dále [35], str. 61, [1], str. 10, překlad do ruštiny v [21], str. 250, [25], str. 36, česky v [28], str. 8, [30], str. 52.) Za nezávisle proměnnou připouští Euler i komplexní čísla, i když se ve svém „Introductio“ zabývá dále funkcemi reálnými a především reálnými funkcemi reálné proměnné. Ve způsobu sestavení veličiny se Euler drží Gregoryho myšlenky, že veličina je sestavena (*compositum*) z druhých, dostaneme-li ji z nich pomocí čtyř elementárních operací, odmocněním, řešením algebraické rovnice, popř. jakoukoliv jinou myslitelnou operací (*quacunque imaginabili operatione*), čímž mínil přechod k limitě posloupnosti ([21], str. 250), ale navíc také pomocí logaritmování a operace inverzní, případně pomocí mnoha dalších operací, jako např. integrací diferenciální rovnice. Je však zajímavé poznamenat, že konstantu Euler za funkci nepovažoval.

Tato Eulerova definice nevznikla z první definice J. Bernoulliho pouhou výměnou dvou slov, ale znamenala zásadnější obrat v nazírání na funkci. Až do Eulerovy definice z r. 1748 byla funkce vnímána většinou geometricky jako křivka (příp. jako plocha či těleso) nebo byla vytvářena geometricko-kinematicky jako dráha pohybujícího se bodu, čili funkční závislost byla „vidět“. Geometricko-kinematický pohled však nedovoloval matematikům na funkce pohlížet tak obecně, jak to vyžadovaly stále narůstající matematické poznatky a prostředky. Analytické vyjádření funkce, ať již ve formě konečného algebraického výrazu či mocninné řady, dovolovalo názorný obraz nového objektu, umožňovalo s ním operovat pomocí pravidel algebry a provádět např. i infinitesimální operace.

Nový pohled v nazírání na funkci a odklon od užšího geometricko-kinematického vidění je potvrzen i v pokračování výše citované Eulerovy definice z r. 1748 uvedené v „Introductio in analysin infinitorum“: *Functio ergo quantitatis variabilis ipsa erit quantitas variabilis* čili *Funkce proměnné veličiny se tak sama stane proměnnou veličinou* (latinský originál z [10], str. 22, ruský překlad v [25], str. 36). Rozhodně tato definice funkce vyhovovala větším nárokům vzniklým při studiu křivek – dřívější vyjádření funkcí tabulkou či těžkopádná slovní vyjádření neumožňovala provádět s nimi matematické operace či zkoumat v takové míře vlastnosti křivek. Eulerova definice z r. 1748 byla velmi obecná a zahrnovala všechny tehdy známé funkční závislosti; odrážela se v ní i tehdejší víra matematiků v to, že analytickým vyjádřením lze popsat všechny známé funkce. Specifikem tohoto pojetí funkce bylo také to, že funkcí Euler rozuměl obecnější proměnnou veličinu; nebyla to již jenom tekoucí veličina jako u Newtona.

Kromě nového vymezení pojmu funkce Euler ve svém „Introductio“ dosud známé funkce klasifikuje; dělí je na algebraické a transcendentní, mezi algebraickými rozlišuje racionální a iracionální, mezi racionálními celé a lomené. Rozlišuje také funkce explicitní a implicitní, závisející na řešení rovnic. Přikládá velký význam nekonečným řadám a je názoru, že *povaha transcendentních funkcí by se lépe poznala, kdyby se vyjádřily ve formě nekonečné řady* ([9], str. 703). Nepochybuje o tom, že každou funkci lze vyjádřit jako součet nekonečné mocninné řady s racionálními koeficienty. Od Eulera pochází i dnešní nejčastější působ označování funkcí; již od roku 1734 (poprvé v „Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos 1734 et 1735“) užíval pro funkci písmene f a na oddělení argumentu funkce mu sloužila závorka: $f(x)$ ([9], str. 882).

V souvislosti s Eulerem první poloviny 18. století uveďme i poznámku o tehdejším pojímání spojitosti: spojitost funkce byla Eulerem (a nejen jím) chápána globálně ve smyslu „neměnnosti analytického vyjádření“ a Euler např. považoval funkci $z = \frac{1}{x}$ všude za spojitou, zatímco funkce $y = |x|$ byla v jeho pojetí nespojitá ([21], str. 251).

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) předložil roku 1772 ve své práci „Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables" („O jednom novém druhu kalkulu diferencování a integrování proměnných veličin") formální důkaz Taylorovy věty o rozkladu funkce do mocninné řady a došel ke známé formuli – zatím pro funkce algebraické. Všeobecně přijímaná představa, že každou funkci lze reprezentovat mocninnou řadou, vedla k pokusům funkci pomocí součtu mocninné řady také definovat. Lagrange se domníval, že veškerá teorie reálných funkcí reálné proměnné může být postavena na pojmu mocninné řady a redukována na počítání s řadami a ve své práci „Théorie des fonctions analytiques" („Teorie analytických funkcí") z r. 1797 nazývá funkcí jakýkoliv *výraz analýzy (expression de calcul)*. Lagrange užíval Eulerem zavedené značení funkcí pomocí malých i velkých písmen latinské i řecké abecedy $f, F, \varphi, \Phi, \psi, \Psi, \dots$.

3.4 Funkce jako závislost jedné veličiny na druhé (druhých)

Již ve druhé polovině 18. století se začínalo pojetí funkce jako analytického výrazu daného případně mocninnou řadou projevovat jako nedostatečné a matematici vedli o obsahu pojmu funkce rozsáhlé spory. Nově vzniklé problémy astronomie a matematické fyziky, zejména řešení kmitající struny, stavěly před matematiky nové otázky a při jejich řešení se objevovaly funkce, které nebylo možno popsat analyticky (v tehdejším pojetí tohoto slova), a to ani ve formě mocninné řady. Problém struny vedl na parciální diferenciální rovnice a tzv. mechanické funkce, které sice nebyly definovány, ale předpokládalo se o nich, že nejsou všude spojité ve smyslu neměnnosti analytického výrazu a přitom je lze načrtnout „volným pohybem ruky, aniž by se zvedla tužka z papíru", což bylo tehdejší kritérium spojitosti.

