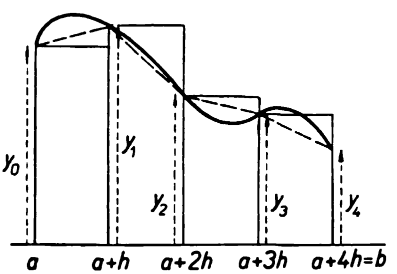
Kapitola VI

NUMERICKÝ VÝPOČET URČITÝCH INTEGRÁLŮ

§ 1. **Metoda obdélníková a lichoběžníková.** Máme-li počítat $\int_a^b f(x)\,dx = J$ (přičemž budiž $a < b$ a předpokládáme, že tento integrál existuje) a nevedou-li nás k cíli metody vyložené v kap. III, IV, můžeme si vypomoci tím, že se vrátíme přímo k definici určitého integrálu, nebo vlastně k větě 22. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných dílů délky $h = \dfrac{b-a}{n}$; dělicí body jsou tedy $x_j = a + jh$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Položme pro krátkost $y_j = f(x_j)$ a sestrojme součet

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})\,.$$

Podle věty 22 víme, že výraz (1) má pro $n \to \infty$ limitu J; zvolíme-li tedy n dosti veliké, můžeme dosáhnout toho, že se výraz (1) liší od J libovolně málo. Této metodě k přibližnému výpočtu integrálu říkáme *metoda obdélníková*.[1])



Obr. 14.

Místo hodnoty $f(x_{j-1}) = y_{j-1}$ bychom ovšem mohli vzít též hodnotu funkce $f(x)$ v kterémkoliv bodě ξ_j intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$, např. v bodě x_j; tím bychom místo (1) dostali součet

$$(2) \qquad h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\,,$$

kterého lze užít se stejným úspěchem.

Metoda právě vyložená spočívá v tom, že jsme funkci $f(x)$ v každém intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ nahradili *konstantou* $f(x_{j-1}) = y_{j-1}$ (při vzorci (1)) nebo konstantou $f(x_j) = y_j$ (při vzorci (2)). Zkusme za druhé nahradit funkci $f(x)$ v každém intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ mnohočlenem $k_j x + q_j$, jenž pro $x = x_{j-1}$ nabývá hodnoty y_{j-1}, pro $x = x_j$ pak hodnoty y_j.[2]) Integrál $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$ nahradíme tedy integrálem

[1]) Geometrický význam je jasný: je-li $f(x)$ nezáporná a spojitá v $\langle a, b\rangle$, značí J plochu $P(a, b, f(x))$ (v označení kap. V, § 1), kdežto (1) je součet ploch obdélníků vyznačených na obr. 14.

[2]) Geometricky: křivku $y = f(x)$ nahradíme v každém intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ úsečkou, jež je na obr. 14 čárkována.

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j}(k_jx + q_j)\,dx = \tfrac{1}{2}k_j(x_j^2 - x_{j-1}^2) + q_j(x_j - x_{j-1})$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_j - x_{j-1})(k_jx_j + q_j + k_jx_{j-1} + q_j)$$
$$= \tfrac{1}{2}h(y_j + y_{j-1})$$

a integrál J součtem

$$(3)\qquad \sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(k_jx + q_j)\,dx = \tfrac{1}{2}h(y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + y_n)\,.$$

To nás vede k tomu, počítat místo integrálu J součet (3), tj. součet

$$h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\,,$$

který se ostatně rovná aritmetickému průměru součtů (1), (2) a tedy zrovna tak jako ony má pro $n \to \infty$ za limitu integrál J. Metodě právě vyložené říkáme metoda *lichoběžníková.*[3]) Obr. 14 nás vede k domněnce, že při pevně zvoleném n dává součet (3) obyčejně (ne ovšem vždy) lepší přiblížení k integrálu J než součet (1) nebo (2). Vyšetříme tuto otázku; odpověď je dána touto větou:

Věta 61. *Budiž dána funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž dáno celé číslo $n > 0$. Položme*

$$h = \frac{b-a}{n}\,,\qquad x_j = a + jh\,,\qquad y_j = f(x_j)\quad (0 \leqq j \leqq n)\,;$$

označme

$$\mathfrak{D}_1 = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})\,;\qquad \mathfrak{D}_2 = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\,;$$
$$\mathfrak{L} = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\,.$$

I. Nechť má především $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ omezenou derivaci $f'(x)$, takže existují čísla m_1, M_1 taková, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $m_1 \leqq f'(x) \leqq M_1$. Potom jest

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}m_1\,.\,\frac{(b-a)^2}{n} \leqq \int_a^b f(x)\,dx - \mathfrak{D}_1 \leqq \tfrac{1}{2}M_1\,.\,\frac{(b-a)^2}{n}\,.$$

II. Nechť má za druhé $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ omezenou druhou derivaci $f''(x)$, takže *existují čísla m_2, M_2 taková, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $m_2 \leqq f''(x) \leqq M_2$. Potom jest*

$$(5)\qquad \frac{m_2}{12}\,.\,\frac{(b-a)^3}{n^2} \leqq \mathfrak{L} - \int_a^b f(x)\,dx \leqq \frac{M_2}{12}\,.\,\frac{(b-a)^3}{n^2}\,.$$

Než přistoupíme k důkazu, odvodíme si jednoduchou pomocnou větu, abychom si uspořili opakování.

[3]) Geometrický význam (aspoň pro nezápornou spojitou funkci f) je zase patrný z obr. 14: místo plochy $P(a, b, f(x))$ počítám součet ploch lichoběžníků na obrazci vyznačených.

Pomocná věta. *Buďte $k > 0$, $l \geqq 0$ celá čísla; budiž $F(x)$ funkce, která má v $\langle\alpha, \beta\rangle$ vlastní k-tou derivaci $F^{(k)}(x)$; budiž $F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(k-1)}(\alpha) = 0$. Budiž μ reálné číslo; potom platí:*

I. Je-li $F^{(k)}(x) \geqq \mu(x - \alpha)^l$ pro všechna x intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, je

$$F(\beta) \geqq \mu \frac{(\beta - \alpha)^{k+l}}{(l + 1)(l + 2)\ldots(l + k)}.$$

II. Je-li $F^{(k)}(x) \leqq \mu(x - \alpha)^l$ pro všechna x intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, je

$$F(\beta) \leqq \mu \frac{(\beta - \alpha)^{k+l}}{(l + 1)(l + 2)\ldots(l + k)}.$$

Důkaz. Položme $G(x) = F(x) - \mu \dfrac{(x - \alpha)^{k+l}}{(l + 1)(l + 2)\ldots(l + k)}$; ježto $G(\alpha) = G'(\alpha) = \ldots = G^{(k-1)}(\alpha) = 0$, dává Taylorův vzorec (viz **DI**, věta 153, str. 290, v 4. vyd. str. 333)

$$F(\beta) - \frac{\mu(\beta - \alpha)^{k+l}}{(l + 1)\ldots(l + k)} = G(\beta) = \frac{(\beta - \alpha)^k}{k!}\left(F^{(k)}(x) - \mu(x - \alpha)^l\right),$$

kde $\alpha < x < \beta$. Odtud plynou ihned obě tvrzení, neboť levá strana má totéž znamení jako závorka vpravo.

Důkaz věty 61. I. Stačí dokázat, že pro každé j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ jest

$$\tfrac{1}{2}m_1(x_j - x_{j-1})^2 \leqq \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(u)\,du - (x_j - x_{j-1})f(x_{j-1}) \leqq \tfrac{1}{2}M_1(x_j - x_{j-1})^2; \tag{6}$$

odtud totiž sčítáním pro $j = 1, \ldots, n$ ihned plyne (4) (pamatujme, že $x_j - x_{j-1} = (b - a) : n$). Položme