Matematici se zabývali tím, jaké funkce lze vůbec vyjádřit jako součet mocninné řady, jak se chovají funkce, které nelze popsat na svém definičním oboru jedním analytickým výrazem, začínají se více zkoumat nespojité funkce a dosud známé funkce se klasifikují do tříd. Pohled na funkci rozšiřuje nový analytický prostředek – trigonometrické řady. Některým matematikům se formule začíná zdát příliš omezující na to, aby pomocí ní bylo možno vyjádřit veškeré myslitelné geometricko-kinematické funkční závislosti a v jejich úvahách se opět vyskytuje slovo „křivka" na místě předchozího slova „formule". Pojetí funkce jako křivky – dráhy pohybujícího se bodu – jim totiž dovoluje obecnější představy a úvahy o funkci než pojetí funkce ve formě analytického výrazu. Takto uvažují např. D. Bernoulli, Euler, d'Alambert, Lagrange a Monge. Daniel Bernoulli (1700 – 1782) se jako jediný z nich odvažuje předpokládat, že jakoukoliv takovou křivku lze reprezentovat analytickým výrazem, ale nikoliv už jen ve tvaru mocninné, ale trigonometrické řady ([25], str. 39).

Spor o obsahu pojmu funkce a o třídách funkcí vyjádřitelných jako součet mocninné či trigonometrické řady, případně pomocí jakýchkoliv jiných operací matematické analýzy, měl obrovský význam pro rozvoj základů této disciplíny. Mezi „výsledky" těchto sporů můžeme zařadit i rozvoj teorie Fourierových řad, zobecnění integrálu a vůbec převážnou část teorie funkcí reálné proměnné.

Zmíněné otázky a rozpory a všeobecné přesvědčení o tom, že co lze vyjádřit formulí, není totéž, co lze načrtnout volným pohybem ruky, vedly Eulera k tomu, že v r. 1755 zformuloval po svých úvahách o rozložitelnosti funkcí do řady ve své předmluvě k práci „Institutiones calculi differentialis" novou, obecnější definici:

Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent seu per eam determinantur, eius functiones vocantur.
(*Jestliže některé veličiny závisejí na druhých takovým způsobem, že při změně těchto samy podléhají změně, pak první nazýváme funkcemi druhých. Tento název má mimořádně širokou povahu; zahrnuje všechny způsoby, jakými lze jednu veličinu vyjádřit pomocí jiných. Jestliže tedy x označuje proměnnou veličinu, pak všechny veličiny, které jsou na x závislé jakýmkoliv způsobem nebo jsou jím určené, se nazývají jeho funkcemi.*)

(Citace originální formulace převzata z [35], str. 70, kde je i anglický překlad, podstatná část definice v ruském překladu v [21], str. 254, česky [28], str. 8, [30], str. 52.) Euler měl pravdu v tom, že bylo třeba pojem funkce rozšířit, ale byl stále přesvědčen, že funkce vyjádřená na nějakém intervalu několika různými formulemi nemůže být na tomto oboru vyjádřena jedním vzorcem.

V Eulerově definici funkce z r. 1755 se nijak nehovoří o tom, jakým způsobem jsou funkční hodnoty získávány. Tento fakt, tj. že pro konstatování funkční závislosti není nezbytné znát formule či operace, pomocí nichž jsou hodnoty funkce získávány, explicitně zdůraznil ve své definici z r. 1797 Sylvestre Francois Lacroix (1765 – 1843), když ve svém kurzu matematické analýzy „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" píše:

Toute quantité dont la valeur dépend dùne ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit quòn ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.
(*Každá veličina, jejíž hodnota závisí na jedné nebo několika jiných veličinách, se nazývá jejich funkcí nezávisle na tom, jsou-li či nejsou-li známy operace, pomocí nichž se z druhých dostane ta první.*)

(Citace originálního znění převzata z [35], str. 76, ruský překlad v [21], str. 254, česky např. [28], str. 8.) Tuto definici Lacroix hojně používal ve svých učebnicích matematické analýzy a lze říci, že mezi matematickou obcí velmi přispěla k rozšíření nového pojetí funkce. Někteří matematici však ve svých dílech stále užívali definice funkce jakožto analytického výrazu (viz např. již zmíněný Lagrange v roce 1797).

Ještě obecnější, ale méně známá, byla definice, kterou užil o několik let dříve ve svém rukopise v r. 1778 Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de Condorcet (1743 – 1794):

Je suppose que jàie un certain nombre de quantités x, y, z, $\ldots$, F, et que pour chaque valeur déterminée de x, y, z, $\ldots$ etc., F ait une ou plusiers valeurs déterminées qui y répondent; je dis que F est une fonction de x, y, z, $\ldots$.
(*Předpokládám, že je dán nějaký počet veličin x, y, z, $\ldots$, F a že pro každou určenou hodnotu x, y, z atd. má F jednu či několik určených hodnot, které jim odpovídají; říkám, že F je funkcí x, y, z, $\ldots$.*)

(Citováno podle [35], str. 75, ruský překlad v [25], str. 41, české znění v [28], str. 8.) Condorcet ve své práci zdůraznil, že způsob zadání funkce nevyžaduje explicitní vyjádření ve tvaru analytické formule nebo dokonce ani ve tvaru rovnice zadávající ji implicitně. Jasně řekl, že závislost F na x, y, z může existovat, neznáme-li ani „způsob vyjádření F“ (tj. analytické formule) „ani rovnice pro F“ (tj. implicitně) ([25], str. 41, [28], str. 8). Výše uvedenému vymezení funkce vyhovují jak funkce více proměnných, tak funkce nejednoznačné. Condorcet první začal užívat termínu *analytická funkce* pro obecnou funkci, adjektivum analytická znamenalo tenkrát jakoukoliv funkci matematické analýzy.

3.5 Funkce jako obecnější korespondence veličin

V 19. století je již funkce centrálním objektem matematické analýzy. Euler prohlásil již v r. 1748 ve svém „Introductio in analysin infinitorum", že *veškerá analýza nekonečně malých se točí kolem proměnných veličin a jejich funkcí* (přeloženo z [25], str. 35, též [13], str. 694). Pojem funkce se však již osvobodil od jeho *curva quaecunque libero manus ductu descripta* (*křivka, kterou lze opsat volně vedenou rukou* – [31], str. 168). Výzkum vlastností reálných funkcí kladně ovlivnil proces aritmetizace analýzy a nové poznatky o reálných číslech.

Funkce byla od začátku 19. století zpravidla již pojímána jako libovolná závislost mezi proměnnými veličinami. Velmi obecný obsah vkládá do spojení „libovolná závislost" Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), když v r. 1822 ve své práci „Théorie analytique de la chaleur" („Analytická teorie tepla") píše:

En général, la fonction f(x) représente une suite de valeurs ou ordonnées, dont chacune est arbitraire.
(*Obecně funkce f(x) představuje posloupnost hodnot nebo ordinát, z nichž každá je libovolná.*)

(Citace originálu podle [35], str. 77, ruský překlad v [25], str. 42, české znění [28], str. 8 – 9.) Zcela jasně tato definice říká, že společný analytický výraz nemusí vůbec existovat, každá z hodnot $f(x)$ je „libovolná", což je explicitně zdůrazněno formulací, jíž definice pokračuje: *Vůbec se nepředpokládá, že se tyto ordináty řídí obecnou zákonitostí; mohou po sobě následovat zcela libovolně a každá z nich je dána tak, jako by byla jedinečnou veličinou* ([25], str. 42, [28], str. 8 – 9). Fourier ve své definici dává slovu posloupnost obecnější význam, než jak je tento pojem vnímán v matematice; plyne to i z toho, že užil slova *suite*, které je obvyklé spíše v nematematickém kontextu a znamená jakýkoli sled, řadu.

3.6 Fenomén spojitosti a diferencovatelnosti

I přes velmi obecné pojetí funkce (možná právě proto) nebyl samotný pojem funkce v 19. století stále úplně jasný. Užívání řad bez ohledu na jejich konvergenci mělo za následek různé paradoxy. Představy matematiků o pojmu funkce se obohacují o mnohé „patologické" funkce, které rozšiřují pohledy na pojem spojitost a na souvislosti spojitosti a derivace.

Je nutné zdůraznit, že historie pojmu funkce je těsně spjata s fenoménem spojitosti. Jak jsme již dříve poznamenali, měla spojitost zprvu globální charakter (existence jediného analytického výrazu pro všechny přípustné hodnoty nezávisle proměnné) a za „opravdové“ funkce byly do 19. století zpravidla přijímány pouze funkce spojité v tomto globálním smyslu. Na nespojité funkce bylo pohlíženo jako na něco umělého a patologického, čímž nemělo smysl se příliš zabývat. Globální chápání spojitosti vedlo však k různým paradoxům a např. Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) upozorňoval na funkci danou dvěma předpisy: $y = x$, je-li $x \geq 0$ a $y = -x$, je-li $x \leq 0$, která je v Eulerově smyslu nespojitá (viz 3.3), ale je spojitá, definuje-li se pomocí předpisu $y = \sqrt{x^2}$.

Podle Cauchyho se tento paradox odstraní změnou definice spojitosti. Několik let před Cauchym zavedl v r. 1820 definici spojitosti v dnešním lokálním smyslu i Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848). Bolzano ani Cauchy se však samotnou definicí funkce nezabývali. (Bolzano podle [18], str. 41 užívá od prvních stran své práce věnované funkcím bez definice termínu „Function“ jako běžného pojmu, ač si jinak na definicích dával velmi záležet.)

K lokálnímu pojímání spojitosti Bolzana a Cauchyho přidal pak v polovině 19. století Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) „dnešní“ $\varepsilon - \delta$ definici limity a zasloužil se velmi o proces aritmetizace matematické analýzy, čímž se však zároveň začínal vytrácet dřívější dynamický charakter limity, spojitosti i funkce samé. K pochopení podstaty funkce přispívá Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), který podává přesný důkaz konvergence Fourierových řad a v r. 1829 uvádí funkci, která není v žádném bodě spojitá ([30], str. 53).

Cauchy se domníval, že spojitá funkce má derivaci všude případně s výjimkou konečné množiny bodů a tentýž názor, že diferencovatelnost je důsledkem spojitosti, sdílela většina matematiků (Lobačevskij např. uvažoval nejvýše množinu izolovaných bodů nediferencovatelnosti), až Bernhard Riemann (1826 – 1866) sestrojil v r. 1854 funkci, která je spojitá a přitom nemá derivaci v husté množině bodů. Dlouho před Riemannem také Bolzano v r. 1830 uvádí ve svém nedokončeném a dlouho neznámém rukopise „Grössenlehre“ („Nauka o veličinách“), jehož částí je téměř po sto letech vydaná „Functionenlehre“ („Nauka o funkcích“), příklad funkce spojité na intervalu, která nemá derivaci v žádném jeho bodě; tento příklad však zůstal nepovšimnut ([25], str. 57 – 58). Sám Bolzano neočekával, že jeho příklad má tak „silné“ vlastnosti, domníval se, že jeho funkce není diferencovatelná „pouze“ na husté množině bodů intervalu; silnější vlastnost Bolzanovy funkce dokázal až v roce 1922 Vojtěch Jarník (1897 – 1970) – ([28], str. 16, [18], str. 60).

Také Weierstrass referoval v roce 1872 o funkci, která je spojitá, ale nemá nikde derivaci (součet stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí); dalším, kdo našel podobně konstruovanou funkci se stejnými vlastnostmi, byl Jean Gaston Darboux (1842 – 1917) – ([28], str. 16, [31], str. 159, 168). Darboux v r. 1875 ve své práci „Mémoire sur les fonctions discontinues“ předkládá definici spojitosti jako lokální vlastnosti funkce téměř stejným způsobem, jako je běžné v matematické analýze dnes (ovšem bez užití kvantifikátorů) – [26], str. 64 – 65.