$$F(x) = \int_{x_{j-1}}^{x} f(u)\,du - (x - x_{j-1})f(x_{j-1}),$$

takže $F'(x) = f(x) - f(x_{j-1})$, $F''(x) = f'(x)$; tedy $F(x_{j-1}) = F'(x_{j-1}) = 0$, $m_1 \leqq F''(x) \leqq M_1$ pro $x_{j-1} \leqq x \leqq x_j$. Podle pomocné věty je tedy (pro $\alpha = x_{j-1}$, $\beta = x_j$, $k = 2$, $l = 0$)

$$\tfrac{1}{2}m_1(x_j - x_{j-1})^2 \leqq F(x_j) \leqq \tfrac{1}{2}M_1(x_j - x_{j-1})^2;$$

ale $F(x_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(u)\,du - (x_j - x_{j-1})f(x_{j-1})$, čímž je (6) dokázáno.

II. Stačí opět dokázat, že pro každé j $(j = 1, \ldots, n)$ je

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{12}m_2(x_j - x_{j-1})^3 &\leqq \tfrac{1}{2}(x_j - x_{j-1})(f(x_j) + f(x_{j-1})) - \\ &- \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(u)\,du \leqq \tfrac{1}{12}M_2(x_j - x_{j-1})^3;\end{aligned} \tag{7}$$

odtud totiž sečtením pro $j = 1, \ldots, n$ ihned plyne (5). Položme nyní

$$F(x) = \tfrac{1}{2}(x - x_{j-1})\left(f(x) + f(x_{j-1})\right) - \int_{x_{j-1}}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

takže střední člen v (7) je právě $F(x_j)$. Jest (pro $x_{j-1} \leqq x \leqq x_j$) $F'(x) = \frac{1}{2}(x - x_{j-1}) \cdot f'(x) - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x_{j-1})$, $F''(x) = \frac{1}{2}(x - x_{j-1})f''(x)$, tedy $F(x_{j-1}) = F'(x_{j-1}) = 0$, $\frac{1}{2}m_2(x - x_{j-1}) \leqq F''(x) \leqq \frac{1}{2}M_2(x - x_{j-1})$. Podle pomocné věty (pro $\alpha = x_{j-1}$, $\beta = x_j$, $k = 2$, $l = 1$) je tedy $\frac{1}{12}m_2(x_j - x_{j-1})^3 \leqq F(x_j) \leqq \frac{1}{12}M_2(x_j - x_{j-1})^3$; tím je (7) dokázáno.

Poznámka 1. Vidíte, oč je (3) přesnější než (1). Mají-li m_1, M_1 totéž znamení a zrovna tak m_2, M_2, konverguje rozdíl $J - \mathfrak{D}_1$ s rostoucím n k nule asi právě tak rychle jako $1 : n$, kdežto rozdíl $J - \mathfrak{L}$ asi tak rychle jako $1 : n^2$.

Cvičení

1. Za stejných předpokladů jako ve větě 61, I platí

$$\tfrac{1}{2}m_1 \frac{(b-a)^2}{n} \leqq \mathfrak{D}_2 - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \tfrac{1}{2}M_1 \frac{(b-a)^2}{n}\,.$$

2. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na sudý počet stejných dílů, tj. n sudé, $h = (b - a) : n$, $x_j = a + jh$, $y_j = f(x_j)$ ($j = 0, 1, \ldots, n$). V každém intervalu $\langle x_{2k-2}, x_{2k}\rangle$ nahraďme funkci $f(x)$ její hodnotou uprostřed intervalu, tj. hodnotou y_{2k-1}. Tak jsme vedeni k součtu $\mathfrak{T} = 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1})$. Dokažte: za týchž předpokladů jako ve větě 61, II je

$$\tfrac{1}{6}m_2 \frac{(b-a)^3}{n^2} \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \mathfrak{T} \leqq \tfrac{1}{6}M_2 \frac{(b-a)^3}{n^2}\,.$$