Matematici se po všech nových zkušenostech a objevech opět ptali, co to jsou vlastně funkce jedné reálné proměnné, když mají tak rozdílné chování a v jakém vztahu jsou například k funkcím jedné komlexní proměnné. Někteří z nich dokonce takovéto „patologické“ funkce, jejichž vlastnosti neodpovídají názornému pohledu, odmítali za funkce vůbec přijmout.

3.7 Funkce jako jednoznačné přiřazení

Snahy ustanovit rigorózní bázi matematické analýzy byly motivovány přáním dokázat některé výsledky pro spojité funkce, které byly předtím přijímány intuitivně. Zatímco v předešlém století bylo mnoho úsilí věnováno na ujasnění toho, co tento matematický objekt vlastně znamená a jak jej vyhovujícím způsobem popsat, v 19. století se usilovněji vyšetřují vlastnosti funkcí a také se hledají funkce s vlastnostmi předem danými.

Nové pojetí funkce, které nijak neomezovalo způsob jejího zadání, vyhovovalo plně rostoucím potřebám matematické analýzy, neboť matematici se stále častěji setkávali s funkcemi, které nebyly analyticky vyjádřené, nebo dokonce funkce, které byly analyticky nevyjádřitelné. Definice, které se dále objevují, jsou formulovány tak, aby do sebe širší pojetí pojmu funkce zahrnovaly, tj. aby rozsah definice vyhovoval jejímu obsahu.

Pokusíme se nyní již stručněji uvádět některé zaznamenané a doložené definice pojmu funkce, aniž bychom tím chtěli jakkoliv naznačovat nějaké pořadí ve významu jednotlivých matematiků pro vývoj matematické analýzy. Někteří z význačných matematiků totiž již ani necítili potřebu tento základní pojem explicitně vymezit a o tom, jak jej pojímali, se lze domnívat jen nepřímo. Znovu přitom podotýkáme, že jsme vedeni především snahou zmapovat pojmotvorný proces pojmu „funkce“, a tak zůstanou nepovšimnuty mnohé zásadní výsledky, které se v matematické analýze objevily, pokud nebyly s tímto procesem bezprostředněji spjaty.

Velmi obecný pohled na pojem funkce má v následující definici Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793 – 1856), když ve své práci „Об исчезании тригонометрических строк“ („O konvergenci trigonometrických řad“) z r. 1834 říká:)

Общее понятие функции требует, чтобы функцией от x называтъ число, которое даётся для каждого x и вместе ц x постенепенно изменяетця. Значение функции может бытъ дано или аналитическим выражением, или условием, которое подаёт средство испытыватъ все числа и выдратъ одно из них; или, наконец, зависимостъ может существоватъ и оставатъся неизвестной.

(*Obecné pojetí funkce vyžaduje, aby funkce proměnné x byla číslo, které je dáno pro každé x a které se postupně mění s x. Hodnota funkce může být dána buď analytickým výrazem nebo podmínkou, která dává způsob testování všech čísel a výběru jednoho z nich, nebo konečně závislost může existovat a zůstat neznámá.*)

(Ruský originál citován v [25], str. 51, případně v [35], str. 77, anglický překlad v [13], str. 694, kde je citováno ze souhrnného vydání Lobačevského díla „Complete Works“ vydaného r. 1951.) Definice pokračuje příklady a komentářem, z něhož je jasné, že Lobačevskij pojímal zcela zřetelně funkci jedné proměnné jakožto jednoznačný vztah mezi dvěma číselnými množinami.

Moderní (z dnešního pohledu) definici funkce předložil P. G. L. Dirichlet. Hovoří-li se v matematice o Dirichletově definici funkce, má se na mysli zpravidla definice objevující se v jeho práci z r. 1837 „Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen“ („O vyjádření zcela libovolných funkcí pomocí řad sinu a kosinu“):

Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y, und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sich ebenfalls allmählich verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche Function von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken.

(*Pod a a b rozumějme dvě pevné hodnoty a pod x proměnnou veličinu nabývající všech hodnot mezi a a b. Jestliže nyní každému x odpovídá jedno jediné konečné y, a to tak, že když x spojitě probíhá interval od* *a do b, pak se $y = f(x)$ mění rovněž spojitě, pak se y nazývá spojitou funkcí x pro tento interval. Přitom není nutné, aby y záviselo na x na celém intervalu podle jednoho pravidla a dokonce ani není třeba si funkci představovat ve tvaru závislosti vyjádřené pomocí matematických operací.*)

(Z originálu citováno podle [35], str. 78, případně [26], str. 62 – 63, ruský překlad kompletní formulace v [25], str. 53 – 54, české znění její podstatné části [28], str. 9.) Dirichlet zde sice definuje spojitost funkce v intervalu (která není ovlivněna pojetím Bolzana a Cauchyho a má stále globální charakter), ale není pochyb o tom, že uvažoval i funkce nespojité; zmínili jsme již, že mezi jeho výsledky patří důkaz rozložitelnosti nespojité funkce (s konečným počtem bodů nespojitosti) do trigonometrické řady a také známý příklad „hodně" nespojité funkce. Po této poznámce z definice tedy čteme, že y je funkcí x, jestliže každé hodnotě x z daného intervalu odpovídá jediná hodnota y a to, zda existuje vzorec, který by tuto závislost popisoval, není důležité.

Všimněme si, že je zde poprvé explicitně zdůrazněna jednoznačnost funkční hodnoty. Dirichletovo vymezení pojmu funkce jakožto jednoznačného přiřazení je dodnes používáno. Oba posledně uvedené přístupy k pojetí funkce (Lobačevského i Dirichletův) jsou v matematice považovány za klasické.

Velmi podobně jako Dirichlet se na spojitost funkce na intervalu díval Riemann ve své dizertační práci „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse", kterou předložil v Göttingenu v r. 1851. Z definice lze jasně vyčíst, že funkcí Riemann rozumí jednoznačné přiřazení ([26], str. 63 – 64). To, že Riemann stejně jako Dirichlet neužíval lokální definice spojitosti podle Bolzana či Cauchyho, nebylo nic podivného; nakonec i sám Cauchy se v některých svých dalších pracech bez své nové definice obešel.

V samém konci devatenáctého a zejména počátkem dvacátého století přispěli k diskusím o pojmu funkce velmi významně René-Louis Baire (1874 – 1932), Félix Edouard Justin Emile Borel (1871 – 1956) a Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941).

Baire, který proslul mj. klasifikací nespojitých funkcí, ve své dizertační práci odmítl intuitivní pojetí funkce a spojitosti a vyjádřil přesvědčení, že teorie nekonečných množin je nezbytným základem reálné analýzy, neboť každý problém v teorii funkcí vede na jisté otázky množin.

Borel a Lebesgue se proslavili zejména teorií míry a integrálu. Lebesgue přispěl do diskusí o souvislostech spojitosti a diferencovatelnosti reálné funkce tím, že v r. 1905 ukázal, že spojitá funkce je vždy derivací nějaké jiné funkce, čili že ke každé spojité funkci na intervalu existuje primitivní funkce. Borel se ve svých úvahách věnoval i obecnému problému definování matematických objektů a přesnou konstruktivní definici viděl jako základ matematické teorie. Byl proti vágnosti některých pojmů v matematice a tvrdil, že dobrá definice musí daný pojem vymezovat tak, aby bylo absolutně jasné, že když o tomto pojmu hovoří dva matematici, že oba dva mají na mysli totéž.

Všichni tři zmínění matematici v oblasti teorie funkcí hojně publikovali a jejich práce jsou cennými zdroji pro historii vývoje pojmu funkce na počátku 20. století. Lze v nich najít i reminiscence Eulerovy definice funkce jakožto analytického výrazu. Názorům Bairea, Borela a Lebesguea týkajícím se klasifikace a reprezentace funkcí se podrobně věnuje Monna v článku [26]. Autor článku zde upozorňuje i na poměrně neznámý fakt, že podle Lebesgueovy poznámky v jedné z jeho prací i Cauchy uvažoval o definici pojmu funkce; pod vlivem Eulera funkcí u něho byl analytický výraz.

3.8 Zobrazení (z) množiny do množiny

V souvislosti s vývojem pojmu funkce na přelomu 19. a 20. století uveďme, že zájem matematiků se vedle reálné funkce reálné proměnné upíral také na reálnou i komplexní funkci komplexní proměnné a na funkce více proměnných. Znovu se rozšířil i pohled na spojité funkce a souvislosti s derivací; ukázalo se, že spojité funkce tvoří v říši funkcí jen malý ostrůvek a že množství spojitých diferencovatelných funkcí (byť by byly diferencovatelné jenom v jednom jediném bodě) je zanedbatelně malé ve srovnání se všemi spojitými funkcemi.

Matematika se již dávno osvobodila od přesvědčení, že definicí se popisují pouze již existující objekty; tyto úvahy měly své kořeny v ontologii. Vznikající teorie množin se svou terminologií (Cantor, Dedekind) umožňovala pohlížet na funkční závislost obecněji než jako na korespondenci číselných množin a vnesla do formulací větší přesnost a jasnost. Julius Wilhelm Richard **Dedekind** (1831 – 1916) definuje **obecné zobrazení jedné množiny do druhé** (a poprvé se tak neomezuje pouze na čísla) ve své práci „Was sind und was sollen die Zahlen?“ („Co jsou a mají být čísla?“) v r. 1887 následovně:

Unter einer Abbildung φ eines Systems S wird ein Gesetz verstan-

den, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir $\varphi(s)$ sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s entspricht, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s entsteht oder erzeugt wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ übergeht. ([11], str. 5.)

Pod zobrazením φ nějakého systému S se rozumí pravidlo, podle něhož každému určitému prvku s systému S přísluší jedna určitá věc, která se nazývá obrazem s a označuje se pomocí $\varphi(s)$; říkáme také, že $\varphi(s)$ odpovídá prvku s, že $\varphi(s)$ vznikne nebo se vyrobí z s pomocí zobrazení φ, že s přechází na $\varphi(s)$ zobrazením φ.)

(Ruský volnější překlad viz také [25], str. 59, anglická verze [13], str. 694.) Dále zde Dedekind definuje i obraz množiny $T \subset S$ jako množinu všech obrazů $\varphi(t)$, kde $t \in T$, a značí jej $\varphi(T)$. V Dedekindově terminologii je množina „systémem“. Definice je vysvětlována na příkladech; za příklad zobrazení Dedekind uvádí takové, kdy se každý prvek daného systému (množiny) opatří jistou značkou nebo jménem a definuje také identické zobrazení jako nejjednodušší zobrazení systému (každý prvek přechází v zobrazení sám na sebe). Pojímání funkční závislosti se tedy rozšiřuje na korespondenci (zobrazení) mezi dvěma libovolnými množinami (nikoliv nezbytně číselnými); Dedekind sám však tuto obecnou definici zobrazení do souvislosti s tradičním pojetím funkce nedával a v jeho citované publikaci se také nikde o funkci nehovoří.

Podobný množinový obecný přístup měl k definici Georg Cantor (1845 – 1918). Ve své práci „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ („Příspěvky ke zdůvodnění transfinitní teorie množin“) z let 1895 – 1897 píše:

Unter einer „Belegung der Menge N mit Elementen der Menge M“ oder einfacher ausgedrückt, unter einer „Belegung von N mit M“ verstehen wir ein Gesetz, durch welches mit jedem Elemente n von N je ein bestimmtes Element von M verbunden ist, wobei ein und dasselbe Element von M wiederholt zur Anwendung kommen kann. Das mit n verbundene Element von M ist gewissermaß en eine eindeutige Funktion von n und kann etwa mit $f(n)$ bezeichnet werden; sie heiße „Belegungsfunktion von n“; die entsprechende Belegung von N werde $f(N)$ genannt. ([6], str. 287.)
(*Pod „osazením množiny N prvky množiny M“ nebo vyjádřeno jednodušeji „osazením N množinou M“ rozumíme pravidlo, pomocí něhož je*

s každým prvkem n z N svázán určitý prvek z M, přičemž se jeden a tentýž prvek z M může užít opakovaně. Prvek z M svázaný s prvkem n je v jistém smyslu jednoznačnou funkcí n a může být označen například pomocí $f(n)$; nazvěme je „osazovací funkcí n“; odpovídající osazení množiny N se označí $f(N)$.)