To je odhad dvakráte horší než při $\mathfrak{L}$ (při témž n). Ale při $\mathfrak{L}$ jsme musili počítat čísla $y_0, y_1, \ldots, y_n$, tedy celkem $n + 1$ čísel, kdežto při $\mathfrak{T}$ pouze $\frac{1}{2}n$ čísel, tedy méně než polovinu. Abychom tedy měli při $\mathfrak{L}$ stejnou práci jako při $\mathfrak{T}$, musím při $\mathfrak{L}$ vzít místo n číslo $\frac{1}{2}n - 1$, čímž se odhad v (5) více než čtyřikráte zhorší: tedy je součet $\mathfrak{T}$ vlastně asi dvakrát výhodnější (pro větší hodnoty n) než $\mathfrak{L}$. Návod: Položme pro krátkost $x_{2k-1} = \gamma$ a vyšetřujte funkci $F(v) = \int_{\gamma-v}^{\gamma+v} f(u)\,\mathrm{d}u - 2vf(\gamma)$; jde o hodnotu $F(h)$; jest $F'(v) = f(\gamma + v) + f(\gamma - v) - 2f(\gamma)$, $F''(v) = f'(\gamma + v) - f'(\gamma - v) = 2vf''(\gamma + \Theta v)$ $(-1 < \Theta < 1)$; nato užijete pomocné věty pro $\alpha = 0$, $\beta = h$, $k = 2$, $l = 1$.

§ 2. Simpsonův vzorec. K součtu $\mathfrak{D}_1$ jsme přišli tím, že jsme funkci $f(x)$ v každém intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ nahradili mnohočlenem nejvýše nultého stupně (tj. konstantou),[4]) jenž má v bodě x_{j-1} touž hodnotu y_{j-1} jako funkce f; k součtu $\mathfrak{L}$ jsme došli tak, že jsme funkci $f(x)$ v každém intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ nahradili mnohočlenem nejvýše *prvního* stupně, jenž má v *obou* bodech x_{j-1}, x_j tytéž hodnoty y_{j-1}, y_j jako

[4]) Obecně: slovy „mnohočlen nejvýše n-tého stupně" rozumíme každý mnohočlen tvaru $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ (nevylučujeme případ, že by některé nebo i všechny koeficienty byly rovny nule). Tento vzorec zahrnuje tedy mnohočlen 0 a dále všechny mnohočleny nultého, prvního, druhého, … až n-tého stupně.

funkce $f(x)$. Je nasnadě myšlenka nahradit funkci $f(x)$ mnohočlenem nejvýše *druhého* stupně, jenž nabývá ve *třech bodech* téže hodnoty jako funkce f. Abychom tuto myšlenku mohli provést, rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na *sudý* počet dílů body $x_j = a + jh$, $h = (b - a) : n$ (n sudé kladné) a klaďme opět $f(x_j) = y_j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$); v každém intervalu $\langle x_{2k-2}, x_{2k}\rangle$ ($k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n$) nahraďme pak funkci $f(x)$ mnohočlenem $g_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$[5]) tak, aby bylo

$$g_k(x_{2k-2}) = y_{2k-2},\ g_k(x_{2k-1}) = y_{2k-1},\ g_k(x_{2k}) = y_{2k};$$

máme tedy nalézt A_k, B_k, C_k tak, aby bylo

$$\begin{aligned} &A_k x_{2k-2}^2 + B_k x_{2k-2} + C_k = y_{2k-2}, \\ (8) \qquad &A_k x_{2k-1}^2 + B_k x_{2k-1} + C_k = y_{2k-1}, \\ &A_k x_{2k}^2 \quad + B_k x_{2k} \quad + C_k = y_{2k}. \end{aligned}$$

Taková trojice čísel A_k, B_k, C_k vskutku existuje, a to jen jedna; neboť determinant soustavy rovnic (8) je

$$-(x_{2k} - x_{2k-2})(x_{2k} - x_{2k-1})(x_{2k-1} - x_{2k-2}) \neq 0,$$

jak buďto víte nebo jak snadno vypočtete[5a]). Vypočtěme

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (A_k x^2 + B_k x + C_k)\,dx;$$

pišme pro zkrácení A, B, C místo A_k, B_k, C_k a dále γ místo x_{2k-1}, takže $x_{2k-2} = \gamma - h$, $x_{2k} = \gamma + h$; budeme se snažit vyjádřit uvedený integrál čísly y_{2k-2}, y_{2k-1}, y_{2k}. Jest