Pozn. Editor Cantorových sebraných spisů Zermelo k právě uvedené definici poznamenává, že pod termínem „Belegung“ množiny N elementy množiny M Cantor rozumí funkci, jejíž „Variabilitätsbereich“ („obor proměnlivosti“ čili definiční obor) tvoří množina N a „Wertevorrat“ („zásobárnu hodnot“ čili obor hodnot) množina M; v dnešní terminologii jde o jednoznačné zobrazení množiny N na množinu M, které však nemusí být prosté, tj. nemusí existovat inverze z M do N.

Pro Cantorův termín „Belegung“ (v ruském překladu originální formulace definice podle Medvedeva „naloženije“ viz [25], str. 62) je obtížné najít vhodný český ekvivalent. České termíny „zobrazení“, „obraz“, jak se zdá, zcela slovu v originále neodpovídají (Medvedev by jistě v překladu užil ruského ekvivalentu), i když v uvedené Zermelově poznámce i v dalším komentáři v [25] na str. 62 jsou v souvislosti s Cantorovým přístupem k pojmu funkce užívány. V souladu s Medvedevem tedy v překladu slova „zobrazení“ nepoužívám, ale Cantorův termín chápu jako jeho synonymum. Také slovo „pokrytí“, což je další možný překlad německého „Belegung“, v této souvislosti vhodné není, neboť se v matematice užívá v jiném významu. Též Dedekind použil slova „Belegung“ ve svém komentáři k definici zobrazení, a to na místě, kdy definoval identitu; u něho má toto slovo význam odpovídající „přiřazení“, ale velmi dobře se hodí i námi zvolené „osazení“ ([11], str. 5).

K vývoji pojmu funkce významně přispěl i Constantin Carathéodory (1873 – 1950). V r. 1917 v práci „Vorlesungen über reelle Funktionen“ definuje funkci jako korespondenci mezi prvky obecné množiny a reálnými čísly ([26], str. 82). My zde citujeme ze souborné práce „Reelle Funktionen“ z roku 1939. V publikaci Carathéodory nejdříve vysvětluje, že pro pojem funkce dnes plně vyhovuje slovo přiřazení, zobrazení („Zuordnung“) a uvádí příklady různých typů funkcí: 1) reálné jednoznačné bodové funkce, která přiřazuje bodu číslo (konečné či nekonečné), 2) množinové funkce, která přiřazuje množině bodů číslo (konečné či nekonečné) a 3) funkce přiřazující bodové množině bodovou množinu (z téhož či jiného prostoru). Poté definuje:

Bei reellen eindeutigen Punktfunktionen wird jedem Punkt P einer gegebenen Punktmenge A des E_n eine endliche oder unendliche Zahl eindeutig zugeordnet, die man mit $f(P)$ oder ähnlich bezeichnet, um die Abhängigkeit dieser Zahl vom Punkte P hervortreten zu lassen. Die Punktmenge A, die nie leer sein soll, aber gegebenenfalls alle Punkte des Gesamtraumes umfassen kann, heißt der Definitionsbereich der Funktion $f(P)$. ([7], str. 97.)

(*U reálné jednoznačné bodové funkce je každému bodu P dané bodové množiny A prostoru E_n jednoznačně přiřazeno konečné či nekonečné číslo, které se označí $f(P)$ či podobně tak, aby se vyjádřila závislost tohoto čísla na bodě P. Bodová množina A, která nemůže být prázdná, ale může eventuálně obsahovat všechny body prostoru, se nazývá definiční obor funkce $f(P)$.*)

Idea funkce jako speciálního případu zobrazení mezi dvěma množinami se stávala postupně v matematice dominantní; v tomto procesu ovlivnila matematickou analýzu významně algebra.

3.9 Funkce jako množina dvojic, speciální binární relace

V předchozích definicích byly zpravidla dva nedefinované pojmy, a to množina a zobrazení (případně přiřazení, korespondence). Nejen na to, ale i na fakt, že také starší definice obsahovaly další vágní slova jako pravidlo, zákon, předpis a že pojmy jako vztah, operace, korespondence, přiřazení jsou vlastně synonymy, a tedy se často v podstatě jedná o definování kruhem, upozorňovali mnozí logici. Vznikaly různé modifikace dosavadních kritizovaných definic, z nichž jedna se stala dnes již klasickou.

Počet nedefinovaných termínů se zmenšil na jeden, a to na pojem množiny. Vychází se zpravidla od pojmu *kartézský součin množin*, definuje se pojem *binární relace*, čímž se nahrazují vágní termíny vztah, přiřazení (případně se zavede ještě pojem *zobrazení* jakožto binární relace s vlastností jednoznačnosti), a funkce je pak chápána jako speciální binární relace (případně speciální zobrazení), tedy jako speciální množina uspořádaných dvojic.

Definici funkce v tomto duchu, která obsahovala jediný nedefinovaný termín množiny, zformuloval např. Giuseppe Peano (1858 – 1932). Svým pojetím dal Peano do souvislosti Dedekindův obecnější nový pojem *zobrazení* s již tradičním pojmem *funkce*. Peanova definice je však dosti komplikovaná a její interpretace vyžaduje delší výklad týkající se složité symboliky. Peano jako první užíval od 90. let 19. století pojmu *dvojice* ve smyslu uspořádaného páru jakýchkoli objektů tak, jak je pojem v matematice užíván dnes ([27], str. 23); termín *uspořádaná dvojice* zavedl Oswald Veblen (1880 – 1960) v r. 1904.

Funkce f množiny X do množiny Y byla ve 20. století chápána také jako uspořádaná trojice $\langle f, X, Y\rangle$, pro níž platí $f \subset X \times Y$ a kde f neobsahuje takové uspořádané dvojice, kde by dvěma různým druhým složkám dvojice příslušela společná hodnota na místě složky první ([25], str. 20). Často se v definici funkce nevyžadovalo, aby množina Y byla číselná.

Tímto způsobem přistupovala k pojmu funkce ve 20. století francouzská skupina matematiků vystupující pod pseudonymem Nicolas Bourbaki. Také jejich přístup k vymezení pojmu funkce je velmi formální a zcela se již vymyká z rámce školské matematiky. V sešitě „Fonctionsď une variable réelle“ [3] se definici pojmu funkce bourbakisté nevěnují vůbec a začínají diferenciálním počtem. V sešitě „Théorie des ensembles“ [2] věnovaném teorii množin definují v r. 1939 nejprve funkční relaci a pak pomocí funkčního grafu funkci:

On dit qu' un graphe F est un graphe fonctionnel si, pour tout x, il existe au plus un objet correspondant à x par F. On dit qu' une correspondance $f = (F, A, B)$ est une fonction si son graphe F est un graphe fonctionnel, et si son ensemble de départ A est égal à son ensemble de définition $pr_1 F$. Autrement dit, une correspondance $f = (F, A, B)$ est une fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de f, la relation $(x, y) \in F$ est fonctionnelle en y; l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur de f pour l'élément x de A, et se désigne par $f(x)$ ou f_x (ou $F(x)$, ou F_x). ([2], str. 76.)

(*Řekneme, že graf F je funkčním grafem, jestliže ke každému x existuje nejvýše jeden objekt odpovídající tomuto x vzhledem k F. Řekneme, že korespondence $f = (F, A, B)$ je funkcí, jestliže její graf je funkčním grafem a její obor vzorů A je roven definičnímu oboru $pr_1 F$. Jinak řečeno, korespondence $f = (F, A, B)$ je funkcí, jestliže pro každé x náležející množině vzorů A relace f je relace $(x, y) \in F$ funkční relací y; jediný předmět odpovídající předmětu x v relaci f se nazývá hodnotou funkce f pro element x z množiny A a značí se $f(x)$ nebo f_x (nebo $F(x)$, nebo F_x.*)

Bourbakisté definují graf obecně jako množinu uspořádaných dvojic, funkční graf je potom jeho speciálním případem.

Změny nastávaly postupně i ve značení funkcí; užívání šipek dobře vystihujících povahu a směr přiřazení je připisováno Witoldu Hurewiczovi (1904 – 1956), který je začal používat ve svých přednáškách z topologie okolo roku 1940. Nový způsob značení zaujal i ostatní matematiky a pro funkci zobrazující množinu X do množiny Y se rychle vžil zápis $X \to Y$, často také $f : X \to Y$.

3.10 Námitky logiků; funkce jako primitivní pojem

Moderní logika ukázala na základní obtíže spojené s univerzální nealgoritmickou definicí funkce a nominální definici odmítala. Řešením by podle některých logiků bylo funkci brát jako primitivní nedefinovaný pojem. Tak uvažoval na přelomu 19. a 20. století např. logik Gottlob Frege (1848 – 1925), který navrhoval funkci zavést jako prvotní pojem bez jakékoliv definice za pomoci opisů, historických exkurzů a příkladů. Pomocí tohoto nedefinovaného pojmu doporučoval pak zavést pojem relace.

Jemu oponoval Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder (1841 – 1902), který naopak navrhl vzít za primární pojem pojem binární relace a zobrazení brát pak jako jednoznačnou binární relaci, což je postup, který se při vymezování pojmu funkce používá dnes velmi často (až na prvotnost pojmu binární relace). Bertrand Arthur William Russel (1872 – 1970) upozorňoval na další, z hlediska logiky problematický termín v klasických definicích, jímž je pojem proměnné, a funkci definoval podobně jako Schröder jako jednoznačnou binární relaci.

Podobný názor jako Frege, a to brát funkci jako primitivní nedefinovaný pojem, měl další odborník na matematickou logiku Alonzo Church (1903 – 1995). Ten ve své knize „Introduction to Mathematical Logic" („Úvod do matematické logiky") v roce 1956 píše:

Ultimately, it seems, we must take the notion of function as primitive or undefined, or else some related notion, such as that of a class. ([10], str. 15.)
(*Nakonec je nezbytné uvažovat pojem funkce – nebo některé další podobné pojmy jako primitivní nebo nedefinovatelné.*)

Church to zdůvodňuje mj. i tím, že pro funkci se užívá dnes tolik synonym, píše doslova *near – synonyms*, jako např. *operation, yielding, determination* a dalších, že je lépe tento pojem raději nedefinovat, ale spíše jej vysvětlovat na příkladech.

4. Závěr

Existuje mnoho dalších aspektů, na něž bychom se mohli v souvislosti s vývojem pojmu funkce zaměřit. Zajímavé by bylo např. sledovat postavení (reálné) posloupnosti, která se dnes zcela běžně chápe jako speciální případ funkce (zobrazení z N do R). Posloupnosti se studovaly daleko dříve, než byl pojem funkce do matematiky zaveden a do souvislosti s funkcí se nedávaly ani dlouho poté, co již funkce byla definována jako předpis. Zajímavé by bylo povšimnout si toho, jak se odlišují pojímání funkce a její definice v různých matematických oborech (zejména v matematické analýze a algebře, příp. v dalších diskrétních disciplínách), případně jak na funkci pohlížejí jiné vědní obory vně matematiky.

O obecnějších funkčních vztazích, např. o korespondenci *množina* $\to$ *prvek*, která se objevuje u Lebesguea, o korespondenci *množina* $\to$ *množina*, která je zajímavá v souvislosti s geometrickými zobrazeními i topologií, příp. *prvek* $\to$ *množina* již nebudeme více hovořit (poznamenejme znovu, že cílem našeho zájmu byla korespondence *prvek* $\to$ *prvek* a zejména situace, kdy obrazem je prvek z R). Snažili jsme se především poukázat na bohatství názorů a myšlenek spojených s pojmem funkce a naznačit dobrodružnou cestu zrodu tohoto jednoho z fundamentálních matematických pojmů. Sledovali jsme také, jak se obsah pojmu funkce postupně měnil a rozšiřoval v závislosti na vývoji poznatků o funkcích, na studiu vlastností již známých funkcí či objevování funkcí s překvapivými vlastnostmi. Není důvodu se ani dnes domnívat, že vývoj názorů na pojem funkce je dnes již definitivně ukončen.