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma-h}^{\gamma+h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \\ &= \tfrac{1}{3}A((\gamma + h)^3 - (\gamma - h)^3) + \tfrac{1}{2}B((\gamma + h)^2 - (\gamma - h)^2) + \\ &+ C((\gamma + h) - (\gamma - h)) = h(2A\gamma^2 + \tfrac{2}{3}Ah^2 + 2B\gamma + 2C) = \\ &= h(\tfrac{1}{3}y_{2k-2} + \tfrac{1}{3}y_{2k} + \tfrac{4}{3}y_{2k-1}), \end{aligned}$$

jak ihned seznáte, dosadíte-li za y_j podle rovnic (8). Tím jsme vedeni k tomu, nahradit integrál $J = \int_a^b f(x)\,dx$ součtem

$$(9) \qquad \mathfrak{S} = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \ldots + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n);$$

přitom $h = (b - a) : n$, $y_j = f(a + jh)$, n sudé kladné.

[5]) Geometricky: Oblouk křivky $y = f(x)$ nahradíme obloukem paraboly; pro $A_k = 0$ je to ovšem místo paraboly přímka.

[5a]) O řešení soustavy lineárních rovnic viz např. Vl. Kořínek, Základy algebry, v 1. vyd. str. 295, v 2. vyd. str. 303.

Abychom odhadli rozdíl $\mathfrak{S} - J$,[6]) předpokládejme, že v $\langle a, b\rangle$ existuje čtvrtá derivace $f^{(4)}(x)$ a že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $m_4 \leqq f^{(4)}(x) \leqq M_4$. Rozdíl $\mathfrak{S} - J$ je součtem čísel

$$\frac{1}{3}h(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})) - \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(u)\,du \tag{10}$$

pro $k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n$. Pišme zase $\gamma = x_{2k-1}$, takže (10) se rovná rozdílu

$$\frac{1}{3}h(f(\gamma - h) + 4f(\gamma) + f(\gamma + h)) - \int_{\gamma-h}^{\gamma+h} f(u)\,du\,.$$

Položme

$$F(v) = \frac{1}{3}v(f(\gamma - v) + 4f(\gamma) + f(\gamma + v)) - \int_{\gamma-v}^{\gamma+v} f(u)\,du\,,$$

takže $F(h)$ se rovná právě číslu (10). Píšeme-li

$$\int_{\gamma-v}^{\gamma+v} f(u)\,du = \int_0^v f(\gamma + t)\,dt + \int_0^v f(\gamma - t)\,dt\,,\text{[7])}$$

obdržíme pro $0 \leqq v \leqq h$

$$\begin{aligned}
F'(v) &= -\tfrac{2}{3}f(\gamma + v) - \tfrac{2}{3}f(\gamma - v) + \tfrac{4}{3}f(\gamma) + \tfrac{1}{3}v(f'(\gamma + v) - f'(\gamma - v))\,,\\
F''(v) &= -\tfrac{1}{3}f'(\gamma + v) + \tfrac{1}{3}f'(\gamma - v) + \tfrac{1}{3}v(f''(\gamma + v) + f''(\gamma - v))\,,\\
F'''(v) &= \tfrac{1}{3}v(f'''(\gamma + v) - f'''(\gamma - v)) = \tfrac{2}{3}v^2 f^{(4)}(\gamma + \Theta v) \quad (-1 < \Theta < 1)\,.
\end{aligned}$$

Tedy

$$F(0) = F'(0) = F''(0) = 0\,, \quad \tfrac{2}{3}m_4 v^2 \leqq F'''(v) \leqq \tfrac{2}{3}M_4 v^2\,,$$

takže pomocná věta dává (pro $\alpha = 0$, $\beta = h$, $k = 3$, $l = 2$)

$$\frac{2m_4h^5}{3\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \leqq F(h) \leqq \frac{2M_4h^5}{3\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,.$$

Ježto výraz (10) se rovná číslu $F(h)$, obdržíme sečtením pro $k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n$

$$m_4\,.\,\frac{(b - a)^5}{180n^4} \leqq \mathfrak{S} - \int_a^b f(x)\,dx \leqq M_4\,.\,\frac{(b - a)^5}{180n^4}\,. \tag{11}$$

Metoda vyložená v tomto paragrafu a spočívající v tom, že se integrál J nahradí součtem $\mathfrak{S}$, se nazývá *Simpsonova* (mluví se obyčejně o Simpsonově formuli). O této metodě jsme pak právě dokázali tuto větu:

Věta 62. *Budiž $a < b$, n sudé, $n > 0$. Nechť $f(x)$ má omezenou čtvrtou derivaci v $\langle a, b\rangle$, takže existují čísla m_4, M_4 taková, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $m_4 \leqq f^{(4)}(x) \leqq M_4$. Položme $h = (b - a) : n$, $y_j = f(a + jh)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ a definujme $\mathfrak{S}$ rovnicí* (9). *Potom platí nerovnosti* (11).

[6]) Vlastně byly všechny úvahy tohoto paragrafu až do tohoto místa zbytečné: mohl jsem rovnou napsat součet $\mathfrak{S}$ v (9) a vyšetřovat rozdíl $\mathfrak{S} - J$. Chtěl jsem však, aby čtenář viděl, jak jsme k vyšetřování součtu $\mathfrak{S}$ vedeni.

[7]) Návod: Rozdělím integrační interval $\langle \gamma - v, \gamma + v\rangle$ na intervaly $\langle \gamma - v, \gamma\rangle$, $\langle \gamma, \gamma + v\rangle$. V prvním z nich provedu substituci $u = \gamma - t$, v druhém $u = \gamma + t$.

Poznámka 1. Píšeme-li $n = 2m$, dostaneme v (11) ve jmenovateli $2880m^4$ místo $180n^4$; to se často psává.

Poznámka 2. Podle analogie s nerovnostmi (4), (5) bychom v (11) čekali ve jmenovateli n^3, ale je tam dokonce n^4: Simpsonova metoda je výhodnější, než bychom na první pohled čekali (viz též cvič. 1).

Poznámka 3. Mohli bychom postupovat v naznačeném smyslu dále a nahrazovat funkci $f(x)$ mnohočleny vyšších stupňů. K této a k podobným otázkám se ještě vrátíme v druhém svazku Integrálního počtu.

Poznámka 4. „Numerickým výpočtem" nějakého čísla a rozumíme obyčejně postup, který nám dovoluje stanovit konečný desetinný zlomek a_0 (nebo obecněji racionální číslo a_0) tak, aby „chyba" $|a - a_0|$ byla menší než jisté předepsané číslo.

V tomto smyslu dávají nám metody této kapitoly prostředky k numerickému výpočtu určitých integrálů. Dovedeme-li vyjádřit předložený integrál jednoduchým způsobem hodnotami funkcí, jež dovedeme snadno numericky počítat, jako jsou např. funkce

$$\lg x,\ e^x,\ x^a,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x,\ \arcsin x,\ \operatorname{arctg} x\,, \tag{12}$$

nesáhneme k metodám této kapitoly (např. numerický výpočet integrálu

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lg(1 + \sqrt{2})$$

Simpsonovou metodou by byl zdlouhavější než numerický výpočet čísla $\lg(1 + \sqrt{2})$ metodami vyloženými v **DI**). Případy, kdy daný integrál lze jednoduchým způsobem vyjádřit pomocí hodnot funkcí (12), jsou vlastně výjimečné případy.[8]) Čtenář se ovšem nesmí domnívat, že v ostatních případech jsme odkázáni jen na metody této kapitoly; v druhém svazku Integrálního počtu vyložíme ještě jiné mocné prostředky k studiu a k výpočtu určitých integrálů (např. integrování užitím nekonečných řad,[9]) metodu integrace a derivace podle parametru atd.).