Vidíme jako důležité znovu zdůraznit, že v matematice bylo dosaženo mnoha skvělých výsledků dříve, než byl pojem funkce znám, a že s funkcemi se de facto pracovalo, i když nebyly definovány. Jsme přesvědčeni, že uvědomování si vztahů mezi veličinami a jevy, jakýsi instinkt pro závislost či kauzalitu a potřeba vidět příčinnost a vzájemné souvislosti se samotnou definicí funkce totiž tolik nesouvisejí a existují nezávisle na ní. Jedná se o obecnější kategorie, které matematiku přesahují a souvisejí se způsobem uvažování, názorem na svět a filozofií a jsou ovlivňovány nejen jedincem, ale i celým kulturním prostředím.

Kapitolu věnovanou pojetí funkce v matematice uzavřeme citací Hermanna Klause Hugo Weyla (1885 – 1955) z r. 1927, z níž je patrné, že určitou vágnost tohoto stěžejního matematického pojmu pociťovali matematici i ve 20. století:

Niemand kann erklären, was eine Funktion ist. Aber: „Eine Funktion

f ist gegeben, wenn auf irgendeine bestimmte gesetzmässige Weise jeder reelen Zahl a eine Zahl b zugeordnet ist … Man sagt dann, b sei der Wert der Funktion für den Argumentwert a“.
(*Nikdo neumí vysvětlit, co to je funkce. Ale: „Funkce f je dána, jestliže je každému reálnému číslu a přiřazeno nějakým určitým předepsaným způsobem číslo b … Pak se řekne, že b je hodnota funkce pro hodnotu argumentu a“.*) (Citace převzata z [35], str. 82.)

Literatura

[1] Bos, H. J. M., Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus, *Arch. Hist. Exact. Sci.* **14**(1974 – 75), 1–90.

[2] Bourbaki, N., *Éléments de mathématique. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I – Théorie des ensembles*, Hermann, Paris, 1954.

[3] Bourbaki, N., *Éléments de mathématique. Livre IV – Fonctions ďune variable réelle*, Hermann, Paris, 1958.

[4] Bourbaki, N., *Elements of the History of Mathematics*, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.

[5] Bourbaki, N., *Osnovnyje struktury analiza. Teorija množestv*, Mir, Moskva, 1965.

[6] Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen, Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932.

[7] Carathéodory, C., *Reelle Funktionen. Band 1. B. G.*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1939.

[8] Cantor, M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. B. G.*, Teubner, Leipzig, 1900.

[9] *Cantor, M.*, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band.B. G.*, Teubner, Leipzig, 1901.

[10] Church, A., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[11] Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1969.

[12] Edwards, C. H. Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer & Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

[13] Encyklopaedia of Mathematics. Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston, London, 1995.

[14] Fuchs, E., *Významní matematikové 16. a 17. století*, In: Matematika v 16. a 17. století. Dějiny matematiky, sv. 12., Prometheus, Praha, 1999.

[15] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1990.

[16] Hejný, M., *Objevování neeukleidovské geometrie*, In: Člověk – Umění – Matematika. Dějiny matematiky, sv. 4, Prometheus, Praha, 1996.

[17] The Inter – IREM Commission, *History of Mathematics, Histories of Problems*, Ellipses, Paris, 1997.

[18] Jarník, V., *Bolzano a základy matematické anylýzy*, JČSMF, Praha, 1981.

[19] Juškevič, A. P., *Istorija matematiki 1*, Nauka, Moskva, 1970

[20] Juškevič, A. P., *Istorija matematiki 2*, Nauka, Moskva, 1970

[21] Juškevič, A. P., *Istorija matematiki 3*, Nauka, Moskva, 1972

[22] Juškevič, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.

[23] Klein, F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil 1.*, Ruský překlad: Lekcii o razvitii matematiki v 19. stoletii, Tom 1. Nauka, Moskva, 1989.

[24] Kvasz, L., Dejiny mocninných radov, *Matematické obzory* **41**(1994) 1–26.

[25] Medvedev, F. A., *Očerki istorii teorii funkcij dejstvitel'nogo peremennogo*, Nauka, Moskva, 1975.

[26] Monna, A. F., The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue, *Arch. Hist. Exact. Sci.* **9**(1972), 57–84.

[27] Peano, G., *Arbeiten zur Analysis und zur mathematischen Logi*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1990.

[28] Schwabik, Š., *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století*, In: Matematika v 19. století. DFějiny matematiky, sv. 3, Prometheus, Praha, 1996.

[29] Schwabik, Š., *Druhá krize matematiky aneb Potíže růstu diferenciálního a integrálního počtu*, In: Matematika v proměnách věků I, Dějiny matematiky, sv. 11, Prometheus, Praha, 1998.

[30] Schwabik, Š. – Šarmanová, P., *Malý průvodce historií integrálu*, Dějiny matematiky, sv. 6, Prometheus, Praha, 1996.

[31] Struik, D. J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963.

[32] Veselý, J., *Matematická analýza pro učitele 1*, MATFYZPRESS, Praha, 1997.

[33] Vopěnka, P., *Rozpravy s geometrií*, Panorama, Praha, 1989.

[34] Vopěnka, P., *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*, Práh, Praha, 2000.

[35] Youschkevitch, A. P., The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, *Arch. Hist. Exact. Sci.* **16**(1976), 37–85.

[36] Znám, Š., Bukovský, L., Hejný, M., Hvorecký, J., Riečan, B., *Pohľad do dejín matematiky*, Alfa, SNTL, Bratislava, 1986.

Alena Kopáčková
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
TU Liberec
e-mail: alena.kopackova@vslib.cz