Zvláště důležité jsou metody této kapitoly v aplikacích, kde hodnoty $f(x_j)$ ($j = 0, 1, \ldots, n$) stanovíme pozorováním. Např. průběh teploty t během dne je dán rovnicí tvaru $t = f(x)$, kde x značí čas měřený třeba v hodinách. Tzv. střední teplotu

[8]) Nejdůležitější případy tohoto druhu byly probrány v kap. IV a v příkladech a cvičeních ke kap. III; nebylo by dobře, kdyby čtenář význam těchto případů přeceňoval (viz k tomu obecné poznámky v kap. VII, § 1) — vedle své vnitřní ceny poskytly nám však tyto případy hojně látky ke cvičení.

[9]) Ostatně: co znamená např. rovnice $\int_0^1 \cos x\,\mathrm{d}x = \sin 1$ pro numerický výpočet tohoto integrálu? Vlastně jen tolik, že výpočet tohoto integrálu byl převeden na výpočet součtu řady $1 - 1 : 3! + 1 : 5! - \ldots$

dne definujeme rovnicí $\tau = \frac{1}{24}\int_0^{24} f(x)\,\mathrm{d}x$. Měřím-li teplotu každou hodinu, nemohu ovšem přesně stanovit číslo τ; místo něho vypočtu číslo $\frac{1}{24}\mathfrak{S} = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{3}(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + \ldots)$.[10]

Cvičení

1. Rozdíl $\mathfrak{D}_1 - J$ je roven nule, je-li f mnohočlen stupně nejvýše nultého; rozdíl $\mathfrak{L} - J$ je roven nule, je-li f mnohočlen stupně nejvýše prvního; rozdíl $\mathfrak{S} - J$ je roven nule, je-li (což na první pohled překvapí) f mnohočlen stupně nejvýše *třetího*. (Plyne ihned z (4), (5), (11).)

2. Mají-li m_1, M_1 totéž znamení, dává (4) nejen odhad pro prostou hodnotu čísla $\mathfrak{D}_1 - J$, nýbrž dává i jeho znaménko. Chceme-li např. vyloženými metodami počítat $\lg 2 = \int_1^2 x^{-1}\,\mathrm{d}x$ a klademe-li $n = 10$, obdržíme $\frac{1}{80} \leqq \mathfrak{D}_1 - \lg 2 \leqq \frac{1}{20}$, $\frac{1}{4800} \leqq \mathfrak{L} - \lg 2 \leqq \frac{1}{600}$, $\frac{1}{2400000} \leqq \mathfrak{S} - \lg 2 \leqq \frac{1}{75000}$. Vidíte, jak $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{S}$ dávají postupně menší chybu.

[10]) Ježto neznám průběh funkce $f(x)$, nemohu ovšem odhadnout chybu $\tau - \frac{1}{24}\mathfrak{S}$. Zde si mohu pomoci třeba tím, že vedle čísla $\frac{1}{24}\mathfrak{S}$ vypočtu ještě číslo $\frac{1}{24}\mathfrak{S}' = \frac{1}{24}\cdot\frac{2}{3}(f(0) + 4f(2) + 2f(4) + 4f(6) + \ldots)$, odpovídající pozorováním v dvouhodinových intervalech. Jestliže se čísla $\frac{1}{24}\mathfrak{S}$, $\frac{1}{24}\mathfrak{S}'$ v mezích pozorovacích chyb sobě rovnají, dá se očekávat, že další zjemnění časového intervalu (tj. častější pozorování) by už nemělo podstatného vlivu na číslo získané Simpsonovou metodou a tedy považujeme číslo $\frac{1}{24}\mathfrak{S}$ za postačující náhradu čísla τ. Kdyby tomu tak nebylo, konali bychom raději častější pozorování.